ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS CURVAS ALABEADAS EN LA GEOMETRIA DIFERENCIAL PROYECTIVA

POR L. A. SANTALÓ

El objeto de esta nota es estudiar ciertas superficies desarrollables que contienen a una curva del espacio de 3 dimensiones y cuyas generatrices ocupan alguna posición especial respecto al tetraedro fundamental proyectivo unido á cada punto de la curva.

Veremos de esta manera como se pueden caracterizar geometricamente ciertas curvas alabeadas cuyas curvaturas proyectivas cumplen determinadas condiciones.

El problema análogo para la geometría diferencial «afin» ha sido tratado por nosotros en otro lugar(1).

1. DEFINICIONES Y NOTACIONES

Supongamos el espacio proyectivo de 3 dimensiones. Un punto del espacio estará determinado por sus cuatro coordenadas ho-

(1) L. A. SANTALO, *Quelques propriétés des courbes gauches dans la geométrie differentielle affine.* Portugaliae Mathematica, Vol. 3 pag. 63, 1242.

mogeneas x_1, x_2, x_3, x_4 y lo representaremos abreviadamente por la sola letra X. Una curva del espacio estará dada por una ecuación de la forma

$$X = X(u) \qquad (1.1)$$

la cual condensa las 4 ecuaciones paramétricas $x_i = x_i(u)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Suponiendo que el parámetro u sea el arco proyectivo y utilizando coordenadas normales, es sabido que las ecuaciones paramétricas de la curva deben satisfacer a una ecuación diferencial de la forma[2].

$$X^{IV} + r X'' + (r' - \theta) X' + s X = 0 \qquad (1.2)$$

donde los acentos indican derivadas respecto el arco proyectivo u y siendo los coeficientes r, s la primera y segunda curvaturas proyectivas, las cuales, dadas en función de u determinan la curva. El parámetro θ vale 0 ó 1 según que las tangentes a la curva pertenezcan o no a un complejo lineal. Excluimos el caso de las cubicas alabeadas.

El plano determinado por los puntos X, X', X'', es el *plano osculador*. Por brevedad, al plano determinado por los puntos X, X'', X''' lo llamaremos *plano normal proyectivo* y al determinado por los puntos X, X' X''' lo llamaremos *plano rectificante proyectivo*. Al tetraedro determinado por los puntos X, X'. X'', X''' lo llamaremos *tetraedro fundamental proyectivo* unido a cada pun-

2)) Ver, por ej FUBINI-CECH, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, Tomo I, pag. 33.

to de la curva. Muchas veces se toma por tetraedro fundamental proyectivo el determinado por los puntos[3].

$$Y_1 = X, \quad Y_2 = X', \; Y_3 = \frac{3}{10} r X + X'', \quad Y_4 = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{10} r'\right) X +$$

$$+ \frac{7}{10} \cdot r X' + X'''$$

pero las conclusiones a que se llega en la presente nota son muy análogas en ambos casos, por lo cual tomaremos por tetraedro fundamental el que tiene por vértices X, X′, X″, X‴ lo cual simplifica los cálculos.

2. SUPERFICIES DESARROLLABLES QUE CONTIENEN LA CURVA DADA

Un punto E del plano determinado por los puntos X′, X″, X‴ será de la forma

$$E = \alpha X' + \beta X'' + \gamma X''' \tag{2.1}$$

de donde, teniendo en cuenta (1.2) se deduce

$$E' = -\gamma s X + [\alpha' - (r' - \Theta)\gamma] X' + (\alpha + \beta' - \gamma r) X'' + (\gamma' + \beta) X''' \tag{2.2}$$

(3) Ver FUBINI-CECH, loc. cit. pág. 39. Este tetraedro tiene la ventaja de ser "autodual"; con esta propiedad hay todavia otros infinitos tetraedros definidos de modo intrinseco e invariantes por colineaciones; ver por ej. SANNIA, *Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe*, Annali di Matematica, serie IV, tomo I, pág. 16, 1923-1924.

donde los acentos, como siempre, indican derivadas respecto el arco proyectivo u.

Para que la recta que une el punto X de la curva con el punto E describa al variar u una superficie desarrollable, debe ser

$$(X, X', E, E') = 0 \qquad (2.3)$$

indicando de esta manera, como es costumbre, el determinante cuyas filas son las coordenadas de los puntos respectivos.

Teniendo en cuenta (2.2) resulta

$$(X, X', E, E') = (X, X', X'', X''') \left[(\gamma' + \beta)\, \beta - \gamma\, (\alpha + \beta' - \gamma r)\right]$$

y por tanto para que se cumpla (2.3) debe ser

$$\beta \gamma' - \gamma \beta' + \beta^2 - \alpha \gamma + \gamma^2 r = o \qquad (2.4)$$

Esta es, por tanto, la condición necesaria y suficiente para que la recta que une el punto $X(u)$ con el punto $E(u)$ dado por (2.1), describa una superficie desarrollable al variar u.

Por verificarse (2.3) se deduce que existirán 3 funciones $\lambda = \lambda\,(u)$, $\mu = \mu\,(u)$, $\nu = \nu\,(u)$ tales que

$$E' = \lambda X + \mu X' + \nu E. \quad (2.5)$$

Para que la superficie desarrollable descrita por la recta X E sea un *cono*, debe existir un punto $V = p\,X + q\,E$ que sea fijo al variar u. Para que esto ocurra debe ser $V' = a\,V$, o sea,

$$(p' + q\,\lambda)\,X + (p + q\,\mu)\,X' + (q' + q\,\nu)\,E = a\,(p\,X + q\,E)$$

de donde

$$p + q\,\mu = o, \quad \frac{p' + q\,\lambda}{p} = \frac{q' + q\,\nu}{q}.$$

Para que este sistema sea compatible respecto p, q es necesario y suficiente que

$$\nu = \frac{\mu' - \lambda}{\mu}. \tag{2.6}$$

Para expresar esta condición mediante los coeficientes α, β, γ de (2.1) observamos que (2.4) se escribe

$$\gamma\,(\beta' + \alpha - \gamma\,r) = \beta\,(\beta + \gamma')$$

y por tanto, segun (2.2),

$$E' = -\gamma s X + [\alpha' - (r' - \Theta)\gamma]X' + \frac{\beta + \gamma'}{\gamma}\,(\beta\,X'' + \gamma\,X''') =$$

$$= -\gamma s X + [\alpha' - (r' - \Theta)\,\gamma - \frac{\alpha}{\gamma}\,(\beta + \gamma')]\,X' + \frac{\beta + \gamma'}{\gamma}\,E$$

Comparando con (2.5) resulta

$$\lambda = -\gamma s\,, \quad \mu = \alpha' - (r' - \Theta)\,\gamma - \frac{\alpha}{\gamma}\,(\beta + \gamma'), \quad \nu = \frac{\beta + \gamma'}{\gamma} \tag{2.7}$$

y por tanto (2.6) se escribe

$$\frac{\beta+\gamma'}{\gamma} = \frac{\left[\alpha' - (r'-\Theta)\,\gamma - \dfrac{\alpha}{\gamma}(\beta+\gamma')\right]' + \gamma\, s}{\left[\alpha' - (r'-\Theta)\,\gamma' - \dfrac{\alpha}{\gamma}\,(\beta+\gamma')\right]} \tag{2.8}$$

Obsérvese que si las relaciones (2.4) y (2.8) se satisfacen para 3 funciones $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma\,(u)$, también se satisfacen para cualquier terna de funciones de la forma $\rho(u)\alpha(u)$, $\rho(u)\beta(u)$, $\rho(u)\gamma(u)$, como debe ser, puesto que siendo las coordenadas homogeneas, en (2.1) los puntos $E(u)$ y $\rho(u)E(u)$ son uno mismo. En resumen se tiene:

TEOREMA I. – La condición necesaria y suficiente para que la superficie reglada engendrada por la recta que une el punto $X(u)$ con el $E(u)$ dado por (2.1) *sea desarrollable, es que se cumpla* (2.4). *En este caso, la condición necesaria y suficiente para que la superficie sea un cono es que se cumpla, además, la condición* (2.8). *El vértice del cono es entonces el punto* $V = pX+qE$, *siendo* $p\,/\,q = -\,\mu$ y μ *está dado por* (2.7).

3. SUPERFICIES DESARROLLABLES ESPECIALES

1. *Superficies desarrollables cuyas generatrices están constantemente en el plano osculador.* Haciendo en (2.4) $\gamma = o$, resulta $\beta = o$, lo que nos da el resultado bien conocido de que la única superficie desarrollable engendrada por rectas que pasan por una curva y en cada punto estan conténidas en el plano osculador correspondiente, es la superficie tangencial.

2. *Superficies desarrollables cuyas generatrices están contenidas en el plano rectificante proyectivo.* Haciendo en (2.4) $\beta = o$

se obtienen las soluciones $\gamma = o$, $\frac{\alpha}{\alpha} = \frac{\gamma}{\gamma} = r$. La $\gamma = o$ corresponde a la superficie tangencial. La $\frac{\alpha}{\gamma} = r$ nos da, según (2.1), la superficie

$$Y = m X + n (r X' + X''') \tag{3.1}$$

donde m, n, son parámetros variables.

Para que esta superficie sea un cono, según (2.8) y pudiendo tomar

$$\alpha = r, \quad \beta = o, \quad \gamma = 1.$$

resulta

$$s = o$$

En este caso, según el Teorema I y siendo según (2.1) $E = r X' + X'''$ el vértice del cono será el punto

$$V = - \Theta X + r X' + X''' \tag{3.2}$$

donde, como ya observamos, Θ vale 0 ó 1 según que las tangentes a la curva dada pertenezcan o no a un complejo lineal. Se tiene por tanto:

Teorema II. — *Prescindiendo de la superficie tangencial, hay una sola superficie desarrollable engendrada por rectas que pasan por los puntos de una curva y están contenidas en el plano rectificante proyectivo correspondiente. Esta superficie es la* (3.1). *Para que esta superficie sea un cono, o sea, para que los planos rectificantes proyectivos de todos los puntos de una curva pasen por un* *mismo punto, es necesario y suficiente que sea* $s = 0$. *En este caso, el vértice del cono está dado por* (3.2).

3. *Superficies desarrollables cuyas generatrices están contenidas en el plano normal proyectivo.* Haciendo en (2.4) $\alpha = o$, resulta

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)' - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 - r = o \qquad (3.3)$$

que es una ecuación de Ricatti[4].

Para que la superficie sea un cono, según (2.8). debe ser

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{r'' - s}{r' - \Theta} \qquad (3.4)$$

y por tanto, según (3.3), debe cumplirse la condición

$$\left(\frac{r'' - s}{r' - \Theta}\right)' - \left(\frac{r'' - s}{r' - \Theta}\right)^2 - r = o. \qquad (3.5)$$

[4] Como observamos en el trabajo citado en (1) este resultado es mucho mas general, pues si se considera en cada punto de una curva del espacio un plano que no contenga a la tangente, las superficies desarrollables que contienen a la curva y cuyas generatrices están siempre contenidas en tales planos, están dadas por una ecuación de Ricatti.

Reciprocamente, si se cumple (3.5), hay una superficie normal desarrollable que es un cono, cuyo vértice según el Teorema I y (3 4), resulta ser

$$V = (r' - \Theta)^2 X + (r'' - s) X'' + (r' - \Theta) X''' \quad (3.6)$$

Se tiene por tanto:

TEOREMA III.—*Hay infinitas superficies desarrollables que pasan por una curva y cuyas generatrices están contenidas en el plano normal proyectivo correspondiente a cada punto. Estas infinitas superficies están dadas por una ecuación de Ricatti. Para que alguna de estas superficies sea un cono, o sea, para que los planos normales proyectivos de una curva pasen todos por un punto, se debe cumplir la relación (3.5). En tal caso dicho punto, vértice del cono, está dado por* (3.6).

Del hecho de que las generatrices de estas superficies dasarrollables normales proyectivas vengan determinadas por una ecuación de Ricatti se deduce: 1°. Si se conoce una de estas superficies desarrollables se pueden encontrar las otras por cuadraturas, 2° La razón anarmónica de 4 generatrices correspondientes a 4 superficies desarrollables distintas, es constante a lo largo de la curva.

4.—*Superficies desarrollables cuyas generatrices están unidas de manera proyectivamente invariante con el tetraedro fundamental proyectivo.* Supongamos ahora que en (2.4) los coeficientes α, β, γ, sean constantes. Lo mismo seria, naturalmente, si se considerase que estos coeficientes valieran respectivamente $\alpha\rho(u)$, $\beta\rho(u)$, $\gamma\rho(u)$, siendo α, β, γ constantes y $\rho(u)$ una misma función cualquiera, puesto que se trata de coordenadas homogeneas.

Entonces la ecuación (2.4) queda

$$\beta^2 - \alpha\gamma + \gamma^2 r = 0. \qquad (3.7)$$

de donde se deduce que, siendo α, β, γ constantes, también lo debe ser r. Los puntos E del plano X', X'', X''' dados por (2.1) con los coeficientes ligados por la relación (3.7) forman una cónica, que si se toma el punto X' por punto (001), el X'' por punto (010) y el X''' por punto (100) de un sistema de coordenadas proyectivas ξ, η, ζ del plano X' X'' X''', tendrá por ecuación

$$\eta^2 - \xi\zeta + r\xi^2 = 0.$$

Esta cónica es tangente a la recta $\xi = 0$ en el punto (001), o sea, es tangente a la recta que une X' y X'' en el punto X'. Por tanto, proyectando esta cónica desde el punto X de la curva, se obtiene un cono cuadrático tangente al plano osculador a lo largo de la tangente. Se tiene en consecuencia el siguiente[5].

Teorema IV.—*Para que exista alguna superficie desarrollable que pasa por los puntos de una curva y en cada uno de ellos la generatriz correspondiente tenga posición proyectivamente fija respecto el tetraedro fundamental, es necesario y suficiente que la primera curvatura r de la curva sea constante. Recíprocamente, si es-*

(5) Este teorema es debido a J. Maeda. *Une propriété caractéristique des courbes gauches dont les courbures projectives sont constantes*, The Tohoku Mathematical Journal. Vol. 47, 1940, pág. 74-76.

ta condición se cumple, cada punto de la curva es vértice de un cono de 2º. orden tangente al plano osculador a lo largo de la tangente, cuyas generatrices describen superficies desarrollables manteniéndose proyectivamente fijas respecto al tetraedro fundamental.

Veamos ahora la condición para que alguna de estas superficies desarrollables sea un cono. La condición (2.8) se escribe en este caso

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma s}{\theta \gamma - \dfrac{\alpha \beta}{\gamma}}$$

de donde

$$s = \frac{\beta}{\gamma} \left(\theta - \frac{\alpha \beta}{\gamma^2} \right) \tag{3.8}$$

Luego también debe ser: $s =$ constante.

En este caso, de (3.7) y (3.8) se deduce

$$\left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^4 + r \left(\frac{\beta}{\gamma} \right)^2 - \theta \frac{\beta}{\gamma} + s = o \tag{3.9}$$

Resulta, por tanto, que habrá 1, 2, 3 ó 4 conos según sea el número de raíces distintas de esta ecuación. Si ξ_i es una de estas raíces, o sea,

$$\varphi(\xi_i) = \xi_i^4 + r\,\xi_i^2 - \theta\,\xi_i + s = o \qquad (3.10)$$

el vértice del cono, según el Teorema I, resulta ser

$$V_i = (-\theta + r\,\xi_i + \xi_i^3)\,X + (r + \xi_i^2)\,X' + \xi_i X'' + X'''. \quad (3.11)$$

En el caso que estamos considerando de ser constantes las dos curvaturas proyectivas r, s, la ecuación diferencial (1.2) de la curva es una ecuación diferencial con coeficientes constantes, cuya ecuación característica es precisamente la (3.10). Supongamos que las 4 raíces ξ_i de esta ecuación sean distintas. Entonces, las ecuaciones paramétricas de la curva, en coordenadas homogeneas y salvo una proyectividad podrán ponerse en la forma

$$x_i = a_i\, e^{\xi_i u} \qquad (i = 1,\ 2, 3, 4) \qquad (3.12)$$

siendo a_i constantes. Esta curva se transforma en si misma por el prupo de colineaciones

$$\bar{x}_i = x_i\, e^{\xi_i \tau} \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (3.13)$$

con el parámetro τ. Basta, en efecto, observar que un punto $X(u)$ de la curva (3.12) se transforma en el punto $X(u + \tau)$ que también pertenece a la curva. El grupo de las colineaciones (3.13) es el grupo de todas las colineaciones que tienen 4 puntos dobles fijos, los cuales son los puntos (0001), (0010), (0100) y (1000). Vamos a demostrar que estos puntos son precisamente los puntos V_i de (3.11).

En efecto, para la curva (3,12), las coordenadas v_i^k ($k = 1$, 2, 3, 4) del punto V_i serán

$v_i^k = (-\Theta + r\,\xi_i + \xi_i^3)\,x_k + (r + \xi_i^2)\,\xi_k\,x_k + \xi_i\,\xi_k^2\,x_k + \xi_k^3\,x_k$
y prescindiendo del factor proporcionalidad x_k, resulta

$$v_i^k = \xi_i^3 + \xi_k^3 + \xi_i^2\,\xi_k + \xi_i\,\xi_k^2 + r\,(\xi_i + \xi_k) - \Theta.$$

De esta expresión y de (3.10) se observa que

$$o = \varphi(\xi_i) - \varphi(\xi_k) = (\xi_i - \xi_k)\,v_i^k \text{ para } i \neq k$$

y además es $v_i^i = \dfrac{d\varphi}{d\xi_i}$. Por tanto, como suponemos que las raíces de $\varphi(\xi) = o$ son distintas, resulta que

$$v_i^k \begin{cases} \neq o & \text{para } i = k \\ = o & \text{''}\ i \neq k, \end{cases}$$

En consecuencia los puntos V_i de (3.11) son precisamente los vértices del tetraedro fundamental de coordenadas, o sea, los puntos dobles de todas las colineaciones (3.13) que dejan invariante a la curva dada.

Analogamente se demuestra que, cuando la ecuación (3.10) tiene raíces múltiples y coinciden por tanto algunos de los puntos V_i, el grupos de las colineaciones que transforman en si misma a la curva dada es el grupo de las colineaciones que tienen 4 puntos dobles fijos pero algunos de ellos coincidentes.

Las curvas del espacio que admiten un grupo continuo de colineaciones, o sea, que son trayectorias descritas por los transformados de un mismo punto mediante las colineaciones de un grupo continuo dependiente de un parámetro, se llaman *curvas W* o *curvas anarmónicas* (6). Según esto podemos reunir lo últimamente demostrado en el siguiente

TEOREMA V. —*Para que una curva del espacio esté contenida en una superficie cónica tal que las generatrices de la misma estén en cada punto proyectivamente fijas respecto el tetraedro fundamental proyectivo correspondiente, es condición necesaria y suficiente que las dos curvaturas proyectivas r, s sean constantes. En este caso existirán tantos conos con la propiedad mencionada como raices distintas tenga la ecuación* (3.10); *los vértices de dichos conos están dados por* (3.11). *Las curvas r, s constantes son las curvas W o anarmónicas del espacio y los vértices V_i de los conos mencionados son precisamente los puntos dobles de las infinitas colineaciones del grupo de un parámetro que tiene como una de sus trayectorias la curva dada.*

(6) Ver por ejemplo: F. ENRIQUES—O. CHISINI, Teoria geometrica delle equazioni, vol. III, pag. 241; G, H. HALPHEN, *Sur les invariants differentiels des courbes gauches,* Oeuvres t. II, pág. 402; E. P. LANE, *A treatise on projective differental geometry,* Chicago 1941, pág. 86.

Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad del Litoral.
ROSARIO (Rep. Argentina).