– Μάθημα 13ο: Ανάλυση ΙΙ: Δεύτ. Παρουσίαση: <u>Θεώρημα Krein-Milman</u>

▷ <u>Ορισμός</u>: Έστω X διανυσματικός χώρος και $C \subseteq X$ κυρτό. Ένα σημείο $x \in C$ καλείται <u>ακραίο</u> αν $\forall \lambda \in [0,1], \forall y, z \in C: x = \lambda y + (1-\lambda) z \Rightarrow x = y = z$

Με $Ext(C)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακραίων σημείων του C

– <u>Θεώρημα Krein-Milman</u>: Αν X είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και $\emptyset \neq C \subseteq X$ είναι κυρτό και συμπαγές. Τότε ~~$Ext(C) = C$~~. $\overline{conv(Ext(C))} = C$.

• <u>Απόδειξη</u>:

▷ <u>Ορισμός</u>: Έστω X διανυσματικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq B$ κυρτό. Το A καλείται <u>ακραίο υποσύνολο του B</u> αν $\forall \lambda \in [0,1], \forall y, z \in B: \lambda y + (1-\lambda) z \in A \Rightarrow y, z \in A$.

– <u>Παρατήρηση</u>: x ακραίο σημείο του $C \Leftrightarrow \{x\}$ ακραίο υποσύνολο του C

▷ <u>Λήμμα</u>: Έστω X διανυσματικός χώρος και $\emptyset \neq C_1 \subseteq C_2 \subseteq X$ κυρτά και $x \in C_1$. Αν το x είναι ακραίο σημείο του C_2 τότε είναι και ακραίο σημείο του C_1.

– <u>Απόδειξη</u>: Προφανές από ορισμό.

▷ <u>Λήμμα</u>: Έστω X διανυσματικός χώρος και $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq C$ κυρτά. Αν το B είναι ακραίο υποσύνολο του C και το A είναι ακραίο υποσύνολο του B, τότε το A είναι ακραίο υποσύνολο του C.

– Έστω $\lambda \in [0,1]$ και $y, z \in C$ ώστε: $\lambda y + (1-\lambda) z \in A \subseteq B$ και B ακραίο $\subseteq C$ και άρα $y, z \in B$. Άλλά τότε: $\lambda y + (1-\lambda) z \in A$ και $y, z \in B$ και το A είναι ακραίο $\subseteq B$ και άρα: $y, z \in A$.

▷ <u>Λήμμα</u>: Έστω X τοπολογικός δ.χ και $C \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό, $f: X \to \mathbb{R}$ κυρτή και συνεχής. Θέτουμε: $M = \max\{f(x) : x \in C\}$ και έστω $F = \{x \in C : f(x) = M\}$. Τότε $F \subseteq C$ συμπαγές και ακραίο.

– Αρχικά παρατηρούμε ότι το $F \subseteq C$ είναι κλειστό $\overset{\varepsilon C}{\text{γιατί}}$: $F = f^{-1}(\{M\}) \cap C$ και άρα συμπαγές. Έστω τώρα $y, z \in C$ και $\lambda \in [0,1]$: τ.ω: $\lambda y + (1-\lambda) z \in F$. Ας υποθέσουμε προς άτοπον ότι είτε $y \notin F$ είτε $z \notin F$. Τότε $\lambda \in (0,1)$.

Αν $y \notin F \iff f(y) < M$ και άρα: $f(\lambda y + (1-\lambda) z) \overset{\text{f κυρτή}}{\leq} \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) < M$ και άρα: $\lambda y + (1-\lambda) z \notin F$ το οποίο είναι άτοπο. Όμοια δουλεύουμε αν $z \notin F$.

▷ Ορισμός: Μια οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ καλείται ότι έχει την ιδιότητα των πεπερασμένων τομών αν $\forall J \subseteq I$ πεπερασμένο και μη κενό: $\bigcap_{i \in J} A_i \neq \emptyset$.

▷ Λήμμα: Ένας τοπολογικός χώρος X είναι συμπαγής $\iff$ κάθε οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ κλειστών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα πεπερασμένων τομών ικανοποιεί: $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

– Απόδειξη: [$\Rightarrow$]: Έστω [redacted] $(A_i)_{i \in I}$ με την ιδιότητα του λήμματος και θέτουμε $U_i = X \setminus A_i$, $\forall i \in I$ και τότε: $U_i \subseteq X$ ανοιχτό, $\forall i \in I$. Έστω προς άτοπον ότι: $\bigcap_{i \in I} A_i = \{\emptyset$ και τότε έχουμε ότι: $\{U_i\}_{i \in I}$ είναι ανοιχτό κάλυμμα του συνόλου X. Τότε όμως υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα του X έστω: $X = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \Rightarrow A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} = \emptyset$, άτοπο.

[$\Leftarrow$]: Ανάλογα

Πόρισμα: Έστω X τοπολογικός χώρος και $\langle K_i : i \in I \rangle$ οικογένεια συμπαγών υποσυνόλων του X με την ιδιότητα της πεπερασμένης τομής, [redacted] $\overset{\text{τότε}}{:}$ $\bigcap_{i \in I} K_i = \emptyset$.

– Λήμμα: Έστω X τ.κ.τ.δ.χ, $\emptyset \neq C \subseteq X$ συμπαγές και κυρτό, $\emptyset \neq F \subseteq C$ κλειστό, ακραίο $\subseteq C$. Τότε: $\exists x \in F$ ακραίο σημείο του C

<u>Απόδειξη</u>: $\mathbb{P} = \{K \subseteq F :$ κλειστό και ακραίο $\subseteq C\}$ και ορίζουμε $K_1 \leq K_2 \iff K_1 \subseteq K_2$. Τότε παρατηρούμε ότι: $\mathbb{P} \neq \emptyset$ αφού: $F \in \mathbb{P}$. Έστω τώρα και $(K_i)_{i\in I}$ μια αλυσίδα στο $\mathbb{P}$. Τότε: $\forall i,j \in I$: είτε $K_i \subseteq K_j$ είτε $K_j \subseteq K_i \Rightarrow \{K_i\}_{i\in I}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Αφού τώρα κάθε K_i είναι συμπαγές $\Rightarrow$ $\bigcap_{i\in I} K_i = K \neq \emptyset$ και συμπαγές (κλειστό μάλιστα). Επίσης: $\forall y,z \in C$, $\forall \lambda \in [0,1]$:

$$\lambda y + (1-\lambda) z \in K \iff \lambda y+(1-\lambda)z \in K_i, \forall i \in I \xRightarrow[\text{αφού } K_i \in \mathbb{P}]{K_i:\text{ ακραίο}} y,z \in K_i, \forall i\in I \Rightarrow y,z \in \bigcap_{i\in I} K_i = K$$

και άρα το K είναι ακραίο $\subseteq C$. Επομένως: $K \in \mathbb{P}$ και $K \subseteq K_i$, $\forall i \in I$ και άρα το K είναι κάτω φράγμα της αλυσίδας $(K_i)_{i\in I}$. Από το λήμμα του Zorn έπεται ότι υπάρχει $K \in \mathbb{P}$ ελαχιστικό σύνολο. Ισχυριζόμαστε ότι: $K = \{x\}$ = μονοσύνολο. Αν όχι, προς άτοπον, τότε υπάρχουν $x_1 \neq x_2$ με $x_1, x_2 \in K$. Αφού τώρα ο X είναι τοπικά κυρτός τ.δ.χ έπεται ότι υπάρχει: $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής και γραμμική με $f(x_1) < f(x_2)$. (2ο ΘΔΘ). Τώρα αν θέσουμε: $M = \sup_{x\in K} f(x)$ και $K' = \{x \in K : f(x) = M\}$ τότε από λήμμα: $K' \subseteq K$ κλειστό, μη κενό, ακραίο $\subseteq K$ και $K' \subsetneq K$ γιατί: $x_2 \notin K'$ αλλά: $x_2 \in K$. Από λήμμα τώρα έχουμε ότι: $K \subseteq C$: ακραίο και $K' \subseteq K$ ακραίο $\Rightarrow K' \subseteq C$ ακραίο και άρα: $K' \in \mathbb{P}$ και $K' \subsetneq K$ το οποίο είναι άτοπο αφού το K είναι ελαχιστικό. Άρα: $K = \{x\}$ έπεται ότι: $x \in Ext(C) \cap F$, και άρα έχουμε το ζητούμενο.

- Απόδειξη (Krein-Milman): Αφού $C \subseteq C$ ακραίο και κλειστό, από προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $Ext(C) \neq \emptyset$. Τώρα θέτουμε $C' = \overline{conv}(ext(C))$. Τότε $C' \subseteq C$. Ας υποθέσουμε προς άτοπον ότι: $C' \subsetneq C$ και άρα ότι υπάρχει $x_0 \in C$ με $x_0 \notin C'$. Από δε Θεμελιώδες Διαχωριστικό Θεώρημα έπεται ότι υπάρχει $f: X \to \mathbb{R}$ γραμμική και συνεχής με $\sup_{y \in C'} f(y) < f(x_0)$. Θέτουμε τώρα: $M = \max_{z \in C} f(z)$ και έστω $F = \{x \in C : f(x) = M\}$. Τότε από το λήμμα έχουμε ότι $F \subseteq C$ μη κενό, κλειστό και ακραίο του C και επιπλέον έχουμε ότι: $F \cap C' = \emptyset$ γιατί $\sup_{y \in C'} f(y) < f(x_0) \leq M$. Από προηγούμενο όμως λήμμα: $\emptyset \neq F \cap ext(C) \subseteq F \cap C' = \emptyset$ γιατί $C' \supseteq ext(C)$

▷ Πόρισμα: Αν X είναι ένας χώρος Banach τότε: $\overline{conv(ext(B_{X^*}))}^{w^*} = B_{X^*}$:

- Απόδειξη: Αρχικά ο (X^*, w^*) είναι τ.κ.τ.δ.χ και άρα από Θεώρημα Alaoglu έπεται ότι: (B_{X^*}, w^*) είναι συμπαγές και κυρτό, και από Krein-Milman έχουμε το ζητούμενο.

▷ Ερώτηση: Τι γίνεται με την B_X; Έχει ακραία σημεία;

- Παρατήρηση: 1) $ext(B_{c_0}) = \emptyset$. Ειδικότερα $\nexists X$ χώρος Banach ώστε: $c_0 = X^*$

- Πράγματι έστω $x = (a_n) \in B_{c_0}$ (δηλαδή: $|a_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $a_n \to 0$). Έστω τώρα $n_0 \in \mathbb{N}$: $|a_{n_0}| \leq \frac{1}{4}$ αφού $a_n \to 0$. Ορίζουμε $(b_n), (\gamma_n) \in B_{c_0}$ με: $b_n = \gamma_n = a_n$, $\forall n \neq n_0$ και $b_{n_0} = a_{n_0} + \frac{1}{2}$ και $\gamma_{n_0} = a_{n_0} - \frac{1}{2}$. Τότε έχουμε ότι: $(b_n), (\gamma_n) \in B_{c_0}$ προφανώς

$$\text{και} \quad x = (a_n) = \frac{(b_n) + (\gamma_n)}{2} \quad \text{και άρα: } Ext(B_{c_0}) = \emptyset$$

2. $Ext(B_{C[0,1]}) = \{-1,1\}$. Ειδικότερα δεν υπάρχει X χώρος Banach ώστε: $X^* = C[0,1]$

– Αρχικά παρατηρούμε ότι $1,-1$ είναι ακραία σημεία γιατί αν $f,g \in B_{C[0,1]}$ και $\lambda \in [0,1]$ τ.ω: $\lambda f(t) + (1-\lambda) g(t) = 1, \ \forall t \in [0,1] \Rightarrow f(t) = g(t) = 1, \ \forall t \in [0,1]$ και άρα το 1 είναι. Τώρα έστω: $f \in B_{C[0,1]}$ με $f \neq 1,-1 \iff \exists \, t_0 \in [0,1]$: $|f(t_0)| < 1-\varepsilon$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Επομένως έχουμε ότι υπάρχει $\emptyset \neq I \subseteq (0,1)$ ανοικτό διάστημα με $|f(t)| < 1-\varepsilon, \ \forall t \in I$. Επιλέγουμε: $h:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $supp(h) \subseteq I$ και $\|h\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$. Ορίζουμε τότε: $g = f+h$ και $z = f-h$. Τότε: $g, z \in B_{C[0,1]}$ και $f = \frac{g+z}{2}$ και άρα η f δεν είναι ακραία στο [redacted] $B_{C[0,1]}$.