Universidad de Madrid - Facultad de Ciencias

SEMINARIO DE ASTRONOMÍA Y GEODESIA
(Adherido a la Unión Nacional de Astronomía
y Ciencias Afines)

Publicación N.° 21

CALCULO CON CRACOVIANOS

POR

J. M. TORROJA

PUBLICADO EN «VRANIA» NÚM. 235

MADRID
1953

CALCULO CON CRACOVIANOS

POR J. M. TORROJA

Así como es sobradamente conocido el cálculo matricial, no ocurre lo mismo con el cálculo con cracovianos propuesto en el año 1924 por Th. Banachiewicz, Profesor de la Universidad y Director del Observatorio de Cracovia. En efecto, los métodos de cálculo con cracovianos casi han sido exclusivamente admitidos por los astrónomos, entre los que citaremos a Arend, Brouwer, Herget, el P. de la Villemarqué, Comrie, Cunningham, Eckert, etc.

Teniendo en cuenta que, hasta el momento, no se ha publicado nada en español sobre estos métodos de cálculo, y para que pueda servir de introducción a la conferencia que sobre «Les Polynomes Orthogonaux au sens intégral et au sens sommatoire» dió el Profesor S. Arend en el Seminario de Astronomía y Geodesia de la Universidad de Madrid, he creído interesante publicar estas notas, para cuya redacción me he basado principalmente en el trabajo del citado Profesor S. Arend «Voies Nouvelles dans le calcul scientifique» (Ciel et Terre, n.º 12, 1941), de donde he tomado la bibliografía que se incluye al final.

DEFINICIONES.—Llamaremos cracoviano a un conjunto de elementos

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \end{Bmatrix}$$

dispuestos en m filas y n columnas. La definición es pues, la misma dada para las matrices, si bien los índices correspondientes a la fila y la columna aparecen cambiados. No puede hablarse de *valor de un cracoviano,* debiendo considerarse solamente como un *operador.*

Se define la suma y resta de cracovianos en la misma forma en que se hace en el cálculo con matrices, pero es en la multiplicación donde aparece la diferencia entre matrices y cracovianos, pues mientras el producto de matrices se efectúa multiplicando filas por columnas, para multiplicar dos cracovianos han de multiplicarse columna por columna.

Igualdad. Dos cracovianos son iguales cuando lo son sus elementos correspondientes, es decir, $a_{ik} = b_{ik}$ define la igualdad de los cracovianos **a** y **b**. Así

$$\begin{Bmatrix} (a+b)^2 & a^2-b^2 \\ (a-b)^2 & a^2+b^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a^2+2\,a\,b+b^2 & (a+b)\,(a-b) \\ a^2-2\,a\,b+b^2 & \left(a+b\sqrt{-1}\right)\left(a-b\sqrt{-1}\right) \end{Bmatrix}$$

Suma y resta. La suma $\mathbf{c} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}$ de los cracovianos **a** y **b** se efectúa sumando algebraicamente los elementos correspondientes.

$$c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}$$

Así se tiene

$$\begin{Bmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 4 & 7 & -5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 & 2 & -9 \\ -1 & -4 & 8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 & 8 & -7 \\ 3 & 3 & 3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 7 & 5 \\ -4 & 1 \\ 3 & -2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 9 \\ -1 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ -9 & -8 \\ 4 & -2 \end{Bmatrix}$$

Multiplicación. El producto de dos cracovianos se define multiplicando los cracovianos columna por columna, de forma que los elementos del cracoviano **p** producto de los **a** y **b** serán

$$p_{ik} = a_{i1} \cdot b_{k1} + a_{i2} \cdot b_{k2} + a_{i3} \cdot b_{k3}$$

Así

$$\begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (12+1+9) & (24-5-6) \\ (8-7+24) & (16+35-16) \\ (-4-4+15) & (-8+20-10) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 & 13 \\ 25 & 35 \\ 7 & 2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (12+1+9) & (8-7+24) & (-4-4+15) \\ (24-5-6) & (16+35-16) & (-8+20-10) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 22 & 25 & 7 \\ 13 & 35 & 2 \end{Bmatrix}$$

Es evidente que, para que el producto de dos cracovianos tenga sentido, es necesario que ambos tengan el mismo número de filas.

El producto de varios cracovianos no goza de las propiedades conmutativa ni asociativa, ha de efectuarse en el orden en que se presentan los factores.

Es decir,

$$\mathbf{P} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = \left[(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \right] \cdot \mathbf{d}$$

Si hemos de obtener el producto de los cracovianos

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ \\ 3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -1 & 4 & 3 \\ \\ 2 & 5 & -2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -2 & 5 \\ \\ 3 & 1 \end{matrix} \right\}$$

se multiplica el primero de ellos por el segundo, lo que da

$$\left\{ \begin{matrix} (-2+6) \\ (8+15) \\ (6-6) \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 23 \\ 0 \end{matrix} \right\}$$

Este resultado se multiplica por el tercer factor:

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 23 \\ 0 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (20-46+0) \\ \\ (28+23+0) \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} -26 \\ \\ 51 \end{matrix} \right\}$$

Este nuevo resultado se multiplica por el cuarto factor:

$$\left\{ \begin{matrix} -26 \\ 51 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} (52+153) \\ (-130+51) \end{matrix} \right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} 205 \\ -79 \end{matrix} \right\}$$

El cracoviano **P**, producto de los factores **a**, **b**, **c**, **d**, tiene tantas columnas como el primer factor, y tantas filas como columnas tiene el último factor. Esta regla es igualmente válida para un producto de más factores: las dimensiones m (número de columnas) y n (número de filas) del cracoviano **P**, vienen dadas por los números de columnas de los cracovianos **a**, primer factor, y **b**, último factor.

Cracoviano unitario. Llamaremos cracoviano unitario (τ) a un cracoviano cuadrado (igual número de filas y de columnas) tal que los elementos de la diagonal principal son todos iguales a la unidad, siendo nulos los restantes elementos

$$\tau = \left\{ 1 \right\} \qquad \tau = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\} \qquad \tau = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \quad \text{etc.}$$

Se ve inmediatamente que

$$\mathbf{a} \cdot \tau = \mathbf{a}$$

por el contrario,

$$\tau \cdot \mathbf{a} = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\} \quad (1)$$

es decir, al multiplicar un cracoviano unitario por un cracoviano cualquiera se obtiene este último, pero cambiadas las filas por las columnas. Este cracoviano se llama *transpuesto* del dado.

La expresión $\tau.\mathbf{a}$ o $\tau\mathbf{a}$, se lee pues, *transpuesto de* **a**. Así por ejemplo:

$$\tau\left\{\begin{matrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 5 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{matrix}\right\}$$

$$\tau\left\{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \end{matrix}\right\}$$

El signo τ de transposición se emplea, por comodidad de escritura

$$\tau\left\{\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \end{matrix}\right\} \quad \text{en vez de} \quad \left\{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}\right\}$$

o bien

$$\left\{ 1 \right\}\left\{\begin{matrix} 2 & -1 & 3 \end{matrix}\right\} \quad \text{en vez de} \quad \left\{\begin{matrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}\right\}$$

y en general

$$\tau\left\{\begin{matrix} b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix}\right\}$$

Reglas para la asociación, disociación y permutación en la multiplicación de cracovianos.

Inmediatamente se ve que:

Si $\mathbf{P} = \mathbf{a}.\,\mathbf{b}$, se tiene $\tau\,\mathbf{P} = \mathbf{b}.\,\mathbf{a}$ (permutación)

Y en general

Si $\mathbf{P} = \mathbf{a}.\,\mathbf{b}.\,\mathbf{c}.\,\mathbf{d}.\,\mathbf{e}$, será $\tau\,\mathbf{P} = \mathbf{e}.\,\tau\,\mathbf{d}.\,\tau\,\mathbf{c}.\,\tau\,\mathbf{b}.\,\mathbf{a}$.

Igualmente $\mathbf{P} = \mathbf{u}\mathbf{v} = \mathbf{v}\mathbf{u}$ cuando los cracovianos **u** y **v** no tienen más que una columna, pues su producto será un número. Se tiene también $\mathbf{u}.\,\mathbf{A}.\,\mathbf{v}. = \mathbf{v}.\,\mathbf{A}.\,\mathbf{u}$.

Si $\mathbf{A} = \tau\,\mathbf{A}$, el cracoviano **A** es simétrico.

Por otra parte resulta,

$\mathbf{a}.\,\mathbf{b}.\,\mathbf{c}.\,(\mathbf{e}.\,\tau\,\mathbf{d}.) = \mathbf{a}.\,\mathbf{b}.\,(\mathbf{e}.\,\tau\,\mathbf{d}.\,\tau\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\,(\mathbf{e}.\,\tau\,\mathbf{d}.\,\tau\,\mathbf{c}.\,\tau\,\mathbf{b}.)$ (Asociación)

$\mathbf{a}.\,(\mathbf{b}.\,\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\,\tau\,\mathbf{c}.\,\tau\,\mathbf{b}. \qquad \mathbf{a}.\,(\mathbf{b}.\,\mathbf{c}.\,\mathbf{d}) = \mathbf{a}.\,\tau\,\mathbf{e}.\,\tau\,\mathbf{d}.\,\tau\,\mathbf{c}.\,\tau\,\mathbf{b}.$ (Disociación)

De aquí la siguiente regla nemotécnica:

En la $\left\{\begin{matrix} \text{Asociación} \\ \text{Disociación} \\ \text{Permutación} \end{matrix}\right\}$ los cracovianos se escriben en orden inverso

$$\text{y transpuestos, salvo} \left\{ \begin{array}{l} \text{el que aparece } \mathbf{A}\text{ntes} \\ \text{el que aparece } \mathbf{D}\text{etrás} \\ \text{los que aparecen en la } \mathbf{P}\text{eriferia} \end{array} \right\} \text{en el resultado.}$$

Como caso particular se ve que la permutación de los factores de **P** conduce a τ**P**.

Demos un ejemplo referente a la asociación: en lugar de efectuar el producto

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & -2 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\}$$

multiplicando sucesivamente los cracovianos, pueden asociarse los dos factores centrales, aplicándose la regla de la asociación

$$\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right\} \left(\left\{\begin{matrix} 5 & 7 \\ -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{matrix}\right\} \right) \left\{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -4 & -21 \\ -6 & 31 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} -26 \\ 51 \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} 205 \\ -79 \end{matrix}\right\}$$

Cuadrado de un cracoviano. Inmediatamente se ve que el cuadrado de un cracoviano es

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

un cracoviano cuadrado y simétrico, de forma que

$$\tau\, \mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Producto de cracovianos fila por fila. En los esquemas de cálculo es a veces útil considerar el producto de cracovianos fila por fila [9], para evitar la transposición de un cracoviano que intervenga en un producto columna por columna.

Esta multiplicación se representa por el signo

$$\mathbf{a} \;\mathrm{w}\; \mathbf{b} = \mathbf{d}$$

derivado de la palabra polaca «wiersz» (fila). Significa que **d** es el producto del cracoviano **a** por el cracoviano **b**, efectuándose dicho producto fila por fila y escribiendo el resultado **d** en filas.

Así, puede escribirse

$$\left\{\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}\right\} \mathrm{w} \left\{\begin{matrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{matrix}\right\}$$

siendo

$$k_i = a_1\, b_{1i} + a_2\, b_{2i} + a_3\, b_{3i}$$

Para pasar de una forma de multiplicación a la otra, pueden utilizarse las relaciones de transformación siguientes:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c} & \mathbf{a} \ \mathrm{w} \ \mathbf{b} = \mathbf{d} \\ \tau\mathbf{a} \ \mathrm{w} \ \tau\mathbf{b} = \tau\mathbf{c} & \tau\mathbf{a} \cdot \tau\mathbf{b} = \tau\mathbf{d} \\ \tau\mathbf{b} \ \mathrm{w} \ \tau\mathbf{a} = \mathbf{c} & \tau\mathbf{b} \cdot \tau\mathbf{a} = \mathbf{d} \\ \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \tau\mathbf{c} & \mathbf{b} \ \mathrm{w} \ \mathbf{a} = \tau\mathbf{d} \end{array}$$

donde τ, cracoviano unitario, es también el signo de la transposición del cracoviano al que precede, cualquiera que sea la forma del producto.

Cracoviano inverso. Dado un cracoviano $\mathbf{a}$ cuadrado, cuyo determinante $|a|$ sea distinto de cero, el cracoviano inverso $\mathbf{a}^{-1}$ queda definido por la relación

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^{-1} = \tau \tag{2}$$

De esta definición se deduce que dado el cracoviano

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{Bmatrix}$$

su inverso será

$$\mathbf{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} \dfrac{a_{22}}{|a|} & -\dfrac{a_{12}}{|a|} \\ -\dfrac{a_{21}}{|a|} & \dfrac{a_{11}}{|a|} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Luego el inverso de un cracoviano de segundo orden se forma permutando los elementos de las diagonales principal y secundaria, cambiando los signos de esta última y dividiendo cada uno de ellos por $|a|$.

Así el inverso de

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 5 \end{Bmatrix} \quad \text{será} \quad \mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{10}\begin{Bmatrix} 5 & -10 \\ -3 & 8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 & -1{,}0 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{Bmatrix}$$

Inmediatamente se ve que

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^{-1} = \begin{Bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}5 & -1{,}0 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} = \tau$$

Análogamente, el inverso de

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{Bmatrix} \quad \text{será} \quad \mathbf{b}^{-1} = \begin{Bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{Bmatrix}$$

y según la fórmula (3), el inverso de un cracoviano

$$\mathbf{k} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 5 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 9 & -7 \\ -5 & 4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 22 & 2 \\ -16 & -1 \end{Bmatrix}$$

será

$$\mathbf{k}^{-1} = \mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{b}^{-1} = \begin{Bmatrix} 0{,}5 & -1{,}0 \\ -0{,}3 & 0{,}8 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}1 & 1{,}6 \\ -0{,}2 & 2{,}2 \end{Bmatrix}$$

o bien, directamente

$$\mathbf{k}^{-1} = \frac{1}{10} \left\{ \begin{array}{rr} -1 & 16 \\ -2 & 22 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{rr} -0{,}1 & 1{,}6 \\ -0{,}2 & 2{,}2 \end{array} \right\}$$

En el caso de cracovianos de orden superior al segundo, la formación del inverso no es tan inmediata. Th. Banachiewicz ha dado las reglas para su formación en el caso general [9].

* * *

Resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Como ejemplo de la aplicación del cálculo con cracovianos, estudiamos la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{l} a_{11}\, x_1 + a_{21}\, x_2 + a_{31}\, x_3 = l_1 \\ a_{12}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{32}\, x_3 = l_2 \\ a_{13}\, a_1 + a_{23}\, x_2 + a_{33}\, x_3 = l_3 \end{array} \qquad \text{(I)}$$

La resolución de este sistema será posible si se cumple la condición

$$|a| \neq 0$$

y para obtener la solución es necesario calcular los valores de cuatro determinantes siendo los valores de las incógnitas:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} l_1 & a_{21} & a_{31} \\ l_2 & a_{22} & a_{32} \\ l_3 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & l_1 & a_{31} \\ a_{21} & l_2 & a_{32} \\ a_{31} & l_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & l_1 \\ a_{12} & a_{22} & l_2 \\ a_{13} & a_{23} & l_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad \text{(II)}$$

Veamos ahora cómo puede resolverse el sistema utilizando el cálculo con cracovianos.

Con la notación del cálculo con cracovianos, el sistema (I) se escribe en la forma

$$\mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} = \mathbf{l} \qquad \text{(I')}$$

siendo

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right\} \qquad \mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{array} \right\} \qquad \mathbf{l} = \left\{ \begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \right\}$$

Multiplicando los dos miembros de (I') por $\mathbf{a}^{-1}$, inverso de $\mathbf{a}$, obtenemos

$$\mathbf{x} \cdot \tau\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^{-1} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{a}^{-1}$$

y asociando los dos últimos factores del primer miembro

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{a}^{-1} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{l} \cdot \mathbf{a}^{-1}$$

Pero por (2) esto puede ponerse

$$\mathbf{x} \cdot \tau = \mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{a}^{-1}$$

Es decir

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{a}^{-1} \qquad \text{(II')}$$

Basta, pues, formar el cracoviano inverso $\mathbf{a}^{-1}$ y la expresión (II′) nos da directamente los valores de las incógnitas. Las operaciones son así más sencillas y en menor número.

Como ejemplo, resolvamos el sistema :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -5 \\ 2x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Inmediatamente se obtiene

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{8}\begin{Bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \end{Bmatrix}$$

La solución del sistema será:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 7 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{2}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{2}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

o sea

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 \\ x_2 &= 3 \end{aligned}$$

La solución del sistema I dada en la forma II′ es especialmente ventajosa cuando se trata de resolver un sistema de ecuaciones cuyos segundos miembros han de recibir series sucesivas de valores

$$\begin{matrix} l_1 & l'_1 & l''_1 & \dots \\ l_2 & l'_2 & l''_2 & \dots \\ l_3 & l'_3 & l''_3 & \dots \end{matrix}$$

Escrita la solución del sistema en la forma II′ utilizando el multiplicador cacroviano $\mathbf{a}^{-1}$, bastará ir dando valores sucesivos al cracoviano $\mathbf{l}$ para obtener las distintas soluciones.

BIBLIOGRAFIA

(1) S. AREND. *Les cracoviens.* Ciel et Terre, núm. 1, 1933.

(2) S. AREND. *Voies nouvelles dans le calcul scientifique* Ciel et Terre, núm. 12, 1941.

(3) S. AREND ET P. SANDERS. *Application du calcul des cracoviens à l'amélioration de l'orbite de l'astéroïde 1938 QB = 1493 Sigrid, B. A. B. 3.* n.º 3, 1940 et n.º 4, 1941.

(4) TH. BANACHIEWICZ. *L'orbite corrigée de la comète Orkisz (1925 c). Généralités sur les formules de nouveau genre.* Circ. Obs. Cracovie núm. 17, 1925.

(5) TH. BANACHIEWICZ. *Zur Berechnung der Determinanten, etc.* Acta Astronomica, serie c, vol. 3, décembre 1937, p. 44.

(6) TH. BANACHIEWICZ. *Contrôle des opérations avec les cracoviens.* Astronomica, serie c, décembre 1938.

(7) TH. BANACHIEWICZ. *On the computation of inverse arrays.* Acta Astronomica, serie c, vol. 4, avril 1939.

(8) TH. BANACHIEWICZ. *Etudes d'analyse pratique.* Cracow Obs. Reprint, 22, 1938.

(9) TH. BANACHIEWICZ. *Les cracoviens et quelques-unes de leurs applications en geódésie*, Cracow Observatory Reprint, 25, 1949, p. 10.

(10) J. BELKOWICZ. *Matrices-Cracovians and their astronomical applications,* Russ. Astr. Journ., Vol. 8 fasc. 2, 1931, page 150.

(11) J. JENSEN. *Herleitung einiger Ergebnisse der Ausgleichsrechnung mit Hilfe von Matrizen.* Geodaetisk Inst., Copenhague, Medd. núm. 13, 1939.

(12) E. DE LA VILLEMARQUÉ, S. J. *Calcul numérique de transformations linéaires par la méthode des bandes mobiles.* Ann. Obs. Zô-Sè (Chine), tome 19, fasc. 3, 1936.

SUGRAÑES HNOS.
Editores-Tarragona