Interacción electromagnética. Campo eléctrico: Campos eléctricos de distribuciones no puntuales de carga

Este viejo refrán nos viene al pelo para introducir el tema que vas a estudiar a continuación.

Después de los dos temas anteriores ya debes tener una idea bastante clara de qué es un campo eléctrico. Has visto imágenes y vídeos en los que se muestran efectos de campos eléctricos creados por diferentes cuerpos cargados (globos, un jersey, varillas de vidrio, pequeñas esferas). Tal vez te hayas preguntado por qué, si todos esos cuerpos son extensos, solo has estudiado matemáticamente el campo eléctrico creado por una **carga puntual** (o un conjunto finito y pequeño de cargas puntuales).

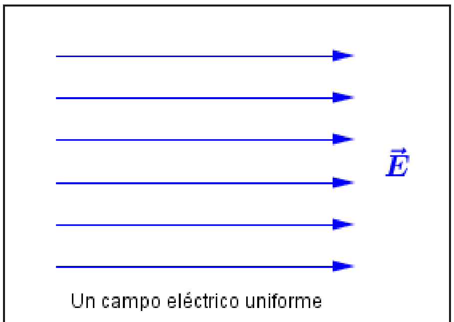


Imagen en INTEF de Javier López bajo licencia CC

Aunque estrictamente hablando **las cargas puntuales no existen**, son una **idealización útil** por varias razones:

- En primer lugar, hay objetos cargados tan pequeños que pueden ser considerados puntuales sin temor a cometer errores significativos. Piensa, por ejemplo, en protones, electrones o iones.
- Por otro lado, los campos eléctricos creados por cuerpos extensos son similares al creado por una carga puntual, siempre y cuando los *mires* desde una distancia suficientemente grande.
- Por último, el tratamiento matemático de los campos creados por cargas puntuales es... sencillo, como habrás comprobado.

Sin embargo, no todos los campos eléctricos son como el creado por una carga puntual; no todos decrecen con el cuadrado de la distancia ni tienen simetría radial. Por ejemplo, el campo que ves en la imagen es un campo uniforme, tiene el mismo valor en todos los puntos. Este campo no puede ser creado por una carga puntual, pero hay **distribuciones de carga** que crean campos de este tipo (por cierto, campos muy útiles en la tecnología actual).

En este tema vas a aprender **campos eléctricos creados por algunas distribuciones de carga**. El problema es, en general, difícil de resolver, pero cuando el cuerpo posee un elevado grado de simetría, un teorema matemático te facilitará enormemente las cosas. Se trata del **teorema de Gauss**, y es el que vas a aprender y a aplicar en este tema.

Antes de meterte de lleno en el teorema de Gauss y su aplicación, es necesario que conozcas una nueva magnitud física relacionada con los campos. Te estamos hablando del concepto de **flujo de campo a través de una superficie**. Es un concepto muy intuitivo y de gran utilidad, sobre todo para la unidad siguiente, cuando estudies el campo magnético.

1. Flujo

¿Qué te sugiere la palabra "flujo"?


Fotografía en pixabay bajo dominio público

Es probable que al pensar en "flujo" se te vengan a la mente ideas como "fluido", "fluir", "pasar a través de algo"... y cosas por el estilo. A veces escuchamos o leemos expresiones como "el flujo de capitales", "los flujos de población", "el flujo del agua", o similares. Con expresiones de este tipo nos estamos refiriendo a que los capitales (el dinero) o la población (las personas) o el agua... se están moviendo de un lado a otro, por ejemplo, a través de una frontera entre dos países o por un río o tubería si hablamos del agua ¿verdad? Si ese flujo es grande, quiere decir que se está moviendo mucho dinero o mucha población o mucha agua.

Pues... el flujo de campo eléctrico es algo similar. Es una manera de cuantificar, de medir, **cuánto campo eléctrico pasa a través de una superficie**. Vamos a empezar por presentarte la definición de flujo de campo eléctrico a través de una superficie. Parece un concepto difícil, pero no te preocupes por que en realidad no lo es. Seguro que a medida que vayas avanzando en el apartado lo entenderás perfectamente.

Importante

El **flujo de campo eléctrico a través de una superficie...**

nos da una idea del número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie perpendicularmente

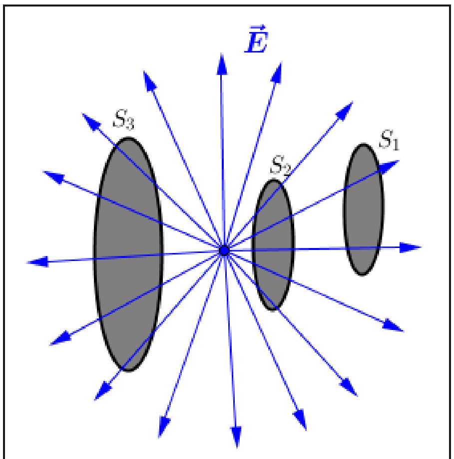


Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC

¿De qué dependerá el valor del flujo eléctrico a través de una superficie? La imagen de la izquierda te puede ir dando ideas...

Si lo que el flujo pretende medir es el número de líneas de campo que atraviesan una superficie, lo lógico es pensar que debe ser mayor cuanto mayor sea la superficie y cuantas más líneas de campo haya ¿no crees?

El primer factor, el área de la superficie, es evidente. Observa como por la superficie S_3 pasan más líneas de campo que por la superficie S_1... simplemente por que la superficie es mayor, tiene más área.

El segundo factor depende de la intensidad del campo. Recuerda que las líneas de campo se dibujan de modo que su densidad sea proporcional a la intensidad del campo. Esto significa que cuanto más juntas estén las líneas de campo, mayor será la intensidad de éste. Por esto, aunque las superficies S_1 y S_2 son iguales (tienen la misma área), el flujo a través de S_2 es mayor que a través de S_1.

De manera que, en una primera aproximación, el flujo eléctrico a través de una superficie (ϕ) debe ser proporcional tanto a la intensidad de campo en dicha superficie (E) como al área de la misma (S). Matemáticamente lo expresaríamos como:

$$\phi = E \cdot S$$

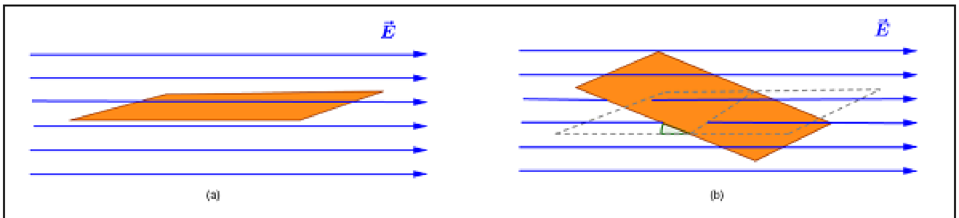
Por cierto, las unidades del flujo eléctrico deberán ser, en el S.I., $\mathbf{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-1}}$. Pero también es muy frecuente expresarlo en **V·m**, voltios multiplicado por metro (El voltio es la unidad de potencial eléctrico, un concepto que estudiarás en el próximo tema)

Pero... ¿Así de fácil? ¿No dependerá de algo más?...

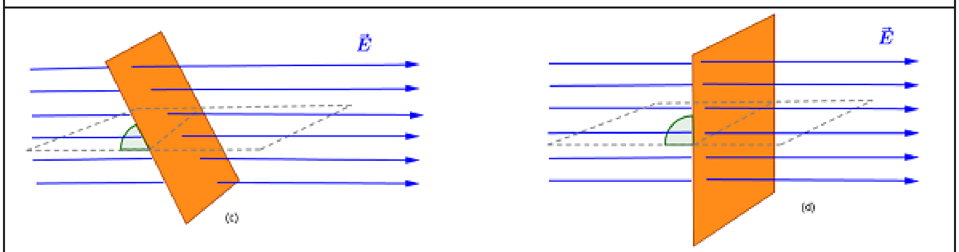
Reflexiona

Para investigarlo vas a analizar las siguientes imágenes. En ellas puedes ver un campo eléctrico uniforme, representado por sus líneas de campo, así como una superficie (rectangular) que está situada en dicho campo y que está orientada de diferente forma en cada imagen.

Se trata de que pienses cuántas lineas de campo atraviesan perpendicularmente la superficie en cada caso...



Ilustraciones en INTEF, de Javier López, con licencia CC



Ilustraciones en INTEF, de Javier López, con licencia CC

Mostrar retroalimentación

Puedes practicar un poco con la siguiente animación. Debes tener instalado el CDF Player, un reproductor gratuito, que puedes descargar desde el enlace.

Puedes ir modificando los valores tanto de la intensidad de campo como del área de la superficie y del ángulo que forman campo y superficie, e ir viendo cómo varía el flujo eléctrico. También puedes rotar la imagen y controlar la rotación, haciendo clic en cualquier punto de la misma y manteniendo el botón del ratón pulsado.

¿Para qué ángulo, en radianes, el flujo resulta ser máximo? ¿Y cero? ¿Y mínimo?

Electric Flux from the Wolfram Demonstrations Project by Anoop Naravaram, bajo CC

Comprueba lo aprendido

¿De qué depende el flujo de un campo a través de una superficie?

- De la intensidad del campo y del área de la superficie.
- De la intensidad del campo, el área de la superficie y la orientación del vector campo respecto de la superficie.
- Exclusivamente de la intensidad del campo.

1.1. Vector superficie

Cuando en Física algo, alguna magnitud, depende de la orientación relativa de dos cosas... eso *huele* a vectores. Y es que informar sobre eso, sobre la orientación de una magnitud, es algo consustancial de los vectores que usamos en la Física, es decir, que está en su esencia es innato.

En este caso ya se te ha presentado una de las *flechitas* implicadas, el vector intensidad de campo eléctrico ¿Cuál será el otro? ¿Cómo representamos una superficie por medio de un vector?

Pues para eso hay que hacer algo; hay que definir el llamado vector superficie. Algo puedes sospechar ya sobre él, puesto que aparece en la animación anterior ¿Lo has visto? Gira cuando gira la superficie y su módulo crece y decrece cuando hacemos el área más grande o más pequeña.

Importante

El **vector superficie** es un segmento orientado cuyo módulo es el área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la misma.

¿Y cuál es su sentido?... Aunque la definición te suene un poco *chapucera*, lo más claro es decir que su sentido es hacia afuera, es decir, hacia la parte convexa de la superficie.

Cuando la superficie es plana, el vector superficie es el mismo en todos los puntos (mismo módulo, dirección y sentido). En este caso el sentido del vector superficie no viene determinado por la convexidad de la superficie, obviamente.

Cuando la superficie es curva, el vector superficie es diferente en cada punto, puesto que en cada punto la perpendicular a la superficie tiene una dirección diferente. Y ahora... sí que se entiende lo de "hacia afuera".

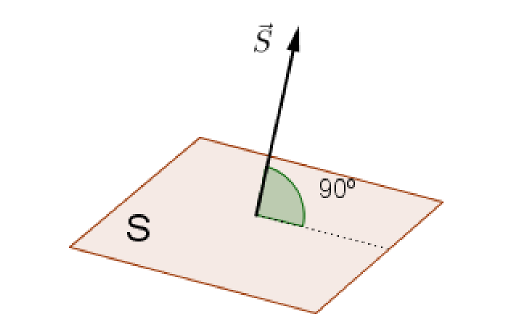
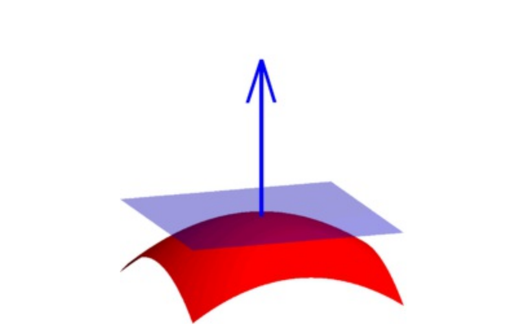
	

Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC	Ilustración en Wikimedia Commons de Oleg Alexandrov de dominio público

1.2. Flujo a través de una superficie

A fuego lento y... ya casi está el flujo cocinado, pues ya sabes los vectores que necesitas. Ahora sólo te falta incorporar el último ingrediente: el ángulo... y mezclarlo todo adecuadamente, para rematar la faena.

El ángulo influye; eso está claro. Pero ¿cómo?...

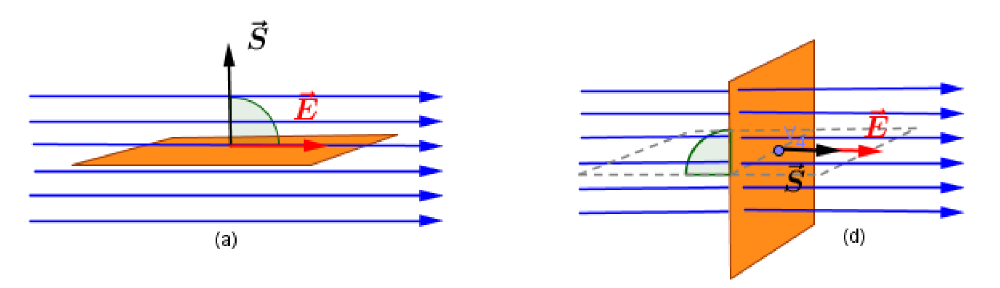


Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC

Fíjate que cuando la superficie es paralela al campo, o dicho de otro modo, cuando el vector superficie es perpendicular al campo... el flujo debe ser cero. Sería la situación mostrada en (a).

Pero cuando la superficie es perpendicular al campo, o dicho de otro modo, cuando el vector superficie es paralelo al campo... el flujo debe ser máximo. Corresponde a la situación de la derecha.

¿Se te ocurre alguna magnitud, relacionada con un ángulo, que valga cero cuando el ángulo sea de 90º y que valga 1 cuando el ángulo sea de 0º? Seguro que sí; seguro que has pensado... ¡En el coseno de un ángulo!

Y, por supuesto, has acertado. Además, el coseno de un ángulo decrece a medida que el ángulo crece desde 0º hasta 90º, lo que nos viene de maravilla, pues el flujo eléctrico a través de una superficie también decrece de ese modo a medida que el ángulo formado entre $\vec{E}$ y $\vec{S}$ lo hace.

Por lo tanto, ya tenemos una expresión para el flujo del campo eléctrico a través de una superficie:

$$\phi = E \cdot S \cdot \cos\alpha$$

¿Y no te suena esta expresión? ¿Cómo andas de Matemáticas? ¡Claro que te suena! Se trata de la expresión que nos permite calcular el **producto escalar de los vectores** $\vec{E}$ **y** $\vec{S}$. Por lo tanto...

$$\boxed{\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}}$$

El resultado del producto escalar de dos vectores no es un vector, sino un escalar, un número. No sólo se puede calcular como has visto aquí (a partir de los módulos de los vectores y del ángulo que forman) sino que también puede calcularse a partir de las coordenadas de los vectores. No te vendría mal repasar un poco el producto escalar de dos vectores. Puedes encontrar información en la materia de Matemáticas II. Entra en este enlace y mírate el apartado 2.1.

Comprueba lo aprendido

¿Qué tipo de magnitud es el flujo de campo eléctrico?

- Una magnitud escalar
- Una magnitud vectorial

1.3. Flujo a través de una superficie cerrada

Estoy seguro de que ya has comprendido perfectamente lo que es el flujo del campo eléctrico a través de una superficie. Incluso sabes calcularlo, y lo has hecho... en algunas situaciones. Pero, desgraciadamente, las cosas no son siempre tan sencillas.

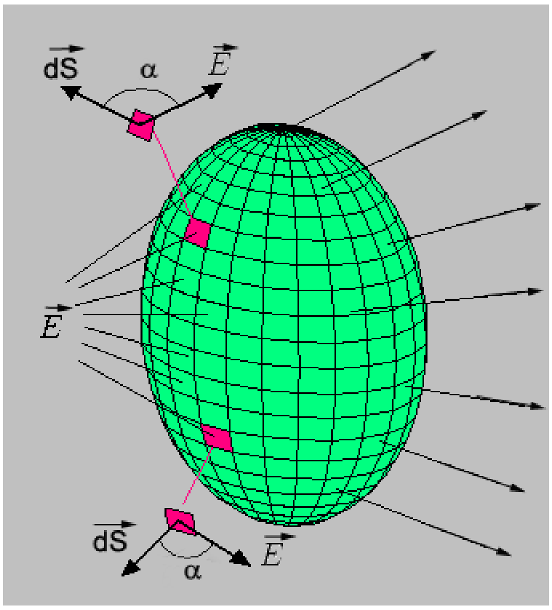
Calcular el flujo con la expresión $\phi = \vec{E} \cdot \vec{S}$ es solo posible si se cumplen tres condiciones:

- El módulo del vector intensidad de campo es el mismo en todos los puntos de la superficie (Fíjate que siempre has hecho los cálculos considerando un campo uniforme).
- La superficie es plana y su área fácil de calcular.
- El ángulo que forman los vectores $\vec{E}$ y $\vec{S}$ es el mismo en todos los puntos de la superficie.

Pero claro... no siempre se darán esas condiciones tan ideales ¿Qué hacer entonces? ¿Cómo calcular el flujo en condiciones cualesquiera? Observa la figura y verás... En ella se ilustra una situación bastante general, en la que una superficie no plana (en este caso un elipsoide) está inmersa en un campo eléctrico no uniforme (en este caso parece creado por una carga puntual positiva).

Como ves, en cada punto de la superficie el vector campo es diferente, tanto en módulo como en dirección. Lo mismo sucede con el vector superficie y con el ángulo formado entre ambos vectores. La forma de proceder es la siguiente, muy habitual en Física:

Se divide la superficie en pequeños trocitos, a los que se les conoce como elementos infinitesimales, $\vec{dS}$, tan pequeños que puedas considerar que, en cada uno de ellos, el vector campo es constante y también lo es el ángulo formado entre $\vec{E}$ y $\vec{dS}$. En esas condiciones es posible calcular un elemento infinitesimal de flujo, $d\phi$.



Adaptada de la ilustración en Wikimedia Commons
de Chanchocan bajo CC

Una vez calculados los elementos infinitesimales de flujo, tan solo tienes que... sumarlos todos y ¡ya está! Pero claro... ¿cómo de pequeños han de ser los elementos infinitesimales de superficie?... Pues tan pequeños que se puede decir que son planos. En teoría, la cosa funcionará cuando esos elementos infinitesimales se reduzcan a un punto, lo que significa que se deben sumar infinitos elementos infinitesimales de flujo.

Puede darte la impresión que no avanzas mucho y que el problema sigue siendo igual de complicado...

Pero no es así. Afortunadamente, de nuevo llega en tu ayuda el séptimo de caballería, el regimiento matemático. Esa suma de infinitos elementos infinitesimales de flujo no es sino una integral; en concreto una integral de superficie. Y, así, has llegado a la definición más general del flujo:

Importante

El **flujo de campo eléctrico a través de una superficie** se puede expresar matemáticamente como

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$$

Esta integral es, en general, poco amigable. Sin embargo, si se cumplen determinadas condiciones, es muy fácil de resolver. Estas condiciones no son, ni más ni menos, que las enumeradas al principio de este apartado, es decir:

1. Que el módulo del vector intensidad de campo sea el mismo en todos los puntos de la superficie S.
2. Que el ángulo que forman los vectores $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ sea también el mismo en todos los puntos de la superficie S.

Si se cumplen estas dos condiciones, la integral se reduce al caso más sencillo:

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \int_S E \cdot dS \cdot \cos\alpha = E cos\alpha \int_S dS = ES cos\alpha$$

Este es el caso que se empleará en los siguientes apartados del tema, en los que, ahora sí, conocerás el teorema de Gauss y verás su utilidad para calcular campos eléctricos creados por diferentes distribuciones de carga.

Pero antes de pasar al teorema de Gauss, te recomiendo que no dejes de ver el siguiente vídeo. Te servirá para repasar y entender mejor lo que has visto en este apartado.

2. Teorema de Gauss

Nuestro amigo Gauss (Carl Friedrich Gauss), es considerado "el príncipe de los matemáticos", el matemático más grande desde la antigüedad.

Imagen en Wikimedia Commons, de Gottlieb Biermann A. Wittmann (foto) bajo dominio público

Entre sus muchas contribuciones a la Matemática, a la Física le interesan, en particular, sus estudios sobre los campos vectoriales. Uno de los resultados de ese estudio se plasma en el teorema de la divergencia, cuya aplicación a la teoría de campos es lo que solemos conocer como teorema de Gauss.

Aplicado al campo eléctrico, el teorema de Gauss relaciona el flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada, con la carga neta encerrada por dicha superficie. El teorema dice así...

El flujo de campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta encerrada por la misma

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

Expresión en la que, por sencillez, se supone que el sistema se encuentra en el vacío (ε_0) y donde q_{int} representa a la carga neta encerrada por la superficie cerrada S.

Es un teorema fácil de comprender, como verás si prestas atención a las siguientes imágenes. En ellas se muestra una carga puntual y el campo eléctrico creado por ella, junto con una superficie cerrada (bueno, en realidad, un corte de una superficie cerrada:

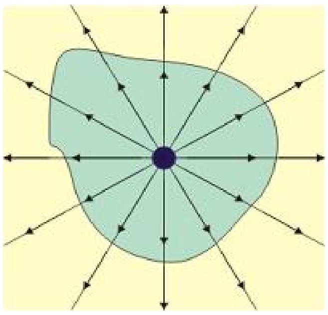
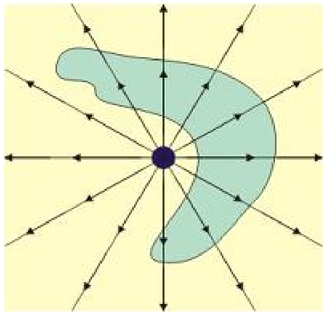
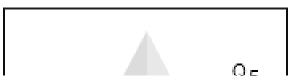
	

Ilustración en Wikimedia Commons de Gonfer, bajo CC	Ilustración en Wikimedia Commons de Gonfer, bajo CC
En la imagen de arriba , puedes ver que la carga puntual está situada en el interior de la superficie. Todas las líneas de campo atraviesan la superficie en el mismo sentido, hacia afuera. Hay un flujo de campo positivo a través de la superficie cerrada.	En la imagen superior, la carga puntual está fuera de la superficie. En esta ocasión, todas las líneas de campo que entran en la superficie cerrada... vuelven a salir de ella. El flujo de campo a través de la superficie cerrada es nulo.

Antes de pasar a los siguientes apartados, en los que vas a ver para qué nos sirve el teorema de Gauss, te recomiendo que veas este vídeo. Te servirá para repasar y afianzar lo que has aprendido sobre el teorema de Gauss.

Ejercicio resuelto



¿Cuál será el flujo de campo eléctrico a través de la pirámide de la figura?

Q_1 = -5 μC

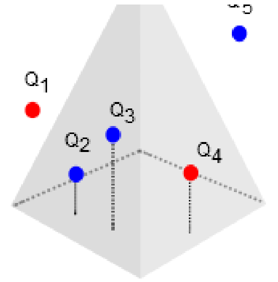


Imagen en WIKIMEDIA COMMONS de FJGAR bajo licencia CC

$Q_2 = 3\ \mu C$

$Q_3 = 6\ \mu C$

$Q_4 = -2\ \mu C$

$Q_5 = 8\ \mu C$

Mostrar retroalimentación

2.1. Campo eléctrico de una carga puntual

Puede que aún no te creas que el teorema de Gauss es un herramienta muy útil para calcular campos eléctricos... No te culpo, pues como ya has leído en el apartado 1.3 del tema, el flujo no siempre es fácil de calcular; hacer la integral que aparece en el teorema de Gauss puede tener su complicación.

Pero si se dan las condiciones que se mencionan en ese apartado... la cosa cambia. Para mostrarte la potencia de este teorema, vas a aplicarlo para calcular el campo eléctrico creado por una carga puntual. Recuerda que su expresión ya ha sido establecida en el tema anterior, de manera que podrás comprobar que, en efecto, el teorema de Gauss... ¡Funciona!

El *truco* está en saber elegir bien la superficie sobre la que tenemos que hacer la integral, la superficie cerrada a través de la cual podamos calcular el flujo de una forma sencilla. A la misma se le conoce como **superficie gaussiana.**

La clave para elegir la **superficie gaussiana** es la **simetría de la distribución de carga**. En este caso, como la **carga** es **puntual**, la simetría del campo creado por ella debe ser **esférica** ¿Y qué significa esto de la simetría? Observa la imagen de la derecha y lo comprenderás.

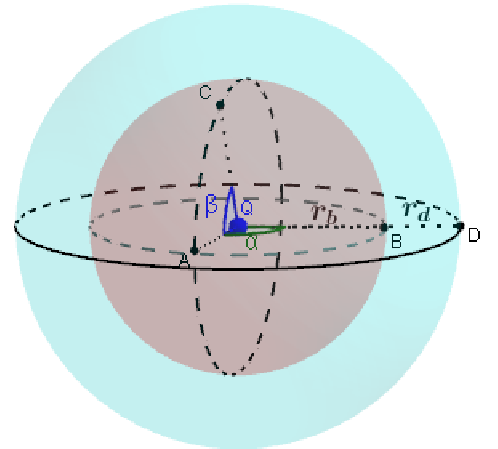


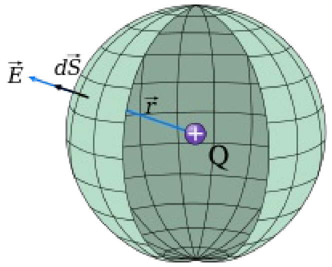
Ilustración en INTEF de Javier López, bajo CC

Imagina que en el Universo solo estáis la carga puntual y tú. Tú estás mirando fijamente a la carga... ¿Serías capaz de distinguir si la estás mirando desde el punto A o desde el punto B? La respuesta está clara: No. Tampoco podrías distinguir si la miras desde el punto A o el C. Sin embargo, sí podrías distinguir si la estás mirando desde cualquiera de ellos (A, B, C) o desde el punto D.

Esto es la simetría, esférica en este caso. La carga "se ve" del mismo modo siempre que la mires desde la misma distancia. Todos los puntos "indistinguibles" de antes (A, B, C) están a la misma distancia de la carga (r_b). No así el punto D, que está más lejos y eso... sí lo notarías.

La información que nos ofrece la simetría es vital para lo que se pretende hacer. En este caso, la simetría te está diciendo que el módulo el campo eléctrico creado por la carga no depende de los ángulos α o β, sino tan solo de la distancia a la carga, *r*. Por lo tanto, dada una esfera centrada en la carga, el campo eléctrico tendrá el mismo módulo en todos los puntos de la misma.

¿Y qué dirección y sentido deberá tener el campo? También la simetría permite pensar que la dirección debe ser radial. El sentido vendrá dado por el signo de la carga; si ésta es positiva el sentido será hacia afuera, como en la imagen de la izquierda, y si es negativa será hacia dentro.



Adaptado de ilustración en Wikimedia Commons de Chanchocan , bajo CC

Todas estas consideraciones de simetría (que son más fáciles de entender que de contar) simplifican enormemente los cálculos. La integral se convierte en casi inmediata. ¡Incluso sin saber cuánto vale el campo!... Solo sabiendo la "pinta" que debe tener:

En primer lugar, en todos los puntos de S, $\vec{E}$ y $\vec{dS}$ son paralelos; forman un ángulo de 0º. Por lo tanto...

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{dS} = \oint_S E\cdot dS\cdot\cos 0$$

En segundo lugar, E toma el mismo valor en todos los puntos de S; es constante, lo que te permite "sacarlo" de la integral:

$$\phi = E\cdot\oint_S dS$$

Por último, la integral anterior no es sino el área de la superficie gaussiana

$$\phi = E\cdot S$$

Y como esta superficie es una esfera de radio r, cuya área es $4\pi r^2$, ya tienes el fluyo calculado:

$$\phi = E\cdot 4\pi r^2$$

Como ves, no ha sido difícil calcular el flujo ¿verdad? Ahora es cuando entra en acción el teorema de Gauss, según el cual: $\phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$. De manera que, como la carga interior es justo el valor de la carga puntual, puedes escribir...

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

Y de aquí despejar el módulo del campo eléctrico:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

¿Es o no es la expresión que ya conocías para el campo eléctrico creado por una carga puntual?... ¡Funciona!

Comprueba lo aprendido

¿Cuál es el valor del campo eléctrico en el interior de una esfera cargada superficialmente?

El valor del campo será proporcional a la carga que posea en su interior.

○ Verdadero ○ Falso

2.2. Campo eléctrico creado por un hilo cargado

Ahora que ya ta habrás convencido (supongo) de que el teorema de Gauss funciona y es útil para calcular campos eléctricos, es el momento de meterle mano a distribuciones de carga diferentes. Vas a empezar por calcular el campo eléctrico creado por un hilo recto infinito cargado.

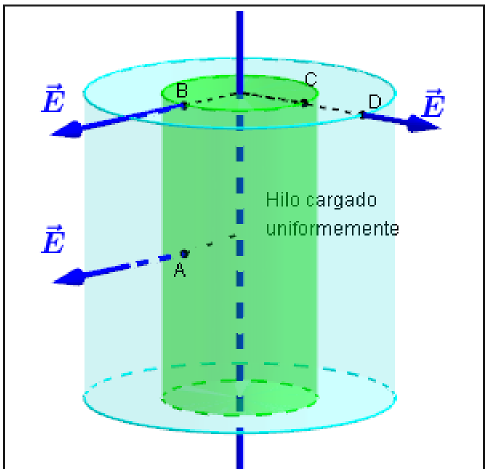


Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC

Evidentemente, esto es una idealización. Un hilo infinito cargado requeriría infinita carga... y eso no existe. Con lo de "infinito" queremos decir que vas a mirar el hilo desde una distancia suficientemente pequeña como para que puedas considerar que no tiene extremos, que no termina.

Esta idealización es necesaria para poder aplicar las consideraciones de simetría necesarias. Aquí la simetría más adecuada es la cilíndrica, como puedes ver en la imagen de la derecha. Desde los puntos A, B o C "se ve" al hilo de la misma forma; no así desde el punto D, que está más alejado del hilo que los otros tres. Esto significa que:

- Por un lado, el campo eléctrico, en cualquier punto, tiene que tener dirección perpendicular al hilo cargado.
- Por otro lado, el módulo del campo solo puede depender de la distancia al hilo.

Para simplificar es útil suponer que la carga está distribuida por igual por todo el hilo, es decir, que está cargado con una densidad lineal de carga uniforme ρ_l . El campo eléctrico creado por esta distribución de carga es de la forma:

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho_l}{r}\cdot\vec{u}_r$$

Es decir, se trata de un campo de dirección radial en cada punto y cuyo módulo, al contrario de lo que sucede con el de una carga puntual, no decrece con el cuadrado de la distancia, r^2, sino con la distancia, r.

Para saber más

Te he dicho que ibas a hacer el cálculo del campo anterior como aplicación del teorema de Gauss. Sin embargo, me he limitado a poner la solución, sin más explicaciones. Y es que, en realidad, sobrepasa un poco los objetivos de este curso el que sepas hacer el cálculo.

Sin embargo, aquí lo tienes, más o menos simplificado, para que compruebes que... tampoco es tan difícil. También te servirá como modelo, pues la forma de aplicar el teorema de Gauss es similar en todos los casos. Usa los botones de control para iniciar, avanzar o retroceder en la animación.

2.3. Campo eléctrico creado por un plano cargado

Interesante ¿no? Ya conoces un nuevo campo eléctrico y has visto que no todos decrecen con el cuadrado de la distancia. Pero en este apartado vas a cononcer otro nuevo, y seguro que te sorprenderá.

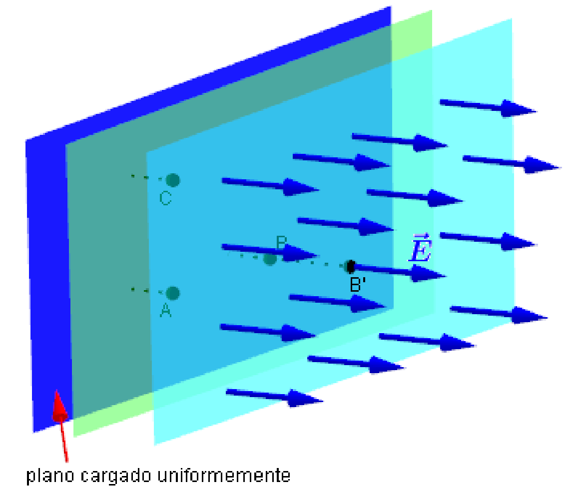


Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC

En este caso, la fuente del campo, el objeto que crea el campo, va a ser un plano infinito cargado con una densidad superficial de carga uniforme σ_S, es decir, con una carga por metro cuadrado constante. De nuevo, utilizarás una idealización; en realidad, bastará con que se "mire" al plano desde un punto lo bastante cercano como para poder despreciar los efectos de los bordes.

Un sistema como este tiene un elevado grado de simetría:

- Por un lado, se "ve" lo mismo desde cualquier punto, siempre y cuando no se cambie la distancia. Por ejemplo, no se podría distinguir si se observa desde los puntos A, B o C. Por lo tanto, el módulo del campo eléctrico que creará dependerá solamente de la distancia al plano cargado.
- Desde el lugar opuesto, se "contempla" lo mismo, es decir, es una moneda con las dos caras iguales.
- Por último, el campo eléctrico que cree deberá ser, en todo punto, perpendicular al plano.

Teniendo en cuenta estas simetrías, la aplicación del teorema de Gauss te llevaría en este caso a un resultado un tanto sorprendente.

El campo creado tiene la forma:

$$\vec{E} = \frac{\sigma_s}{2\varepsilon_0}\vec{u}_r$$

¿Y qué tiene de sorprendente?... ¡Pues que es **uniforme**! ¡No depende de la distancia al plano! (Eso sí, sin olvidar que debes estar lo suficientemente cerca como para poder considerarlo infinito).

Para saber más

Como en el apartado anterior, te dejo aquí los detalles del cálculo. Si los revisas, te ayudará a comprender mejor el resultado. Usa los botones de control para iniciar, avanzar o retroceder en la animación.

2.4. Campo eléctrico en un condensador

Imagen en Wikipedia de Willtron bajo CC

El resultado obtenido en el apartado anterior es realmente interesante. Sirve de base para la fabricación de unos dispositivos muy utilizados en los circuitos electrónicos: el **condensador**.

En su versión más simple, un condensador es un par de placas planas paralelas cargadas con la misma carga pero de diferente signo.

Aplicando lo visto en el apartado anterior, el campo creado por cada una de las placas, por separado, será el mostrado en las siguientes figuras:

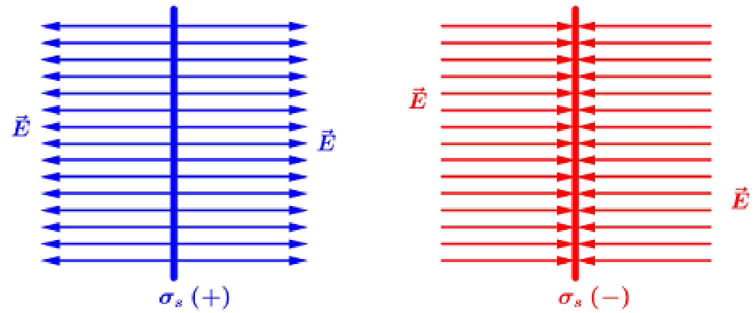


Ilustración en INTEF de Javier López, bajo CC

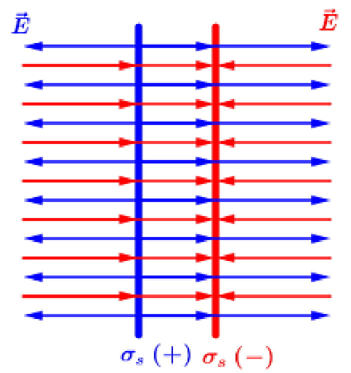


Ilustración en INTEF de Javier López, bajo CC

La placa con carga positiva creará un campo "hacia afuera", mientras que la placa con carga negativa lo creará "hacia adentro". En cuanto a módulo, los dos campos serán iguales:

$$E = \frac{\sigma_s}{2\varepsilon_0}$$

Si las dos placas se aproximan, manteniéndose paralelas, hasta una distancia pequeña en comparación con las dimensiones de las propias placas, el campo resultante de la suma de los campos creados por cada una de ellas dependerá de la región en la que te fijes.

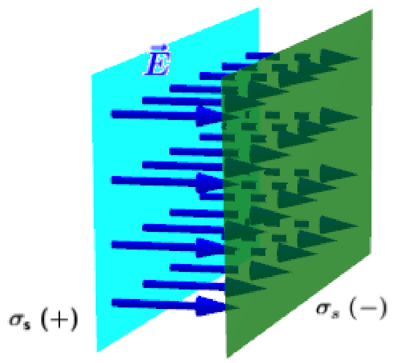


Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC

En el espacio que hay entre las placas, los campos creados por ambas tienen la misma dirección y sentido. Por lo tanto, entre las placas del condensador el campo eléctrico será uniforme, perpendicular a las placas, dirigido desde la placa positiva a la negativa y con un módulo de

$$E = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$$

Sin embargo, en el espacio exterior a las placas, los campos creados por ambas son del mismo módulo y dirección, pero de sentidos contrarios. Por lo tanto, en este espacio el campo eléctrico será nulo.

Resumiendo: Un condensador crea un campo eléctrico uniforme entre sus placas.

2.5. El campo gravitatorio no se salva

Ni el campo gravitatorio ni ningún otro campo de fuerzas se salvan de los efectos de las habilidades de nuestro amigo Gauss, pues su teorema es general para el calculo vectorial. Faltaría menos, toma formas diferentes según a qué tipo de campo vectorial se aplique.

Imagen en Wikimedia Commons, de Lsmpascal bajo CC

¿Te acuerdas bien del campo gravitatorio? Si aplicas el teorema al mismo, podrías decir que el flujo del mismo a través de una superficie cerrada es proporcional a la masa encerrada por dicha superficie.

Escrito en términos matemáticos, como no podría ser de otra forma, toma la siguiente forma:

$$\oint_S \vec{g}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi G\cdot m_{int}$$

Donde G es la constante de gravitación universal y m_{int} es la masa que queda encerrada dentro de la superficie cerrada S. El resto de magnitudes... no necesitan explicación.

Si aplicas el teorema de Gauss para calcular el campo gravitatorio creado por una esfera en un punto exterior a la misma, podrás comprobar que, en efecto, el campo obtenido es el mismo que el que crearía una masa puntual situada en el centro de la esfera.

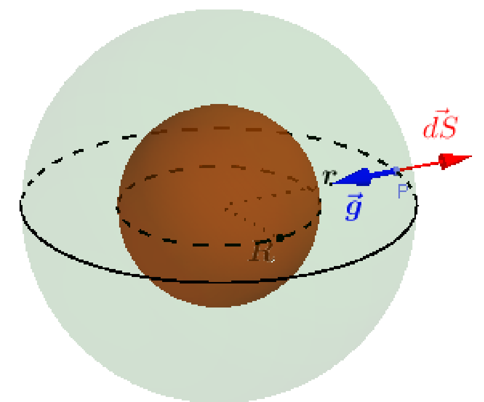


Ilustración en INTEF de Javier López bajo CC

El cálculo es fácil. Imagina que tienes un planeta de radio R y masa M. Vas a calcular el campo gravitatorio que crea en el punto P, exterior al planeta. Para ello eliges como superficie gaussiana una esfera de radio r, que contiene al punto P.

Puedes observar que la integral que aparece en el teorema de Gauss es inmediata, dado que en todos los puntos de la esfera de radio r, el campo gravitatorio debe tener el mismo módulo (por la simetría del sistema) y, además, en todos los puntos de la superficie gaussiana, los vectores $\vec{g}$ y $\overrightarrow{dS}$ tienen la misma dirección y sentido contrario. Por lo tanto...

$$\oint_S \vec{g}\cdot\overrightarrow{dS} = \oint_S g\cdot dS\cdot\cos 180^\circ = -g\oint_S dS = -g\cdot S = -g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2$$

Si aplicas ahora el teorema de Gauss...

$$\oint_S \vec{g}\cdot\overrightarrow{dS} = -4\pi G\cdot m_{int} \Rightarrow -g\cdot 4\cdot\pi\cdot r^2 = -4\pi G\cdot m_{int} \Rightarrow g\cdot r^2 = G\cdot m_{int}$$

Y si ahora tienes en cuenta que $m_{int} = M$ (pues el planeta está completamente encerrado en la superficie gaussiana) puedes despejar fácilmente el módulo del campo gravitatorio:

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Es por esta razón por lo que en la unidad dedicada al campo gravitatorio podías usar (alegremente) la misma expresión del campo tanto para el creado por una masa puntual como para el creado por un planeta.

Para saber más

¿Te has preguntado alguna vez cómo será el campo gravitatorio dentro de un planeta? ¿Seguirá siendo igual al que crearía una masa puntual situada en el centro del planeta?

Si así fuera, ten en cuenta que, justo en el centro del planeta, la intensidad del campo gravitatorio sería infinita ¿no? Puesto que en ese punto r = 0. Esto de los "infinitos" no es algo que nos guste mucho a los físicos... Si te pica la curiosidad, mira qué sucede al aplicar el teorema de Gauss para hacer el cálculo que te comentamos...

Como puedes comprobar, el campo dentro del planeta es muy diferente del que existe fuera. Dentro del planeta el campo no decrece con el cuadrado de la distancia al centro, sino que crece desde su valor mínimo (cero) en el centro del planeta, hasta su valor máximo, en la superficie del mismo.