Universidad de Madrid - Facultad de Ciencias

SEMINARIO DE ASTRONOMÍA Y GEODESIA
(Adherido a la Unión Nacional de Astronomía
y Ciencias Afines)

Publicación N.° 22

Los Polinomios Ortogonales y su aplicación en la representación matemática de fenómenos experimentales

POR

S. AREND
Astrónomo del Observatorio Real de Bélgica

PUBLICADO EN «VRANIA» NÚM. 235

MADRID
1953

LOS POLINOMIOS ORTOGONALES Y SU APLICACION EN LA REPRESENTACION MATEMATICA DE FENOMENOS EXPERIMENTALES *

POR S. AREND**

Astrónomo del Observatorio Real de Bélgica

Sommaire:

Une définition algébrique directe des polynomes orthogonaux au sens intégral est donnée et exploitée en vue du calcul de ces polynomes. Une définition et un calcul analogues sont indiqués pour les polynomes orthogonaux au sens sommatoire, ce qui permet d'obtenir pour ceux-ci des expressions générales fonctions du nombre N de points à représenter, dont les ordonnées correspondent à des abscisses procédant par intervalle constant.

On utilise le calcul cracovien [1] et l'on montre l'application de cette technique à la constitution de divers multiplicateurs cracoviens dont les éléments se déduisent les uns des autres avec simplicité et sûreté. Enfin, quelques exemples numériques sont traités, où l'on se borne aux aspects généraux de certains problèmes touchant la représentation mathématique polynomiale de phénomènes expérimentaux.

I.—LOS POLINOMIOS ORTOGONALES COMO ALGORITMO INTEGRAL

1.—*Imagen de la representación en el sentido integral.* La representación de una función f(x) por otra función F(x) en un intervalo (a, b) puede hacerse de forma que las desviaciones

$$u(x) = F(x) - f(x)$$

verifiquen la condición

$$\int_a^b u^2(x)\, dx = \text{mínimo} \tag{1}$$

(*) Conferencia dada el 21 de abril de 1953 en el Seminario de Astronomía y Geodesia de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.

(**) Je veux bien ajouter l'expression de ma gratitude a Mr. le Professeur J. M. Torroja qui a fait la traduction espagnole de cet article.

Supuestos rectangulares los ejes x e y, al girar la curva $y=u(x)$ alrededor del eje x, engendra un volumen de revolución V, que puede expresarse directamente por el teorema del valor medio:

$$V = \pi \int_a^b u^2(x)\,dx = \pi\,(b-a)\,.\,u^2(\xi) \qquad a < \xi < b \tag{2}$$

Por consiguiente el valor medio en el sentido integral de los cuadrados de las desviaciones, valor que constituye una medida de la calidad de la aproximación y que corresponde al cuadrado E^2 de la desviación media cuadrática clásica, será

$$E^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b u^2(x)\,dx = u^2(\xi) \tag{3}$$

Se deduce de aquí que la *desviación media cuadrática E viene representada por el radio u* (ξ) *de la sección del cilindro circular cuyo volumen es equivalente al volumen de revolución mínimo impuesto.*

Podemos imaginarnos el volumen de revolución y el cilindro circular cortados por planos paralelos equidistantes, normales al eje x, y cuya equidistancia sea infinitamente pequeña. Si suponemos que se efectúa la traslación de los volúmenes elementales así definidos normalmente a dicho eje, hasta centrarlos sobre la curva f(x), se obtiene una imagen de la representación obtenida con la ayuda de F(x).

2.—*Aplicación de los polinomios ortogonales*. Para obtener una mayor generalidad efectuemos el cambio de abscisas

$$x = \frac{b-a}{2}\,x' + \frac{b+a}{2} \tag{4}$$

de forma que x' variará entre -1 y $+1$ cuando x varíe entre a y b.

Además es conveniente elegir para F (x) una serie:

$$F(x) = b_0\,P_0(x) + b_1\,P_1(x) + b_2\,P_2(x) + \ldots\ldots\, b_m\,P_m(x) = \mathbf{bP} \tag{5}$$

poniendo, utilizando las notaciones del cálculo con cracovianos,

$$\mathbf{b} = \tau \left\{ b_0\ b_1\ b_2\ \ldots\ b_m \right\}\ ;\ \mathbf{P} = \tau \left\{ P_0\ P_1\ P_2\ \ldots\ P_m \right\} \tag{6}$$

y siendo las b_p coeficientes numéricos, mientras que los P_p (x) son polinomios ortogonales de grado p, que para mayor brevedad representamos por P_p.

3.—*Definición algebraica directa de los polinomios ortogonales*. Una definición algebraica directa de los polinomios ortogonales en el intervalo $(-1, +1)$, así como un control de su ortogonalidad cuando sus coeficientes son conocidos, vienen dados por la relación

$$\int_{-1}^{+1} (\tau\, \mathbf{P})^2\, dx = \int_{-1}^{+1} \left\{ P_0\ P_1\ P_2 \dots P_m \right\}^2 dx = \boldsymbol{\lambda} \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$, que se supone desconocido, es un cracoviano diagonal, es decir, cuyos elementos son todos nulos a excepción de los de la diagonal principal.

Si designamos por $\mathbf{L}$ el cracoviano de los coeficientes de los polinomios ortogonales (hasta el grado a que nos limitemos), es decir, si hacemos $\tau\, \mathbf{P} = \mathbf{L x}$, o explícitamente

$$\tau\, \mathbf{P} = \left\{ P_0\ P_1\ P_2 \dots P_m \right\} = \mathbf{L}\, \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} & \dots \\ 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} \tag{8}$$

el primer miembro de (7) se escribe

$$\int_{-1}^{+1} (\tau\, \mathbf{P})^2\, dx = \int_{-1}^{+1} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{x})^2\, dx = \int_{-1}^{+1} \mathbf{L} \cdot (\tau\, \mathbf{x})^2\, dx \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \int_{-1}^{+1} (\tau\, \mathbf{x})^2\, dx \cdot \mathbf{L} \tag{9}$$

Ahora bien,

$$\int_{-1}^{+1} (\tau\, \mathbf{x})^2\, dx = \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots \\ x & x^2 & x^3 & x^4 & \dots \\ x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & \dots \\ x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix} dx = \begin{Bmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \dots \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \dots \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \dots \\ \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} & \frac{x^6}{6} & \frac{x^7}{7} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix}_{-1}^{+1} \tag{10}$$

Por consiguiente, la (7) puede escribirse explícitamente

$$\begin{Bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} & \dots \\ 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} & a_{43} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{00} & a_{10} & a_{20} & a_{30} & a_{40} & \dots \\ 0 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \dots \\ 0 & 0 & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{33} & a_{43} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \lambda_{00} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{33} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{Bmatrix} \tag{11}$$

o, representando por **J** el cracoviano integral central del primer miembro

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{L} = \lambda \tag{12}$$

que es una relación algebraica que define los coeficientes de los polinomios ortogonales buscados.

Si se pone

$$\mathbf{J} = \mathbf{r}^2$$

tendremos

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{r}^2 \cdot \mathbf{L} = (\mathbf{L} \tau \mathbf{r})^2 = \lambda \tag{13}$$

de donde

$$\mathbf{L} \tau \mathbf{r} = \sqrt{\lambda} \tag{14}$$

relación equivalente a la (12), pero más fácil de manejar.

Si nos limitamos a los polinomios de 5.º grado, por ejemplo, se encuentra fácilmente

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{5\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \frac{2}{7}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{5}} & 0 & \frac{8}{35}\sqrt{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}} & 0 & \frac{8}{63}\sqrt{\frac{7}{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{15}\sqrt{\frac{2}{9}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{63}\sqrt{\frac{2}{11}} \end{Bmatrix} \tag{15}$$

Los elementos de la diagonal principal de (14) son de la forma

$$\mathbf{a}_{pp}\, \mathbf{r}_{pp} = \sqrt{\lambda_{pp}} \tag{16}$$

los de (15) se escriben

$$\mathbf{r}_{pp} = \mathbf{a}_{pp}^{-1} \sqrt{\lambda_{pp}}$$

lo que nos lleva a igualar las $\sqrt{\lambda_{pp}}$ a la parte irracional de los elementos diagonales de (15), es decir,

$$\lambda_{00} = 2 \quad \lambda_{11} = \frac{2}{3} \quad \lambda_{22} = \frac{2}{5} \quad \lambda_{33} = \frac{2}{7} \quad \ldots\ldots \quad \lambda_{pp} = \frac{2}{2p+1} \tag{17}$$

De aquí, el cracoviano de los coeficientes de los polinomios ortogonales (conocidos con el nombre de polinomios de Legendre) es

$$\mathbf{L} = \sqrt{\lambda} \cdot \mathbf{r}^{-1} = \left((\sqrt{\lambda})^{-1}\ \mathbf{r} \right)^{-1} \tag{18}$$

Los polinomios son, pues, hasta $p = 5$

$$\mathbf{L\,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{7} & 0 & \frac{8}{35} & 0 \\ 0 & \frac{3}{7} & 0 & \frac{4}{9} & 0 & \frac{8}{63} \end{pmatrix}^{-1} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{15}{8} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\frac{35}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{35}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{63}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{pmatrix} \tag{18}$$

Verifican la condición $P_p(1) = +1$, generalmente impuesta para la definición de las λ.

En resumen, *la definición que acabamos de dar de los polinomios ortogonales se reduce a la consideración de un cracoviano integral,* **J**, *a la extracción de su raíz cuadrada* **r** *y al cálculo del inverso de éste, previamente multiplicado por* $(\sqrt{\lambda})^{-1}$, *eligiéndose las* λ_{pp} *según la (17).*

No nos ocuparemos aquí de la utilización de estos polinomios, que ofrece múltiples aspectos clásicos. Lo haremos para los polinomios ortogonales considerados como algoritmos sumatorios, susceptibles de una definición análoga a la precedente.

II.—LOS POLINOMIOS ORTOGONALES COMO ALGORITMO SUMATORIO

1.—*Planteamiento del problema.* Si se conoce, por ejemplo, una serie de 2n+1 ó 2n ordenadas $y_i = f(x_i)$ a las que corresponden las abscisas respectivas

$$x_i = -n, \ldots, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \ldots.\ n \tag{19}$$

$$x_i = -(2n-1), \ldots -3, \quad -1, \quad 1, \quad 3, \ldots..\ 2n-1 \tag{20}$$

la condición de mejor representación en el sentido de la teoría de de los mínimos cuadrados

$$\Sigma\, \big(F(x) - f(x)\big)^2 = \text{mínimo} \tag{21}$$

se escribe en los dos casos considerados

$$\sum_{x=-n}^{n} \big(\mathbf{b} \cdot \mathbf{P} - f(x)\big)^2 = \text{mínimo}\,; \quad \sum_{x=-(2n-1)}^{2n-1} \big(\mathbf{b} \cdot \mathbf{P} - f(x)\big)^2 = \text{mínimo} \tag{22}$$

siendo los P(x) polinomios ortogonales en el sentido sumatorio.

2.—Definición algebraica directa de los polinomios ortogonales como algoritmo sumatorio. Adoptando las mismas notaciones que para el caso anterior, esta definición viene dada por la relación

$$\Sigma\,(\tau\,\mathbf{P})^2 = \Sigma\,(\mathbf{L}\cdot\mathbf{x})^2 = \Sigma\,\mathbf{L}\,(\tau\,\mathbf{x})^2\,\mathbf{L} = \mathbf{L}\,\Sigma\,(\tau\,\mathbf{x})^2\,\mathbf{L} = \lambda \qquad (23)$$

El cracoviano suma $\Sigma\,(\tau\,\mathbf{x})^2$ de $(\tau\,\mathbf{x})^2$ ya desarrollado en (10), donde aparece bajo el signo integral, tiene por expresiones para los límites respectivos considerados en (22), designando por N el número de puntos :

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} N & 0 & 2S_2 & \ldots \\ 0 & 2S_2 & 0 & \ldots \\ 2S_2 & 0 & 2S_4 & \ldots \\ 0 & 2S_4 & 0 & \ldots \\ 2S_4 & 0 & 2S_6 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{S}' = \begin{Bmatrix} N & 0 & 2S'_2 & \ldots \\ 0 & 2S'_2 & 0 & \ldots \\ 2S'_2 & 0 & 2S'_4 & \ldots \\ 0 & 2S'_4 & 0 & \ldots \\ 2S'_4 & 0 & 2S'_6 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{Bmatrix} \qquad (24)$$

donde S_k representa la suma de las $k^{mas.}$ potencias de los n primeros números enteros y S'_k la de los $k^{mas.}$ potencias de los n primeros números impares.

Pero las sumas $2^k\,S_k$ y S'_k para k par, presentan la misma forma literal en función de N (teniendo respectivamente el valor $2n+1$ y $2n$ en las dos fórmulas (24)). Por consiguiente si se calculan los polinomios ortogonales utilizando las $\mathbf{S}'$, por ejemplo, es decir, para un número de puntos *N par*, se deducirán de ellos los relativos a las abscisas (19) y al caso en que *N* sea *impar*, reemplazando en los primeros x por 2x.

Basta pues considerar (23) en la forma

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}'\cdot\mathbf{L} = \lambda \qquad (25)$$

semejante a (12). Poniendo $\mathbf{S}' = \mathbf{r}'^2$ se deduce de (25)

$$\mathbf{L}\cdot\tau\,\mathbf{r}' = \sqrt{\lambda} \qquad (26)$$

$$\mathbf{L} = \sqrt{\lambda}\cdot\mathbf{r}'^{-1} = \left(\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}\cdot\mathbf{r}'\right)^{-1} \qquad (27)$$

análoga a la (18).

Esta definición de los polinomios ortogonales como algoritmo sumatorio se reduce a la consideración del cracoviano suma $\mathbf{S}'$, *a la extracción de su raíz cuadrada* $\mathbf{r}'$ *y al cálculo de su inversa, previamente multiplicado por* $\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1}$, *eligiéndose las* λ_{pp} *según (28) por razones que aparecen en el curso del cálculo:*

$$\lambda_{00} = N, \quad \lambda_{11} = \frac{N(N+1)}{3\,(N-1)}, \quad \lambda_{22} = \frac{N(N+1)\,(N+2)}{5\,(N-1)\,(N-2)} \;\ldots\ldots$$

$$\lambda_{pp} = \frac{N\,(N+1)\,(N+2)\ldots.\,(N+p)}{(2p+1)\,(N-1)\,(N-2)\ldots\,(N-p)} \qquad (28)$$

Estas razones vienen impuestas por el deseo de hacer racionales los elementos de $\left(\sqrt{\lambda}\right)^{-1} r'$ en (27) y obtener

$$P_p\,(N-1) = +1 \tag{29}$$

es decir, los valores numéricos extremos de los P_p (N—1) a priori más sencillos, siendo los numeradores iguales a los denominadores.

3.—*Expresiones generales de los polinomios ortogonales hasta el grado 10.* Efectuando los cálculos conforme al esquema que acabamos de indicar y que detallaremos en una publicación más extensa, se obtienen, utilizando las expresiones literales de S'_k para k par y hasta $k = 20$, los polinomios ortogonales para un número *N par* de puntos, de abscisas equidistantes:

$$-(N-1), \ldots -5,\ -3,\ -1,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots.\ N-1 \tag{30}$$

$$P_0 = 1$$

$$(N-1)\,P_1 = x$$

$$2(N-1)\,(N-2)P_2 = 3x^2 - (N^2-1)$$

$$2(N-1)\,(N-2)\,(N-3)P_3 = 5x^3 - (3N^2-7)x$$

$$8(N-1)\ldots(N-4)P_4 = 35x^4 - 10(3N^2-13)x^2 + 3(N^2-1)\,(N^2-9)$$

$$8(N-1)\ldots(N-5)P_5 = 63x^5 - 70(N^2-7)x^3 + \left[\,5N^2(3N^2-46)+407\,\right] x$$

$$16(N-1)\ldots(N-6)P_6 = 231x^6 - 105(3N^2-31)x^4 + 21\left[\,5N^2(N^2-22)+329\,\right] x^2 - \\ -5(N^2-1)\,(N^2-9)\,(N^2-25)$$

$$16(N-1)\ldots(N-7)P_7 = 429x^7 - 231(3N^2-43)x^5 + 21\left[\,15N^2(N^2-30)+2051\,\right] x^3 - \\ - \left\{ 7N^2 \left[\,5N^2\,(N^2-47)+2471\,\right] - 27207 \right\} x$$

$$128(N-1)\ldots(N-8)P_8 = 6435x^8 - 12012(N^2-19)x^6 + 2310\left[N^2(3N^2-118)+763\right] x^4 - \\ -12\left\{ 7N^2\left[\,15N^2(N^2-61)+13097\,\right] - 231491 \right\} x^2 + \\ +35(N^2-1)\,(N^2-9)\,(N^2-25)\,(N^2-49)$$

$$128(N-1)\ldots(N-9)P_9 = 12155x^9 - 8580(3N^2-73)x^7 + 6006\left[3N^2(N^2-50)+1307\right] x^5 - \\ -220\left\{ 7N^2\left[\,3N^2\,(N^2-77)+4341\,\right] - 112951 \right\} x^3 + \\ +3\left\{ N^2\left[\,35N^2 \cdot N^2(3N^2-316)+(334054N^2-2973140)\,\right] + 4370361 \right\} x$$

$$256(N-1)\ldots(N-10)P_{10} = 46189x^{10} - 36465(3N^2-91)x^8 + \\ +6006\left[\,15N^2(N^2-62)+10507\,\right] x^6 - \\ -1430\left\{ 21N^2\left[\,N^2(N^2-95)+2275\,\right] - 245737 \right\} x^4 + \\ +33\left(5N^2 \left\{ 7N^2\left[\,N^2(3N^2-388)+14714\,\right] - 1207852 \right\} + 13782993 \right) x^2 - \\ -63(N^2-1)\,(N^2-9)\,(N^2-25)\,(N^2-49)\,(N^2-81)$$

En cuanto a los polinomios correspondientes a un número *N impar* de puntos de abscisas equidistantes

$$-\frac{(N-1)}{2},\ \ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\frac{N+1}{2} \tag{31}$$

se deducen de los precedentes, reemplazando en ellos x por 2x

$$P_0 = 1$$

$$(N-1)P_1 = 2x$$

$$(N-1)(N-2)\,P_2 = 6x^2 - \frac{N^2-1}{2}$$

$$(N-1)(N-2)(N-3)P_3 = 20x^3 - (3N^2-7)x$$

$$(N-1)\ldots(N-4)P_4 = 70x^4 - 5(3\,N^2-13)x^2 + \frac{3(N^2-1)(N^2-9)}{8}$$

$$(N-1)\ldots(N-5)P_5 = 252x^5 - 70(N^2-7)x^3 + \frac{5N^2(3N^2-46)+407}{4}\,x$$

$$(N-1)\ldots(N-6)P_6 = 924x^6 - 105(3N^2-31)x^4 + \frac{21\,[5N^2\,(N^2-22)+329]}{4}\,x^2 - \frac{5(N^2-1)(N^2-9)(N^2-25)}{16}$$

$$(N-1)\ldots(N-7)P_7 = 3432x^7 - 462(3N^2-43)x^5 + \frac{21[15N^2(N^2-30)+2051]}{2}\,x^3 - \frac{7N^2\,[5N^2\,(N^2-47)+2471]-27207}{8}\,x$$

$$(N-1)\ldots(N-8)P_8 = 12870x^8 - 6006(N^2-19)x^6 + \frac{1155[N^2(3N^2-118)+763]}{4}\,x^4 - \frac{3\left\{7N^2\left[15N^2(N^2-61)+13097\right]-231491\right\}}{8}\,x^2 + \frac{35(N^2-1)(N^2-9)(N^2-25)(N^2-49)}{128}$$

$$(N-1)\ldots(N-9)P_9 = 48620x^9 - 8580(3N^2-73)x^7 + \frac{3003\,[3N^2\,(N^2-50)+1307]}{2}\,x^3 - \frac{55\left\{7N^2\left[3N^2(N^2-77)+4341\right]-112951\right\}}{4}\,x^3 + \frac{3\left\{N^2\left[35N^2\cdot N^2(3N^2-316)+334054N^2-2973140\right]+4370361\right\}}{64}\,x$$

$$(N-1)\ldots(N-10)P_{10} = 184756x^{10} - 36465(3N^2-91)x^8 + \frac{3003\,[15N^2(N^2-62)+10507]}{2}\,x^6 - \frac{715\left\{21N^2\left[N^2\,(N^2-95)+2275\right]-245737\right\}}{8}\,x^4 + \frac{33\left(5N^2\left\{7N^2\left[N^2(3N^2-388)+14714\right]-1207852\right\}+13782993\right)}{64}\,x^2 - \frac{63(N^2-1)(N^2-9)(N^2-25)(N^2-49)(N^2-81)}{256}$$

4.—*Representación de una serie de ordenadas cuyas abscisas están separadas por un intervalo constante.* Si designamos por P_{pi} el valor numérico que toma el polinomio de grado p, cuando se hace $x = x_i$ (abscisas (30) ó (31)), y por y_0 , y_1 , y_2 ,... y_n , las ordenadas correspondientes que se quiere representar, se debe tener, según (22),

$$\sum_{x_i} (\mathbf{bP} - \mathbf{y})^2 = \left(\begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots & P_{0n} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{m0} & P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mn} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{Bmatrix} \right)^2 = \text{mín.} \qquad (31)$$

o, designando por **P**″ el cracoviano de las P de índice doble contenidas en (31),

$$(\mathbf{bP}'' - \mathbf{y})^2 = \text{mínimo} \qquad (32)$$

La condición de anulación de las semi-derivadas parciales con respecto a b_0 , b_1 , b_2 , ... b_n , es la siguiente:

$$(\mathbf{bP}'' - \mathbf{y})\, \tau\, \mathbf{P}'' = \mathbf{bP}'' \cdot \tau\, \mathbf{P}'' - \mathbf{y} \cdot \tau\, \mathbf{P}'' = 0 \qquad (33)$$

ó

$$\mathbf{b}\, (\tau\, \mathbf{P}'')^2 = \mathbf{y} \cdot \tau\, \mathbf{P}'' \qquad (34)$$

de donde

$$\mathbf{b} = \mathbf{y} \cdot \tau\, \mathbf{P}'' \cdot (\tau\, \mathbf{P}'')^{-2} \qquad (35)$$

en que se ha escrito $(\tau\, \mathbf{P}'')^{-2}$ en vez de $\left[(\tau\, \mathbf{P}'')^2\right]^{-1}$ para simplificar la escritura.

Designando por **Y** el cracoviano de una columna de las y calculadas, resulta

$$\mathbf{Y} = \mathbf{bP}'' \qquad (36)$$

es decir, teniendo en cuenta las (35)

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y} \cdot \tau\, \mathbf{P}'' \; (\tau\, \mathbf{P}'')^{-2} \cdot \mathbf{P}'' = \mathbf{y}(\mathbf{P}'' \cdot (\tau\, \mathbf{P}'')^{-2} \cdot \mathbf{P}'') \qquad (37)$$

ó

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y}\, (\mathbf{N}'' \, (\tau\, \mathbf{N}'')^{-2} \cdot \mathbf{N}'') \qquad (38)$$

no conservando más que los numeradores de los elementos de **P**″, de la forma

$$P_{pi} = \frac{N_{pi}}{N_{pn}}$$

cuyos denominadores se destruyen al efectuar la operación (38).

Atendidas las condiciones de ortogonalidad, el cracoviano $(\tau\, \mathbf{N}'')^{-2}$ escrito en vez de $\left[(\tau\, \mathbf{N}'')^2\right]^{-1}$, tiene todos sus elementos nulos salvo los de la diagonal principal, que pueden representarse por

$$\left\{ N''^2_0 \; N''^2_1 \; N''^2_2 \; \ldots \; N''^2_m \right\} = \left\{ N^2_{00} + N^2_{01} + \ldots + N^2_{0n} \right.$$
$$\left. N^2_{10} + N^2_{11} + \ldots + N^2_{1n} \ldots \sum_{i=0}^{n} N^2_{mi} \right\} \qquad (39)$$

La relación sintética (38) contiene la solución de cuatro problemas fundamentales que vamos a tratar.

5.—Problema 1. *Calcular, con ayuda de los polinomios ortogonales, los valores compensados* Y_i *de una serie de ordenadas* y_i *correspondientes a abscisas separadas por un intervalo constante.*

De
$$\mathbf{Y} = \mathbf{y} \cdot \tau\,\mathbf{N}'' \cdot (\tau\,\mathbf{N}'')^{-2} \cdot \mathbf{N}'' \tag{40}$$

se deduce, agrupando los tres primeros cracovianos del segundo miembro y recurriendo al producto cracoviano línea por línea, representado por w,

$$\mathbf{Y} = \tau\,\mathbf{N}''\ \mathrm{w}\ [(\tau\,\mathbf{N}'')^{-2} \cdot \mathbf{N}'' \cdot \mathbf{y}] \tag{41}$$

lo que puede escribirse explícitamente

$$\begin{Bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_{00} & N_{10} & N_{20} & \dots N_{m0} \\ N_{01} & N_{11} & N_{21} & \dots N_{m1} \\ N_{02} & N_{12} & N_{22} & \dots N_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{0n} & N_{1n} & N_{2n} & \dots N_{mn} \end{Bmatrix} \mathrm{w} \left(\frac{\begin{Bmatrix} N_{00} & N_{10} & N_{20} & \dots N_{m0} \\ N_{01} & N_{11} & N_{21} & \dots N_{m1} \\ N_{02} & N_{12} & N_{22} & \dots N_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ N_{0m} & N_{1m} & N_{2m} & \dots N_{mn} \end{Bmatrix}}{N''^2_0 \quad N''^2_1 \quad N''^2_2 \quad \dots N''^2_m} \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{Bmatrix} \right) \tag{42}$$

y constituye el esquema mismo de los cálculos que hay que efectuar en las tres etapas siguientes:

$$\tau\,\mathbf{N}'' \cdot \mathbf{y} = \{ b'_0\ b'_1\ b'_2 \dots b'_m \} = \tau\,\mathbf{b}' \tag{43}$$

$$\{ b'_0 N''^{-2}_0\ b'_1 N''^{-2}_1\ b'_2 N''^{-2}_2 \dots b'_m N''^{-2}_m \} = \{ b''_0\ b''_1\ b''_2 \dots b''_m \} = \tau\mathbf{b}'' \tag{44}$$

$$\mathbf{Y} = \tau\,\mathbf{N}''\ \mathrm{w}\ \tau\,\mathbf{b}'' \tag{45}$$

o, en el lenguaje ordinario:

1.° La multiplicación de las columnas sucesivas de $\tau\,\mathbf{N}''$ en los dos cracovianos asociados de (42) por la columna de las y da la fila de los $m+1$ números b'_0, b'_1, $b'_2 \dots b'_m$ (fórmula (43)).

2.° Estos, divididos respectivamente por los valores N''^2_0, N''^2_1, N''^2_2, ... N''^2_m situados bajo cada columna utilizada, dan la fila de los $m+1$ números b''_0, b''_1, $b''_2 \dots b''_m$ (fórmula (44)).

3.° Multiplicando sucesivamente las $n+1$ filas de $\tau\,\mathbf{N}''$ por la fila de las b'', calculada en 2.°, se obtiene la columna de los $n+1$ valores de las Y (fórmula (45)).

La relación (42) viene a ser al esquema descrito por E. Milne. [2].

Su utilización supone que se dispone de los multiplicadores cracovianos del tipo que precede al cracoviano de las y en (42). Se encuentran algunos en E. Milne [2] (hasta $N = 21$ y hasta el 5.° grado) y en R. Anderson y E. Houseman [3] (hasta $N = 104$ y hasta el 5.° grado).

Desviación media cuadrática y error medio cuadrático.

La desviación media cuadrática E de la representación de N puntos, viene dada por la fórmula N. $E^2 = (\mathbf{Y}-\mathbf{y})^2$, (46)

que puede escribirse, teniendo en cuenta la (36),

$$N \cdot E^2 = (\mathbf{bP}'' - \mathbf{y})^2 = (\mathbf{bP}'' - \mathbf{y})\,\tau\mathbf{P}'' \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{bP}'' - \mathbf{y})\,\mathbf{y} \tag{47}$$

lo que en virtud de la (33) se reduce a

$$N \cdot E^2 = -(\mathbf{bP}''-\mathbf{y})\mathbf{y} = \mathbf{y}^2 - \mathbf{bP}''\mathbf{y} \tag{48}$$

o, teniendo en cuenta que $\mathbf{bP}'' = \mathbf{bN}''$ y que, según (43), $\mathbf{y} \cdot \tau\mathbf{N}'' = \mathbf{b}'$,

$$N \cdot E^2 = \mathbf{y}^2 - \mathbf{b}''\mathbf{N}''\mathbf{y} = \mathbf{y}^2 - \mathbf{b}''(\mathbf{y} \cdot \tau\mathbf{N}'') = \mathbf{y}^2 - \mathbf{b}'' \cdot \mathbf{b}' \tag{49}$$

o aún, puesto que se dispone de $\tau\,\mathbf{b}'$ y $\tau\,\mathbf{b}''$ en el esquema de cálculo,

$$N \cdot E^2 = \mathbf{y}^2 - \tau\,\mathbf{b}'\,w\,\tau\,\mathbf{b}'' \tag{50}$$

Calculado de una vez para todas el primer término $\mathbf{y}^2$, esta fórmula permite, teniendo en cuenta que $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{b}''$ no dependen más que del grado p, encontrar con mucha sencillez los valores de N. E^2 que corresponden a los grados p sucesivos considerados, y por consiguiente, elegir a conciencia la parábola de grado conveniente para detenerse en ella.

Teniendo en cuenta que $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{b}''$ son los dos del mismo signo y que $\tau\,\mathbf{b}'\,w\,\tau\,\mathbf{b}''$ es positivo, la disminución de la desviación media cuadrática E al mismo tiempo que aumenta el grado p de las sucesivas parábolas tomadas en consideración es una consecuencia puramente matemática de la fórmula (50). La significación física del problema nos llevará con todo a detenernos en el grado p de la parábola a que corresponda un error medio de representación ε del orden de magnitud del error medio ε_y de los datos.

Por otra parte, el *índice de correlación* ρ_{yx} puede deducirse de

$$\rho^2_{yx} = \frac{\sigma_Y{}^2}{\sigma_y{}^2} = 1 - \frac{E^2}{\sigma_y{}^2}$$

donde σ_y y σ_Y representan respectivamente la dispersión de las y observadas y de las Y calculadas.

Por último, el *error medio cuadrático* ε de la representación por una parábola de grado p será

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{N \cdot E^2}{N - (p+1)}} \tag{51}$$

6. *Problema 2. Sirviéndose de los polinomios ortogonales, establecer los multiplicadores cracovianos que den directamente las* Y_i *compensadas correspondientes a la representación de una serie de ordenadas* y_i *de abscisas equidistantes, ya sea por una recta, ya sea por una parábola de grado 2, ó 3, ... ó m.*

La fórmula (38) se escribe explícitamente

$$\left\{\begin{matrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{matrix}\right\} \left(\left\{\begin{matrix} N_{00} & N_{01} & N_{02} & \dots & N_{0n} \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1n} \\ N_{20} & N_{21} & N_{22} & \dots & N_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ N_{m0} & N_{m1} & N_{m2} & \dots & N_{mn} \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} N''^{-2}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N''^{-2}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N''^{-2}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & N''^{-2}_m \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} N_{00} & N_{01} & N_{02} & \dots & N_{0n} \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} & \dots & N_{1n} \\ N_{20} & N_{12} & N_{22} & \dots & N_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ N_{m0} & N_{m1} & N_{m2} & \dots & N_{mn} \end{matrix}\right\} \right) \qquad (52)$$

El producto de los tres últimos cracovianos constituye un multiplicador que puede darnos, por multiplicación por el cracoviano $\mathbf{y}$, directamente el cracoviano $\mathbf{Y}$ correspondiente a un ajuste mediante una parábola de grado m.

Pero la fórmula (52) ofrece mayores posibilidades, teniendo en cuenta que los numeradores N_{pi}, que en ella figuran, son independientes y caracterizan por su primer índice el grado de la aproximación en que nos detenemos. Permite construir en serie los multiplicadores correspondientes a las aproximaciones lineal y parabólicas de los grados sucesivos: la consideración de las dos primeras filas de los tres cracovianos dentro del paréntesis nos lleva al multiplicador relativo a la aproximación lineal; añadiendo los productos obtenidos considerando cada una de las filas siguientes nos lleva sucesivamente a los multiplicadores relativos a las aproximaciones parabólicas de los grados 2, 3, ... m.

Para cada valor de N (número de puntos que hay que representar), se puede de esta forma, es decir, por un proceso en cadena, formar todos los multiplicadores deseados. Estos multiplicadores, que dan los valores compensados de las y, permiten considerar el método de suavización por polinomios bajo sus principales aspectos.

7. *Problema 3. — ¿Cuáles son los multiplicadores que dan directamente las desviaciones C — O de una representación por polinomios?*

Si representamos por $\mathbf{C}_p$ el cracoviano multiplicador relativo a un grado p, constituido como ya se ha indicado en el problema 2, se deduce de

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{C}_p \qquad (53)$$

inmediatamente

$$\mathbf{Y} - \mathbf{y} = \mathbf{y}\,(\mathbf{C}_p - \tau) \qquad (54)$$

Basta, pues, tomar el complemento a la unidad de los elementos diagonales de los multiplicadores $\mathbf{C}_p$ para obtener los multiplicadores $\mathbf{C}_p - \tau$ deseados.

Los multiplicadores C_p quedan determinados en la forma más cómoda, de suerte que sus elementos se presentan en forma de fracciones cuyos numeradores forman las columnas, mientras que los denominadores correspondientes (uno solo por cada columna) figuran en la parte inferior de las columnas respectivas; en estas condiciones, los cracovianos $C_p - \tau$ se deducen de los cracovianos C_p reemplazando simplemente los elementos de la diagonal principal por su exceso sobre los divisores que figuran debajo de las columnas respectivas.

8. *Problema 4. — Establecer los multiplicadores cracovianos que den directamente los coeficientes de la recta, así como los de las parábolas de grados 2, 3, 4, ... m, representativos de una serie dada de valores y, correspondientes a abscisas en progresión aritmética.*

Remplazando $\mathbf{b}$ y P'' por sus valores dados respectivamente por (35) y por (8), se obtiene:

$$Y = \mathbf{b}P'' = \mathbf{y}\,\tau\,\mathbf{P}''\,(\tau\,\mathbf{P}'')^{-2}\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{L}) = \mathbf{y}\,\tau\,\mathbf{P}''\,(\tau\,\mathbf{P}'')^{-2}\cdot\tau\,\mathbf{L}\cdot\mathbf{x} \qquad (55)$$

o, asociando los tres cracovianos centrales,

$$Y = \mathbf{y}\,(\mathbf{L}\,(\tau\,\mathbf{P}'')^{-2}\,\tau\,\mathbf{P}'')\,\mathbf{x} \qquad (56)$$

lo que puede escribirse explícitamente

$$\begin{Bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{Bmatrix} \left(\begin{Bmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m0} & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{Bmatrix} \right.$$

$$\left. \begin{Bmatrix} N_{0n}N''^{-2}_{0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_{1n}N''^{-2}_{1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & N_{2n}N''^{-2}_{2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & N_{mn}N'^{-2}_{m} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{00} & N_{01} & N_{02} & \cdots & N_{0n} \\ N_{10} & N_{11} & N_{12} & \cdot\cdot & N_{1n} \\ N_{20} & N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ N_{m0} & N_{m1} & N_{m2} & \cdot & N_{mn} \end{Bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ \cdots \\ x^m \end{Bmatrix} \qquad (57)$$

El producto de los tres cracovianos centrales de (57) constituye un multiplicador que nos dará, multiplicando por el cracoviano $\mathbf{y}$, el cracoviano

$$= \tau \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_m \end{Bmatrix}$$

de los coeficientes de la parábola de grado m representativa, en el sentido del método de los mínimos cuadrados, de la serie de las y dadas.

Pero la fórmula (57) permite algo más. Ofrece la posibilidad de construir por operaciones en cadena, los multiplicadores cracovianos que darán directamente los coeficientes de la recta, así como de las parábolas de grados sucesivos, representativas de los puntos dados:

Basta para esto efectuar los productos de los tres cracovianos centrales de (57) limitados sucesivamente a sus 2, 3, 4, ... primeras filas.

Por otra parte, puede demostrarse que los inversos de (24) no son sino los cracovianos **Q** y **Q**′ que han de intervenir, como es sabido, en el cálculo no solamente de los errores temibles en los coeficientes de las ecuaciones de las curvas representativas Y = f (x), sino también del correspondiente a una función lineal de estos coeficientes. Es pues posible calcular, a priori, en forma de cuadro, los **Q** y **Q**′ necesarios :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1} \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{S}'^{-1} \tag{58}$$

9. *Otros métodos de cálculo.* — Las cuestiones que acabamos de tratar se prestan a otros métodos de cálculo, que se deducen de ellas o que las complementan.

Nos vemos obligados a limitarnos a los aspectos principales de estas cuestiones, reservando la publicación de un estudio más desarrollado así como las tablas correspondientes para una obra más extensa.

Terminaremos exponiendo un ejemplo numérico sencillo, con objeto de aplicar la teoría precedente.

10. *Aplicación numérica. — Se han observado ocho valores de la altura de caída de agua en una turbina hidráulica para un gasto dado de 150 m³ por segundo. Sabiendo que las ocho alturas y, expresadas en metros, corresponden a rendimientos x expresados en* $^{0}/_{0}$, *escalonados de diez en diez, y que van de 0 a 70, se pide buscar la función polinómica y = f (x).* (Ejemplo tomado de H. Mineur [4]).

Resolución: Trataremos el presente problema en dos etapas:

a) *Cálculo de los valores compensados Y.*

x	y	Multiplicador (fórmula (44))					Σ	Y	(y−Y) 10^4
0	1,282	1	−7	7	−7	7	1	1,281773	+ 2
10	1,337	1	−5	1	5	−13	−11	1,337940	− 9
20	1,399	1	−3	−3	7	− 3	− 1	1,397803	+12
30	1,466	1	−1	−5	3	9	7	1,465848	+ 2
40	1,571	1	1	−5	−3	9	3	1,572742	−17
50	1,777	1	3	−3	−7	− 3	−9	1,775333	+17
60	2,156	1	5	1	−5	−13	−11	2,156652	− 7
70	2,826	1	7	7	7	7	29	2,825908	+ 1
Σy	13,814	8	168	168	264	616		13,813999	+34
									−33

Σ y²	25,797832		Σ = 42,396 (control de las b′)	10⁸ Σ v²	861
				ε	0,0017
b′	13,814	16,142	7,536	3,752	1,152
b″	1,72675	0,096083	0,0448571	0,0142121	0,0018701

$N \cdot E^2$	1,9445	0,393531	0,055488	0,002164	0,0000096
Grado p	0	1	2	3	4
$\varepsilon = \sqrt{\dfrac{N \cdot E^2}{8-5(p+1)}}$			0,1	0,023	0,0018

b) *Cálculo de la parábola con la ayuda del multiplicador adecuado* (correspondiente a abscisas x').

$x' = \frac{x}{10}$	Y	Multiplicador						Coeficientes
0	1,281773	1	− 5	35	−25	1	0	$a_{44} = +0{,}00109087.5$
1	1,337940	−4	18	−104	48	0	1	$a_{43} = -0{,}00579758$
2	1,397803	6	−24	114	−36	0	0	$a_{42} = +0{,}01160462$
3	1,465848	−4	14	− 56	16	0	0	$a_{41} = +0{,}04926910$
4	1,572742	1	− 3	11	− 3	0	0	$a_{40} = +1{,}28177300$
		24	12	24	12	1	1	$\Sigma = 1{,}33794002$

(control)

de donde

$$y = 1{,}28177 + 0{,}0049269x + 0{,}000116046x^2 - 0{,}0000057976x^3 + 0{,}000000109088x^4$$

Las Y se han calculado con seis decimales con objeto de asegurar la exactitud de la parábola «extrapolada» en b), la cual debe dar los residuos O—C exactos con cuatro decimales.

11. *Otras aplicaciones.* El ejemplo numérico que acabamos de considerar nos da a conocer la forma de aplicación inmediata de los multiplicadores cracovianos que hemos considerado en los problemas 1 y 4.

a) Si, *a priori,* se pudiera saber que los puntos dados pueden representarse por una parábola de cuarto grado (lo que ocurre en ciertos casos en la práctica), se podrían calcular los coeficientes de la ecuación de esta parábola recurriendo al multiplicador adecuado (problema 4), y después a una transformación de coordenadas, igualmente efectuada por un multiplicador cracoviano, en la forma siguiente:

x'	$\frac{x}{5}$	x	y	Multiplicador					Σ
−7	0	0	1,282	15	889	− 91	−7	7	105
−5	2	10	1,337	−69	−1955	345	5	−13	−335
−3	4	20	1,399	85	−2209	39	7	− 3	135
−1	6	30	1,466	225	− 909	−293	3	9	675
1	8	40	1,571	225	909	−293	−3	9	823
3	10	50	1,777	85	2209	39	−7	− 3	495
5	12	60	2,156	−69	1955	345	−5	−13	− 15
7	14	70	2,826	15	− 889	− 91	7	7	− 35
$x' = \frac{x}{5} - 7 = 0{,}2x - 7$				512	22176	8448	3168	1848	1848

Coeficientes	Transformación de coordenadas					Σ	Coeficientes
1,5115000000	1	0	0	0	0	1	1,28177269450
0,0522626262	−7	0,2	0	0	0	−6,8	0,00492677172
0,0077272727	49	−2,8	0,04	0	0	46,24	0,00011606042
0,0011843434	−343	29,4	−0,84	0,008	0	−314,432	−0,00000579797
0,0000681818	2401	−274,4	11,76	−0,224	0,0016	2138,1376	0,00000010909
1,5727424241							1,28680983776
(Suma control)							(Suma control)

de donde se deducen las parábolas

$$y = 1{,}5115 + 0{,}05226x' + 0{,}007727x'^2 + 0{,}0011843x'^3 + 0{,}00006818x'^4$$

$$y = 1{,}28177 + 0{,}004927x + 0{,}00011606x^2 - 0{,}000005798x^3 + 0{,}00000010909x^4$$

que nos darán los valores compensados de las y, con cuatro decimales.

b) Si no interesan más que los valores compensados de las y o las desviaciones Y—y, podemos utilizar directamente multiplicadores cracovianos, definidos como se ha indicado (problema 2 y problema 3), en la forma siguiente:

y	Multiplicador cracoviano								Y
1,282	257	175	−175	−35	105	49	−105	5	1,281773
1,337	25	1199	725	−15	−335	−95	299	−15	1,337939
1,399	−25	725	799	495	135	−85	−95	7	1,397803
1,466	−5	−15	495	823	675	135	−335	15	1,465848
1,571	15	−335	135	675	823	495	−15	−5	1,572742
1,777	7	−95	−85	135	495	799	725	−25	1,775333
2,156	−15	299	−95	−335	−15	725	1199	25	2,156652
2,826	5	−105	49	105	−35	−175	175	257	2,825909
13,814	264	1848	1848	1848	1848	1848	1848	264	13,813999
(Suma)									(control)

y	Multiplicador cracoviano								Y−y
1,282	−7	175	−175	−35	105	49	−105	5	−0,000227
1,337	25	−649	725	−15	−335	−95	299	−15	+0,000939
1,399	−25	725	−1049	495	135	−85	−95	7	−0,001197
1,466	−5	−15	495	−1025	675	135	−335	15	−0,000152
1,571	15	−335	135	675	−1025	495	−15	−5	+0,001742
1,777	7	−95	−85	135	495	−1049	725	−25	−0,001667
2,156	−15	299	−95	−335	−15	725	−649	25	+0,000652
2,826	5	−105	49	105	−35	−175	175	−7	−0,000091
	264	1848	1848	1848	1848	1848	1848	264	−0,003334
									+0,003333
									(Control)

Para los multiplicadores, cuyos elementos se presentan en forma fraccionaria, se han escrito los denominadores de los elementos de una misma columna en la parte inferior de la misma; tienen una precisión absoluta y, por consiguiente, los resultados de ellos deducidos vienen afectados de errores que dependen exclusivamente de los errores de los datos. Los valores de las Y y de las Y—y se han escrito con seis decimales para hacer resaltar esta propiedad matemática; en la práctica basta evidentemente con tres decimales, es decir, con las cifras que tengan un sentido físico en el caso del problema tratado.

Todos los cálculos tienen su correspondiente comprobación en una u otra forma; en particular, cuando se juzgue conveniente, los cracovianos multiplicadores irán acompañados de su correspondiente columna suma.

Deberíamos considerar otras formas de tratar estos problemas, pero queremos limitarnos a los principios generales, destacando la eficacia, sencillez y seguridad de la técnica del cálculo con cracovianos que corresponde a una psicología de ejecución perfectamente natural.

BIBLIOGRAFIA

[1] Se encontrarán los principios del cálculo cracoviano en los trabajos de Th. Banachiewicz y en S. AREND: Voies nouvelles dans le calcul scientifique, *Ciel et Terre 57*, n.º 12, décembre 1941. Ver asimismo J M. TORROJA, Cálculo con cracovianos (Publicación n.º 21 de este Seminario) y la Bibliografía allí incluida.

[2] E. MILNE, Numerical Calculus, *Princeton University Press*, 1949.

[3] R. L. ANDERSON and E. E. HOUSEMAN, Tables of orthogonal polynomial Values extended to N = 104, *Research Bulletin* 297. April 1942, Ames, Yowa.

[4] H. MINEUR, Techniques de Calcul numérique, p. 441. Paris 1952.

SUGRAÑES HNOS.
Editores - Tarragona