SUPERFICIES MÍNIMAS Y REGLADAS.

AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA

Curso 2020/2021

MÁSTER UNIVERSITARIO EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO

ESPECIALIDAD MATEMÁTICAS

Presentado por: Dª María Pastor Pérez de Lis

Dirigido por: Alberto Lastra Sedano

Índice

Resumen

En este trabajo abordo el tema de las superficies mínimas y regladas desde un punto de vista geométrico, visual y práctico.

Este tema no forma parte del contenido curricular y, por lo tanto, estaría enmarcado dentro de una asignatura de Ampliación de Matemáticas. Es una buena oportunidad para tratar de salir de la forma de enseñanza más tradicional y poder explorar otras vías. Empezar generando interés con un contenido práctico y cotidiano para posteriormente adentrarnos en la parte matemática, al contrario de como habitualmente se enseña la asignatura.

El objetivo fundamental es relacionar los contenidos teóricos más abstractos con una aplicación práctica directa, visual y cercana a través de dos vías fundamentales: la observación de las superficies a estudiar en la Arquitectura y el modelaje de dichas superficies tanto física como digitalmente a través de herramientas de diseño 3D y diferentes experimentos.

Las matemáticas son más que números.

Abstract

In this project I address the issue of minimal and ruled surfaces from a geometric, visual and practical point of view.

This topic is not included inside the curricular content and, therefore, would be framed within a subject of Mathematics Extension. It is a good opportunity to try to get away from traditional teaching and to explore other avenues. We begin by generating interest with a practical and daily content to later delve into the mathematical part, contrary to how the subject is usually taught.

The fundamental objective is to show the relations between abstract theoretical contents and the visual and direct practical applications through two fundamental routes: the observation of the surfaces to be studied in Architecture and the modeling of those surfaces, both physically and digitally through 3D design tools and different experiments.

Maths are more than just numbers.

Introducción

El tema que voy a tratar es el de las superficies mínimas, las regladas y las doblemente regladas y la forma de introducir dichas nociones mediante actividades lúdicas y extracurriculares a estudiantes de Educación Secundaria.

Estos conceptos no están incluidos en los programas actuales, pero se pueden abordar de una forma amena y cercana que permita que los estudiantes puedan interesarse por ellos y, de este modo, conseguir que se interesen por las Matemáticas. En este sentido, podrían incluirse los temarios de ampliación de Matemáticas o en las actividades propuestas en los círculos matemáticos.

Para comenzar, voy a realizar un primer acercamiento a estos tipos de superficies en general, atendiendo a su formación matemática y geométrica.

Después me adentraré en el aspecto práctico. ¿Cuántas veces preguntan los alumnos para qué sirven las matemáticas? Estos conceptos son un ejemplo claro de una aplicación real de las matemáticas de la mano de la Arquitectura, como el caso del hypar de Félix Candela, las escuelas de Gaudí o el estadio olímpico de Múnich de Frei Otto.

En la parte de investigación personal me centraré en la representación gráfica, matemática y geométrica de los distintos tipos de superficies mínimas, regladas y doblemente regladas y la relación entre ellas. Los modelos físicos tridimensionales son importantes en el proceso del diseño arquitectónico y pueden ayudar a los alumnos a comprender esta aplicación de las matemáticas “en el mundo real”. Además de los modelados 3D utilizaré papel simulando los planos para configurar modelos geométricos, puesto que, como detallaré a continuación, estas superficies se generan a raíz de planos formados por rectas.

Por último, realizaremos un experimento en el que, a partir de unas estructuras caseras y una mezcla de agua, jabón y glicerina, podemos representar y formar las superficies mínimas de ciertos cuerpos geométricos.

Las superficies regladas

¿Qué es una superficie?

Antes de pasar a analizar los distintos tipos de superficies en los que nos vamos a centrar, es necesario empezar por el principio y dejar claro los conceptos más básicos que nos permitirán más adelante comprender mejor los más complejos.

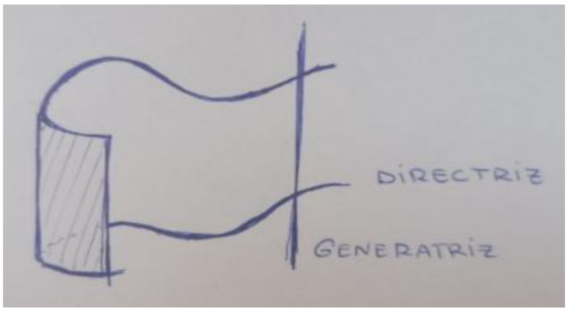
<< ¿Qué es una superficie? >>

Euclides define la superficie como aquello que sólo tiene longitud y anchura.

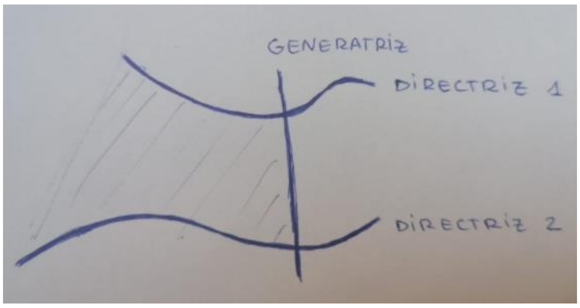
Además de la definición de Euclides, a lo largo de la historia encontramos innumerables definiciones del concepto de superficie adaptadas a las distintas ciencias aplicadas. He elegido el enfoque que, a mi parecer, más se adecua al tema que nos atañe, la aproximación que más se asemeja al punto de vista geométrico y matemático.

Entendemos la superficie como una extensión en la que solo se determinan dos dimensiones, es bidimensional y está compuesta por un conjunto de puntos pertenecientes al espacio euclídeo. Se crea a raíz del desplazamiento de una línea en el espacio, y si este movimiento responde a una cierta ley, se trata entonces de una superficie geométrica.

La superficie es el lugar geométrico de las posiciones que ocupa una línea, deformándose o no, y moviéndose en el espacio siguiendo una ley. Si la generatriz se va apoyando en una curva o en una superficie, dicha curva o superficie, se denomina directriz. Por lo tanto, decimos que las directrices son el recorrido que siguen las generatrices.



Superficie desarrollada por una generatriz y una directriz. Elaboración propia



Superficie desarrollada por una generatriz y dos directrices. Elaboración propia

Un ejemplo de superficies que se generan a partir de una curva que se mueve en el espacio (generatriz), son las superficies de revolución. Las superficies de revolución siguen una trayectoria determinada (directriz).

Digamos que, si movemos la generatriz en la dirección de la directriz, este movimiento realizado por la generatriz forma la superficie dada la traza que va dejando, de este modo resulta ser esta, una superficie curva.

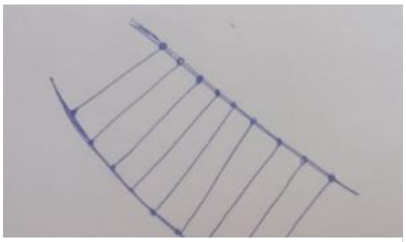
Entre las superficies curvas principales destacan el círculo, la esfera, el cilindro y derivados del círculo, las superficies regladas y las superficies de curvatura doble.

Investigación acerca de las superficies regladas

Ya en el siglo XVII, el físico y matemático Leonhard Euler estudió este tipo de superficies. Según sus estudios, las superficies regladas son un tipo de superficies que se componen de líneas rectas. Dichas superficies posteriormente fueron consideradas por la geometría descriptiva.

A partir de entonces se empezó a plantear su utilidad en el campo de la arquitectura y de la construcción, donde hasta el momento, no había llegado a aparecer ni a estar presentes en los diseños de la época.

Una superficie reglada, geométricamente hablando, es la superficie generada por una recta, a la que denominaremos generatriz, al desplazarse sobre una curva o varias de ellas, a las que denominamos directrices. En otras palabras, se trata de una superficie horizontal plana formada por rectas, que al apoyarse en otra recta formada por directrices y situada en el plano vertical, forman una o varias curvas. De este modo se generan formas curvas a partir de superficies compuestas por rectas.



Ejemplo de superficie reglada.
Elaboración propia

Son, por lo tanto, aquellas superficies que contienen infinitas rectas.

Teniendo en cuenta las características particulares, las propiedades y las condiciones de los elementos que las conforman, las superficies reciben diferentes nombres. Se dividen fundamentalmente en dos grandes familias, las superficies desarrollables y las alabeadas.

Al fijarnos por ejemplo en las directrices encontramos que estas pueden ser curvas, una recta y otra curva o pueden girar alrededor de un eje de revolución. De aquí la división entre superficies desarrollables y alabeadas o no desarrollables.

Las superficies desarrollables pueden extenderse sobre un plano sin que se deforme ninguno de sus elementos. Estas, a su vez, se clasifican en superficies radiadas y poliédricas, esta última compuesta por caras planas (cubo, tetraedro, octaedro), siendo regulares o irregulares. Las radiadas tienen además un centro de rotación, este centro de rotación puede ser propio (cono, pirámide), o impropio (cilindro, prisma)

Clasificación de las superficies regladas

Las superficies de curvatura simple o superficies desarrollables radiadas

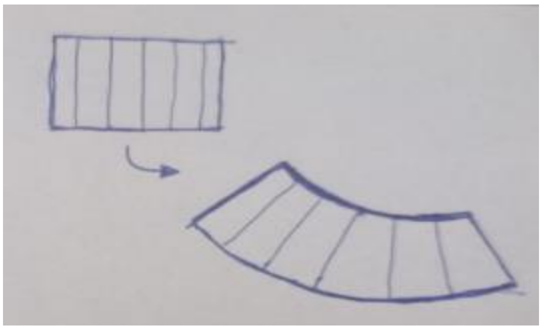
Son las siguientes:

- <u>Superficies cilíndricas</u>

Superficie cilíndrica de revolución
Superficies cilíndricas de no revolución

- <u>Superficies cónicas</u>

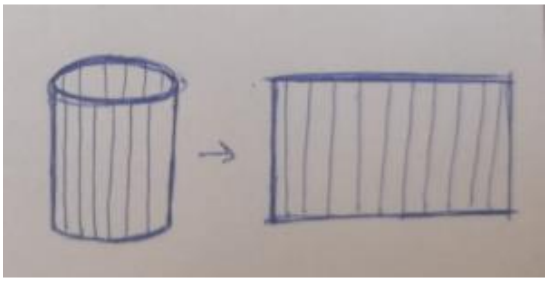
Superficie cónica de revolución
Superficie cónica de no revolución
Las superficies de curvatura simple son las superficies regladas en las que las posiciones adyacentes de la generatriz son coplanarias, es decir, son paralelas o se cortan entre sí y por lo tanto firman parte de un mismo plano.
Las superficies de curvatura simple son superficies desarrollables, es decir, pueden extenderse sobre un plano. Son aquellas superficies que se obtienen doblando un plano de forma curva.



Ejemplo de superficie desarrollable. Elaboración propia

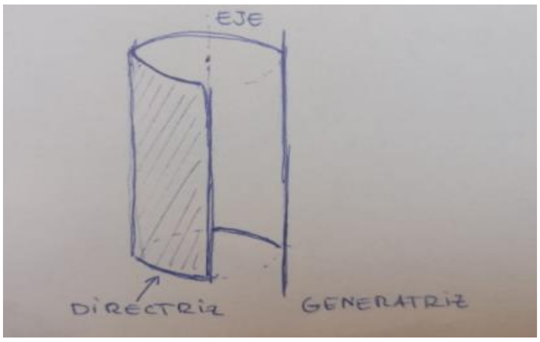
Superficies cilíndricas

Las superficies cilíndricas son aquellas que se generan por el movimiento de una generatriz (g) en torno a una directriz (d) curva. Todas las posiciones en las que se posiciona la generatriz son paralelas entre sí. Existen dos tipos de superficies cilíndricas, las de revolución y las de no revolución.



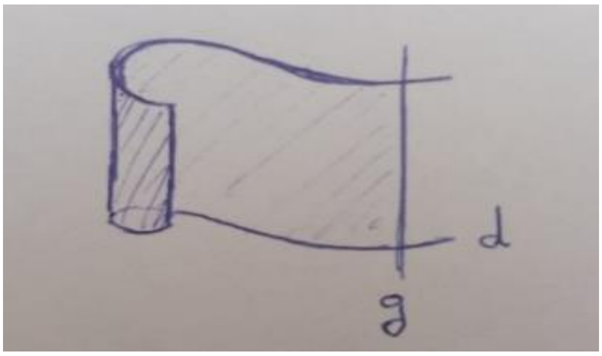
Desarrollo de un cilindro. Elaboración propia

− Superficie cilíndrica de revolución: La superficie cilíndrica de revolución es aquella en la cual todas las posiciones de la generatriz (g) equidistan de un eje (e) que, a su vez, es paralelo a ella y por lo tanto, a todas sus posiciones.



Elementos de un cilindro de revolución. Elaboración propia

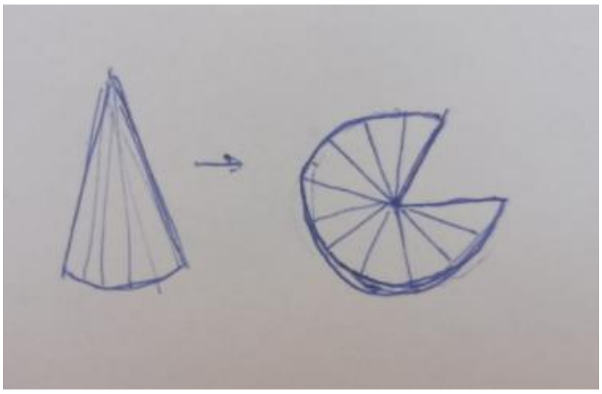
− Superficie cilíndrica de no revolución: La superficie cilíndrica de no revolución es aquella superficie cilíndrica en la que, por su formación, no es posible definir un eje (e) que se encuentre a la misma distancia de todas las posiciones de la generatriz (g).



Ejemplo de superficie cilíndrica de no revolución.
Elaboración propia

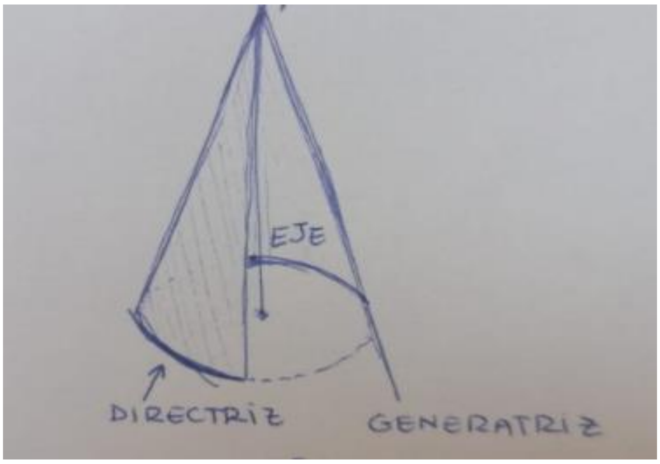
<u>Superficies cónicas</u>

Las superficies cónicas son un tipo de superficies regladas generadas por el movimiento de una generatriz (g), que se mantiene en contacto con una directriz (d) curva. Todas las posiciones de la generatriz (g) tienen un punto común (V), que se denomina vértice. Existen dos tipos de superficies cónicas, al igual que de superficies cilíndricas, las de revolución y las de no revolución.



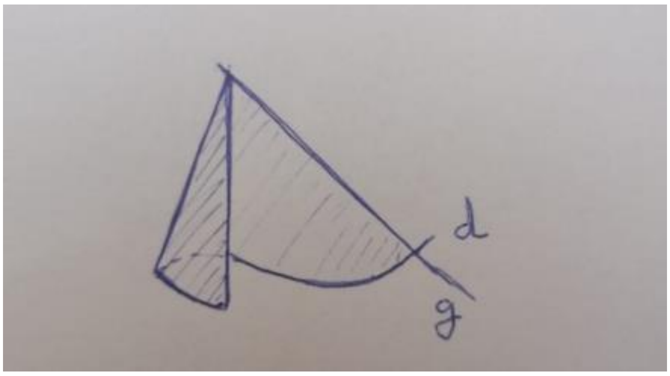
Desarrollo de un cono. Elaboración propia

– Superficie cónica de revolución: La superficie cónica de revolución es la superficie cónica en la cual todas las posiciones de la generatriz (g) tienen en común el mismo punto, el vértice (V). Por este punto pasa también un eje (e) alrededor del cual gira la generatriz manteniendo con él el mismo ángulo en cada una de las posiciones. Podríamos decir, que al igual que ocurría en el caso de la superficie cilíndrica de revolución, esta superficie se forma al hacer girar una generatriz alrededor de una circunferencia. La diferencia entre ambas es que en el caso de las superficies cilíndricas, las generatrices son paralelas, y en el caso de las cónicas, todas las generatrices parten de un mismo punto, el vértice (V), punto desde el cual también parte el eje de la superficie cónica.



Elementos de un cono de revolución. Elaboración propia

− Superficie cónica de no revolución: La superficie cónica de no revolución, es aquella superficie cónica en la cual no es posible definir un eje (e) en torno al que gire la generatriz y que forme el mismo ángulo con todas sus posiciones.



Ejemplo de superficie cilíndrica de no revolución. Elaboración propia

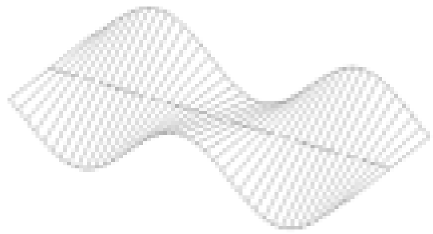
Superficies alabeadas

+ Cilindroide
+ Conoide
+ Helicoide
+ Superficies doblemente regladas
    - Paraboloide hiperbólico
    - Hiperboloide de revolución

Las superficies alabeadas se forman a raíz del movimiento de una línea recta, de tal forma que las dos posiciones adyacentes de esa recta, se cruzan.

Se trata de una superficie reglada no desarrollable, es decir, es un tipo de superficie en la cual dos posiciones sucesivas de la generatriz no son coplanarias, al contrario de lo que ocurría en las superficies cilíndricas y cónicas citadas anteriormente.

Otra característica de las superficies alabeadas es que las generatrices deben apoyarse siempre sobre tres directrices.



Ejemplo de superficie reglada

Hay tres casos posibles.

1. Las generatrices se apoyan sobre tres directrices estando siempre en contacto con ellas.

Si la superficie se construye sobre tres líneas rectas, se genera el hiperboloide elíptico y el de revolución.
También podemos construir curvas alabeadas mediante una curva y dos rectas, sobre dos curvas y una línea recta, como el cuerno de vaca, o compuestas mediante tres líneas curvas.

2. Las generatrices se apoyan en dos directrices y son paralelas a un plano director.

La superficie puede estar generada sobre dos líneas rectas, en este caso se formaría el paraboloide hiperbólico, también puede estar apoyada en una línea recta y una curva formando de este modo el conoide y el helicoide recto o apoyada en dos líneas curvas, generando el cilindroide.

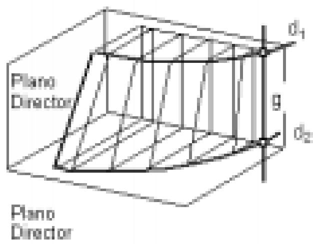
3. Las generatrices se apoyan sobre dos directrices y forma siempre un mismo ángulo con cada uno de los planos.

Pueden estar generadas a raíz de líneas rectas como es el caso del hiperboloide concoideo, pueden estar apoyadas en una curva y una recta generando el helicoide oblicuo o formarse a partir de dos rectas generando de este modo el helicoide oblicuo.

Hay bastantes ejemplos de superficies alabeadas, pero voy a señalar tres de ellas, el cilindroide, el conoide y el helicoide, así como las superficies doblemente regladas.

Cilindroide.

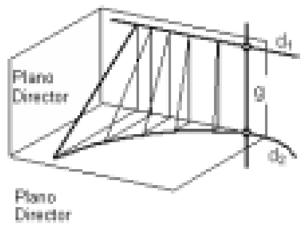
El cilindroide es la superficie alabeada formada por una generatriz (g) que se desplaza de forma paralela a un plano director y se apoya sobre dos curvas llamadas directrices (d_1 y d_2).



Cilindroide. Fuente: Alberto M. Pérez. "Geometría descriptiva".

Conoide

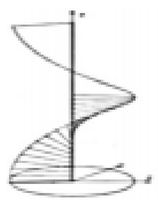
Un conoide es una superficie alabeada formada por una generatriz (g) que se desplaza de forma paralela a un plano director y se apoya sobre dos directrices, siendo una de ellas recta (d_1) y la otra curva (d_2).



Conoide. Fuente: Alberto M. Pérez. "Geometría descriptiva".

Helicoide

El helicoide es una superficie reglada que se genera a partir de una línea recta apoyada en una espiral que gira alrededor de un eje vertical (z).



Helicoide. Fuente: Alberto M. Pérez. "Geometría descriptiva".

Todas las superficies alabeadas son por definición superficies regladas, esto significa que para generarlas siempre es posible partir de una línea recta.

Existen dos tipos de superficies regladas, las superficies regladas simples y las doblemente regladas. En las superficies regladas simples solo existe una recta tangente en cada uno de los puntos de la superficie. Si se puede trazar más de una recta tangente, la superficie a estudiar la denominaremos superficie doblemente reglada. Algunos ejemplos de superficies de doble reglaje son el paraboloide hiperbólico y el hiperboloide de revolución.

Superficies doblemente regladas

En las superficies doblemente regladas, por cada punto de su superficie convergen dos generatrices (g_1 y g_2). Me voy a centrar en dos de estas superficies alabeadas de este tipo, el paraboloide hiperbólico y el hiperboloide de revolución.

Dentro de las superficies regladas alabeadas, vamos a profundizar en las superficies doblemente regladas, son superficies no desarrollables.

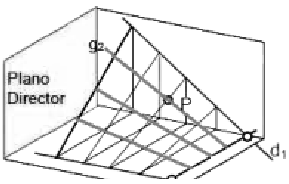
1. Las dos generatrices se cruzan en el infinito al acercarlas. El conjunto de estos puntos en los que las generatrices se cruzan, se denomina línea de estricción.

2. Las generatrices están contenidas por todos los planos tangentes variando en cada uno de sus puntos la posición, de este modo existe por cada generatriz un haz de planos tangentes a ella.

De este modo, las superficies alabeadas regladas, no pueden acoplarse a un plano sin inevitablemente se genere una deformación o incluso una rotura de dicha superficie alabeada.

Paraboloide hiperbólico

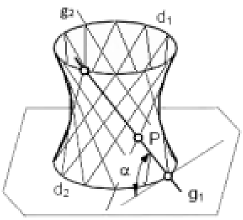
Las generatrices (g_1 y g_2) se desplazan sobre dos directrices rectas que se cruzan (d_1 y d_2) y se mantienen paralelas a los planos directores.



Paraboloide hiperbólico. Fuente: Alberto M. Pérez. "Geometría descriptiva".

Hiperboloide de revolución

Las generatrices (g_1 y g_2) se mueve manteniendo constante el ángulo (α) que forma con las dos directrices (d_1 y d_2). Dichas directrices son circulares y paralelas entre sí.



Hiperboloide de revolución. Fuente: Alberto M. Pérez. "Geometría descriptiva".

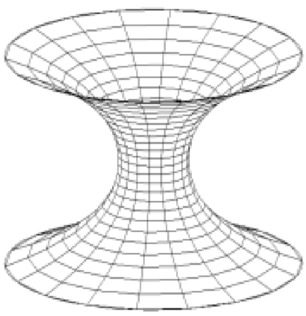
Las superficies mínimas

Se denomina superficies mínimas a aquellas que poseen un área mínima y una curvatura media igual a cero en cada punto. Además, su contorno forma una curva cerrada.

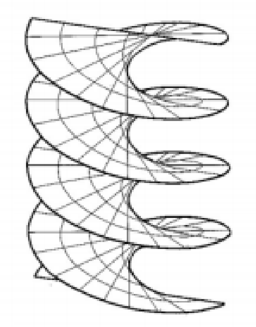
En la actualidad, su desarrollo desempeña un papel relevante en las matemáticas, consiguiéndose grandes avances en dicho campo en los últimos años, algunos de ellos relacionados con los catenoides y helicoides.

Este tipo de superficies han favorecido enormemente la innovación en las estructuras arquitectónicas, dadas sus características favorecen un diseño simple y ligero, en el que resalta la forma estética, por ello estas superficies están íntimamente relacionadas con la arquitectura orgánica.

Las superficies mínimas están relacionadas también con las superficies regladas.



Catenoide

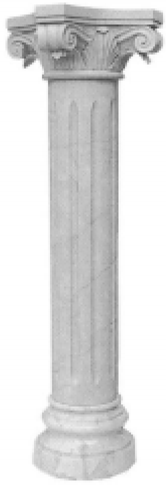


Helicoide

Catenoide y helicoide. Fuente: Alberto M. Pérez. "Geometría descriptiva".

Superficies regladas y mínimas en la arquitectura

Superficies cilíndricas en la arquitectura



El cilindro es una figura muy utilizada en arquitectura. No he encontrado ninguna fuente del todo fiable que afirme que el primer uso serio que se dio al cilindro en la construcción fuera en la Antigua Grecia, pero no obstante yo creo que sí que fue así, puesto que he encontrado ejemplos anteriores de su utilización en arquitectura.

Se conservan nueve textos de Arquímedes, tres de ellos son de carácter geométrico: Sobre la esfera y el cilindro, Sobre Conoides y esferoides y Sobre las espirales.

La aplicación del cilindro en la arquitectura griega fue sobre todo en las columnas, en las que el fuste tiene forma cilíndrica, aunque dichos cilindros no son siempre del todo rectos si no que, en ocasiones, se estrechan en las bases.

Muchos siglos después, el movimiento llamado racionalismo, en el siglo XX, reunió a las personalidades más notables de la arquitectura. Destaca por la simplicidad de las formas y el retorno a los volúmenes elementales como el cubo, la esfera y las superficies que nos ocupan en este trabajo, como el cilindro y el cono. Los arquitectos más remarcables de este movimiento fueron Le Corbusier, Mies van der Rohe y Walter Gropius. En la villa Saboya, por ejemplo, Le Corbusier introduce elementos cilíndricos.

Actualmente se han diseñado "casas cilindro", que son pequeños núcleos habitables para una sola persona ideados únicamente para dormir y que cuentan con algo de luz natural al estar perforado el cilindro en la parte superior.

En la imagen superior, columna griega de estilo jónico. En el centro, la Villa Saboya de Le Corbusier. Abajo, prototipo de casa cilindro

Superficies cónicas en la arquitectura

Si pensamos en los usos típicos de las superficies cónicas en la arquitectura, debemos mirar hacia arriba, hacia las cubiertas. Siempre que hablamos de conos en la arquitectura, viene a la cabeza los tejados de cuento de hadas, castillos de ensueño o cubiertas de algunas iglesias… pero también hay más ejemplos de construcciones formadas por superficies cónicas.
Uno de los ejemplos más significativos lo encontramos en Zacatecas (Méjico) y son Silos de Santa Mónica. Los silos con construcciones cuya finalidad era guardar todo tipo de cereales, una vez cosechados. En España también tenemos ejemplos de silos, pero ninguno con forma cilíndrica como estos ubicados en Méjico y erigidos en el siglo XIX. La construcción se compone de veintidós silos construidos de canto de cantera y barro. En uno de estos silos, durante algún tiempo, vivió el pintor Francisco Goitia. También fueron utilizados como complejo hotelero antes de quedar completamente prohibido el acceso a estas edificaciones.
Otro ejemplo de conos en la arquitectura podemos encontrarlo en la Ciudad de las Artes y las

Ciencias de Valencia o la Catedral de Río de Janeiro, construida con forma de cono truncado. Este como tiene unos 80 metros de altura, y está inspirada en las pirámides mayas de Yucatán en México. La construcción culmina con una bóveda plana y circular rematada con una cruz.

En la imagen superior, los silos de Santa Mónica en Zacatecas (Méjico). A la izquierda la catedral de Río de Janeiro. A la derecha el Museo de las Artes y las Ciencias (Valencia)

Cilindroide y conoide en la arquitectura

Los conoides son utilizados en su gran mayoría para la fabricación y montaje de carpas exteriores tensadas con cables o cuerdas. En la imagen inferior se puede observar una cubierta diseñada para una exposición de automóviles en Cartagena, en la que se instaló la cubierta textil en forma de superficie alabeada no desarrollable, mediante un sistema de tensado de la lona de PVC, y es uno de los ejemplos más famosos de conoides en la arquitectura. Se trata de un conoide de planta dodecagonal con un eje central y 12 mástiles periféricos.

Otro ejemplo muy famoso de conoides en la arquitectura se encuentra en el Forum del Halles en París. El Forum y su particular conoide, pertenecen a un centro comercial situado en la estación de Châtelet-Les Halles, una construcción subterránea diseñada a varios niveles y que supone la estación más grande y concurrida de la capital francesa. Le rodea un jardín de más de cuatro hectáreas, es un punto donde se encuentra un gran número de oficinas públicas y una gran red de servicios suburbanos.

En la imagen superior, la carpa de la exposición de automóviles (Cartagena).
En la imagen inferior El Forum del Halles (París)

Dentro del campo de los conoides también podríamos incluir el sinusoide, en el que el ejemplo más claro son escuelas de Gaudí, una pequeña construcción diseñada por este arquitecto catalán destinado a la enseñanza de los hijos que los albañiles y artesanos que trabajaban en la Sagrada Familia.

Quizás cualquiera después de entrar al recinto de la Sagrada Familia, y habiéndose dejado asombrar por las formas imposibles, por la grandiosidad del edificio y por todo lo que le llena a uno los ojos al verse en frente de semejante obra arquitectónica, no llegue a preciar, muchas veces ni siquiera a ver, estas escuelas, que se trata de un pequeño edificio.

Construido entre 1908 y 1909, que puede fácilmente pasar desapercibido pero que a mí personalmente no me dejó indiferente ninguna de las dos veces que he podido visitarlo en persona. No sabía de su existencia antes de ir allí y quizás por eso me sorprendieron aún más sus formas.

Es un edificio modesto, de una sola planta. El presupuesto era muy reducido, por lo que era necesario resolver el proyecto de la forma más sencilla posible, y en eso reside la grandeza de esta construcción, en conseguir hacer que parezca fácil lo complicado.

Llama la atención por la forma de su cubierta ondulada. La planta es prácticamente rectangular, de doscientos metros cuadrados, diez metros en la parte más corta y veinte en la larga. El espacio es polivalente, puede dividirse en una, dos o tres aulas dependiendo de la situación y de las necesidades. Iluminan la estancia veintiuna ventanas, siete en uno de los alzados más largos, ocho en el opuesto y tres en cada alzado transversal. Todo esto está cubierto por un tejado sinusoidal que voy a pasar a analizar a continuación.

Maqueta de la cubierta de las Escuelas de Gaudí.
Sagrada Familia (Barcelona)

Para entender la forma, es necesario que nos imaginemos que el tejado está compuesto por láminas de madera en sentido transversal al rectángulo de la planta y unidos todos ellos por un soporte fijo dispuesto de manera longitudinal en el centro de las láminas. De esta forma las tablas podrían moverse de la misma forma que lo haría un lápiz al que sujetamos con los dedos en la parte central, hacia arriba y hacia abajo. Una vez imaginado esto, lo que hay que hacer es apoyar las láminas en un muro de alzado ondulado en la parte superior, de tal manera que las láminas vayan subiendo y bajando en altura sucesivamente.
Cabe señalar que, al ser láminas rígidas, si en un extremo se encuentran apoyadas en la parte superior de la onda, en el lado opuesto se encontrará en el punto más bajo. Como si cogiéramos un diábolo, que es una hipérbola, y lo seccionáramos de tal forma que nos quedara una superficie cóncava a un lado y otra convexa al otro. Se crea una superficie reglada. El conjunto tiene forma de sinusoide, y al contrario que en otras ocasiones que lo ha empleado, no ha sido sólo en un elemento aislado si no en global del proyecto.

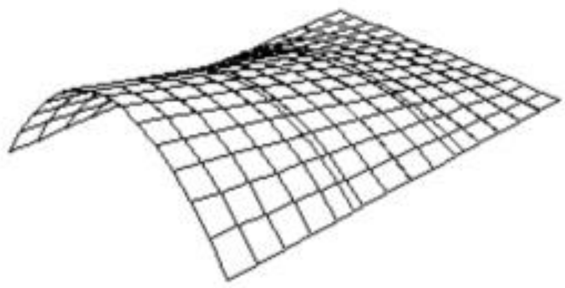
Gaudí es conocido por todo el mundo por su afición y talento para las matemáticas y la geometría descriptiva, y es esto precisamente lo que le hace especial y distinto del resto de los arquitectos. Hace que todo en sus edificios tenga su razón de ser, y que nada esté hecho por casualidad, ni el más mínimo detalle.

Escuelas de Gaudí. Sagrada Familia (Barcelona)

Los materiales empleados en este proyecto son sencillos también, al igual que la forma de este. Los muros de los que está compuesto este edificio están construidos con la misma pieza manual de fábrica de ladrillo. La cubierta ondulada está formada por vigas de madera debidamente tratada para el clima en el que se encuentra, recubierto de cerámica. Por otro lado, cabe reseñar la calidad humana del arquitecto que, teniendo un proyecto del calibre de la Sagrada Familia entre manos, se tomara bastante tiempo para pensar en las necesidades de las personas que le rodeaban y trabajaban con él mano a mano e hiciera no sólo una escuela para los hijos de sus trabajadores y artesanos, sino que además proyectara una pequeña gran obra de arte.

Pese a que no se trate de un edificio especialmente emblemático, ni famoso, el lugar en el que se encuentra, en la misma parcela de la Sagrada Familia sí que lo es, y la maestría con la que Gaudí resuelve un edificio sencillo de una forma nada simple me parece que es algo que sólo un gran arquitecto puede hacer. A mi modo de ver es un arte conseguir que lo complicado parezca fácil.

Entre las superficies regladas, destacan de manera notable los conoides y cilindroides, superficies en las que una de sus tres directrices se convierte en un plano director. En otras palabras, son superficies que se generan a partir de rectas apoyadas en dos directrices y que son paralelas a un plano llamado director. Cuando las dos directrices son curvas, denominamos a esta superficie cilindroide, si una de las directrices es una curva y la otra una recta, se trata de un una de un conoide.



Conoide. Fuente: Ramón J, Zoido Zamora. Curvas y superficies en la arquitectura

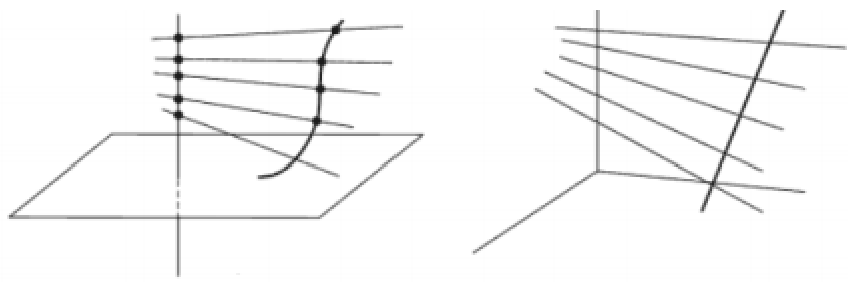
Se trata de unas superficies muy presentes en la arquitectura y también en multitud de útiles de la vida diaria. Una de las aplicaciones más conocidas es la obra de Félix Candela en 1950 en la fábrica Fernández donde aplica fragmentos de conoides rectos formados por una curva y una recta situada en un plano paralelo. No solo se ha utilizado con una intencionalidad estructural en cubiertas o recubrimientos, sino que también aparece con frecuencia en elementos decorativos en el ámbito industrial.

Lo más importante, a mi modo de ver, para entender cómo se forman estas superficies es tener en cuenta que estas superficies no pueden extenderse o desarrollarse, pues no poseen planos paralelos entre sí ni tienen ningún punto en común, es una superficie envolvente formadas por un haz de planos que no comparten dirección ni puntos comunes. Si existiera una familia de planos que compartieran la misma dirección o tuvieran algún punto común, estaríamos ante un cilindro o un cono respectivamente.

No hay que perder de vista, que las superficies alabeadas, regladas o no regladas y no desarrollables nunca pueden convertirse en un plano al ser sometidas a esfuerzos de flexión o tracción, pues antes se romperían. Los cilindroides y conoides entran dentro del grupo de las superficies alabeadas y, por lo tanto, se aplica lo anterior, no es posible convertir dichas superficies en planos sin que se rompan al ser sometidos a ningún esfuerzo.

Representación de la rotura de una superficie alabeada al someterse a esfuerzos de compresión. Fuente: Ramón J, Zoido Zamora. Curvas y superficies en la arquitectura

Hay que tener en cuenta que un conoide es una superficie reglada cuyas generatrices son paralelas a un plano fijo (director), y cortan a una recta fija (eje) que no es paralela al plano y a otra línea (directriz) que puede ser curva o recta.



Representación de superficies regladas con generatrices curvas o rectas

Helicoides en la arquitectura

El uso más común del helicoide es en las escaleras de caracol, que se utilizan por diversos motivos, entre ellos el estético, puesto que son de gran belleza, y el de economizar espacio, dado que ocupan menos en planta que cualquier otro tipo de escalera.

En la imagen de la derecha se puede observar una escalera diseñado por Antonio Gaudí para la Sagrada Familia, y se puede apreciar la gran belleza y elegancia de las formas, similar a un tirabuzón de pelo. No son las únicas escaleras del edificio, y cada una distinta tiene un carácter especial.

Gaudí hace uso del helicoide de una forma estructural en la formación de las columnas del Parque Güell y también en la construcción de las columnas portantes arboladas de la iglesia de la Sagrada Familia.

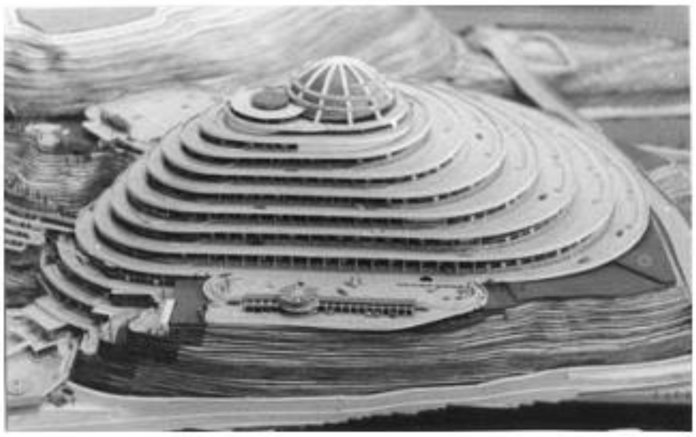
Otro buen ejemplo de helicoides en la arquitectura es el Museo Guggenheim de Nueva York (1956) de Frank Lloyd Wright. La idea en torno a la cual está diseñado el edificio, es la de ofrecer a los visitantes la oportunidad de realizar un recorrido en espiral por el edificio a medida que van observando la colección de arte, todo ello iluminado por un enorme lucernario en la parte superior. Wright nos invita a coronar la parte superior del edificio utilizando el ascensor, para más tarde descender paulatinamente por la rampa, una suave pendiente en forma helicoidal alrededor de la cual se sitúan las obras que van apareciendo ante los ojos del espectador, expuestas a diferentes niveles interconectados entre sí.

En la imagen superior escaleras Sagrada Familia de Gaudí. En la inferior, Museo Guggenheim de Nueva York.

El minarete de la mezquita de Samarra, construida durante el reinado del califa Abbásida al- Mutawakkii (847-861), es también otra aplicación del helicoide en arquitectura. A diferencia de lo habitual, este minarete no es una torre rectangular como las que encontramos en Damasco o Córdoba, derivadas de las construcciones cristianas. Se trata de una torre helicoidal que se apoya sobre un podio cuadrado al que se accede desde una pasarela. La rampa de ascenso tiene 2 m. de ancho y empieza en el centro del lado meridional siguiendo la dirección contraria a las agujas del reloj hasta crear siete plantas de la misma altura. En la cúspide hay una estructura circular con ocho nichos con arco de medio punto. Mide 50 metros de altura.

Minarete de la mezquita de Samarra, reinado del Califa Abbásida Al-Mutawakkii (847-861)

Otro ejemplo más sería el “Helicoide”, que es un edificio de Jorge Romero Gutiérrez, arquitecto venezolano. Se trata de un edificio diseñado como centro comercial, en el que la idea de proyecto es parecida a la del Guggenheim de Frank Lloyd Wright, que acabo de mencionar, se pretende crear un espacio continuo en el que el visitante no tenga que subir o bajar escaleras para continuar paseándose por el edificio. En el caso del Helicoide, Jorge Romero quería con crear una cadena ininterrumpida de locales.



El Helicoide. Arquitecto: Jorge Romero Gutiérrez

En Ciudad de Panamá se encuentra “el tornillo”, edificio construido en 2011, un rascacielos que como su propio nombre indica, tiene forma de tornillo, es decir, helicoidal. Se construyó al frenético ritmo de un piso por día.

Existe muchísimos ejemplos del uso del helicoide, no sólo en la Arquitectura sino también en aplicaciones de ingeniería, mecanismos y engranajes, etc.

El Tornillo. Panamá

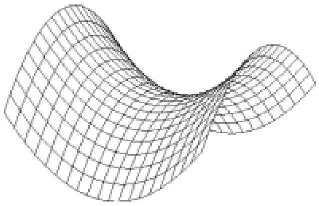
Quería mencionar el diseño de unas farolas de una plaza de mi barrio en Madrid, la Plaza de San Cayetano. Se trata de unas farolas que siguen un crecimiento helicoidal, es decir, que los focos están colocados de tal manera que van creciendo en altura mientras siguen la forma de un helicoide alrededor del soporte de la farola. De esta manera las luces no se estorban unas a otras y se ilumina toda la zona en torno a las farolas, además, se crean distintos efectos lumínicos puesto que al estar a diferentes alturas se forman sombras distintas.

Farolas Plaza de San Cayetano, Madrid

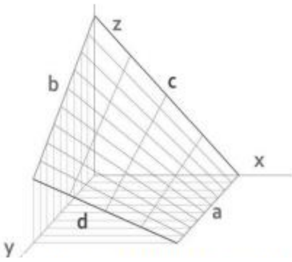
Paraboloide hiperbólico en la arquitectura

El Paraboloide Hiperbólico es también conocido coloquialmente como “silla de montar o paso de montaña” por la similitud física que tiene con estos elementos. Es una superficie cuya sección transversal y longitudinal difieren en que las parábolas que forman en un caso tienen forma cóncava y en el otro convexa. Se trata también de una superficie alabeada

El paraboloide hiperbólico viene determinado por un eje de simetría que corta en un punto del paraboloide llamado vértice y dos planos de simetría que pasan por dicho eje. Los planos perpendiculares al eje cortan al paraboloide en forma de hipérbolas y los paralelos de parábolas.

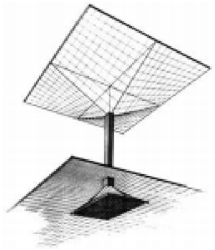


Paraboloide hiperbólico o “silla de montar”



Paraboloide hiperbólico en perspectiva caballera

Para el estudio de los paraboloides hiperbólicos en la arquitectura, me voy a centrar en el Hypar de Félix Candela, que es digamos el pionero en la utilización de esta figura.



Dibujo HYPAR de Félix Candela

Félix Candela se especializó en el desarrollo del paraboloide hiperbólico con la intención de cubrir grandes luces, gracias a las que consiguió cubiertas-cerramiento de hasta 1,5 cm de grosor en la parte más fina. Estas formas geométricas de doble curvatura inversa, similar a una silla de montar, permiten invertir las tensiones internas en tracción y compresión, eliminando los esfuerzos de flexión.

Trabajó con cuatro porciones del paraboloide hiperbólico desarrollando así la forma del llamado "hypar" o "paraguas", elemento estructural por el que fue halagado por toda una generación de arquitectos por su forma absolutamente novedosa. Los hypar son "estructuras de planta triangular que abarca cuatro mantos que se juntan en el centro mediante cuatro rectas inclinadas y una sola columna central donde se aloja la bajada pluvial y, por tanto, una sola zapata de cimentación, construyéndose todo ello a partir de piezas prefabricadas." (Revista Espacios, Méjico 1953 y Student's publication of the School of Design, Raleigh, N.C., U.S.A., 1954).

Con cuatro segmentos de hypar se consigue el paraguas, que admite múltiples combinaciones. Gracias a su simplicidad demostró ser uno de los medios más económicos para cubrir el espacio, compitiendo con los techos industriales más baratos. Cada paraguas se encofra de forma independiente mediante una división en cuatro sectores. Esta fragmentación y repetición de los sectores permite la fabricación en serie y la posibilidad de combinar un número ilimitado de paraguas para construir edificios industriales de distintas dimensiones.

El edificio industrial conocido como High Life Textile Factory, fue construido entre 1954 y 1955 en Ciudad de Méjico, más concretamente en Coyoacán, esta fábrica es un gran ejemplo de la arquitectura e innovaciones estructurales de Félix Candela. Su estructura de paraguas o hypar fue una revolución para la arquitectura de la época. En este edificio concretamente, se utilizan ladrillos transparentes en la cubierta para dotar al espacio de luz natural, otra innovación.

High Life Textile Factory. Ciudad de Méjico.

La forma sencilla de los paraguas combinada de forma magistral con las entradas de luz, crean una atmósfera estéticamente muy sorprendente.

Félix Candela continuó investigando, tratando de encontrar nuevas formas que superaran física y estéticamente a las que ya había ideado. “Existen varias razones por las que la construcción no evoluciona a la velocidad que las otras técnicas: sigue siendo artesanía, y para cada problema obtenemos una solución personal.” (F. Candela, prólogo a la traducción del libro Calcul des Voilesminces en Beton Armé de L. Issenmann Piarski, 1967.)

Hiperboloide de revolución en la arquitectura

La utilización del hiperboloide de revolución alcanza su máximo esplendor de la mano del ingeniero ruso Vladimir Shújov consagrado a la exploración y aplicación de formas orgánicas en la ingeniería. Frank Gehry es el máximo exponente internacional, de esta corriente. Y en España el primero fue Antonio Gaudí en la Sagrada Familia. Otro de los más destacados arquitectos españoles que emplearon estás formas en su desempeño profesional fue Eduardo Torroja Miret (1899-1961) que fue el nº 1 mundial de los años 50 en cuanto a diseño y ejecución de estructuras hiperboloides en hormigón.

La Torres de Shújov que son torres que asombran a quien las contempla, la patente fue conseguida por el ingeniero, Vladimir Shújov en 1896. Vladímir Shújov es conocido por ser uno de los más importantes ingenieros de Europa. Está a la vanguardia junto con Buckminster Fuller, Frei Otto y Frank Gehry en arquitectura de formas orgánicas. Destaca por el empleo del hiperboloide en construcción. La de la imagen se encuentra en Ucrania, en la localidad de Polibino, región Lípetsk.

La emblemática Torre de Kobe (1963) de 108 metros de altura situada en Kobe, Japón, es un fantástico ejemplo de hiperboloide.


A la izquierda, Torre en Polibino (Ucrania). A la derecha, torre en Kobe (Japón)

También lo es la Catedral de Brasilia de Oscar Niemeyer (1959- 1970) con 40 metros de altura y 60 metros de diámetro, es también otro excelente ejemplo.

El Planetario McDowell, Centro de Ciencias de Saint Louis de Gyo Obata (1963) en Missouri es otra muestra.

El puente hiperbólico de Manchester, el Castillo del Agua de Fedala de Eduardo Torroja (1957) en Marruecos, la torre de control del aeropuerto de Barcelona de Bruce Fairbanks (2007), etc.

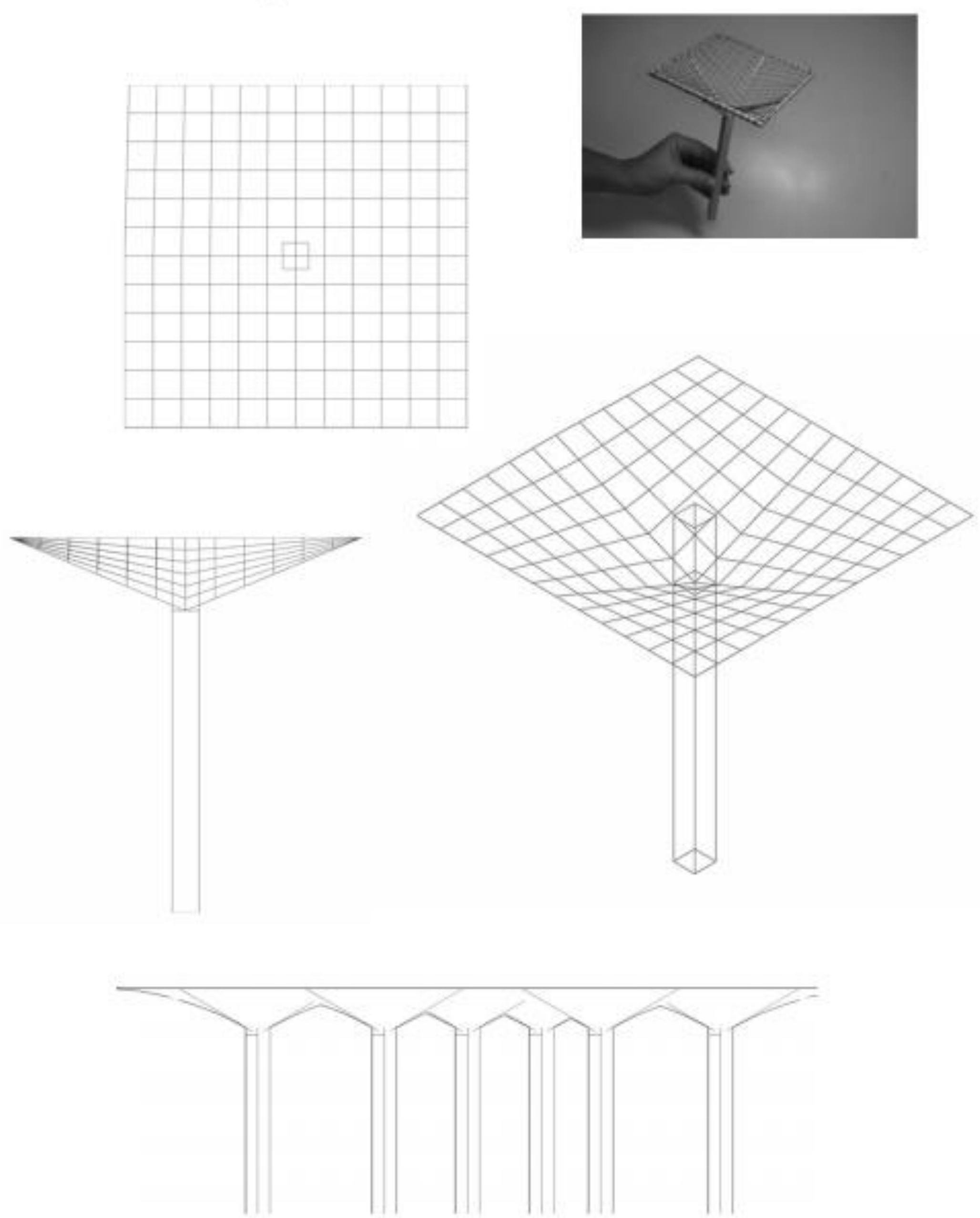

A la izquierda la Catedral de Brasilia de Oscar Niemeyer. A la derecha el puente hiperbólico de Manchester

Fase aplicación práctica

Modelado de superficies regladas. El hypar de Félix Candela

Una vez estudiada la teoría, podría plantearse al alumnado un ejercicio de modelado de superficies mínimas tanto físicamente, como mediante programas de diseño tipo Auto CAD.

En modelado por ordenador planteo la realización del Hypar de Félix Candela por su carácter icónico y representativo dentro de las superficies regladas.



En la imagen superior derecha Hypar de Félix Candela modelado con madera y cuerda. En las imágenes restantes modelado del Hypar por ordenador. Elaboración propia

El jabón y las superficies mínimas

Una vez finalizado el trabajo de documentación acerca de todas las superficies regladas y las superficies mínimas, pasamos a la fase de aplicación práctica en la formación de superficies mínimas.

Enclavado dentro del temario de ampliación de matemáticas, creo necesario trabajar de un modo diferente la asignatura incluyendo no solo contenido teóricos nuevos, si no también metodologías innovadoras.

En este caso, una forma muy curiosa de representar superficies mínimas es mediante alambre, agua, jabón y glicerina.

La explicación física de que con agua y jabón se generen superficies mínimas tiene su origen en la tensión superficial, que es una cualidad que poseen todos los líquidos. La tensión superficial de los líquidos es la tendencia que tienen sus moléculas a juntarse y es la responsable de que las superficies de líquido que está en contacto con el exterior sea la mínima posible y actúa como una membrana tensa con propiedades elásticas.

Un segmento rectilíneo es la línea más corta que une dos puntos, y un arco es la curva más corta que une dos puntos sobre una superficie esférica. La figura plana que tiene menor perímetro para una superficie determinada es el círculo, y de todos los cuerpos que tienen el mismo volumen, el que tiene menos superficie es la esfera.

Para resolver mediante matemáticas los problemas de máximos y mínimos es necesario tener conocimientos de cálculo infinitesimal, contenido que se escapa por mucho del nivel de dificultad que admite la Educación Secundaria, y es por esto mismo que la realización de este experimento no permite acercarnos de una forma sencilla, a este concepto tan complejo.

El objetivo de este trabajo es comprobar que es suficiente utilizar una disolución jabonosa para llegar a una comprobación visual y experimental de problemas como el cálculo de superficies y recorrido mínimos, teorías relativamente modernas para las matemáticas y la física y que aún siguen en constante investigación, pero que aquí están al alcance de estudiantes de la ESO.

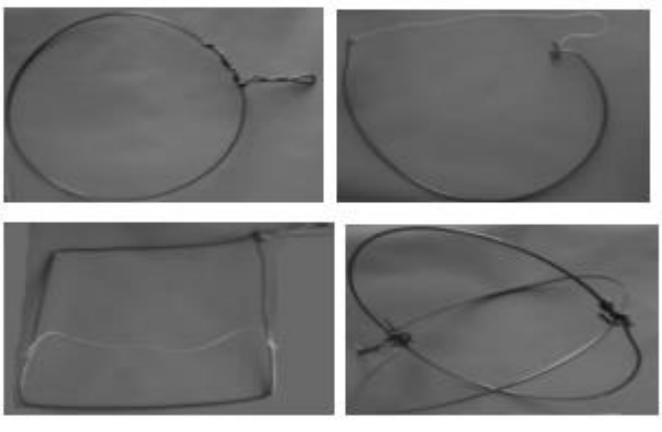
Materiales necesarios:

- Disolución jabonosa compuesta por una mezcla del 50% de agua, 40% de detergente para fregar los platos y un 10% de glicerina.
- Alambre e hilo.
- Pajitas de refresco.
- Dos placas iguales de plástico o metacrilato transparente y tornillos y tuercas

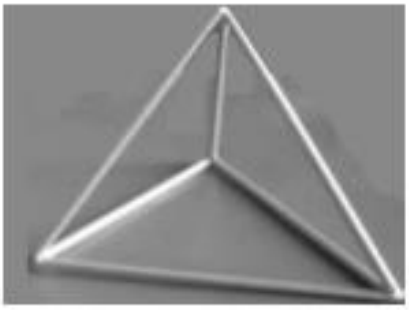
Pasos a seguir. Fabricación de las estructuras

1. Con la ayuda de un taladro se agujerean las placas de metacrilato y se introducen los tornillos y las tuercas.

2. Se hacen estructuras alámbricas de diversas formas, circular, rectangular en forma de arco, dos circunferencias intersecadas, etc. Se ata un hilo en la estructura de modo que tenga cierta holgura.



3. También se pueden construir poliedros fabricados con alambre de mayor o menor grosos. Planteamos construir un tetraedro, un cubo y un octaedro. El tetraedro será la estructura que nos permita hallar el paraboloide hiperbólico.



Experimento de recorridos mínimos

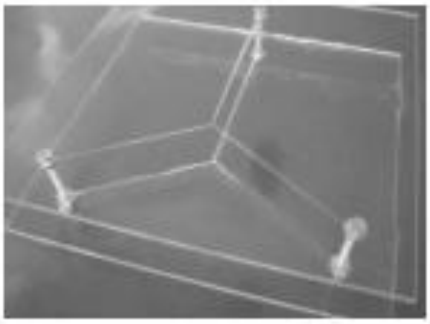
Cálculo del camino más corto entre tres puntos no alineados.

Fermat demostró que existe un punto llamado con él en su honor, punto de Fermat, cuya suma de distancias a los vértices del triángulo es mínima. Los segmentos se unen en el punto de Fermat con los vértices del triángulo forman siempre entre sí 120º. Para resolver este problema de recorridos mínimos hay que introducir las placas con tres tornillos no alineados.

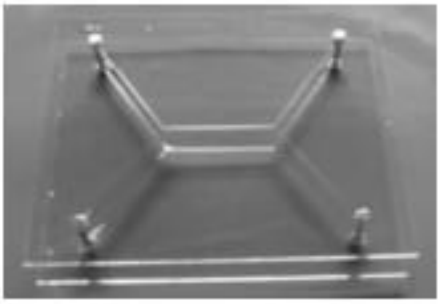
Explicación: Leyes de Plateau.

1. En el caso de que un número amplio de películas de jabón se intersequen, lo harían agrupadas de tres en tres comprendiendo un ángulo de 120º entre sí.
2. Si cuatro de las hojas de jabón se encontraran en un punto, el ángulo comprendido entre cada par de ellas sería de 109º
3. Una lámina de jabón forma un ángulo de 90º cuando puede desplazarse libremente sobre otra.

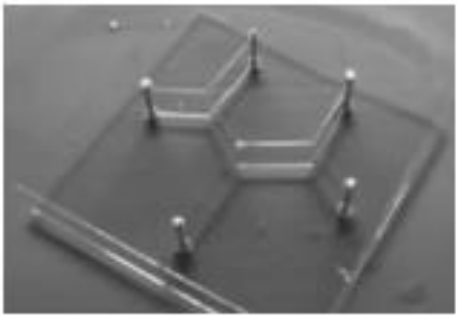
Distancia mínima entre 3 puntos no alineados:



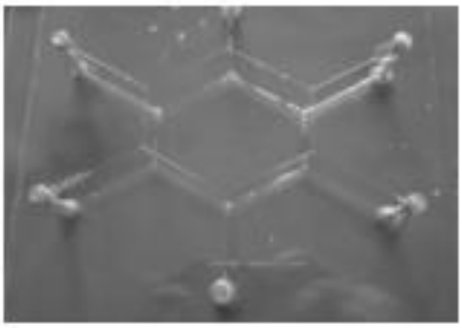
Distancia mínima entre 4 puntos no alineados:



Distancia mínima entre 5 puntos no alineados:

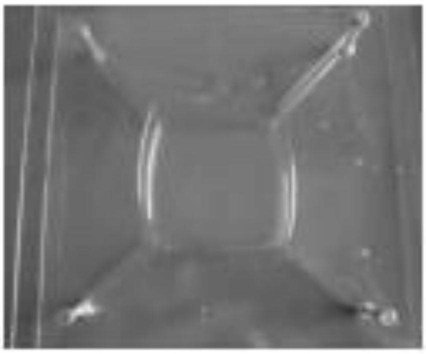


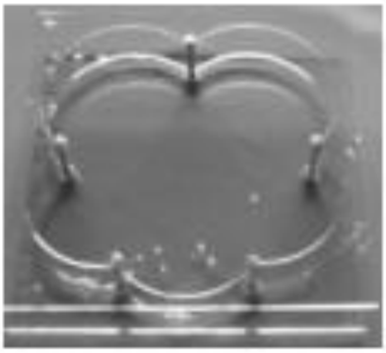
Distancia mínima entre 6 puntos no alineados:

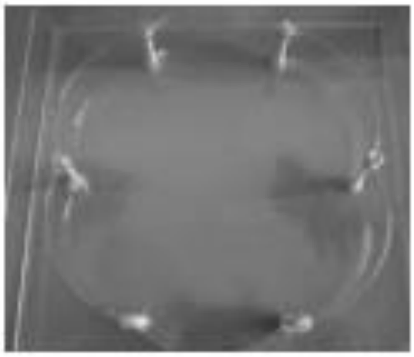


Al soplar en el segmento que une las tres películas de jabón con una pajita se forma un triángulo curvilíneo.

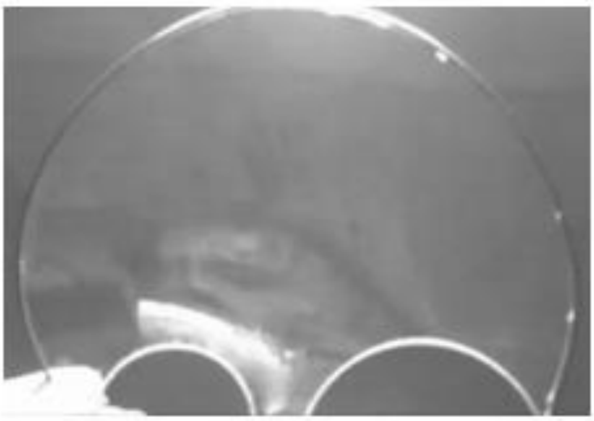
Y lo mismo ocurre con el resto:



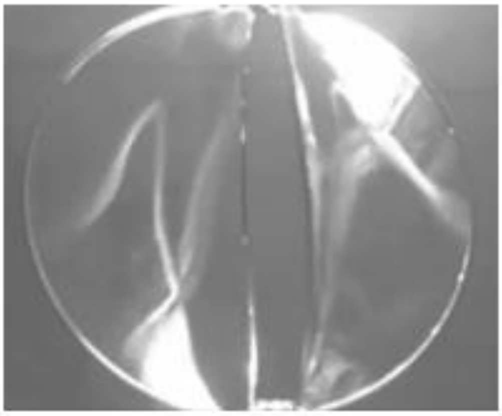




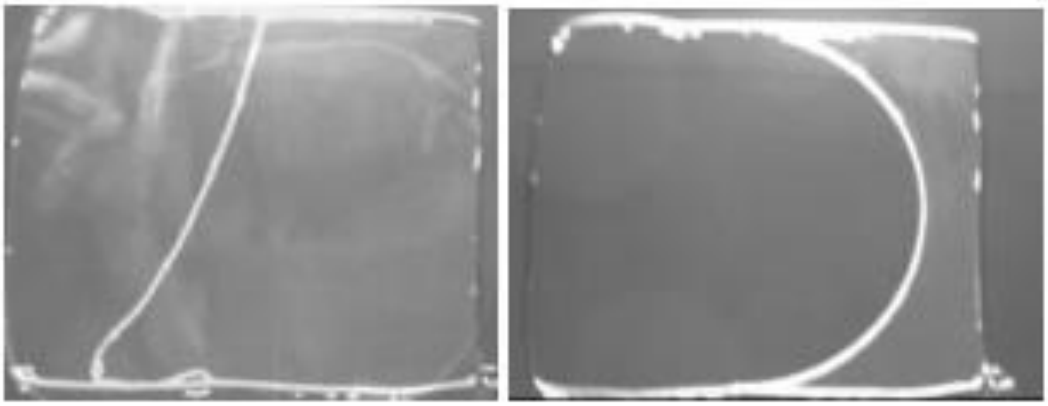
De todo esto deducimos que las películas jabonosas siempre se forman con la menor superficie posible. Introduciendo el arco en la solución y tirando del hilo se forma esto:



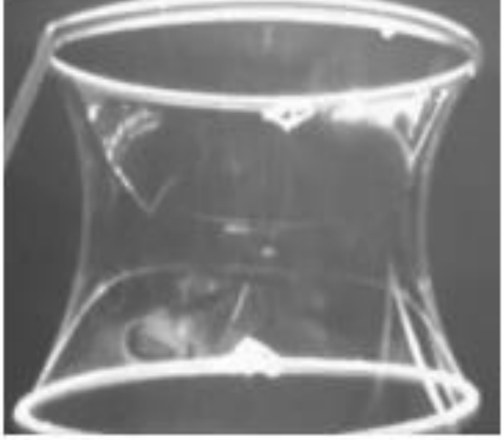
Introduciendo las dos circunferencias:



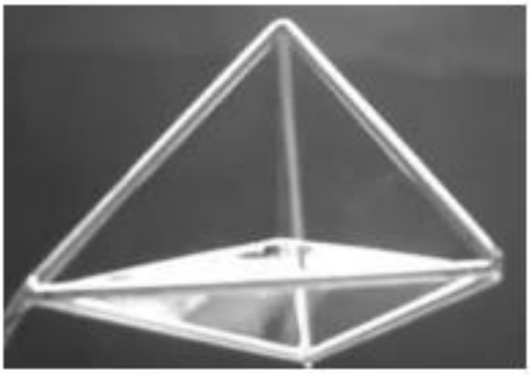
Introduciendo el rectángulo de alambre con la cuerdecita y explotando con el dedo la parte de dentro de la cuerda



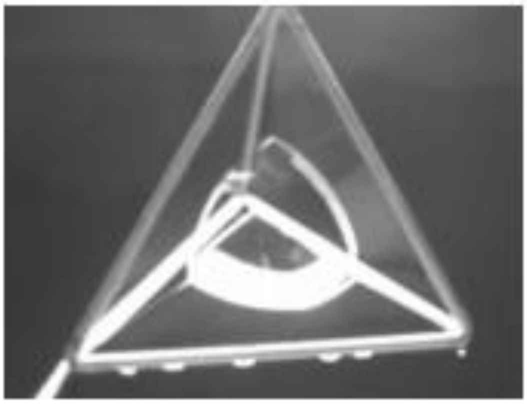
Catenoide:



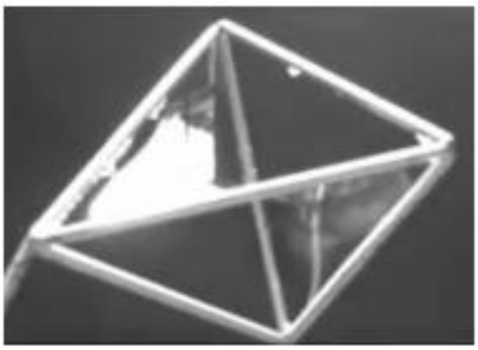
Superficie mínima de un tetraedro:

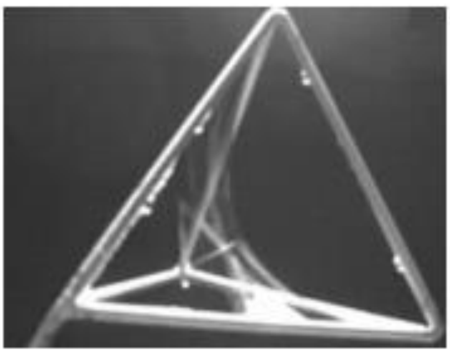


Soplando con la pajita en la película de jabón, pasa lo mismo que antes pero ahora en 3 dimensiones, se crea un tetraedro curvilíneo:

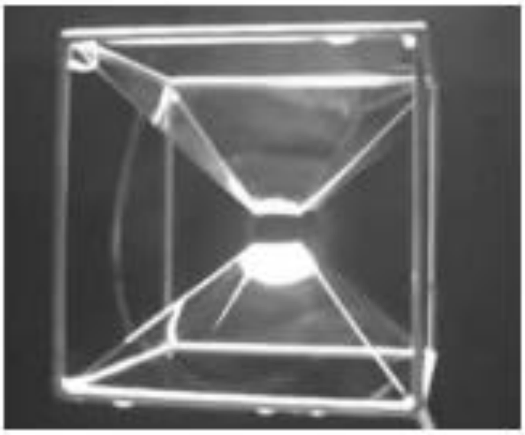


Paraboloide hiperbólico. Se genera introduciendo en la solución de jabón el tetraedro y explotando dos películas de jabonosas:

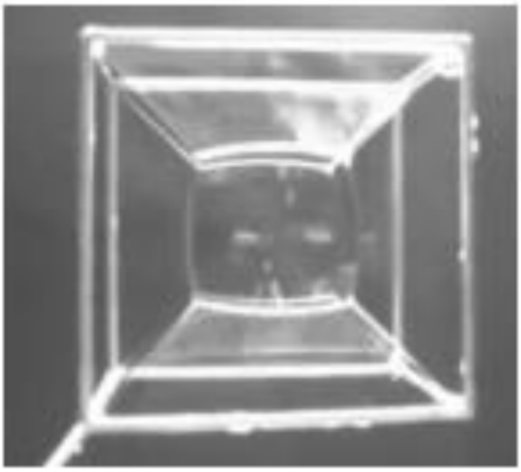




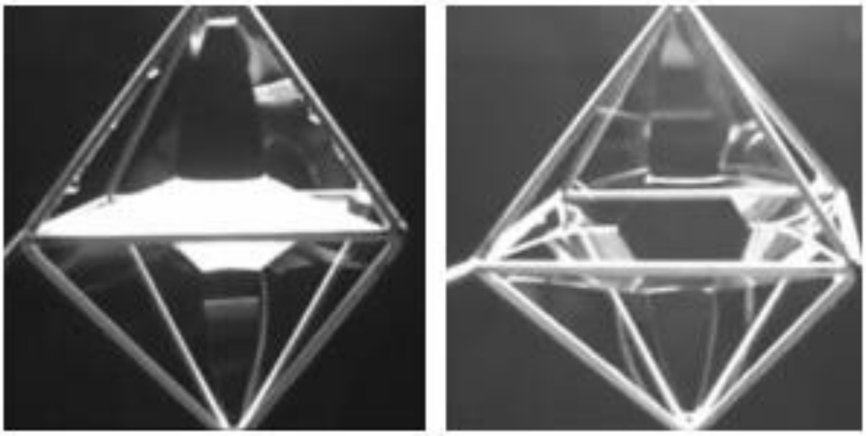
Superficie mínima de un cubo:



Soplando, al igual que en pasos anteriores, con una pajita en la película jabonosa, se forma un cubo curvilíneo:



Superficie mínima de un octaedro. Introduciendo el octaedro en la disolución se forma la rosa de los vientos:



Conclusiones

Tanto en la elección del tema como en el desarrollo del mismo, mis dos objetivos principales ha sido buscar un sentido práctico a ciertos contenidos matemáticos y mostrar estos contenidos de una forma entretenida. En resumidas cuentas, mi meta ha sido tratar de acercar las matemáticas al alumnado mediante contenido ameno y cercano que favorezca su motivación y promueva el interés y el gusto por las matemáticas. Es difícil estudiar cualquier cosa por la que no se tiene interés y creo que es la causa fundamental de que las matemáticas tengan tan mala acogida y tan malos malo resultados por parte de los estudiantes.

Por otro lado, como comentaba, otro de los motivos que me han llevado a tratar de relaciones las matemáticas con la arquitectura es la eterna pregunta: Y esto, ¿para qué sirve? A lo largo de mi vida académica la he oído mucho, incluso me lo he preguntado muchas veces y este año en el Prácticum era el pan de cada día en el aula. Comprendo también que, así como cuesta estudiar algo por lo que no se tiene pasión o ni siquiera cierto interés, puede costar también estudiar algo que a priori no tiene ninguna aplicación práctica conocida, genera la sensación en los adolescentes de estudiar "para nada".

Me he basado también en mi propia experiencia, pues a mí misma empezó a interesarme el tema de las superficies regladas a raíz de un viaje a Barcelona hace muchos años donde visité las Escuelas de Gaudí situadas en el recinto de la Sagrada Familia, de las que he hablado en este trabajo, y cuya cubierta me fascinó y me incitó a investigar más sobre estas composiciones geométricas. A posteriori, y ya cursando este Máster, esa experiencia me hizo reflexionar sobre el hecho de que muchas veces como profesores tratamos de impartir un contenido completamente descontextualizado haciendo que resulte más abstracto aún y mucho más lejano al interés de los estudiantes pretendiendo buscar luego la relación con objetos de su interés, en lugar de hacerlo al revés. Quizás si invirtiéramos el orden y tratáramos de fomentar primero el interés acercándonos al alumnado con contenido atractivo y cercano, sería luego mucho más sencillo que llegarán a apreciar y a comprender conceptos más teóricos.

Creo que todo el mundo puede llegar a desarrollar interés y pasión por las matemáticas si como profesores conseguimos dar con un tema que resulte interesante a cada estudiante, en mi caso llegué a las matemáticas a través de la arquitectura, pero creo firmemente que hay infinitas vías.

Bibliografía

Fernando Corbalán. (2010). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza.* Editorial RBA

D'Arcy Thompson (1917/2003). *Sobre el crecimiento y la forma*. Ediciones Akal, S.A.

Antonia María Pérez Naya. (2005) *De Geometría y de Arquitectura de espirales y de hélices.* Universidad de A Coruña.

Ramón J. Zoido Zamora. (2012). *Curvas y superficies en la Arquitectura.* http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/007%20Curvas.pdf

Miguel Seguí Buenaventura (1994). *Félix Candela, arquitecto*. Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio ambiente, Madrid

Félix Candela (1985). *En defensa del Formalismo y otros escritos.* Xarait Ediciones S.A., Bilbao

Colin Faber. (1970). *Las estructuras de Candela*. Compañía Editorial Continental, S.A., Madrid.

Yukata Saito (1995). *Félix Candela*. Toto Shuppan, Madrid.

Florentino García Santos. (2011) *Superficies mínimas*.

Varios autores. (2011). *Superficies mínimas. El caso del complejo olímpico de Múnich.* Pontificia Universidad Católica del Perú. https://textos.pucp.edu.pe/pdf/1392.pdf

Jorge Navarro Camacho. (2003). *Temario para la presentación a oposiciones Matemáticas volumen III*. Editorial MA, S.L.