



UNIVERSITAT DE
BARCELONA

Facultat de Matemàtiques
i Informàtica

GRAU DE MATEMÀTIQUES

Treball final de grau

Invariantes de Vassiliev

Autor: Marta Grasa Lainez

Director: Dr. Ignasi Mundet

Realitzat a: Departament....
Matemàtiques i Informàtica

Barcelona, 24 de enero de 2022

Abstract

Nowadays, knot theory is a very relevant branch of mathematics, as it can be applied to multiple other sciences. In this discipline, the study of knot invariants is essential. Here, we will focus on the study of Vassiliev invariants, which are defined by extending the space of knots to the space of singular knots with a finite number of double points.

Resumen

Hoy en día la teoría de nudos es una rama muy relevante de las matemáticas por sus múltiples aplicaciones a otras ciencias. En esta disciplina matemática, el estudio de invariantes de nudos es esencial. A lo largo de este trabajo nos centraremos en el estudio de los invariantes de Vassiliev, definidos extendiendo el espacio de los nudos al de los nudos singulares con un número finito de puntos dobles.

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Ignasi Mundet por haber dedicado parte de su tiempo a tutorizar este trabajo. También a mi familia por su apoyo a lo largo de todo el proceso, y a mis amigos por darme ánimos en los momentos en que más lo necesitaba. Quiero dar las gracias al personal del CRAI por su amabilidad y dedicación.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Nudos	1
1.1.1. Diagramas de nudos	2
1.1.2. Nudos equivalentes	3
1.1.3. Invariantes	6
1.2. Estructura y objetivos del trabajo	9
2. Invariantes polinomiales	11
2.1. Polinomios de Alexander y Conway	11
2.2. Polinomio de Jones	13
2.3. Polinomio de HOMFLY	17
3. Invariantes de Vassiliev	22
3.1. Definición y ejemplos	22
3.2. Diagramas de cuerdas	26
3.3. Weight systems	28
3.3.1. Demostración de (1) del teorema 1.29	28
3.4. El álgebra \mathcal{A} de diagramas	30
3.5. Weight systems de álgebras de Lie	33
3.5.1. Álgebras de Lie	34
3.5.2. Tensores asociados a diagramas	35
4. Invariantes integrales de Kontsevich	38
4.1. La conexión de Knízhnik-Zamolódchikov	38
4.2. La integral de Kontsevich	40
4.2.1. Corrección	44
4.3. Demostración de (2) del teorema 1.29	45
4.4. Demostración de (3) del teorema 1.29	45
5. Conclusiones	47
Referencias	48

1. Introducción

Antes de comenzar a describir los objetivos de este trabajo es conveniente comenzar sentando las bases de la teoría de nudos. Todos conocemos el concepto de nudo, ya que aparecen a menudo en nuestra vida cotidiana, pero, ¿cómo se traduce esto al concepto matemático de nudo?

1.1. Nudos

Cuando pensamos en nudos, probablemente nos vienen a la mente imágenes de cuerdas enredadas consigo mismas o con otras cuerdas, como pueden ser los cordones de nuestros zapatos o un nudo marinero. Para trasladar esta idea al concepto matemático de nudo, comenzamos tomando una sola cuerda enredada consigo misma, y conectamos los dos extremos. De esta manera obtenemos un círculo de cuerda con un nudo que no se puede deshacer sin cortarla. A continuación disminuimos el grosor de la cuerda hasta hacerlo puntual.

Vemos que lo que hemos obtenido es, de alguna manera, una forma de “colocar” una circunferencia S^1 en el espacio \mathbb{R}^3 de manera que no presenta autointersecciones. Esto se puede representar matemáticamente por un *embedding*.

Definición 1.1. Un *embedding* es una aplicación continua e inyectiva que induce un homeomorfismo con la imagen.

Definición 1.2. Una aplicación es un *homeomorfismo* si es continua, biyectiva y con inversa continua.

Ejemplo 1.3. Por ejemplo, la aplicación $f : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(t) = (\cos(t), \sin(t))$ es continua e inyectiva, pero no induce un homeomorfismo con su imagen, ya que f^{-1} no es continua. Se puede ver que la imagen por $f = (f^{-1})^{-1}$ del abierto $U = [0, \frac{\pi}{2})$ en S^1 no es abierto, ya que no existe ningún conjunto abierto $V \in \mathbb{R}^2$ tal que $f(0) \in V$ y $V \cap S^1 \in f(U)$. Esta aplicación no es por lo tanto un embedding.

Definición 1.4. Un *nudo* es un embedding de S^1 en \mathbb{R}^3 . También se refiere a la imagen de este embedding.

Si consideramos si el embedding preserva o invierte la orientación de S^1 , se tratará de un nudo **orientado**.

De la misma manera que podemos tener varias cuerdas anudadas entre sí, podemos definir enlaces como embeddings de varias circunferencias en \mathbb{R}^3 . La restricción del dominio a cada una de estas circunferencias (cada una de las “cuerdas” anudadas) se denominará una **componente** del enlace.

Definición 1.5. Un *enlace* es una unión disjunta finita de nudos $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Cada uno de estos nudos K_i se denomina una **componente** del enlace.

De esta definición vemos que un nudo es un enlace de una sola componente, por lo que las definiciones y propiedades para enlaces que trataremos se aplican también a nudos. En el caso de los enlaces, diremos que se trata de un **enlace orientado** si consideramos si cada una de sus componentes preserva o invierte la orientación.

1.1.1. Diagramas de nudos

Esta definición de nudo como un embedding o su imagen puede resultar difícil de visualizar e incómoda para trabajar. Por ello se utilizan representaciones más sencillas: diagramas de nudos.

Definición 1.6. *Un **diagrama de nudo o enlace** es la imagen de una proyección regular (en la que los únicos puntos con dos antiimágenes son los cruces) de un nudo o enlace, en el que en cada cruce se indica qué tramo pasa por encima y cuál por debajo con una discontinuidad en el que pasa por debajo, como se observa en la Figura 1a.*

Un mismo nudo puede representarse por varios diagramas, según en qué plano se proyecte. Por ejemplo, el **nudo trivial** ($K = Id$, denotado por \bigcirc) puede ser representado por una circunferencia o una elipse. Sin embargo, pese a que se puede proyectar también sobre un plano perpendicular al que lo contiene, en este caso no se trataría de un diagrama de nudo, ya que todos los puntos tendrían dos antiimágenes (Figura 1b).



(a) Fragmento de un diagrama de enlace con dos cruces. En ambos cruces el segmento que pasa por encima es el que tiene un extremo en la esquina superior izquierda.

(b) Tres posibles proyecciones del nudo trivial. Las dos primeras son diagramas de nudo, pero la de la derecha no lo es.

Figura 1

Si se trata de un nudo orientado, en el diagrama de nudo se representará la orientación con puntas de flecha. En este caso podremos distinguir dos tipos de cruces (Figura 2):



Figura 2: Cruces +1 (izquierda) y -1 (derecha).

Los **diagramas de enlace** se definen de la misma manera. En el caso de los enlaces orientados de dos componentes, se puede definir el número de enlace:

Definición 1.7. *El **número de enlace** de un diagrama de enlace orientado de dos componentes es el resultado de sumar los valores de todos los cruces que involucren segmentos de distintas componentes, dividido por dos.*

Ejemplo 1.8. Vemos que el diagrama de nudo representado en la Figura 3 presenta 4 cruces de valor -1, por lo que su número de enlace será -2.

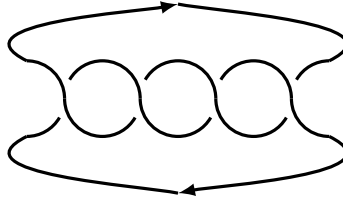


Figura 3: El número de enlace de este diagrama es -2

1.1.2. Nudos equivalentes

Basándonos en la definición 1.4, llegamos a la conclusión de que habrá bastantes nudos muy similares (o incluso iguales) entre sí. Por ejemplo, el embedding que coloca S^1 como una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1 en el plano xy será equivalente por un cambio de ejes al que coloca la misma circunferencia con mismo centro en el plano yz : el nudo trivial. Estos dos embeddings podrán ser representados por los mismos diagramas de nudo.

Definición 1.9. Dos enlaces L_1 y L_2 en \mathbb{R}^3 son **equivalentes** si existe una isotopía del espacio entre ellos.

Definición 1.10. Una **isotopía del espacio** entre dos enlaces L_1 y L_2 en \mathbb{R}^3 es una aplicación continua $h : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal a trozos que conserva la orientación de manera que $h(L_1, 0) = h_0(L_1) = L_1$ y $h(L_1, 1) = h_1(L_1) = L_2$.

Notamos que las isotopías del espacio definen una relación de equivalencia sobre los enlaces, de manera que dos nudos pertenecen a la misma clase si existe una isotopía del espacio entre ellos. A menudo al hablar de un “nudo” o un “enlace” nos referimos a toda su clase de equivalencia.

Se puede dar una definición equivalente a 1.9 utilizando equivalencia combinatorial en vez de isotopías del espacio. En primer lugar, notamos que un enlace (como imagen de un embedding) puede aproximarse por un objeto lineal a trozos. Llamamos a estos enlaces lineales a trozos **representaciones poligonales** del enlace original.

Definición 1.11. Sea L una representación poligonal de un enlace, y sea Δ un triángulo tal que

- $L \cap \text{int}(\Delta) = \emptyset$,
- L contiene uno o dos lados de $\partial\Delta$,
- Los vértices de L en $L \cap \Delta$ son también vértices de Δ ,
- Los vértices de Δ en $L \cap \Delta$ son también vértices de L .

Un **movimiento** Δ es el resultado de remplazar L por $(L - (L \cap \Delta)) \cup (\partial\Delta - L)$, como se ilustra en la Figura 4.

Definición 1.12. Dos enlaces L_1 y L_2 son **equivalentes** si existe una secuencia finita de movimientos Δ entre una representación poligonal de L_1 y una representación poligonal de L_2 .

Teorema 1.13. Las definiciones 1.9 y 1.12 son equivalentes.

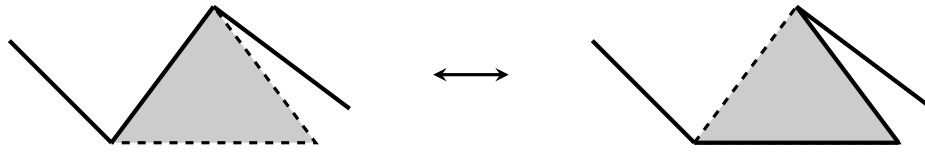


Figura 4: Representación de un movimiento Δ .

Demostración: La demostración de este teorema requiere conocimientos avanzados de funciones lineales a trozos, por lo que no se incluirá aquí. Se puede encontrar una demostración de esta equivalencia en [4].

Ejemplos 1.14. Algunos de los ejemplos más sencillos de enlaces equivalentes corresponden a nudos equivalentes al nudo trivial:

- El nudo dado por una circunferencia de radio 1 en el plano xy será equivalente a todos los nudos dados por circunferencias y elipses en \mathbb{R}^3 . Todos son el nudo trivial.
- El nudo trivial es equivalente a un nudo en forma ∞ (con las dos orientaciones posibles del cruce), ya que este resulta de “retorcer” el nudo \bigcirc una vez.
- De la misma manera, es también equivalente al resultado de “retorcerlo” n veces en cualquiera de los dos sentidos, con cualquier tamaño de las “burbujas”.

Vemos pues que un diagrama en realidad no representa un único nudo, sino toda su clase de equivalencia. De esta manera, podemos definir:

Definición 1.15. Un nudo es el **nudo trivial** si es la frontera de la imagen por un *embedding* de un disco.

Definición 1.16. Un enlace de n componentes es el **enlace trivial** de n componentes si admite un diagrama sin ningún cruce. El enlace trivial de una componente es el nudo trivial.

Es conveniente poder determinar también si dos diagramas representan el mismo conjunto de enlaces equivalentes. Por ello, Kurt Reidemeister definió en 1926 los **movimientos de Reidemeister**, con los que se pueden relacionar diferentes diagramas del mismo enlace.

Definición 1.17. Los **movimientos de Reidemeister** son movimientos en regiones de diagramas de nudos tal que el diagrama inicial y final representan el mismo nudo. Pueden ser de tres tipos:

Tipo I: Consiste en crear o deshacer un bucle (Figura 5a).

Tipo II: Consiste en desplazar dos trozos de nudo para que se crucen o dejen de cruzarse (Figura 5b).

Tipo III: Consiste en pasar un trozo por encima o por debajo de un cruce (Figura 5c).

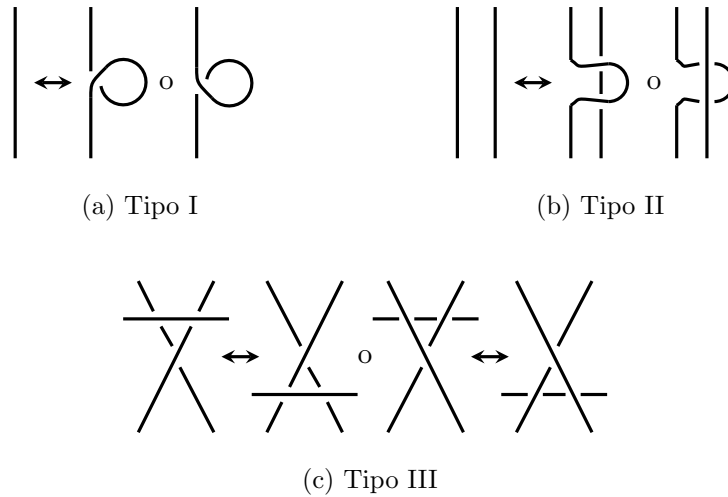


Figura 5: Representación de los tres tipos de movimientos de Reidemeister.

Teorema 1.18. *Dos diagramas son de enlaces equivalentes si y solo si se puede llegar de uno a otro mediante una secuencia finita de movimientos de Reidemeister e isotopías del plano.*

Idea de la demostración: Está claro que los movimientos de Reidemeister se pueden representar en \mathbb{R}^3 como una secuencia finita de movimientos Δ , por lo que dos diagramas relacionados por una secuencia finita de ellos representarán nudos equivalentes.

Para la implicación contraria, vemos que dos diagramas D_1 y D_2 serán de enlaces equivalentes si los enlaces que representan tienen representaciones poligonales relacionadas por una secuencia finita de movimientos Δ . Comprobamos qué ocurre en el diagrama de enlace cuando se realizan estos movimientos.

Para ello tomamos proyecciones de los enlaces intermedios tal que los triángulos usados para los movimientos Δ se proyecten como triángulos en \mathbb{R}^2 . Subdividiendo estos triángulos en otros más pequeños y factorizando cada movimiento Δ en una secuencia de movimientos más pequeños si es necesario, se puede obtener una secuencia de movimientos cuyas proyecciones contienen como máximo un cruce en el interior del triángulo.

En la Figura 6 aparecen algunos casos representativos de estas proyecciones de movimientos Δ . Se puede observar que la Figura 6a corresponde a una isotopía del plano, y las Figuras 6b, 6c y 6d a movimientos de Reidemeister de tipos I, II y III respectivamente.

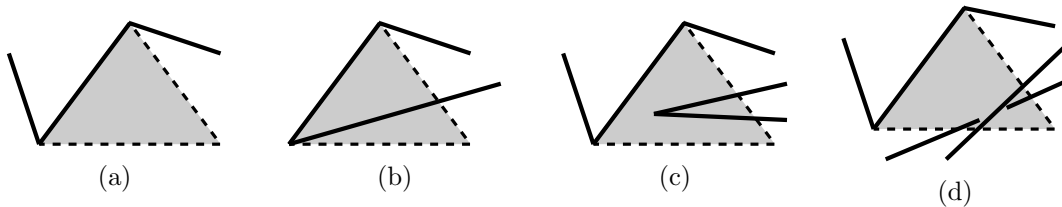


Figura 6: Algunos ejemplos representativos de proyecciones de movimientos Δ

Pueden darse multitud de variaciones de estos ejemplos, pero se puede comprobar que cualquier movimiento Δ se puede representar como una combinación de un número finito de isotopías del plano y movimientos de Reidemeister.

Por lo tanto, si dos enlaces son equivalentes, por definición tendrán representaciones poligonales relacionadas por una secuencia finita de movimientos Δ , y por lo tanto sus diagramas también se podrán relacionar por una secuencia finita de isotopías del espacio y movimientos de Reidemeister.

□

Esto significa que se pueden usar varios diagramas para representar cada nudo, no necesariamente todos con el mismo número de cruces. Por conveniencia, se suele escoger uno con el mínimo número de cruces posible para representar un nudo o enlace.

Ejemplo 1.19. De las dos representaciones del nudo trivial que aparecen en la Figura 7, se suele utilizar la de la derecha.

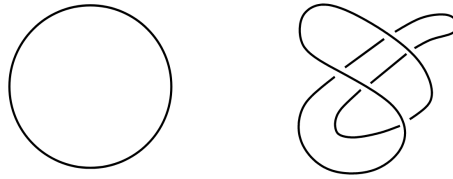


Figura 7: Dos posibles representaciones del nudo trivial.

Notamos que el cambio de un cruce por su opuesto no representa una isotopía del espacio. Sin embargo, algunos enlaces son equivalentes al enlace resultante de cambiar todos sus cruces por los opuestos: llamamos a estos enlaces *anfuirales*.

Definición 1.20. Sea L un enlace, su *imagen especular* L^* es el enlace resultante de cambiar cada uno de sus cruces por el cruce opuesto.

Definición 1.21. Un enlace es *anfuiral* si es espacialmente isotópico a su imagen especular.

1.1.3. Invariantes

En la sección anterior hemos visto que es posible determinar que dos nudos son equivalentes, pero ¿es posible determinar que dos nudos son diferentes? Esta es una de las grandes incógnitas que la teoría de nudos se plantea. La respuesta a esta pregunta no es evidente, ya que el hecho que no se haya encontrado una secuencia de movimientos de Reidemeister que relacione dos diagramas de nudo no significa que esta no exista.

Para distinguir enlaces, una opción es buscar alguna característica que los diferencie. Es por ello que la principal forma de determinar si dos nudos *no* son equivalentes es mediante el estudio de invariantes.

Definición 1.22. Un *invariante de enlace* es una función del conjunto de enlaces a algún otro conjunto cuyo valor depende únicamente de la clase de equivalencia del nudo. Se puede usar cualquier representante de la clase de equivalencia para calcular el invariante.

Vemos que los invariantes nos permiten asegurar que dos nudos *no* son equivalentes (si el invariante toma distinto valor para cada uno), pero el hecho que el invariante tome el mismo valor para dos nudos no implica necesariamente que sean equivalentes. De hecho,

uno de los primeros problemas de la teoría de nudos fue demostrar que existían más nudos además del trivial, y posteriormente descubrir alguna manera de poder asegurar que un determinado nudo no es el nudo trivial. Es por lo tanto interesante buscar invariantes que distingan el máximo número de nudos posible.

Definición 1.23. *Dado un invariante de nudos, se trata de un **invariante completo** si distingue cada nudo de todos los demás (excepto los pertenecientes a su misma clase de equivalencia).*

Notamos que si los invariantes solo dependen de la clase de equivalencia del enlace, resulta natural evaluarlos a partir de un diagrama de enlace. De esta definición y del teorema 1.18 se deduce el lema siguiente.

Lema 1.24. *Si el valor para un diagrama de enlace D_L de una función f del conjunto diagramas de enlace a algún otro conjunto no se modifica al realizar cualquier movimiento de Reidemeister sobre D_L , entonces f es un invariante de enlace.*

Demostración: Sea f una función que cumple las condiciones del lema, buscamos demostrar que f depende únicamente de la clase de equivalencia del enlace L representado por el diagrama D_L . Para ello vemos que si dos enlaces L_a, L_b pertenecen a la misma clase de equivalencia, su imagen por f será la misma.

Hemos visto que si dos diagramas D_{L_a}, D_{L_b} corresponden a enlaces en la misma clase de equivalencia, necesariamente se puede llegar de uno al otro mediante una serie finita de movimientos de Reidemeister. Llamamos a estos diagramas intermedios D_{L_1}, \dots, D_{L_n} donde cada uno es el resultado de realizar un único movimiento de Reidemeister sobre el anterior. La imagen por f del enlace representado por cada uno de estos diagramas es la misma por cumplir f las condiciones del lema, y por lo tanto tenemos $f(D_{L_a}) = f(D_{L_1}) = \dots = f(D_{L_n}) = f(D_{L_b})$.

□

Uno de los invariantes más sencillos es la **tricoloreabilidad**, que se puede utilizar para demostrar que existen más nudos además del trivial.

Definición 1.25. *Un diagrama de enlace es **tricoloreable** si se puede colorear cada tramo del diagrama (trozo entre dos cruces en los que pase por debajo) de uno de tres colores de manera que:*

1. *Se utilicen al menos dos colores.*
2. *Los tres tramos que se encuentran en cada cruce tengan o bien el mismo color o bien tres colores diferentes.*

Teorema 1.26. *La tricoloreabilidad es un invariante de enlace.*

Demostración: De acuerdo con el lema 1.24, basta demostrar que la tricoloreabilidad permanece invariante al realizar movimientos de Reidemeister sobre un diagrama de enlace.

- Los movimientos de Reidemeister tipo I no afectan a la tricoloreabilidad, ya que al estar el cruce que se añade o se deshace formado por una sola hebra, mantendrá tricoloreabilidad manteniendo el color de la hebra involucrada (Figura 8a).

- Para los movimientos de Reidemeister tipo II hay dos casos posibles. Si las dos hebras involucradas son del mismo color, todos los cruces involucrados en el movimiento estarán formados por tres tramos del mismo color. Si las hebras son de diferentes colores, se da una de las situaciones representada en las Figuras 8b y 8c. En todos los casos se preserva la tricoloreabilidad.

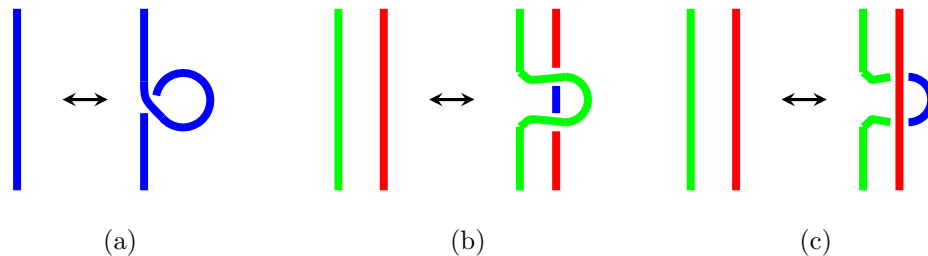


Figura 8: Efecto de movimientos de Reidemeister tipo I y II sobre algunas tricoloraciones.

- Para los movimientos de Reidemeister tipo III, hay varios casos posibles. Si todas las hebras son del mismo color, todos los cruces estarán formados por tramos del mismo color. Los demás casos aparecen representados en la Figura 9. En todos los casos se preserva la tricoloreabilidad.

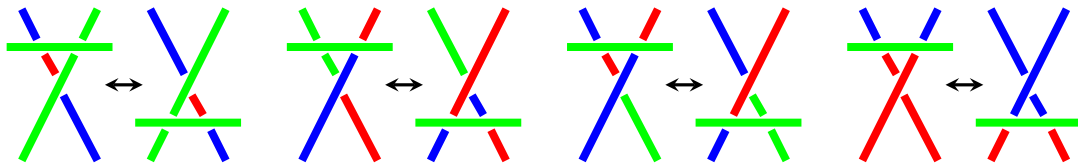


Figura 9: Efecto de movimientos de Reidemeister tipo III sobre algunas tricoloraciones.

□

Ejemplo 1.27. Por ejemplo, vemos en la Figura 10 que el llamado *nudo del trébol* es tricoloreable, mientras que el nudo trivial no. Podemos afirmar por lo tanto que el nudo del trébol es diferente al nudo trivial.

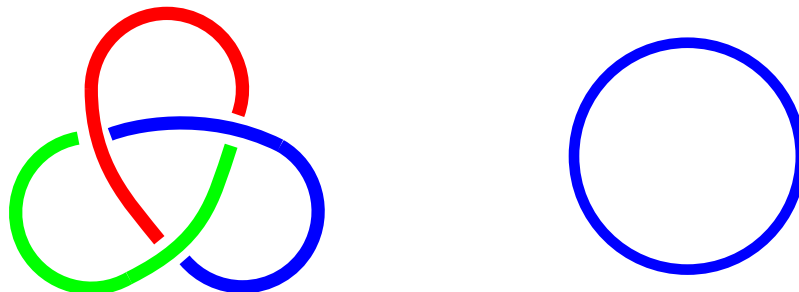


Figura 10: El nudo del trébol (izquierda) es tricoloreable, pero el nudo trivial (derecha) no lo es.

Sin embargo, este invariante divide los enlaces en tan solo dos categorías: tricoloreables y no tricoloreables. Otro ejemplo de invariante de enlace que, a pesar de no ser completo, puede distinguir más de dos categorías y ya hemos visto es el número de enlace.

Teorema 1.28. *El linking number (definición 1.7) es un invariante de enlaces orientados.*

Demostración: De acuerdo con el lema 1.24, basta demostrar que el número de enlace permanece invariante al realizar movimientos de Reidemeister sobre un diagrama de enlace.

- Como en el cálculo del número de enlace solo participan cruces que involucren las dos componentes, no se verá afectado por movimientos de Reidemeister tipo I.
- Si las dos hebras involucradas en un movimiento de Reidemeister tipo II pertenecen a componentes diferentes, el movimiento consistirá en crear o eliminar dos cruces de signos opuestos, por lo que el número de enlace permanecerá invariante.
- Un movimiento de Reidemeister tipo III no cambia el signo de los cruces, únicamente sus posiciones, por lo que no afecta al número de enlace.

□

1.2. Estructura y objetivos del trabajo

Como hemos visto, el estudio de invariantes es una parte esencial de la teoría de nudos. En este trabajo se estudiarán algunos de los invariantes más utilizados a lo largo de los años.

En un primer momento nos centraremos en los invariantes polinomiales, que asocian a cada enlace un polinomio de Laurent. El primero de ellos, el polinomio de Alexander, fue introducido a principios del siglo XX, pero en los años 80 el descubrimiento del polinomio de Jones puso en evidencia la gran utilidad de este tipo de invariantes e inició una búsqueda de más invariantes polinomiales, siendo el de uso más extendido el polinomio de HOMFLY. La sección 2 se centra en la definición y estudio de las propiedades de estos tres invariantes polinomiales.

La sección 3 se centrará en un tipo de invariante más general que los invariantes polinomiales: los invariantes de Vassiliev. Veremos cómo todo invariante de nudo se puede extender a un invariante de *nudos singulares*, con un número finito de puntos donde dos tramos se cortan, y en este contexto definiremos los invariantes de tipo finito o de Vassiliev. Veremos que los invariantes polinomiales vistos en la sección 2 son en efecto invariantes de Vassiliev. Nos familiarizaremos también con los diagramas de cuerdas y de Jacobi, además de los weight systems; elementos muy útiles para tratar con este tipo de invariantes. Para terminar esta sección veremos que se puede construir un weight system a partir de cualquier álgebra de Lie.

Por último, en la sección 4 definiremos el invariante integral de Kontsevich, y veremos su relación con los invariantes de Vassiliev por medio de los weight systems.

El objetivo principal de este trabajo será demostrar que los invariantes de Vassiliev y los weight systems son equivalentes, por lo que se pueden utilizar weight systems para estudiar invariantes de Vassiliev. Para ello nos referiremos a lo largo de las diferentes secciones a distintas partes del siguiente teorema:

Teorema 1.29. *Sobre un cuerpo \mathbb{F} , el espacio vectorial graduado asociado al espacio vectorial filtrado \mathcal{V} de invariantes de Vassiliev es el espacio de weight systems \mathcal{W} . Más concretamente:*

1. *Para un dado $m \in \mathbb{Z}$ no negativo existe un mapa $V \mapsto W_m(V)$ que asocia un weight system de grado m a cualquier invariante de Vassiliev V de tipo m .*
2. *Existe un mapa $W \mapsto V(W)$ que asocia a cada weight system de grado m W un invariante de Vassiliev de tipo m $V(W)$.*
3. *Los dos mapas anteriores son casi el inverso el uno del otro:*
 - a) *Para todo W tenemos $W = W_m(V(W))$.*
 - b) *Para todo V , los invariantes V y $V(W_m(V))$ difieren por un invariante de nudo de tipo $m-1$*

2. Invariantes polinomiales

Uno de los tipos de invariante más interesantes y útiles que se pueden asociar a los nudos son los invariantes polinomiales. Estos consisten en asociar a cada nudo un polinomio de Laurent, invariante por movimientos de Reidemeister. Estos invariantes tienen una larga historia y recientemente han permitido relacionar la teoría de nudos con otras ramas de la ciencia como la física, la biología o la química.

2.1. Polinomios de Alexander y Conway

El primer invariante polinomial fue descubierto en 1928 por J. Alexander. A pesar de no ser esta la formulación original, actualmente se suele definir a partir de una skein relation (relación de madeja), que es una relación lineal entre tres nudos L_+ , L_- y L_0 idénticos excepto por un cruce, en el que los segmentos pueden cruzarse o no según se muestra en la Figura 11.

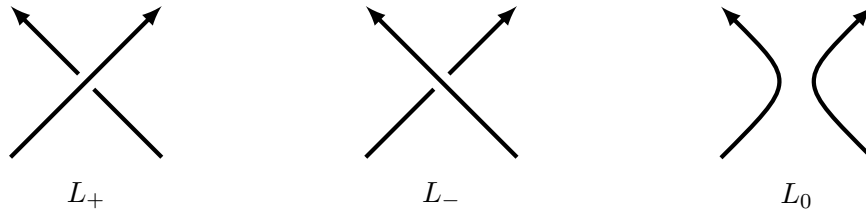


Figura 11

El hecho que el polinomio de Alexander cumple una skein relation fue descubierto posteriormente por Conway que comprobó que este polinomio se puede construir utilizando las reglas

$$\begin{aligned}\Delta(\bigcirc) &= 1 \\ \Delta(L_+) - \Delta(L_-) &= (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(L_0).\end{aligned}$$

Conway definió también un nuevo invariante polinomial, el polinomio de Conway (también conocido como el polinomio de Alexander-Conway), que no es sino una reformulación del polinomio de Alexander, con las reglas

$$\begin{aligned}\nabla(\bigcirc) &= 1 \\ \nabla(L_+) - \nabla(L_-) &= z\nabla(L_0).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Vemos por lo tanto que los polinomios de Alexander y Conway están íntimamente relacionados, siendo su relación (notamos que el polinomio de Alexander siempre se puede reescribir como un polinomio en $(t^{-1/2} - t^{1/2})$)

$$\nabla(L)(t^{-1/2} - t^{1/2}) = \Delta(L)(t).\tag{2.2}$$

Los polinomios de Alexander y Conway distinguen el nudo trivial, es decir, son diferentes de 1 para cualquier nudo no trivial, para diagramas de hasta 10 cruces. Sin embargo,

existen nudos (por ejemplo el nudo Conway, de 11 cruces en su diagrama con menor número, representado en la Figura 12) que comparten polinomios de Alexander y Conway con el trivial.

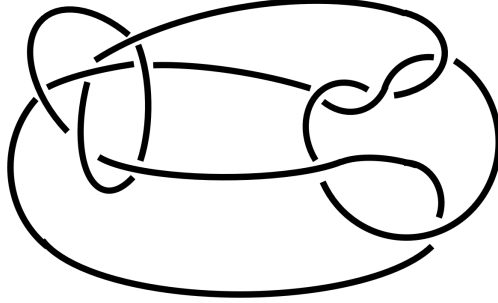


Figura 12: Nudo de Conway. Tiene polinomios de Alexander y Conway iguales a 1.

El polinomio de Alexander, y posteriormente el de Conway, fueron los únicos invariantes polinomiales conocidos durante casi 60 años, a pesar de tener un importante inconveniente: no distinguen la anfiquiralidad de los nudos.

Teorema 2.1. *Los polinomios de Alexander y Conway son siempre iguales para un nudo L y su imagen especular L^* .*

Demostración: Esta demostración utiliza la definición original del polinomio de Alexander como el determinante $\Delta(L) = k \det(tA - A^T)$, donde A es una matriz de Seifert y k es una constante utilizada para normalizarlo de manera que $\Delta(\bigcirc) = 1$. Se puede encontrar esta definición en el capítulo 6 de [11].

Vemos también en esta referencia que si A es una matriz de Seifert de un enlace L , entonces $-A$ será una matriz de Seifert de su imagen especular L^* . Por lo tanto tendremos $\Delta(L^*) = k' \det(-tA + A^T) = -k' \det(tA - A^T) = -\frac{k'}{k} \Delta(L)$. Notamos pues que $\Delta(L^*)$ y $\Delta(L)$ difieren únicamente en una constante, que desaparecerá al normalizar ambos.

□

Estos polinomios no distinguirán pues un enlace y su imagen especular, independientemente de si se trata del mismo nudo o no. No se trata por lo tanto de invariantes completos.

A continuación veremos un ejemplo de cálculo de estos polinomios.

Ejemplo 2.2. Calculamos los polinomios de Alexander y Conway del nudo del trébol zurdo (Figura 15) a partir de sus respectivas skein relations. Para ello usaremos **árboles de resolución** (Figura 13). Notamos que todos los cruces tienen el mismo valor independientemente de la orientación escogida.

Por lo tanto tenemos para el nudo de trébol zurdo T_z el polinomio de Alexander:

$$\begin{aligned} \Delta(\bigcirc) - \Delta(T_z) &= (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(T_{0-}) & \longrightarrow & \Delta(T_z) = 1 - (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(T_{0-}) \\ \Delta(\bigcirc\bigcirc) - \Delta(T_{0-}) &= (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(\bigcirc) & & \Delta(T_{0-}) = t^{1/2} - t^{-1/2} \\ & & \longrightarrow & \Delta(T_z) = 1 - (t^{-1/2} - t^{1/2})(t^{1/2} - t^{-1/2}) \\ & & & = 1 - (1 - t^{-1} - t + 1) \\ & & & = \boxed{t^{-1} - 1 + t} \end{aligned}$$

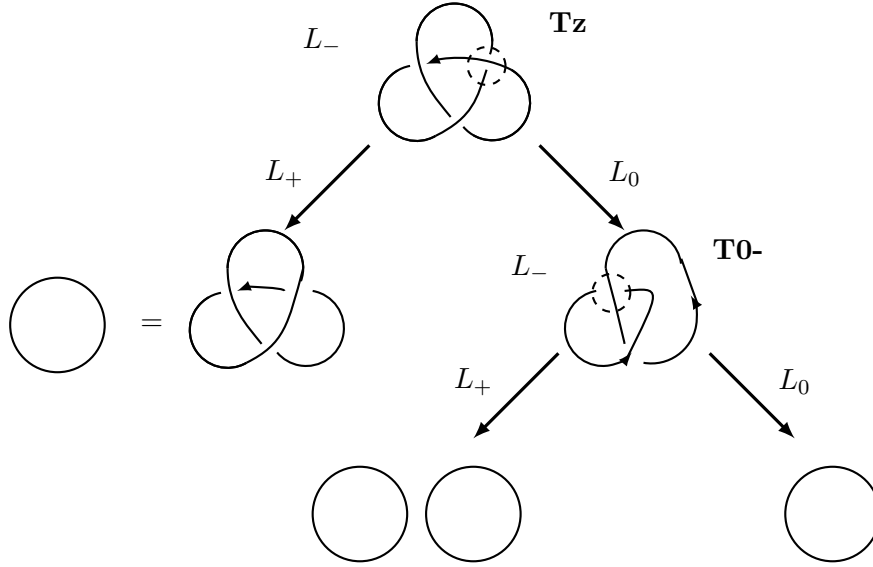


Figura 13: Árbol de resolución del nudo del trébol zurdo.

y análogamente el de Conway:

$$\nabla(T_z) = 1 - z(-z) = 1 - z^2$$

Donde, tomando como L_+ y L_- las dos posibilidades para la proyección del nudo trivial con un único cruce ∞ , obtenemos:

$$\Delta(L_+) - \Delta(L_-) = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(\bigcirc\bigcirc) \quad \longrightarrow \quad \Delta(\bigcirc\bigcirc) = 0$$

Y análogamente $\nabla(\bigcirc\bigcirc) = 0$.

Vemos que efectivamente se cumple la relación (2.2). Los polinomios de Alexander y Conway del nudo del trébol diestro se pueden construir de manera análoga. Se puede comprobar que se obtienen los mismos polinomios, a pesar de que el estudio de otros invariantes como el polinomio de Jones demuestra que no se trata del mismo nudo.

En la sección 2.3 se demostrará que efectivamente los polinomios de Alexander y Conway son invariantes de enlace (Corolario 2.17).

2.2. Polinomio de Jones

Durante más de 50 años, el polinomio de Alexander fue el único invariante polinomial conocido. Pero en 1982, mientras Vaughan Jones daba una conferencia sobre álgebras de von Neumann, un estudiante del público sugirió que las relaciones que aparecían en sus estructuras algebraicas eran similares a las dadas en teoría de nudos. De esta manera comenzó un estudio de invariantes que culminó dos años después con el descubrimiento de un nuevo invariante polinomial: el polinomio de Jones.

A diferencia de Alexander, Jones describió su polinomio desde un principio por medio de una skein relation, con las reglas (utilizando la notación introducida en la Figura 11)

$$\begin{aligned} V(\bigcirc) &= 1 \\ t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Sin embargo, la forma más sencilla de estudiarlo es describiéndolo por medio del **bracket polynomial** de Kauffman. Este se define para nudos sin orientación por las siguientes tres reglas:

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1 \\ \langle \times \rangle &= A \langle \parallel \rangle + A^{-1} \langle \sphericalangle \rangle \\ \langle K \sqcup \bigcirc \rangle &= (-A^{-2} - A^2) \langle K \rangle . \end{aligned}$$

Donde K representa un nudo cualquiera y $K \sqcup \bigcirc$ la unión disjunta de K con un nudo trivial tal que en el diagrama que se estudia el nudo trivial no presente ningún cruce, ya sea con otro nudo o consigo mismo.

Se puede observar sin embargo que no se trata de un invariante polinomial, ya que no permanece invariante por movimientos de Reidemeister de tipo I. Por lo tanto el bracket polynomial puede ser diferente para dos diagramas del mismo nudo.

Lema 2.3. *Sea L un diagrama de enlace al que se aplica un movimiento de Reidemeister tipo I para obtener el diagrama L' , su bracket polynomial cambia según:*

$$\begin{aligned} \langle L' \rangle &= -A^3 \langle L \rangle , & \text{Si el cruce añadido es tipo } +1. \\ \langle L' \rangle &= -A^{-3} \langle L \rangle , & \text{Si el cruce añadido es tipo } -1. \end{aligned}$$

Demostración: Para el primer caso, tenemos

$$\langle L' \rangle = A \langle L \sqcup \bigcirc \rangle + A^{-1} \langle L \rangle = (A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) \langle L \rangle = -A^3 \langle L \rangle .$$

Y para el segundo caso

$$\langle L' \rangle = A \langle L \rangle + A^{-1} \langle L \sqcup \bigcirc \rangle = (A + A^{-1}(-A^{-2} - A^2)) \langle L \rangle = -A^{-3} \langle L \rangle .$$

□

Ejemplo 2.4. Se puede usar esta propiedad para obtener el bracket polynomial de los diagramas del nudo del trébol zurdo (T_z) y diestro (T_d) dados en la Figura 15:

$$\begin{aligned} \langle T_z \rangle &= A \langle \text{diagrama 1} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama 2} \rangle = A(-A^3(-A^3 \langle \bigcirc \rangle)) + A^{-1}(A \langle \text{diagrama 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama 4} \rangle) \\ &= A^7 + A^{-1}(A(-A^3 \langle \bigcirc \rangle) + A^{-1}(-A^{-3} \langle \bigcirc \rangle)) = -A^{-5} - A^3 + A^7 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle T_d \rangle &= A \langle \text{diagrama 5} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama 6} \rangle = A(A \langle \text{diagrama 7} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama 8} \rangle) + A^{-1}(-A^{-3}(-A^{-3} \langle \bigcirc \rangle)) \\ &= A(A(-A^3 \langle \bigcirc \rangle) + A^{-1}(-A^{-3} \langle \bigcirc \rangle)) + A^{-7} = A^{-7} - A^{-3} - A^5 . \end{aligned}$$

Notamos que este polinomio, a pesar de no ser un invariante de enlace, sí distingue entre los nudos del trébol zurdo y diestro.

A pesar de no tratarse de un invariante, el bracket polynomial puede transformarse en uno fácilmente. Para ello introducimos el writhe:

Definición 2.5. *Llamamos **writhe** de un enlace $w(L)$ a la suma de los valores $+1$ y -1 correspondientes a todos los cruces de un enlace.*

Notamos que los movimientos de Reidemeister tipo I suman o restan 1 al writhe de un enlace. Definimos para un enlace L el **polinomio $X(L)$** a partir del bracket polynomial con la intención de hacerlo invariante por estos movimientos:

$$X(L) = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle .$$

Lema 2.6. *Sea L un diagrama de enlace al que se aplica un movimiento de Reidemeister tipo I para obtener el diagrama L' , su polinomio $X(L)$ permanece invariante.*

Demostración: Para el caso en que el cruce añadido es de tipo +1, tenemos

$$X(L') = (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle = (-A^3)^{-w(L')+1} \langle L \rangle = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle = X(L) .$$

Y para el caso en el que es de tipo -1

$$X(L') = (-A^3)^{-w(L')} \langle L' \rangle = (-A^3)^{-w(L')-1} \langle L \rangle = (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle = X(L) .$$

□

El **polinomio de Jones** $V(L)$ se define a partir este polinomio $X(L)$, sustituyendo A por $t^{-1/4}$ para obtener un polinomio de Laurent de coeficientes enteros y variable $t^{1/2}$.

Ejemplo 2.7. Podemos obtener los polinomios $X(L)$ de los nudos del trébol zurdo T_z y diestro T_d a partir de sus bracket polynomials obtenidos en el ejemplo 2.4:

$$\begin{aligned} \langle T_z \rangle &= -A^{-5} - A^3 + A^7 & \longrightarrow & X(T_z) = (-A^3)^3 \langle T_z \rangle = A^4 + A^{12} - A^{16} , \\ \langle T_d \rangle &= A^{-7} - A^{-3} - A^5 & \longrightarrow & X(T_d) = (-A^3)^{-3} \langle T_d \rangle = -A^{-16} + A^{-12} + A^{-4} . \end{aligned}$$

Por lo tanto sus polinomios de Jones serán:

$$\begin{aligned} V(T_z) &= t + t^3 - t^4 , \\ V(T_d) &= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} . \end{aligned}$$

Notamos que estos invariantes polinomiales, a diferencia del polinomio de Alexander, sí distinguen entre estos dos nudos, a pesar de ser imágenes especulares el uno del otro. Notamos también que los polinomios para estos nudos difieren únicamente en un cambio en el signo de los exponentes de t . Esto será una propiedad general para todas las imágenes especulares, como veremos en el corolario 2.10.

Esta definición del polinomio de Jones a partir del bracket polynomial es equivalente a la dada por Jones a partir de la skein relation (2.3). En la sección 2.3 se demostrará que efectivamente se trata de un invariante (Corolario 2.18).

Teorema 2.8. *Las definiciones de polinomio de Jones por medio de las reglas dadas en la relación (2.3) y a partir del polinomio $X(L)$ sustituyendo A por $t^{-1/4}$ son equivalentes.*

Demostración: Escribimos la segunda regla de la definición del bracket polynomial en términos de L_+ y L_- , obteniendo

$$\begin{aligned} \langle L_+ \rangle &= A \langle || \rangle + A^{-1} \langle \sphericalangle \rangle . \\ \langle L_- \rangle &= A \langle \sphericalangle \rangle + A^{-1} \langle || \rangle . \end{aligned}$$

Multiplicando por A y A^{-1} respectivamente y sumando estas relaciones obtenemos

$$A \langle L_+ \rangle - A^{-1} \langle L_- \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle L_0 \rangle .$$

Tomando orientaciones consistentes para estos tres enlaces, la relación entre sus writhes será

$$w(L_+) - 1 = w(L_0) = w(L_-) + 1 .$$

Por lo tanto la relación entre sus polinomios $X(L)$ será, utilizando la relación $\langle L \rangle = (-A^3)^{w(L)} X(L)$,

$$\begin{aligned} A(-A^3)^{w(L_0)+1} X(L_+) - A^{-1}(-A^3)^{w(L_0)-1} X(L_-) &= (A^2 - A^{-2})(-A^3)^{w(L_0)} X(L_0) \\ A^4 X(L_+) - A^{-4} X(L_-) &= (A^2 - A^{-2}) X(L_0) . \end{aligned}$$

Finalmente, con el cambio de variable necesario para pasar al polinomio de Jones $A = t^{-1/4}$, se obtiene la skein relation de la ecuación (2.3),

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0) .$$

Finalmente notamos que en ambos casos el polinomio del nudo trivial es 1. □

Hasta ahora no se ha encontrado ningún nudo no trivial con polinomio de Jones 1, por lo que es un problema abierto si este polinomio distingue el nudo trivial.

El polinomio de Jones resultó especialmente útil en el momento de su descubrimiento por ser el primer invariante capaz de detectar algunos nudos no anfiquirales.

Lema 2.9. *Sea L un enlace y L^* su imagen especular, la relación entre sus bracket polynomials será*

$$\langle L \rangle (A) = \langle L^* \rangle (A^{-1}) .$$

Demostración: Construimos el bracket polynomial a partir de las tres reglas con las que lo hemos definido. Estudiamos cómo cambia esta construcción al cambiar todos los cruces.

En primer lugar, vemos que la primera regla cumple el lema, al no involucrar ningún cruce ni A . Para la segunda regla, vemos que cambiar el cruce por su imagen especular intercambia A y A^{-1} , ya que tenemos

$$\langle \times \rangle = A \langle \parallel \rangle + A^{-1} \langle \times \rangle \quad \longrightarrow \quad \langle \times \rangle = A \langle \times \rangle + A^{-1} \langle \parallel \rangle .$$

Finalmente, vemos que la tercera regla permanece igual tanto si cambiamos el enlace por su imagen especular como si sustituimos A por A^{-1} , por lo que también cumple el lema. □

Corolario 2.10. *Sea L un enlace y L^* su imagen especular, la relación entre sus polinomios de Jones será:*

$$V(L)(t^{1/2}) = V(L^*)(t^{-1/2}) .$$

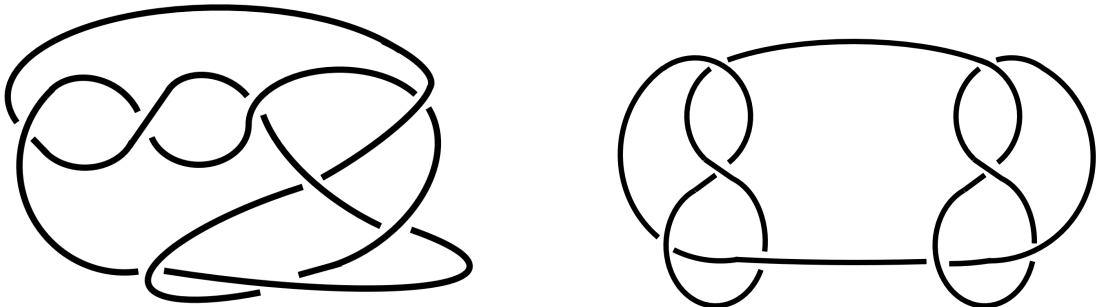
Demostración: Al obtenerse el polinomio de Jones realizando un cambio de variable al polinomio $X(L)$, bastará demostrar que sea L un enlace y L^* su imagen especular, $X(L)(A) = X(L^*)(A^{-1})$. Notamos que $w(L^*) = -w(L)$, por lo que

$$\begin{aligned} X(L)(A) &= (-A^3)^{-w(L)} \langle L \rangle (A) = (-A^3)^{w(L^*)} \langle L^* \rangle (A^{-1}) \\ &= (-(A^{-1})^3)^{-w(L^*)} \langle L^* \rangle (A^{-1}) = X(L^*)(A^{-1}). \end{aligned}$$

□

Esta propiedad se puede utilizar fácilmente para detectar nudos no anfiquirales. Si un enlace L es anfiquiral, necesariamente se cumplirá $V(L) = V(L^*)$, donde L^* es la imagen especular de L . Estos polinomios se reconocerán por tener coeficientes palíndromos, es decir, para cualquier n el coeficiente del término en t^n será el mismo que el del término en t^{-n} . El recíproco no es necesariamente cierto, ya que tener el mismo polinomio de Jones no implica necesariamente que dos enlaces sean equivalentes, por lo que no podemos utilizar el polinomio de Jones para asegurar que un nudo sea anfiquiral.

A pesar de tener esta propiedad de la que el polinomio de Alexander carece, esto no quiere decir que sea mejor herramienta para distinguir nudos. De hecho, hay nudos que el polinomio de Jones no distingue pero el de Alexander sí, como por ejemplo los representados en la Figura 14. Este hecho remarca que el polinomio de Jones no es una extensión o variación del polinomio de Alexander como lo era el de Conway, sino un invariante polinomial diferente. También pone en evidencia que no se trata de un invariante completo.



(a) Nudo 8_9 ,
 $\Delta(t) = -t^{-6} + 3t^{-4} - 5t^{-2} + 7 - 5t^2 + 3t^4 - t^6$.

(b) Nudo $4_1 \# 4_1$,
 $\Delta(t) = t^{-4} - 6t^{-2} + 11 - 6t^2 + t^4$.

Figura 14: Dos nudos que el polinomio de Alexander distingue, pero el de Jones no. Ambos tienen polinomio de Jones $V(t) = t^{-4} - 2t^{-3} + 3t^{-2} - 4t^{-1} + 5 - 4t + 3t^2 - 2t^3 + t^4$.

2.3. Polinomio de HOMFLY

El descubrimiento del polinomio de Jones abrió la puerta a la búsqueda de más invariantes polinomiales, en particular invariantes que generalizaran los polinomios de Jones y Alexander. El primero de estos polinomios fue el polinomio de HOMFLY, que recibe este nombre de las iniciales de sus descubridores Freyd, Yetter, Hoste, Lickorish, Millett y Ocneanu. También recibe el nombre de polinomio de HOMFLYPT, reconociendo el trabajo independiente realizado por Przytycki y Traczyk.

Se trata de un polinomio de Laurent en dos variables, definido también por una skein relation, que de acuerdo con la notación introducida en la Figura 11 queda representada

por las reglas

$$\begin{aligned} P(\bigcirc) &= 1, \\ lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Este polinomio generaliza los de Alexander y Jones, ya que se pueden obtener de él con cambios de variable.

Lema 2.11. *El polinomio de Alexander se obtiene del polinomio de HOMFLY realizando los cambios de variable $l = i$ y $m = i(t^{1/2} - t^{-1/2})$.*

Demostración: Vemos que al realizar este cambio, la skein relation del polinomio de HOMFLY se convierte en la del polinomio de Alexander.

$$\begin{aligned} lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 &\longrightarrow i\Delta(L_+) + i^{-1}\Delta(L_-) + i(t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) = 0 \\ &\quad - \Delta(L_+) + \Delta(L_-) - (t^{1/2} - t^{-1/2})\Delta(L_0) = 0 \\ \Delta(L_+) - \Delta(L_-) &= (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(L_0). \end{aligned}$$

□

Corolario 2.12. *El polinomio de Conway se obtiene del polinomio de HOMFLY realizando los cambios de variable $l = i$ y $m = -iz$.*

Lema 2.13. *El polinomio de Jones se obtiene del polinomio de HOMFLY realizando los cambios de variable $l = it^{-1}$ y $m = i(t^{-1/2} - t^{1/2})$.*

Demostración: Vemos que al realizar este cambio, la skein relation del polinomio de HOMFLY se convierte en la del polinomio de Jones.

$$\begin{aligned} lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 &\longrightarrow it^{-1}\Delta(L_+) + i^{-1}t\Delta(L_-) + i(t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(L_0) = 0 \\ &\quad - t^{-1}\Delta(L_+) + t\Delta(L_-) - (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(L_0) = 0. \end{aligned}$$

□

Una consecuencia de este hecho es que, al igual que en el caso del polinomio de Jones, es un problema abierto si el polinomio de HOMFLY es capaz de distinguir el nudo trivial de todos los demás.

Ejemplo 2.14. Utilizando los árboles de resolución dados en el ejemplo 2.2 se puede obtener el polinomio de HOMFLY para los nudos del trébol zurdo y diestro, obteniendo para el zurdo:

$$\begin{aligned} lP(\bigcirc) + l^{-1}P(T_z) + mP(T_{0-}) = 0 \\ lP(\bigcirc\bigcirc) + l^{-1}P(T_{0-}) + mP(\bigcirc) = 0 &\longrightarrow \begin{aligned} P(T_z) &= -l(l + mP(T_{0-})) \\ P(T_{0-}) &= -l(-lm^{-1}(l + l^{-1}) + m) \end{aligned} \\ &\longrightarrow P(T_z) = -l(l + l^2(l + l^{-1}) - lm^2) = -l^4 - 2l^2 + l^2m^2 \end{aligned}$$

Donde, tomando como L_+ y L_- las dos posibilidades para la proyección del nudo trivial con un único cruce ∞ , obtenemos:

$$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(\bigcirc\bigcirc) = l + l^{-1} + mP(\bigcirc\bigcirc) = 0 \longrightarrow P(\bigcirc\bigcirc) = -m^{-1}(l + l^{-1})$$

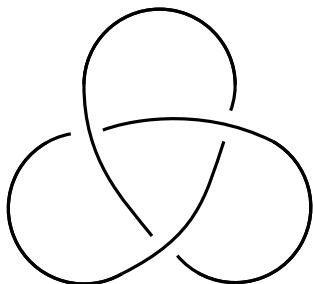
Y para el nudo del trébol diestro:

$$\begin{aligned} lP(T_d) + l^{-1}P(\bigcirc) + mP(T_{0+}) &= 0 \\ lP(T_{0+}) + l^{-1}P(\bigcirc\bigcirc) + mP(\bigcirc) &= 0 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} P(T_d) &= -l^{-1}(l^{-1} + mP(T_{0+})) \\ P(T_{0+}) &= -l^{-1}(-l^{-1}m^{-1}(l + l^{-1}) + m) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow P(T_d) = -l^{-1}(l^{-1} - ml^{-1}(-m^{-1}(1 + l^{-2}) + m)) = -l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$$

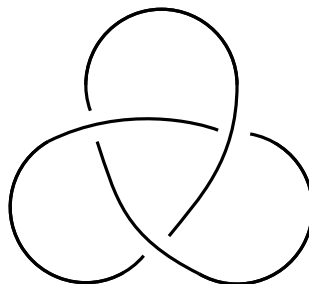
Se puede comprobar fácilmente que al realizar las sustituciones necesarias se obtienen los polinomios de Alexander y Conway vistos en el ejemplo 2.2 y el polinomio de Jones visto en el ejemplo 2.7 (Figura 15).

Nudo del trébol zurdo T_z



$$\begin{aligned} \Delta(t) &= t^{-1} - 1 + t \\ \nabla(z) &= 1 + z^2 \\ V(t) &= t + t^3 - t^4 \\ P(l, m) &= -l^4 - 2l^2 + m^2l^2 \end{aligned}$$

Nudo del trébol diestro T_d



$$\begin{aligned} \Delta(t) &= t^{-1} - 1 + t \\ \nabla(z) &= 1 + z^2 \\ V(t) &= -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1} \\ P(l, m) &= -l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2} \end{aligned}$$

Figura 15: Los polinomios de Alexander y Conway no distinguen el nudo de trébol zurdo (izquierda) y diestro (derecha), mientras que el de Jones y el HOMFLY sí.

Vemos también que del polinomio de HOMFLY de un enlace se puede obtener fácilmente el de su imagen especular.

Lema 2.15. *Sea L un enlace y L^* su imagen especular, la relación entre sus polinomios de HOMFLY será*

$$P(L^*)(l, m) = P(L)(l^{-1}, m).$$

Demostración: Esta relación sale directamente de la skein relation (2.4) que define el polinomio de HOMFLY. Los árboles de resolución de L y L^* tendrán la misma estructura, pero intercambiando las “ramas” correspondientes a L_+ y L_- . Por lo tanto, tendremos que en cada paso $lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0 = lP(L_-^*) + l^{-1}P(L_+^*) + mP(L_0^*)$. Vemos pues que se puede llegar del polinomio de L al de L^* y viceversa intercambiando las l y las l^{-1} . □

Notamos que por ahora no hemos demostrado que ninguno de los invariantes polinomiales que hemos definido sean realmente invariantes de nudo. A continuación comprobaremos que en efecto el polinomio de HOMFLY es un invariante de nudos, viendo por lo tanto que los polinomios de Alexander, Conway y Jones también lo son.

Teorema 2.16. *El polinomio de HOMFLY existe y es un invariante de enlace.*

Idea de la demostración: (Demostración completa en [11], capítulo 15)

Por el lema 1.24, basta ver que se mantiene invariante por movimientos de Reidemeister.

La demostración se hace por inducción construyendo *diagramas ascendentes* (diagramas de nudo en los que se han cambiado por su opuesto los cruces necesarios para que desde un punto base fijado previamente se pasen siempre por debajo la primera vez que se encuentran). El diagrama ascendente αD de un diagrama D es el diagrama trivial, y a partir de él se puede construir D cambiando un cruce cada vez.

En cada iteración, el polinomio de HOMFLY para un enlace L está bien definido, ya que si cambiamos un cruce $+1$ (resp. -1) por el opuesto, conoceremos por inducción $P(L_0)$ y el valor del polinomio antes del cambio $P(L_+)$ (resp. $P(L_-)$), por lo que podemos deducir todos los términos y calcular el polinomio. De esta manera construimos por inducción $P(L)$. Se puede comprobar que se obtiene el mismo polinomio independientemente del punto base escogido o el orden en que se tomen sus componentes.

Estudiando cómo afectan a esta manera de construir el polinomio de HOMFLY los movimientos de Reidemeister se llega a la conclusión de que para los tres posibles tipos de movimiento siempre se puede escoger un punto base tal que no haya que cambiar la orientación de ninguno de los cruces involucrados para construir el diagrama ascendente, obteniendo antes y después de realizarlo el mismo αD y por lo tanto el mismo $P(L)$.

□

Corolario 2.17. *Los polinomios de Alexander y Conway son invariantes de enlace.*

Corolario 2.18. *El polinomio de Jones es un invariante de enlace.*

Invariantes polinomiales	Alexander	Conway	Jones	HOMFLY
Nudo trivial	$\Delta(\bigcirc) = 1$	$\nabla(\bigcirc) = 1$	$V(\bigcirc) = 1$	$P(\bigcirc) = 1$
Skein relation	$\Delta(L_+) - \Delta(L_-) = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta(L_0)$	$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0)$	$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0)$	$lP(L_+) + l^{-1}P(L_-) + mP(L_0) = 0$
Invariante universal	No	No	No	No
Distingue nudo trivial	Hasta 10 cruces	Hasta 10 cruces	Problema abierto	Problema abierto
Imagen especular	$\Delta(L) = \Delta(L^*)$	$\nabla(L) = \nabla(L^*)$	$V(L)(t^{1/2}) = V(L^*)(t^{-1/2})$	$P(L)(l, m) = P(L^*)(l^{-1}, m)$
Relación con HOMFLY	$l = i$ $m = i(t^{1/2} - t^{-1/2})$	$l = i$ $m = -iz$	$l = it^{-1}$ $m = i(t^{-1/2} - t^{1/2})$	$l = l$ $m = m$
Trébol zurdo	$\Delta(t) = t^{-1} - 1 + t$	$\nabla(z) = 1 + z^2$	$V(t) = t + t^3 - t^4$	$P(l, m) = -l^4 - 2l^2 + m^2l^2$
Trébol diestro	$\Delta(t) = t^{-1} - 1 + t$	$\nabla(z) = 1 + z^2$	$V(t) = -t^{-4} + t^{-3} + t^{-1}$	$P(l, m) = -l^{-4} - 2l^{-2} + m^2l^{-2}$

3. Invariantes de Vassiliev

Tras el descubrimiento de la utilidad de los invariantes polinomiales y la utilización de la skein relation, el próximo paso es su generalización a invariantes de tipo finito. A partir de ahora nos centraremos en enlaces de una sola componente: nudos.

3.1. Definición y ejemplos

Para tratar con invariantes de Vassiliev es conveniente definir una generalización del concepto de nudo: los *nudos singulares*. Estos serán nudos en los que podrá haber puntos en los que dos trozos se corten en vez de cruzarse.

Definición 3.1. *Un nudo singular es una inmersión de S^1 en \mathbb{R}^3 con un número finito de puntos dobles transversales.*

Definición 3.2. *Una función continua $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una inmersión si para cada punto $x \in S^1$ existe un entorno U_x tal que la restricción de f a U_x es un embedding.*

Representaremos estos nudos singulares por **diagramas de nudos singulares**, definidos de la misma manera que los diagramas de nudo (definición 1.6), donde los puntos dobles se representan dibujando las dos hebras que participan cruzadas con un círculo alrededor del punto de corte, tal y como aparece en el diagrama correspondiente a K' en la Figura 16.

De la misma manera que en el caso de los nudos, dos nudos singulares serán **equivalentes** si existe entre ellos una isotopía del espacio, o equivalentemente si tienen representaciones poligonales relacionadas por una secuencia finita de movimientos Δ . Esta noción de equivalencia se traduce a los diagramas de nudo singular de la misma manera que ocurre en los diagramas de nudo.

Teorema 3.3. *Dos diagramas son de nudos singulares equivalentes si se puede llegar de uno a otro mediante una secuencia finita de movimientos de Reidemeister e isotopías del plano.*

Demostración Ver demostración del teorema 1.18. Las demostraciones difieren en que además de cruces los triángulos que resultan de proyectar los movimientos Δ pueden contener la proyección de un punto singular, pero esto no tiene ningún efecto sobre la identificación de movimientos Δ con isotopías del espacio o movimientos de Reidemeister. □

Sea \mathbb{F} un cuerpo de característica 0, cualquier invariante de nudos V con imagen en \mathbb{F} se puede extender a un invariante $V^{(m)}$ de nudos singulares con exactamente m autointersecciones transversales usando las relaciones:

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= V \\ V^{(m)}(K') &= V^{(m-1)}(K_+) - V^{(m-1)}(K_-) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Donde K_+ , K_- y K' representan diagramas de nudos idénticos excepto por un cruce en el que los segmentos se cruzan según se muestra en la Figura 16. Usando esta extensión de invariantes a nudos singulares, podemos definir los invariantes de tipo m y de Vassiliev.

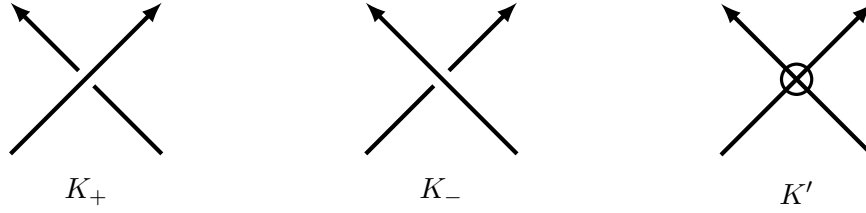


Figura 16

Definición 3.4. Sea $m \in \mathbb{Z}$ un entero no negativo. Un invariante V de nudos orientados es un **invariante de tipo m** si desaparece ($V(K) = 0$) en nudos singulares con más de m autointersecciones. Llamamos \mathcal{V}_m al conjunto de invariantes de tipo m .

Ejemplo 3.5. Por ejemplo, se puede comprobar fácilmente que el invariante constante κ_r , $r \in \mathbb{C}$ definido por $\kappa_r(K) = r$ es un invariante de tipo 0, ya que para cualquier nudo con un punto singular se tiene por la relación 3.1

$$V^{(1)}(K') = V^{(0)}(K_+) - V^{(0)}(K_-) = r - r = 0.$$

Y para nudos con $m > 1$ puntos singulares se ve fácilmente por inducción que también $V^{(m)}(K) = 0$:

$$V^{(m)}(K') = V^{(m-1)}(K_+) - V^{(m-1)}(K_-) = 0 - 0 = 0.$$

Definición 3.6. Un invariante V de nudos orientados es un **invariante de Vassiliev** o **invariante de tipo finito** si es un invariante de tipo m para algún $m \in \mathbb{N}$. Llamamos \mathcal{V} al conjunto de invariantes de Vassiliev.

De esta definición se deduce que el espacio de los invariantes de Vassiliev admite una filtración:

Lema 3.7. Existe una filtración el espacio de invariantes de Vassiliev

$$\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2 \subseteq \dots$$

Demostración: Sea $V \in \mathcal{V}_m$ Un invariante de Vassiliev de tipo m , vemos que necesariamente es también un invariante de Vassiliev de tipo $m + 1$. Por tratarse de un invariante de tipo m , $V^{(m+1)}(K) = 0$ para cualquier nudo K . Ahora bien, aplicando la relación 3.1 se obtiene:

$$V^{(m+2)}(K) = V^{(m+1)}(K_+) - V^{(m+1)}(K_-) = 0 - 0 = 0$$

Por lo tanto se trata también de un invariante de Vassiliev de tipo $m + 1$. □

Vemos que los invariantes polinomiales vistos en la sección 2 se pueden interpretar de manera que se ajusten a esta definición.

Teorema 3.8. Cada coeficiente del polinomio de Conway es un invariante de Vassiliev.

Demostración: Sea $C(K)(z)$ el polinomio de Conway de un nudo K , su extensión por (3.1) a nudos singulares será (utilizando la skein relation 2.1 por la que se define el polinomio de Conway):

$$C(K') = C(K_+) - C(K_-) = z \cdot C(K_0)$$

Donde los nudos K' , K_+ , K_- y K_0 son nudos idénticos excepto en una región, en la que se cruzan o no según indican las Figuras 11 y 16.

Por lo tanto, si K tiene más de m puntos dobles, el polinomio $C(K)$ será divisible por z y por lo tanto todos los coeficientes de términos de grado $< m$ serán cero. Esto implica que el m -ésimo coeficiente del polinomio de Conway es un invariante de Vassiliev de tipo m , ya que desaparece al añadir un punto singular al nudo. \square

Teorema 3.9. *Aplicando un cambio de variable apropiado, cada coeficiente de la expansión de Taylor de los polinomios de Jones y HOMFLY es un invariante de Vassiliev.*

Demostración: Demostramos el caso del polinomio de HOMFLY.

Realizamos sobre el polinomio de HOMFLY el cambio de variables $l = iq^{N/2}$, $m = -i(q^{1/2} - q^{-1/2})$, de manera que su skein relation (2.4) resulta, tras multiplicarla por i^3 , la relación en dos variables

$$q^{N/2}P(K_+) - q^{-N/2}P(K_-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})P(K_0).$$

A continuación realizamos el cambio de variable $q = e^x$ y hacemos la expansión de Taylor:

$$\begin{aligned} e^{xN/2}P(K_+) &= \left(1 + \frac{N}{2}x + \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{x^2}{2!} + \left(\frac{N}{2}\right)^3 \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) P(K_+), \\ e^{-xN/2}P(K_-) &= \left(1 - \frac{N}{2}x + \left(\frac{N}{2}\right)^2 \frac{x^2}{2!} - \left(\frac{N}{2}\right)^3 \frac{x^3}{3!} + O(x^4)\right) P(K_-), \\ (e^{x/2} - e^{-x/2})P(K_0) &= \left(x + \frac{x^3}{2^2 3!} + \frac{x^5}{2^4 5!} + O(x^7)\right) P(K_0). \end{aligned}$$

Tras este cambio la skein relation queda

$$\begin{aligned} P(K_+) - P(K_-) + \left[\left(\frac{N}{2}x + \frac{N^2 x^2}{2^2 2!} + O(x^3) \right) P(K_+) - \left(-\frac{N}{2}x + \frac{N^2 x^2}{2^2 2!} - O(x^3) \right) P(K_-) \right] &= \\ &= \left(x + \frac{x^3}{2^2 3!} + \frac{x^5}{2^4 5!} + O(x^7) \right) P(K_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, su generalización a nudos singulares será

$$P(K') = P(K_+) - P(K_-) = x \cdot (\text{Otros términos}).$$

En consecuencia, si K' tiene m autointersecciones, $P(K')$ será divisible por x^m , lo que significa que todos los coeficientes de términos de grado $< m$ serán 0. Esto implica que el

coeficiente del término en grado m del polinomio resultante de realizar estos cambios de variable es un invariante de Vassiliev de tipo m .

Vemos que el caso del polinomio de Jones corresponde al caso particular en el que $N = 2$.

□

La relación 3.1 puede usarse también para “*desingularizar*” cualquier nudo singular, aplicándola a cada uno de sus puntos singulares.

Ejemplo 3.10. En la Figura 17 aparece un ejemplo de desingularización de un nudo singular.

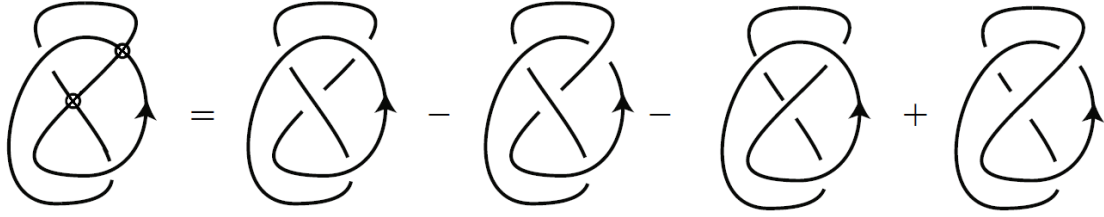


Figura 17: Ejemplo de la desingularización de un nudo singular.

El resultado de la “desingularización” de un nudo singular se denomina su *resolución de Vassiliev*, y será un elemento del espacio vectorial de nudos \mathcal{K} .

Definición 3.11. Sea \mathcal{K} el espacio vectorial formado por la combinación lineal de clases de equivalencia de nudos orientados sobre \mathbb{C} . Llamamos a \mathcal{K} el **espacio vectorial de nudos**.

Teniendo en cuenta la identificación de un nudo singular con su resolución de Vassiliev, definimos el espacio vectorial \mathcal{K}_m

Definición 3.12. Se define el **espacio vectorial** \mathcal{K}_m como el subespacio de dimensión finita de \mathcal{K} generado por el conjunto de todos los nudos singulares orientados con al menos m puntos singulares.

De la definición de \mathcal{K}_m se deduce que el espacio \mathcal{K} de nudos admite una filtración

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_0 \supseteq \mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{K}_2 \supseteq \dots$$

Definimos también el espacio vectorial de nudos singulares \mathcal{K}^\bullet

Definición 3.13. Sea \mathcal{K}^\bullet el espacio vectorial formado por la combinación lineal de clases de equivalencia de nudos singulares orientados sobre \mathbb{C} . Llamamos a \mathcal{K}^\bullet el **espacio vectorial de nudos singulares**.

Definición 3.14. Se define el **espacio vectorial** \mathcal{K}_m^\bullet como el subespacio de dimensión finita de \mathcal{K}^\bullet generado por el conjunto de todos los nudos singulares orientados con exactamente m puntos singulares.

Una consecuencia de esta definición es que, a pesar de (a diferencia de \mathcal{K}) no admitir una filtración, $\dot{\mathcal{K}}$ admite una graduación

$$\dot{\mathcal{K}} = \dot{\mathcal{K}}_0 \oplus \dot{\mathcal{K}}_1 \oplus \dot{\mathcal{K}}_2 \oplus \dots$$

3.2. Diagramas de cuerdas

Dos nudos singulares pueden tener el mismo valor para un invariante de Vassiliev, y de hecho muchos de ellos lo tendrán. En particular, se puede comprobar que los invariantes de Vassiliev no dependen de la orientación de los cruces, algo que como hemos visto no es necesariamente cierto para todos los invariantes.

Lema 3.15. *Sea V un invariante de Vassiliev de tipo m y sean $K, K' \in \dot{\mathcal{K}}_m$ dos nudos singulares con exactamente m puntos singulares. Si se puede llegar de K a K' mediante una secuencia finita de cambios de signo de sus cruces e isotopías del plano, entonces $V(K) = V(K')$.*

Demostración: Consideramos el caso en el que K y K' se diferencian únicamente en un cruce. Si difieren en más de un cruce, se aplica este proceso una vez por cada cambio de cruce hasta llegar de K a K' o viceversa.

Podemos asumir sin pérdida de generalidad que este cruce es de tipo $+1$ en K y -1 en K' . Al diferenciarse únicamente en un cruce, existe un nudo singular $K'' \in \dot{\mathcal{K}}_{m+1}$, idéntico a K y K' excepto por el cruce que los diferencia, que en K'' es un punto singular.

Al aplicar a K' la relación de Vassiliev (3.1) para el invariante V se obtiene $V^{(m+1)}(K'') = V^m(K) - V^m(K')$. Al ser V por hipótesis un invariante de Vassiliev de tipo m , necesariamente $V^{(m+1)}(K'') = 0$ y por lo tanto $V^m(K) = V^m(K')$.

En el caso de las isotopías del plano, hemos visto que no afectan a los invariantes. □

Como consecuencia de este lema vemos que no es necesario conocer todo K para obtener $V(K)$, sino que bastará con conocer su secuencia de puntos singulares.

Lema 3.16. *Sea V un invariante de Vassiliev de tipo m y sean $K \in \dot{\mathcal{K}}_m$ un nudo singular con exactamente m puntos singulares. Entonces $V(K)$ depende únicamente del orden cíclico en el que aparecen los puntos singulares al recorrer K en el sentido de su orientación.*

Demostración: El orden cíclico de los puntos singulares define un nudo singular módulo isotopías del espacio, movimientos de Reidemeister y cambios de signo de los cruces. □

Por lo tanto, para tratar con invariantes de Vassiliev no es necesario considerar el espacio de los nudos singulares. Será suficiente tratar con las secuencias cíclicas que determinen el orden en que aparecen sus puntos singulares al recorrer el nudo en el sentido de su orientación. Estas secuencias se pueden representar mediante diagramas de cuerdas.

Definición 3.17. *Un **diagrama de cuerdas** es un círculo orientado con un número finito de cuerdas entre dos puntos del círculo. Dos diagramas de cuerdas se consideran el mismo si existe un difeomorfismo que preserve la orientación entre ellos. Denotamos el conjunto de todos los diagramas de cuerdas por \mathcal{D}^c .*

Definición 3.18. Un *difeomorfismo* es un homeomorfismo diferenciable con inversa diferenciable.

Definición 3.19. El *grado* de un diagrama es su número de cuerdas, y denotamos por $\mathcal{G}_m\mathcal{D}^c$ el conjunto de los diagramas de cuerdas de grado m .

Por convención, los círculos se orientan en sentido antihorario y las cuerdas se representan por líneas discontinuas, como aparece en la Figura 18.

Ejemplo 3.20. Por ejemplo, el conjunto $\mathcal{G}_3\mathcal{D}^c$ de diagramas de cuerdas de grado 3 está formado por los 5 elementos representados en la Figura 18.

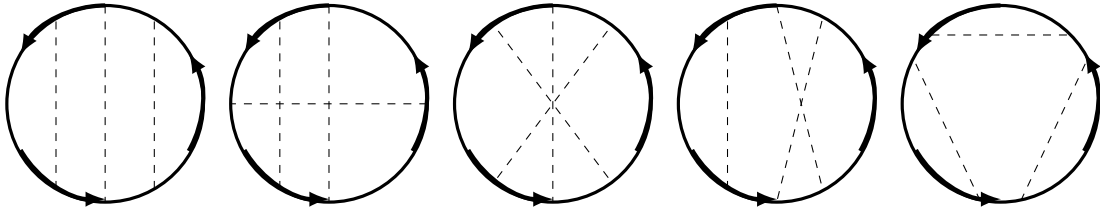


Figura 18: Los cinco elementos de $\mathcal{G}_3\mathcal{D}^c$.

Vemos que de cada diagrama de cuerdas D se puede obtener un nudo singular mediante una inmersión K_D , definida a continuación.

Definición 3.21. Se define K_D como una inmersión $K_D : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuyas únicas singularidades son autointersecciones transversales que satisfacen

$$K_D(\theta) = K_D(\theta') \iff (\theta = \theta') \text{ o } (\theta \text{ y } \theta' \text{ son los dos extremos de una cuerda en } D) .$$

Ejemplo 3.22. Un ejemplo de una imagen de K_D para un $D \in \mathcal{G}_2\mathcal{D}^c$ aparece representado en la Figura 19.

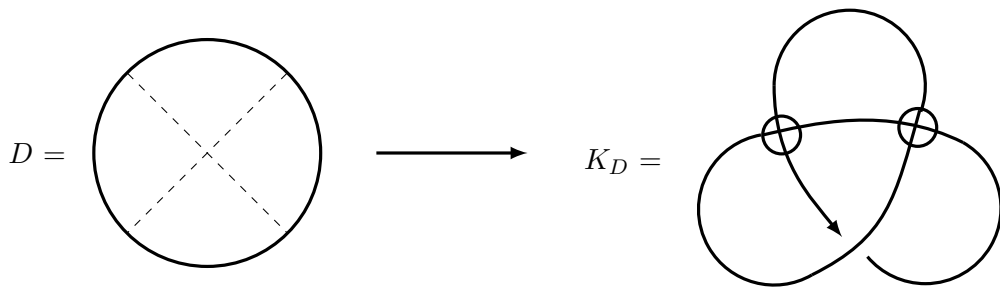


Figura 19: Ejemplo de un K_D para un diagrama de cuerdas D .

La imagen de K_D no será necesariamente única, pero en todas sus posibles imágenes el orden cíclico en que aparecen los puntos singulares la recorrerla en el sentido de la orientación será el mismo. En consecuencia, por el lema 3.16, sean un invariante de Vassiliev V de tipo m y un diagrama de cuerdas $D \in \mathcal{G}_m\mathcal{D}^c$, entonces se puede definir $V(K_D)$ sin ambigüedades, ya que será igual para todas las imágenes de K_D .

3.3. Weight systems

Tras ver la utilidad de los diagramas de cuerdas para tratar con invariantes de Vassiliev, podemos introducir los *weight systems*. Veremos que estos tendrán un papel esencial en el teorema 1.29.

Definición 3.23. Un *weight system* de grado m evaluado en \mathbb{F} es una función $W_m : \mathcal{G}_m \mathcal{D}^c \rightarrow \mathbb{F}$ con las propiedades:

1. Si $D \in \mathcal{G}_m \mathcal{D}^c$ tiene una **cuerda aislada** (una cuerda que no intersecciona ninguna otra cuerda de D), entonces $W(D) = 0$. Llamamos a esta propiedad **relación 1T**
2. Si cuatro diagramas S , E , W y N son idénticos excepto por una sección en la que sus diferencias aparecen representadas en la Figura 20. Entonces se cumple la propiedad llamada **relación 4T**

$$W(S) - W(E) = -W(W) + W(N).$$

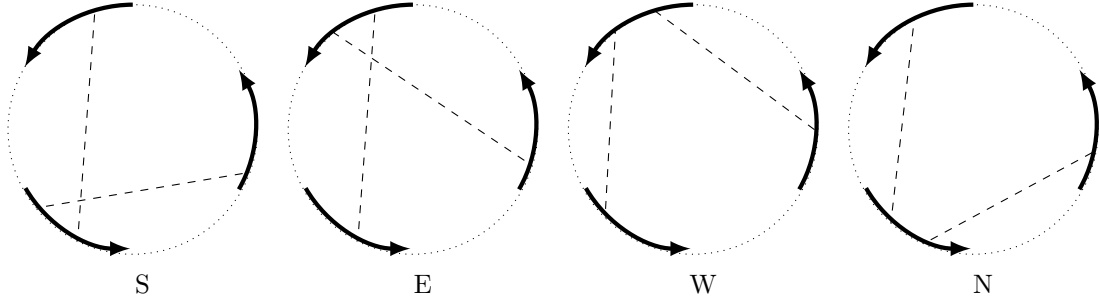


Figura 20

Vemos que se puede construir un weight system a partir de un invariante de Vassiliev, demostrando así la primera parte del teorema 1.29.

3.3.1. Demostración de (1) del teorema 1.29

Definimos a partir de un invariante de Vassiliev de tipo m , V , el weight system W tal que:

$$W(D) = W_m(V)(D) = V(K_D).$$

Comprobamos que se trata de un weight system. Vemos que se trata de una función $W_m : \mathcal{G}_m \mathcal{D}^c \rightarrow \mathbb{F}$, por lo que solo queda comprobar que cumple las relaciones 1T y 4T.

Para comprobar la relación 1T, suponemos que el diagrama D tiene una cuerda aislada. En este caso, tanto D como K_D se podrán representar como aparecen en la Figura 21, donde las zonas sombreadas pueden contener cualquier configuración de cuerdas y cruces, o ninguna cuerda o cruce en absoluto.

Aplicando la relación (3.1) de manera que K' corresponda al nudo singular K_D representado en la Figura 21, K_+ al resultante de cambiar el punto doble P de K' por un cruce tipo +1 y K_- el resultante de cambiarlo por un cruce tipo -1 obtenemos

$$W(D) = V(K_D) = V(K_+) - V(K_-).$$

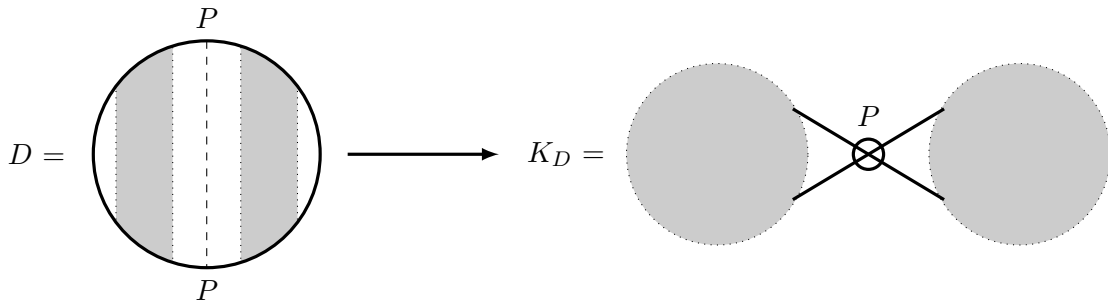


Figura 21: D y K_D para el caso en el que D tiene una cuerda aislada.

Hemos visto por el lema 3.15 que $V(K)$ es invariante por el cambio de signo de uno de sus cruces, por lo tanto $V(K_+) = V(K_-)$ y en consecuencia $W(D) = 0$.

Para la relación 4T, notamos que los nudos correspondientes a los diagramas N , S , E y W representados en la Figura 20 se pueden representar parcialmente según aparece indicado en la Figura 22 (donde la parte sombreada únicamente indica el plano generado por los tramos SN y WE), tomando los tres tramos involucrados como perpendiculares.

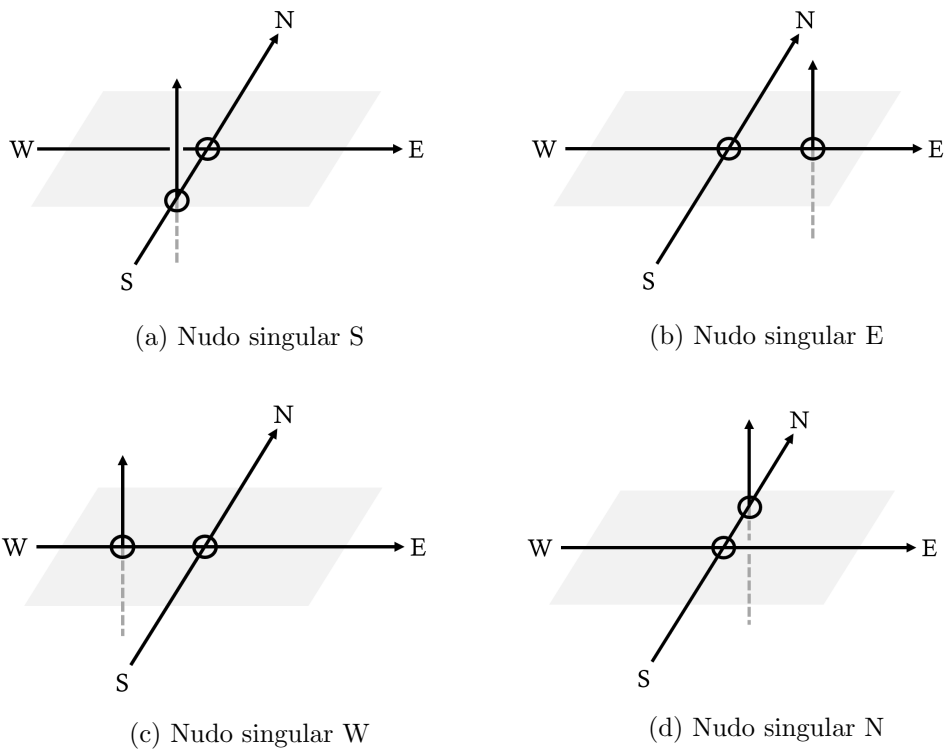


Figura 22: Nudos singulares correspondientes a los diagramas de cuerdas representados en la Figura 20.

Vemos que $V(K)$ donde K es uno de estos cuatro nudos singulares pueden descomponerse mediante la relación 3.1 en una resta dos nudos singulares casi saturados (de $m - 1$ autointersecciones) representados en la Figura 23. De esta manera obtenemos

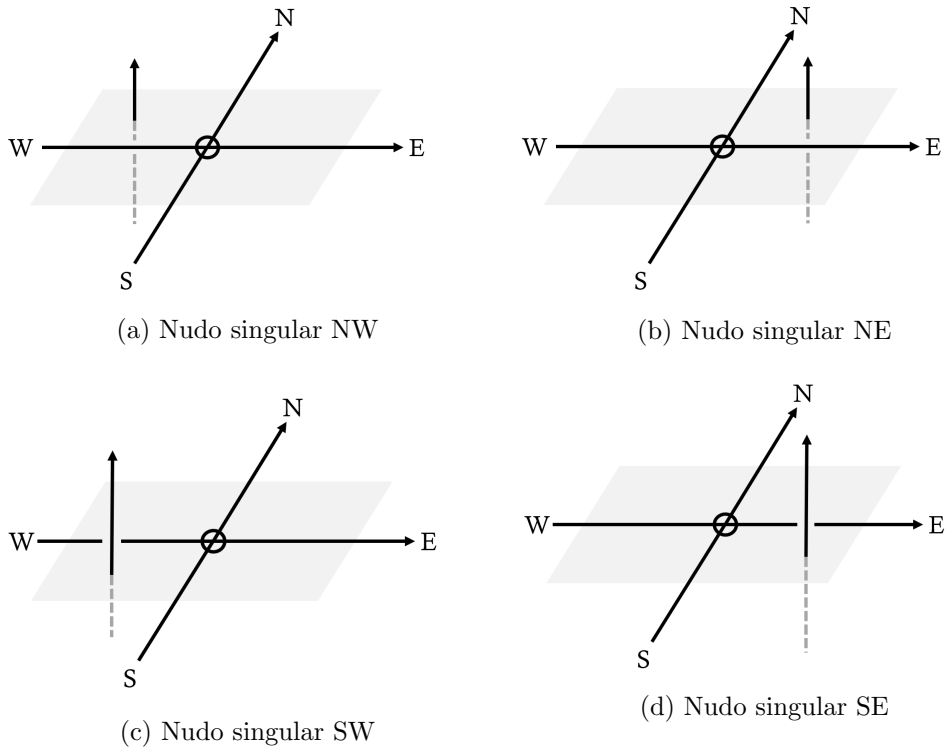


Figura 23: Nudos singulares resultantes de la descomposición de los representados en la Figura 22.

$$\begin{aligned}
 V(S) &= V(SW) - V(SE) \\
 V(W) &= V(NW) - V(SW) \\
 V(N) &= V(NW) - V(NE) \\
 V(E) &= V(NE) - V(SE)
 \end{aligned}$$

Finalmente, combinando estas relaciones comprobamos que efectivamente $V(K_D)$ cumple la relación 4T, ya que

$$V(S) - V(E) = V(SW) - V(NE) = -V(W) + V(N).$$

□

3.4. El álgebra \mathcal{A} de diagramas

Como hemos visto, la relación 4T es relevante al tratar con weight systems e invariantes de Vassiliev. Es por ello que en ocasiones resulta conveniente tratar con el siguiente espacio cociente.

Definición 3.24. *Se define el espacio \mathcal{A}^c como el espacio cociente*

$$\mathcal{A}^c = \mathcal{D}^c / (\text{relaciones 4T}).$$

Al ser las relaciones $4T$ homogéneas, \mathcal{A}^c hereda la graduación de \mathcal{D}^c y se puede definir

$$\mathcal{G}_m \mathcal{A}^c = \mathcal{G}_m \mathcal{D}^c / (\text{relaciones } 4T).$$

Vemos pues que un weight system de grado m es una función lineal en $\mathcal{G}_m \mathcal{A}^c$ en la que las clases de equivalencia en las que aparezca una cuerda aislada se hacen 0.

Otro tipo de diagramas íntimamente relacionados con los digramas de cuerdas que nos resultará útil para el estudio de los weight systems será el de los *diagramas de Jacobi*.

Definición 3.25. *Un diagrama de Jacobi es un grafo conexo formado por un único círculo orientado (por convenio en sentido antihorario) y algunas líneas discontinuas sin orientación (arcos), que se pueden encontrar en dos tipos de vértices trivalentes:*

1. **Vértices internos** en los que se encuentran tres líneas discontinuas. Estos vértices son orientados (por convenio en sentido antihorario a no ser que se indique lo contrario).
2. **Vértices externos** en los que una línea discontinua se encuentra con el círculo. Estos vértices no están orientados.

Denotamos por \mathcal{D}^t el conjunto de los diagramas de Jacobi.

En las representaciones de los diagramas pueden aparecer puntos en los que aparentemente coinciden cuatro líneas discontinuas, pero no se tratará de un vértice sino de un punto en el que dos arcos se cruzan sin intersectarse. Veremos que por construcción los diagramas de Jacobi siempre tendrán un número par de vértices.

Lema 3.26. *El número de vértices de un diagrama de Jacobi es siempre par.*

Demostración: En el caso de que todos los vértices sean externos, cada vértice estará formado por el círculo y un extremo de un arco, por lo que el número de vértices será dos veces el número arcos. Podemos construir un diagrama de Jacobi a partir de un diagrama con el mismo número de arcos pero sin vértices internos “deshaciendo” vértices externos para construirlos.

Para “construir” un vértice interno, se requieren tres extremos de arco. Por lo tanto se deshacen tres vértices de los que formaban parte y se gana uno, perdiendo dos vértices en el proceso. El número total de vértices sigue entonces siendo par. □

Este hecho permite definir el grado de un diagrama de Jacobi.

Definición 3.27. *Se define el **grado** de un diagrama de Jacobi como la mitad del número de vértices que lo forman. Denotamos por $\mathcal{G}_m \mathcal{D}^t$ el conjunto de los diagramas de Jacobi de grado m .*

Vemos que el conjunto de los diagramas de cuerdas es un subconjunto de los diagramas de Jacobi $\mathcal{D}^c \subset \mathcal{D}^t$, y sus graduaciones son compatibles $\mathcal{G}_m \mathcal{D}^c \subset \mathcal{G}_m \mathcal{D}^t$.

Ejemplo 3.28. En la Figura 24 aparecen dos representados tres diagramas de Jacobi de grado 3.

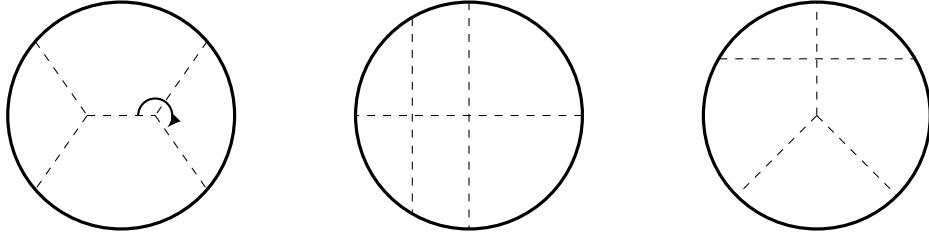


Figura 24: Tres digramas de Jacobi de grado 3.

De la misma manera que hemos definido \mathcal{A}^c para los diagramas de cuerdas, definimos el cociente del conjunto de los diagramas de Jacobi por una cierta relación. Se tratará de la relación STU:

$$S = T - U$$

Donde S, T y U son diagramas idénticos excepto en una sección, la cual aparece representada para cada uno de los tres diagramas en la Figura 25.

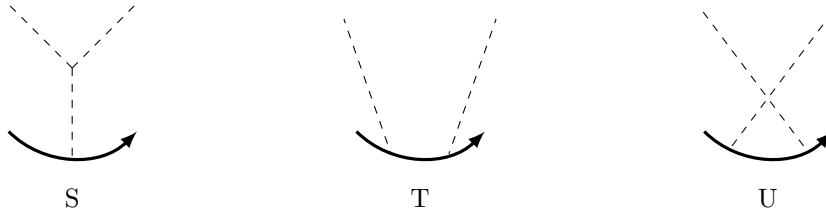


Figura 25

Definición 3.29. Se define el espacio \mathcal{A}^t como el espacio cociente

$$\mathcal{A}^t = \mathcal{D}^t / (\text{relaciones STU}).$$

Al ser las relaciones STU homogéneas, \mathcal{A}^t hereda la graduación de \mathcal{D}^t y se puede definir

$$\mathcal{G}_m \mathcal{A}^t = \mathcal{G}_m \mathcal{D}^t / (\text{relaciones STU}).$$

Notamos que la relación 4T se mantiene en \mathcal{A}^t , ya que como consecuencia de la relación STU tenemos la equivalencia representada en la Figura 26.

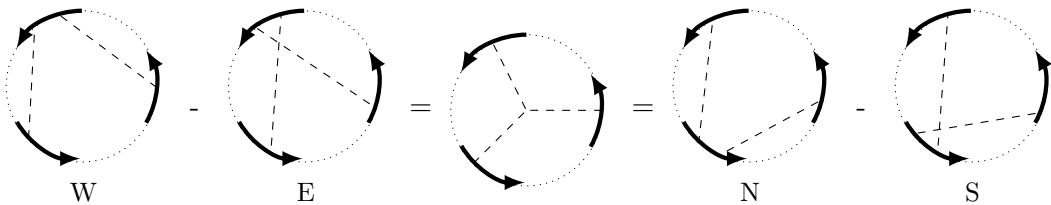


Figura 26: Relación 4T como consecuencia de la relación STU.

En consecuencia, la inclusión $\mathcal{D}^c \hookrightarrow \mathcal{D}^t$ descenderá a un mapa lineal $\phi^c : \mathcal{A}^c \hookrightarrow \mathcal{A}^t$. De hecho, se puede demostrar que este mapa lineal ϕ^c es un isomorfismo.

Teorema 3.30. El mapa $\phi^c : \mathcal{A}^c \hookrightarrow \mathcal{A}^t$ es un isomorfismo.

Demostración: Para demostrar que se trata de un isomorfismo buscamos su inversa $\phi^t : \mathcal{A}^t \hookrightarrow \mathcal{A}^c$. Para ello construimos un mapa $\tilde{\phi}^t : \mathcal{D}^t \hookrightarrow \mathcal{A}^c$ que satisfaga la relación STU y extienda la proyección natural $\mathcal{D}^c \hookrightarrow \mathcal{A}^c$.

Notamos que la relación STU expresa diagramas con k vértices internos en términos de diagramas con $k - 1$ vértices internos, por lo que podemos usarla para construir $\tilde{\phi}^t$ por inducción. Queda demostrar que si un diagrama de Jacobi se puede descomponer por relaciones STU en varias combinaciones de diagramas de cuerdas (por ejemplo eliminando vértices internos en distinto orden), todas las descomposiciones posibles son iguales módulo relaciones 4T.

En el caso de que $D \in \mathcal{D}^t$ tenga un único vértice interno, hemos visto que se cumple, tal y como aparece representado en la Figura 26. En el caso de que haya más de un vértice interno, tenemos varios casos en los que se pueden eliminar dos arcos, i o j , en distinto orden.



Figura 27: Dos casos en los que los arcos i y j se pueden eliminar en distinto orden. La zona sombreada representa que puede contener a combinación arbitraria de arcos y vértices.

En el caso que ambos arcos no estén conectados al mismo vértice interno, como se muestra en la Figura 27a, vemos por el proceso representado en la Figura 28 que el orden en que se deshacen es indiferente.

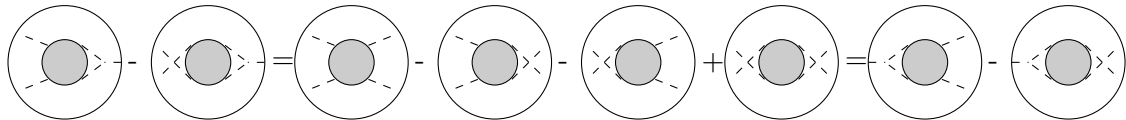


Figura 28

En el caso que ambos arcos estén conectados al mismo vértice interno, se escoge un tercer arco l que conecte el círculo con otro vértice interno y se aplica la propiedad transitiva. En el caso que este arco l no existiera, el diagrama se descompondría a 0 módulo 4T. La demostración de este hecho requiere el uso de lemas adicionales, y se puede encontrar en la sección 3 de [2].

□

Como \mathcal{A}^c y \mathcal{A}^t son isomorfos, usaremos la notación \mathcal{A} para referirnos a ambos.

3.5. Weight systems de álgebras de Lie

Una vez hemos visto la utilidad de los weight systems para tratar con invariantes de Vassiliev, nos podemos plantear si existe alguna manera de construirlos a partir de

ciertas estructuras algebraicas. En efecto, veremos que a partir de un álgebra de Lie se pueden construir algunos tensores invariantes que, al restringirlos a diagramas de cuerdas, producen weight systems.

3.5.1. Álgebras de Lie

En primer lugar debemos familiarizarnos con algunos conceptos relacionados con las álgebras de Lie que serán necesarios para definir los tensores invariantes que utilizaremos para construir el weight system.

Definición 3.31. *Un álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión finita es un espacio vectorial de dimensión finita (denotado también por \mathfrak{g}) junto con un mapa $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, denominado corchete de Lie, con las siguientes propiedades:*

1. $[\cdot, \cdot]$ es bilineal.
2. $[\cdot, \cdot]$ es antisimétrico, es decir, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X]$.
3. $[\cdot, \cdot]$ cumple la identidad de Jacobi, es decir,

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \quad [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Al ser un mapa lineal en un espacio vectorial, podemos afirmar que $[\cdot, \cdot]$ es un homomorfismo. Usando la propiedad $\text{Hom}(U, V) \cong U^* \otimes V$ de los espacios vectoriales de dimensión finita, vemos que el corchete de Lie se puede interpretar también como un tensor $\tilde{f} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$.

Definición 3.32. *Una métrica t sobre un álgebra de Lie \mathfrak{g} es una forma bilineal, $t : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ simétrica, no degenerada y ad-invariante.*

Decimos que t es **simétrica** si $t(a, b) = t(b, a)$. De la misma manera que el corchete de Lie, la métrica se puede interpretar usando las propiedades $\text{Hom}(U, V) \cong U^* \otimes V$ y $U^{**} = U$ como un tensor $t \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ o un homomorfismo $t \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$.

$$t \in \text{Hom}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})^* \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathbb{C} \cong \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \cong \text{Hom}(\mathfrak{g}^{**}, \mathfrak{g}^*) \cong \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*).$$

Tomando la interpretación $t \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$, diremos que t es no degenerada si es un isomorfismo de espacios vectoriales, es decir, si se trata de un mapa lineal biyectivo. Finalmente, decimos que t es ad-invariante si cumple la relación con el corchete de Lie $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, t([x, y], z) = t(x, [y, z])$.

Definición 3.33. *Una representación R de un álgebra de Lie \mathfrak{g} consiste en un espacio vectorial de dimensión finita (que denotamos también R) junto con un homomorfismo $r : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(R)$.*

Vemos que el homomorfismo r de una representación R se puede interpretar como un tensor utilizando una vez más la propiedad $\text{Hom}(U, V) \cong U^* \otimes V$ y teniendo en cuenta que $\text{End}(V) \cong V \otimes V^*$:

$$r \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \text{End}(R)) \cong \mathfrak{g}^* \otimes \text{End}(R) \cong \mathfrak{g}^* \otimes R \otimes R^*.$$

3.5.2. Tensores asociados a diagramas

Hemos visto que los corchetes de Lie, métricas y representaciones se pueden interpretar como tensores. A continuación veremos se pueden asociar distintas combinaciones de estos tensores a diagramas de Jacobi, lo que nos llevará a poder construir un weight system a partir de estos elementos de un álgebra de Lie.

Para asociarlos con diagramas, buscamos una manera de representar estos tensores gráficamente. En lo que respecta a la métrica, representaremos los tensores $t \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$ y $t^{-1} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ mediante los grafos indicados en la Figura 29.

$$\mathfrak{g}^* \text{ ----- } \mathfrak{g}^* \longleftrightarrow t \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \qquad \mathfrak{g} \text{ ----- } \mathfrak{g} \longleftrightarrow t^{-1} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

Figura 29: Representación gráfica del tensor métrica t y t^{-1} .

Para los corchetes de Lie $\tilde{f} \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$, notamos que utilizando la métrica $t \in \text{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$ podemos obtener de cada \tilde{f} un tensor $f \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$. Representaremos este tensor mediante el grafo indicado en la Figura 30.

$$\begin{array}{c} \mathfrak{g}^* \\ \text{---} \\ \mathfrak{g}^* \end{array} \text{ --- } \mathfrak{g}^* \longleftrightarrow f \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$$

Figura 30: Representación gráfica del tensor corchete de Lie f .

También representaremos el tensor $r \in \mathfrak{g}^* \otimes R \otimes R^*$ asociado a una representación R , tal y como aparece en la Figura 31. Finalmente representaremos también la identidad $\text{Id} \in \text{End}(r) \cong R \otimes R^*$ por el grafo indicado en la misma figura.

$$\begin{array}{c} R \\ \uparrow \\ \mathfrak{g}^* \text{ ----- } | \\ \downarrow \\ R^* \end{array} \longleftrightarrow r \in \mathfrak{g}^* \otimes R \otimes R^* \qquad R \longleftarrow R^* \longleftrightarrow \text{Id} \in R \otimes R^*$$

Figura 31: Representación gráfica de los tensores representación r e identidad en R .

Notamos que estos grafos que utilizamos para representar los tensores son las piezas que componen un diagrama de Jacobi. De hecho, se pueden usar estas representaciones para asociar a cualquier diagrama D formado por estos elementos (no necesariamente un diagrama de Jacobi) un tensor $\mathcal{T}(D)$. Para construir $\mathcal{T}(D)$ comenzamos separando D en una unión de los fragmentos representados en las Figuras 29, 30 y 31. Obtendremos un conjunto $\{v_i\}$ de vértices univalentes etiquetados o bien por \mathfrak{g} o \mathfrak{g}^* , o bien por R o R^* . Utilizamos estos vértices univalentes para asociar a D un tensor:

$$\mathcal{T}(D) = \mathcal{T}_{\mathfrak{g}, R}(D) \in \bigotimes_{v \in \{v_i\}} (\text{Etiqueta del vértice univalente } v)$$

Finalmente contraemos las parejas de espacios y sus duales.

Ejemplo 3.34. Por ejemplo, descomponiendo el diagrama D_1 representado en la Figura 32 tal y como se indica en la figura se llega a $\mathcal{T}_{\mathfrak{g},R}(D_1) \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^* \otimes R \otimes R^*$. Contrayendo los pares de espacios correspondientes se obtiene finalmente $\mathcal{T}_{\mathfrak{g},R}(D_1) \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes R \otimes R^*$.

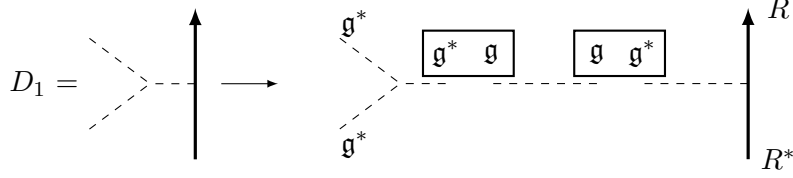


Figura 32: Ejemplo de construcción del tensor asociado a un diagrama.

Vemos que los diagramas de Jacobi son el caso particular de diagramas a los que podemos asociar un tensor mediante este método correspondiente a los diagramas sin índices univalentes. Se puede comprobar que para estos diagramas $D \in \mathcal{D}^t$, $\mathcal{T}(D)$ es siempre un escalar.

Lema 3.35. *Sea D un diagrama cerrado (sin vértices univalentes), entonces $\mathcal{T}(D)$ es un escalar.*

Demostración: Para un álgebra de Lie de dimensión n \mathfrak{g} , tomamos una base $\{e_i\}$ y unas constantes de estructura respecto a esta base γ_{abc} tal que $[e_i, e_j] = \sum_{k=1} \gamma_{ijk} e_k$. Tomamos también una base $\{\rho_j\}$ del conjunto de homomorfismos r de la representación R .

Si escribimos las componentes de los tensores f , t y r en estos términos obtenemos:

$$f_{abc} = \sum_{d=1}^n \gamma_{abd} t(e_d, e_c)$$

$$t_{ab} = t(e_a, e_b)$$

$$r(e_a) \rho^\alpha = \sum_{\beta=1}^n r_{a\beta}^\alpha \rho^\beta$$

Si D es un diagrama cerrado, no tendrá vértices univalentes y se podrá descomponer como se explica a continuación. Se separa cada vértice externo, que será representado en $\mathcal{T}(D)$ por un tensor de componentes $r_{k\beta}^\alpha$. Se separan también los vértices internos, que serán representados por tensores de componentes f_{abc} . Estos vértices se unirán entre sí o bien por tensores identidad o bien por tensores t^{-1} , de componentes t^{de} . Ahora bien, los índices de los puntos en que dos de estas secciones se unen coinciden, por lo que se pueden contraer.

Tenemos pues que $\mathcal{T}(D)$ se podrá expresar por componentes como un sumatorio en los índices no contraible de productos de estos elementos. Pero todos los elementos t^{de} se contraerán, los elementos f_{abc} son escalares, y r aparece únicamente por medio de trazas del estilo de $\text{Tr}(r(e_a)r(e_b)\dots)$, por lo que $\mathcal{T}(D)$ será un escalar. □

Una vez definido el tensor $\mathcal{T}(D)$ y sus propiedades para diagramas cerrados, se puede utilizar para definir un weight system a partir de cualquier álgebra de Lie.

Teorema 3.36. *Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita sobre un cuerpo \mathbb{F} , t una métrica en \mathfrak{g} , y R una representación de \mathfrak{g} de dimensión finita. Sea m un entero no negativo.*

1. *Existe una construcción natural de una función asociada $W_{\mathfrak{g},R,m} \rightarrow \mathbb{F}$ que satisface la relación $\not\sim T$.*
2. *Existe una forma canónica de “renormalizar” $W_{\mathfrak{g},R,m}$ a un weight system $\hat{W}_{\mathfrak{g},R,m}$.*

Demostración: Notamos que un diagrama $D \in \mathcal{D}^t$ es cerrado, por lo que $\mathcal{T}(D)$ será un escalar. Por lo tanto podemos denotar por $W : \mathcal{D}^t \rightarrow \mathbb{F}$ la aplicación $D \mapsto \mathcal{T}(D)$.

Las imágenes de los diagramas $D \in \mathcal{D}^t$ por \mathcal{T} serán tensores invariantes, ya que tanto f , t^{-1} y r como la contracción son invariantes, pero no serán necesariamente todas diferentes. De hecho, del hecho que para una representación R se cumpla $R([a, b]) = R(a)R(b) - R(b)R(a)$ se deduce que se cumplirá la relación STU. Por lo tanto W descenderá a una función lineal de \mathcal{A}^t en \mathbb{F} . Por el teorema 3.30, componiéndolo con el isomorfismo ϕ^c se obtiene una función lineal $W \circ \phi^c$, que se podrá restringir a $\mathcal{G}_m \mathcal{A}^c$. Llamamos a la función resultante $W_{\mathfrak{g},R,m}$.

Esta función se puede “renormalizar” a un weight system utilizando el álgebra simétrica generada por los elementos primitivos de \mathcal{A} , para el estudio de la cual se requieren conocimientos no tratados en este trabajo. Se puede encontrar la demostración completa junto con las definiciones y teoremas necesarios en [2].

□

4. Invariantes integrales de Kontsevich

Esta sección estará dedicada a la construcción del mapa $W \mapsto V(W)$ descrito en el teorema 1.29. Para ello hay que introducir en primer lugar algunos conceptos de geometría, para aplicarlos al caso de los diagramas para construir un weight system apropiado. Estos conceptos vendrán del estudio de variedades.

Definición 4.1. *Se dice que un espacio topológico es **Hausdorff** si se cumple la propiedad que puntos disjuntos tienen entornos disjuntos.*

Definición 4.2. *Una **variedad** X de dimensión n es un espacio topológico Hausdorff tal que cada punto de X tiene algún entorno homeomorfo a \mathbb{R}^n .*

Sobre las variedades pueden definirse conexiones, que relacionarán la geometría local en torno a dos puntos diferentes. En lo que a esta sección respecta, una **conexión** Ω será una 1-forma, es decir, una aplicación lineal de una variedad X a un campo escalar \mathfrak{U} . Se definirá también la **curvatura** F_Ω de una conexión Ω como $F_\Omega = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$.

Sea $B : I \rightarrow S$ una aplicación “smooth” de un intervalo $[a, b]$ a una variedad X , y sea Ω una conexión en X evaluada en \mathfrak{U} . El concepto de transporte paralelo (transporte de vectores a lo largo de curvas de manera que permanezcan paralelos respecto a la conexión) se puede generalizar por una **holonomía** de Ω a lo largo de B , $h_{B,\Omega} : I \rightarrow \mathfrak{U}$. En algunos casos [2], $h_{B,\Omega}$ existe y viene dada por

$$h_{B,\Omega}(t) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{a < t_1 < \dots < t_m < t} (B^*\Omega)(t_m) \cdot \dots \cdot (B^*\Omega)(t_1), \quad (4.1)$$

donde $B^*\Omega$ denota el pullback de Ω a I via B .

Es un resultado conocido de teoría de conexiones que si F_Ω es *plana*, es decir, si $F_\Omega \equiv 0$, entonces $h_{B,\Omega}$ es invariante bajo homotopías de B que dejen los extremos fijos.

En esta sección utilizaremos estos conceptos para construir una conexión, la conexión de de Knízchnik-Zamolódchikov, evaluada en un conjunto de diagramas con determinadas características. Después, definiremos la integral de Kontsevich, y usaremos esta conexión y sus propiedades para ver que, tras una pequeña corrección, es invariante para deformaciones arbitrarias de un nudo. Finalmente vemos que la integral de Kontsevich se ajusta a las condiciones dadas por la segunda y tercera partes del teorema 1.29.

4.1. La conexión de Knízchnik-Zamolódchikov

De manera similar cómo hemos definido los conjuntos \mathcal{D}^c y \mathcal{D}^t , podemos definir un conjunto \mathcal{D}_n^{KZ} .

Definición 4.3. *Se denota por \mathcal{D}_n^{KZ} el conjunto de diagramas formados por n flechas orientadas hacia arriba, y arcos (representados por líneas discontinuas) con ambos extremos en vértices de uno de los dos tipos dados en la definición de \mathcal{D}^t (definición 3.25).*

Análogamente al caso de \mathcal{D}^t , como todos los vértices deben ser trivalentes, los puntos en los que coincidan más de tres segmentos no serán vértices, sino puntos en los que varios arcos o arcos y flechas se cruzan sin cortarse.

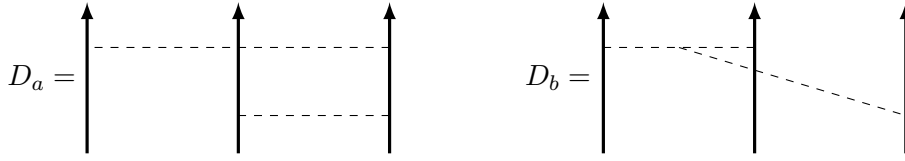


Figura 33: Dos elementos de \mathcal{D}_3^{KZ} .

Ejemplo 4.4. En la Figura 33 aparecen representados dos ejemplos de elementos de \mathcal{D}_3^{KZ} .

De la misma manera que hemos definido un espacio cociente por una relación para cada espacio de diagramas tratado, se define \mathcal{A}_n^{KZ} .

Definición 4.5. Se define el espacio \mathcal{A}_n^{KZ} como el espacio cociente

$$\mathcal{A}^t = \mathcal{D}^t / (\text{relaciones STU}).$$

\mathcal{A}_n^{KZ} es un álgebra con la composición como producto.

Definición 4.6. Llamamos **composición** $D_1 \bullet D_2$ de dos diagramas $D_1, D_2 \in \mathcal{A}_n^{KZ}$ al proceso de colocar los arcos de ambos diagramas en el mismo conjunto de n flechas orientadas hacia arriba, los de D_1 en la parte superior y los de D_2 en la parte inferior.

Ejemplo 4.7. Por ejemplo, las composiciones de los dos digramas representados en la Figura 33 aparecen representadas en la Figura 34.

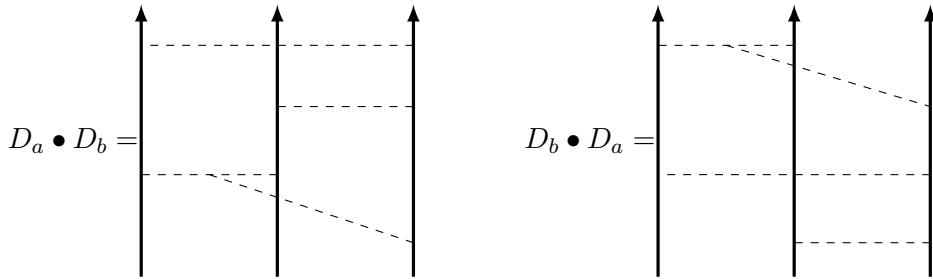
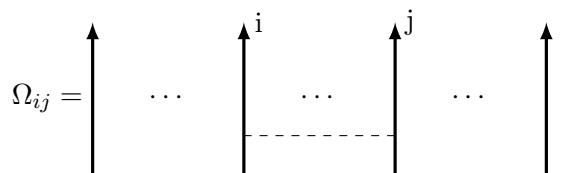


Figura 34: Las dos formas posibles de componer los dos diagramas representados en la Figura 33.

Se define el grado de un elemento de \mathcal{A}_n^{KZ} como la mitad del número de vértices que lo forman, sin contar los $2n$ extremos de las flechas.

Ejemplo 4.8. Los diagramas D_a y D_b son de grado 2, y los diagramas $D_a \bullet D_b$ y $D_b \bullet D_a$ son de grado 4.

Definición 4.9. Para $1 \leq i < j \leq n$ se define el diagrama $\Omega_{ij} \in \mathcal{A}_n^{KZ}$ como



A partir de estos diagramas Ω_{ij} y la 1-forma ω_{ij} se define la conexión de Knízchnik-Zamolódchikov. Comenzamos pues definiendo ω_{ij} .

Definición 4.10. Sea $X_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i = z_j \Rightarrow i = j\}$ el espacio de configuración de n puntos diferentes dos a dos en \mathbb{C} , se define ω_{ij} como la 1-forma compleja en X_n dada por

$$\omega_{ij} = d(\log z_i - z_j) = \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j}.$$

Para a continuación definir la conexión de Knízchnik-Zamolódchikov Ω_n .

Definición 4.11. La conexión de Knízchnik-Zamolódchikov es la conexión Ω_n en X_n evaluada en \mathcal{A}_n^{KZ} dada por

$$\Omega_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \Omega_{ij} \omega_{ij}.$$

Notamos algunas propiedades de esta conexión.

Proposición 4.12. La conexión de Knízchnik-Zamolódchikov Ω_n es plana.

Demostración: Se puede encontrar en la sección 4.2 de [2].

Existe también una generalización de esta conexión al caso en que los diagramas contienen, a la derecha de las n flechas orientadas hacia arriba, n flechas orientadas hacia abajo, en las que los arcos también pueden tener extremos. En este caso, definimos la conexión $\Omega_{n,n}$ (que también será plana).

$$\Omega_{n,n} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} s_i s_j \Omega_{ij} \omega_{ij}, \quad \text{donde} \quad s_i = \begin{cases} +1 & \text{si } 1 \leq n \\ -1 & \text{si } 1 > n \end{cases}.$$

4.2. La integral de Kontsevich

Para obtener la integral de Kontsevich $Z(K)$ de un nudo K , tomamos una descomposición de $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$ en un producto del plano complejo, parametrizado por z , y la recta real, parametrizada por t . De esta manera obtenemos un nudo parametrizado $K : S^1 \rightarrow \mathbb{C}_z \times \mathbb{R}_t$, donde todos los puntos críticos en t son no degenerados. Consideraremos únicamente nudos orientados.

Esta parametrización tendrá un valor máximo $t_{\text{máx}}$ y mínimo $t_{\text{mín}}$ de t en K . Tomamos pares no ordenados (z_i, z'_i) tal que para algún $t_{\text{mín}} < t_i < t_{\text{máx}}$ los puntos (z_i, t_i) y (z'_i, t_i) son distintos en K . Para un conjunto P de m de estos pares, podemos asociar a K un diagrama de cuerdas D_P tal y como se indica en la Figura 35.

Consideramos estos diagramas como elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^r$, definido como el conjunto \mathcal{A} sobre \mathbb{C} en el que los diagramas con una cuerda aislada (como por ejemplo el representado en la Figura 35) se consideran iguales a 0.

Utilizando estos pares (z_i, z'_i) para un nudo K y los diagramas D_K que se obtienen de ellos se puede definir para un nudo K su integral de Kontsevich $Z(K)$ dada por

$$Z(K) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{t_{\text{mín}} < t_1 < \dots < t_m < t_{\text{máx}}} \sum_{\text{Pares aplicables}} (-1)^{\#P \downarrow} D_P \prod_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i} \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^r. \quad (4.2)$$

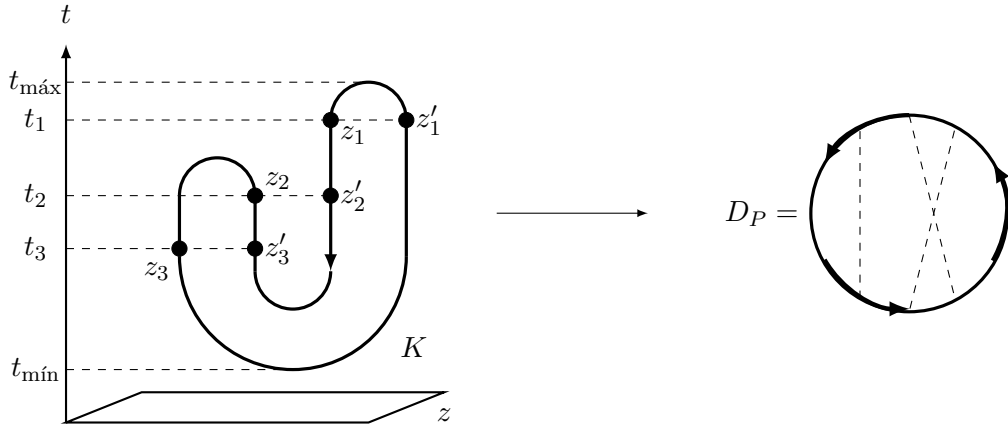


Figura 35: Diagrama D_P asociado al nudo K para $P = \{(z_1, z'_1), (z_2, z'_2), (z_3, z'_3)\}$.

Donde los t_i son puntos no críticos de K . Para cada conjunto de m valores de t no críticos $\{t_j\}_{j=1}^m$, “Pares aplicables” se refiere a todos conjuntos posibles $P = \{(z_i, z'_i)\}$ de pares (z_i, z'_i) tal que $t_i \in \{t_j\}_{j=1}^m$ y los puntos (z_i, t_i) y (z'_i, t_i) son distintos en K .

Por ejemplo, para el nudo K representado en la Figura 35, para t_1 solo tenemos uno de estos pares (el que aparece indicado), mientras que para t_2 y t_3 tendremos 6 pares. Por lo tanto, para los $t_{\min} < t_1 < t_2 < t_3 < t_{\max}$ representados en la Figura 35, el sumatorio de dentro de la integral de la ecuación 4.2 tendrá $1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$ sumandos.

Por otra parte, $\#P \downarrow$ denota el número de puntos (z_i, t_i) o (z'_i, t_i) tal que $(z_i, z'_i) \in P$ en los que la coordenada t decrece según la orientación de K .

Finalmente, notamos que el dominio de integración $t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max}$, t_i no crítico define un m -símplex dividido por los valores de t correspondientes a los puntos críticos de K en un número finito de componentes conexas. Para integrar el producto $\bigwedge_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$, usamos la aplicación $\{t_j\}_{j=1}^m \mapsto \{(z_j, z'_j)\}$ definida localmente alrededor de cada t_i para llevar los diferenciales dz_i y dz'_i a este m -símplex e integrarlos.

Una vez definida la integral de Kontsevich, comprobamos si es un buen candidato a invariante de nudos. En primer lugar, comprobamos que la integral es finita.

Lema 4.13. *Interpretadas correctamente, las integrales definidas en la ecuación (4.2) son finitas.*

Demostración: Vemos que las posibles divergencias se darán en los puntos en los que el denominador $z_i - z'_i$ sea muy pequeño para algún i . Esto puede ocurrir de dos maneras, ambas en zonas en las que K se estrecha formando una “aguja”:

1. En el caso en el que no exista ningún otro z_{i+1} ni z'_{i+1} en el trozo del nudo que conecta z_i y z'_i (como se muestra en la Figura 36a), el diagrama D_P tendrá una cuerda aislada y por lo tanto será 0 en $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^r$.
2. En el caso en el que exista algún z_{i+1} o z'_{i+1} en el trozo del nudo que conecta z_i y z'_i (como se muestra en la Figura 36b), t_i y z_{i+1} tendremos que el elemento correspondiente a t_{i+1} pertenecerá a la misma componente del dominio de integración y cancelará la singularidad del denominador.

□



Figura 36: Dos posibles divergencias de (4.2)

Comprobamos también si $Z(K)$ es invariante bajo deformaciones de K . Comenzaremos manteniendo el número de puntos críticos fijo y estudiando por separado su invariancia por deformaciones horizontales que dejen fijos los puntos críticos y por desplazamientos de puntos críticos.

Para estudiar las deformaciones horizontales dejando los puntos críticos fijos, restringiremos el dominio de integración de manera que no contenga ningún punto crítico.

Definición 4.14. Sea $t_{\min} \leq a < b \leq t_{\max}$, se define $Z(K, [a, b])$ de la misma manera que $Z(K)$ en la ecuación (4.2), pero restringiendo el dominio de integración a $a < t_1 < \dots < t_m < b$.

Notamos que, a diferencia de $Z(K)$, $Z(K, [a, b])$ no pertenecerá a $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^r$. En su lugar lo interpretaremos como un elemento del espacio vectorial $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [a, b]}$ definido como el cociente

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [a, b]} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Espacio generado por los} \\ \text{diagramas cuyas líneas} \\ \text{sólidas son la parte de} \\ K \text{ con } a \leq t \leq b \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{l} \text{Espacio generado por las} \\ \text{relaciones STU y diagramas} \\ \text{con los dos extremos de las líneas} \\ \text{discontinuas en la misma flecha sólida} \end{array} \right\}.$$

Ejemplo 4.15. Por ejemplo, la Figura 37 representa un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [t_1, t_3]}$, con los K , t_1 y t_3 representados en la Figura 35.

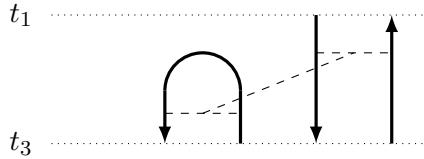


Figura 37: Un elemento de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [t_1, t_3]}$.

Para $t_{\min} \leq a < b < c \leq t_{\max}$ tenemos un producto $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [a, b]} \otimes \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [b, c]} \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [a, c]}$ por el que $Z(K, [a, b])Z(K, [b, c]) = Z(K, [a, c])$.

Con esta herramienta para trabajar deformaciones horizontales únicamente en zonas de K que no contengan puntos críticos, podemos comprobar que dejan $Z(K)$ invariante.

Proposición 4.16. Las integrales definidas en la ecuación 4.2 son invariantes bajo deformaciones horizontales de K que dejen los puntos críticos fijos.

Demostración: Notamos que si K no tiene ningún punto crítico en $a \leq t \leq b$, entonces los elementos de $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K, [a, b]}$ consistirán en un conjunto de un número n de flechas apuntando

hacia arriba y el mismo número n de flechas apuntando hacia abajo, y líneas discontinuas siguiendo las reglas descritas para \mathcal{D}^t (definición 3.25). Es decir, que para los intervalos $t \in [a, b]$ para los que K no tiene puntos críticos, $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{K,[a,b]} = \mathcal{A}_{n,n}^{KZ}$.

Se puede ver comparando $Z(K, [a, b])$ con la ecuación (4.1) que se trata de la holonomía de $\Omega_{n,n}$ a lo largo del conjunto de flechas resultantes de la intersección de K con $a \leq t \leq b$. Como la conexión $\Omega_{n,n}$ es plana, esto implica que $Z(K, [a, b])$ es invariante si K no tiene puntos críticos para $t \in [a, b]$.

Finalmente, notamos que, sean $t_{\min} = t_{c_1}, t_{c_2}, \dots, t_{c_r} = t_{\max}$ los valores de t correspondientes a los r puntos críticos de K , podemos tomar

$$Z(K) = Z(K, [t_{\min}, t_{\max}]) = Z(K, [t_{\min}, t_{c_2}])Z(K, [t_{c_2}, t_{c_3}]) \dots Z(K, [t_{c_{r-1}}, t_{\max}]),$$

por lo que vemos que $Z(K)$ es invariante por deformaciones horizontales que mantengan constantes los planos correspondientes a valores de t para los que K tenga un punto crítico. □

El método que usaremos para estudiar el comportamiento de $Z(K)$ por desplazamientos de sus puntos críticos consistirá en deformar el nudo hasta convertirlos en la punta de una “aguja”, para posteriormente alargar, acortar o cambiar la orientación de la “aguja”. Para ello comenzamos comprobando que $Z(K)$ es invariante para estas deformaciones de “agujas”.

Lema 4.17. *Si dos nudos K_1, K_2 contienen una “aguja” de amplitud ϵ y se diferencian únicamente en la longitud y orientación de sus agujas, entonces*

$$\|Z_m(K_1) - Z_m(K_2)\| \sim \epsilon,$$

donde Z_m es el elemento de Z de grado m y $\|\cdot\|$ es una norma fijada en $\mathcal{G}_m \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^r$.

Demostración: Como las diferencias entre K_1 y K_2 provendrán únicamente de los términos en los que z_i o z'_i estén en la aguja, bastará demostrar que estos términos son proporcionales a ϵ . Supondremos sin perder generalidad que la aguja es vertical y apunta hacia arriba.

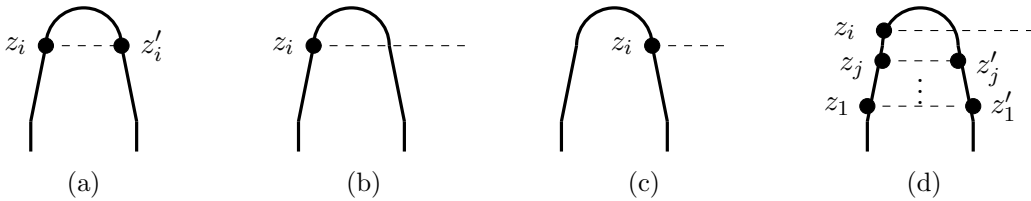


Figura 38: Posibles pares (z_i, z'_i) en una punta de aguja.

Sea (z_i, z'_i) el par correspondiente al mayor valor de t para el que al menos z_i o z'_i están en la aguja. Si tanto z_i como z'_i se encuentran en la aguja, como se muestra en la Figura 38a, el diagrama D_P correspondiente tendrá una cuerda aislada y por lo tanto ese término será 0.

Si solo uno de los elementos del par está en la aguja, tenemos dos casos. En primer lugar está el caso en el que no haya ningún par (z_j, z'_j) que conecte los dos lados de la aguja, como se muestra en las Figuras 38b y 38c. En este caso no habrá singularidades

en la integral, y notando que los casos representados en estas dos figuras aparecen en $Z(K)$ con signos opuestos y su diferencia es del orden de ϵ notamos que la diferencia será pequeña.

Finalmente tenemos el caso en el que solo uno de los puntos del par (z_i, z'_i) se encuentra en la aguja, pero hay otros pares conectando sus lados, como se muestra en la Figura 38d. En este caso, se puede comprobar también que la integral será del orden de ϵ (ver [2]).

□

Proposición 4.18. *Las integrales definidas en la ecuación 4.2 son invariantes bajo desplazamientos de los puntos críticos de K .*

Demostración: Utilizando la proposición 4.16 podemos estrechar el entorno de un punto crítico para convertirlo en una aguja, y utilizando el lema 4.17 podemos desplazar el punto crítico, manteniendo $Z(K)$ invariante en todo momento.

□

Hemos visto pues que $Z(K)$ es invariante bajo cualquier deformación que mantenga constante el número de puntos críticos. Sin embargo, no lo será para aquellas deformaciones que los creen o los eliminen. Por ello debemos realizar una corrección sobre $Z(K)$ para obtener un invariante de nudos.

4.2.1. Corrección

Realizamos una corrección a $Z(K)$ para obtener un $\tilde{Z}(K)$ que permanezca invariante para deformaciones de K que cambien su número de puntos críticos. Notamos que el número de puntos críticos de K será siempre par, y definimos:

Definición 4.19. *Sea K un nudo $K : S^1 \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ con c puntos críticos, se define*

$$\tilde{Z}(K) = \frac{Z(K)}{(Z(\infty))^{c/2-1}}.$$

Donde ∞ denota el nudo representado en la Figura 39.

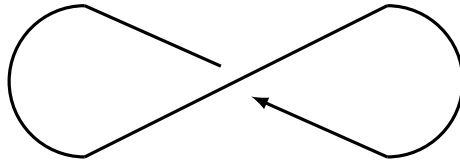


Figura 39: Nudo ∞ .

Teorema 4.20. *$\tilde{Z}(K)$ es invariante bajo deformaciones arbitrarias de K .*

Demostración: Hemos visto que tanto $Z(K)$ como $Z(\infty)$ son invariantes bajo deformaciones que no cambien el número de puntos críticos de K , por lo que $\tilde{Z}(K)$ también lo será. Queda pues comprobar si lo es para deformaciones en las que aparezcan o se eliminen puntos críticos.

Sean Z_s, Z_c dos nudos idénticos excepto por una parte en la que se diferencian según se indica en la Figura 40, notamos que $\tilde{Z}(K)$ permanece invariante por variaciones del número de puntos críticos si $Z(K_c) = Z(\infty)Z(K_s)$.



Figura 40

Usando deformaciones que no cambien el número de puntos críticos, se puede mover la zona “problemática” de K_c a un extremo del nudo y hacerla muy pequeña, de manera que se puedan ignorar las contribuciones a $Z(K_c)$ de pares que unan esta zona al resto del nudo. De esta manera, podemos factorizar $Z(K_c)$ en un producto de $Z(K_s)$ por las contribuciones de los pares que unan la zona con los dos puntos críticos que queremos eliminar consigo misma. Pero, si deformamos ∞ de la misma manera que hemos deformado K_c , podemos comprobar que estas contribuciones son precisamente $Z(\infty)$. □

Ahora que hemos visto que $\tilde{Z}(K)$ permanece invariante por deformaciones arbitrarias de K , vemos que se puede utilizar para demostrar (2) y (3) del teorema 1.29.

4.3. Demostración de (2) del teorema 1.29

Notamos que un weight system es precisamente una función $W_m : \mathcal{G}_m \mathcal{A}^r \rightarrow \mathbb{F}$. Si lo extendemos a $W : \mathcal{A}^r \rightarrow \mathbb{F}$ podemos definir el mapa $W \mapsto V(W)$ que buscamos como

$$V(W)(K) = W(\tilde{Z}(K)).$$

□

4.4. Demostración de (3) del teorema 1.29

a) Notamos que basta demostrar que sea $D \in \mathcal{G}_m \mathcal{D}^c$ un diagrama de cuerdas de grado m y K_D la inmersión dada por la definición 3.21,

$$\tilde{Z}(K_D) = \bar{D} + (\text{términos de orden superior a } m),$$

donde \bar{D} denota la clase de equivalencia de D en \mathcal{A}^r , ya que en ese caso tendríamos que

$$W_m(V(W)(K_D)) = W_m(W(\tilde{Z}(K_D))) = W(D).$$

Notamos que $Z(\infty) = \bigcirc + (\text{términos de orden superior})$, por lo que si se demuestra que $Z(K_D) = \bar{D} + (\text{términos de orden superior a } m)$ quedará demostrada la misma propiedad para $\tilde{Z}(K) = Z(K)/(Z(\infty))^{c/2-1}$.

Como K_D representa un nudo singular con m puntos singulares, se podrá expresar por la relación (3.1) como una suma de 2^m nudos en los que cada punto singular se ha sustituido o bien por un cruce tipo $+1$ o bien por un cruce tipo -1 , la mitad de ellos con signo $-$. De la misma manera, $Z(K_D)$ será la suma con signos de Z evaluada en 2^m nudos idénticos excepto por los signos de sus cruces.

Vemos que estos sumandos se puede agrupar para cada cruce en parejas $Z(K_+) - Z(K_-)$, que anularán las contribuciones a $Z(K_D)$ de todos los pares que no tengan un extremo cerca del cruce en el que K_+ y K_- difieren. Por lo tanto tenemos que las contribuciones de menor grado a $Z(K_D)$ vendrán de conjuntos P que contengan pares próximos a los m cruces, por lo que tendrán grado mayor o igual que m .

Para el término de grado exactamente m , vemos que por cómo se define K_D tenemos que $D_P = D$, y por lo tanto este término de $Z(K_D)$ será proporcional a \bar{D} . Comprobamos que la constante de proporcionalidad es 1.

En grado 1, la diferencia entre $Z(K_+)$ y $Z(K_-)$ vendrá de la diferencia entre integrar $\frac{dz-dz'}{z-z'}$ a lo largo de una trayectoria en la que z pasa cerca pero por encima de z' y otra en la que pasa cerca pero por debajo. Por el teorema integral de Cauchy, esta diferencia es $2\pi i$. Repitiendo este proceso m veces para los m puntos dobles de K_D se obtiene $(2\pi i)^m$, que cancela el coeficiente $1/(2\pi i)^m$ de (4.2).

b) Una vez visto que $W = W_m(V(W))$, comprobamos que

$$W_m(V - V(W_m(V))) = W_m(V) - W_m(V(W_m(V))) = W_m(V) - W_m(V) = 0.$$

Por lo tanto tenemos que la diferencia $V - V(W_m(V))$ desaparece para weight systems de grado m , por lo que V y $V(W_m(V))$ diferirán por un invariante de tipo $m - 1$.

□

5. Conclusiones

Hemos comenzado este trabajo familiarizándonos con las bases de la teoría de nudos, y hemos llegado a demostrar que el estudio de los invariantes de Vassiliev es equivalente al estudio de weight systems.

A lo largo de la memoria hemos conocido en profundidad los invariantes polinomiales de Alexander, Conway, Jones, y HOMFLY, que han resultado cruciales para el desarrollo de la teoría de nudos a lo largo de su historia, y aún hoy gozan de gran relevancia por permitir relacionar la teoría de nudos con otras ramas de la ciencia.

También hemos visto lo esenciales que son los diagramas de cuerdas y de Jacobi para el estudio de invariantes de tipo finito. Hemos visto que se puede obtener un weight system, también relevante para el estudio de invariantes de Vassiliev, de cualquier álgebra de Lie por medio de tensores invariantes.

Finalmente hemos definido la integral de Kontsevich, y hemos visto por medio de la conexión de Knízhnik-Zamolódchikov que, tras una pequeña corrección, es invariante por deformaciones arbitrarias de nudos y se puede usar para obtener un invariante de Vassiliev de un weight system.

Referencias

- [1] Adams, C. C.: *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*, W. H. Freeman and Company, 1994.
- [2] Bar-Natan, D.: On the Vassiliev knot invariants, *Topology* 34:423-472, 1995.
- [3] Bar-Natan, D.: Weights of Feynmann diagrams and the Vassiliev knot invariants, preprint, 1991 (actualizado en 1995).
- [4] Burde, G., Zieschang, H.: *Knots*, segunda edición, de Gruyter Studies in Mathematics, No. 5, Walter de Gruyter, 2003.
- [5] Chmutov, S.; Duzhin, S.: Kontsevich Integral, *MathWorld—A Wolfram Web Resource*, <https://mathworld.wolfram.com/KontsevichIntegral.html>, consultado el 10 de noviembre de 2021.
- [6] Cromwell, P. R.: *Knots and links*, Cambridge University Press, 2004.
- [7] Hall, B. C.: *Lie groups, Lie algebras and representations: an elementary introduction*, Graduate texts in mathematics, No. 222, Springer, 2015.
- [8] Jackson, D. M.; Moffat, I.: *An Introduction to Quantum and Vassiliev Knot Invariants*, CMS Books in Mathematics, Springer, 2019.
- [9] Roberts, J.: *Knots knots*, University of California San Diego, 2015, <https://mathweb.ucsd.edu/~justin/Roberts-Knotes-Jan2015.pdf>.
- [10] Kontsevich, M.: Vassiliev's Knot Invariants, *Advances in Soviet Mathematics*, 16(2):137-150, 1993.
- [11] Lickorish W. B. R.: *An introduction to knot theory*, Graduate texts in mathematics, No. 175, Springer, 1997.