Sobre superficies lagrangianas en superficies de Kaehler de curvatura seccional holomorfa constante

Ildefonso Castro López

Contents

Introducción.

Los últimos veinticinco años han asistido a un desarrollo muy rápido del concepto de subvariedad lagrangiana. Para ello ha sido determinante el papel jugado por las subvariedades lagrangianas en diversas ramas de la Física. De hecho, el comportamiento de un sistema físico puede ser descrito en términos de las subvariedades lagrangianas de la variedad simpléctica asociada a dicho sistema.

Desde una óptica matemática, también han sido diversos los puntos de vista desde los que se han estudiado las subvariedades lagrangianas de una variedad simpléctica, o más particularmente, del espacio euclídeo complejo C^n. Así, la importancia topológica de las mismas se pone de manifiesto en el siguiente resultado de Gromov ([G1], [G2]):

"En cada clase de homotopía regular de una inmersión $\phi : M^n \longrightarrow C^n$ que no posea puntos complejos, existe una inmersión lagrangiana".

Desde este punto de vista, problemas de clasificación de inmersiones lagrangianas y de existencia de embebimientos lagrangianos en C^n han sido extensamente estudiados (véase [A], [F1], [Gi], [L], [R]). Una muestra de la complejidad de este tipo de problemas puede ser que aún es una cuestión abierta el saber si existe un embebimiento lagrangiano de una botella de Klein en C^2 (véase [F2]).

Desde un punto de vista más geométrico, las subvariedades lagrangianas han sido descritas localmente, cuando la variedad ambiente es C^n, por Harvey y Lawson (cf. [HL]) de la siguiente manera. Si $\phi : M^n \longrightarrow C^n$ es una inmersión lagrangiana, entonces localmente es un grafo de la forma $y = (\nabla F)(x)$, para alguna función potencial $F : \Omega \subset R^n \longrightarrow R$. Condiciones geométricas impuestas a ϕ se traducen en que F satisface cierta ecuación diferencial. A título ilustrativo, si por ejemplo ϕ es minimal entonces F verifica una ecuación elíptica no lineal, que en el caso particular $n = 3$ es la conocida ecuación de Monge-Ampere

$$\Delta F = \det(\nabla^2 F),$$

donde ΔF y $\nabla^2 F$ representan el Laplaciano y el Hessiano de F respectivamente.

Cuando consideramos como variedad ambiente el espacio proyectivo complejo CP^n, el hecho que —entre otros aspectos— importantes espacios simétricos compactos como $SU(n)/SO(n)$, $SU(2n)/Sp(n)$, $SU(n)$, E_6/F_4 tengan su hábitat natural en CP^n como subvariedades lagrangia- nas minimales, contribuyó en las dos últimas décadas a aumentar el interés en el estudio de subvariedades lagrangianas en CP^n. Aunque no vamos a realizar una descripción exhaustiva de lo hecho, sí destacaremos por un lado la clasificación llevada a cabo por Naitoh y Takeuchi ([NT]) de las subvariedades lagrangianas de CP^n con segunda forma fundamental paralela, y por otro lado, los teoremas de rigidez para las distintas curvaturas (seccional, de Ricci y escalar) de subvariedades compactas minimales lagrangianas de CP^n (véase [Y], [U1], [U2], [MRU] y [CO], entre otros).

No obstante, el caso particular de superficies no había sido tratado de manera especial (esto es, usando técnicas propias de la dimensión dos) salvo en algunos casos aislados (por ejemplo, en [Y] y [CM1]). Esto nos animó a estudiar de "alguna" manera sistemática superficies lagrangianas de C^2 y CP^2 (y ocasionalmente del plano hiperbólico complejo CH^2) desde el punto de vista riemanniano.

De entre las propiedades más relevantes para este tipo de superficies, cabe destacar una de naturaleza topológica, que puede resumirse del siguiente modo:

"Si $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ es una inmersión lagrangiana de una superficie compacta Σ, entonces

$$2d(\phi) = \chi(\Sigma)$$

(mod. 2 si Σ es no orientable), donde $\chi(\Sigma)$ es la característica de Euler de Σ y $d(\phi)$ es el número "algebraico" de puntos dobles (véase [Wh])".

De aquí se sigue que si ϕ es un embebimiento, esto es $d(\phi) = 0$, entonces Σ es un toro en el caso orientable y Massey [Ma] probó para el caso no orientable que $\chi(\Sigma) = 0$ (mod 4). Ejemplos de embebimientos lagrangianos en C^2 fueron dados por Givental [Gi] en todos los casos posibles excepto para el de la botella de Klein.

Si Σ es una esfera, un solo ejemplo de inmersión lagrangiana en C^2 es conocido, el cual fue construido por Whitney y puede encontrarse por ejemplo en [Wn].

En el caso en el que el espacio ambiente sea CP^2 o CH^2 es también conocido que de entre las superficies orientables sólo las de género uno pueden ser embebidas como superficies lagrangianas.

Desde un punto de vista más geométrico, más centrado en la teoría clásica de superficies, nos gustaría destacar dos resultados que, en cierto sentido, justifican en alguna medida el contenido de esta memoria.

Por un lado, un teorema de Chen y Morvan ([CM1]) en el que se demuestra que *"una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ es minimal si y sólo si, cambiando apropiadamente la estructura compleja de C^2, ϕ es una inmersión compleja."* Así pues, el estudio de las superficies minimales lagrangianas de C^2 se encuadra dentro del análisis complejo.

De otro lado, un resultado de rigidez de Yau ([Y]) en el que caracteriza los dos únicos ejemplos conocidos de superficies lagrangianas minimales compactas en CP^2: la inmersión totalmente geodésica (la única de género cero) y el también conocido como toro de Clifford, que es un toro llano isométricamente embebido en CP^2 como una superficie lagrangiana con segunda forma fundamental paralela.

Si se considera una inmersión (no necesariamente lagrangiana), $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ (o más generalmente en CP^2 o CH^2) de una superficie orientable, aparece definida de manera natural una diferencial cúbica Θ en Σ dada por

$$\Theta(z) = \langle \sigma(\partial_z, \partial_z), J\partial_z \rangle (dz)^3,$$

donde σ es la segunda forma fundamental de ϕ, $(\langle\, , \,\rangle, J)$ es la estructura Kaehleriana de C^2 y $z = x + iy$ un sistema de coordenadas isotermo.

Eells y Salamon ([ES]) probaron que si la inmersión es minimal a CP^2, entonces Θ es holomorfa y bautizaron con el nombre de *superminimales* a aquellas inmersiones minimales en CP^2 con Θ idénticamente nula.

Este puede considerarse como nuestro punto de partida, pues nos propusimos estudiar aquellas superficies lagrangianas de C^2 (o más generalmente de CP^2 o CH^2) cuya diferencial cúbica asociada Θ es holomorfa. Comentar, de entrada, que todas las superficies lagrangianas con curvatura media paralela (en particular, las minimales) se engloban en esta familia.

Como primer resultado (Proposición 4) señalar que la regularidad impuesta a Θ (su holomorfía) puede caracterizarse en términos de la curvatura media H de la inmersión de la siguiente manera. Para una inmersión lagrangiana ϕ, la estructura compleja J del espacio ambiente es un isomorfismo de fibrados entre el fibrado tangente a la superficie y el fibrado normal de la inmersión. Luego JH es un campo tangente a la superficie y fue probado por Morvan (cf. [M]) que, salvo constantes, su forma dual JH^b es cerrada y genera la conocida clase de Maslov de la inmersión lagrangiana. En la mencionada Proposición 4, se prueba:

"Θ es holomorfa si y sólo si JH es un campo conforme."

En consecuencia, referiremos la familia a estudiar como la familia de *superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme.*

En el Teorema 1 se ofrece una caracterización de la citada familia en términos de la aplicación de Gauss de la inmersión, cuando la variedad ambiente es C^2. En tal caso, para una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$, la aplicaión de Gauss ν de ϕ es una aplicación $\nu : \Sigma \longrightarrow S^2 \times S^2$, pero el carácter lagrangiano de ϕ hace que la imagen de ν caiga en $S^1 \times S^2$, donde S^1 es un ecuador de S^2. Si representamos por $\nu_- : \Sigma \longrightarrow S^2$ la segunda componente de ν, en dicho Teorema 1 se prueba:

"La forma de Maslov ϖ es conforme si sólo si ν_- es una aplicación armónica".

En este caso, la nulidad de la diferencial cúbica Θ equivale a que ν_- sea una aplicación holomorfa, y como ocurre para las superficies de R^3, la minimalidad de ϕ se caracteriza por la antiholomorfía de ν_-.

Para dar una interpretación en esta dirección en los casos de CP^2 y CH^2, necesitamos la idea de espacio "twistor" introducida por Penrose. Aunque aquí no vamos a entrar en detalle (véase el Capítulo 2 para ello), destacaremos que también ahora la aplicación de Gauss ν factoriza en un par de aplicaciones, ν_+ y ν_-, que están valuadas en los llamados fibrados "twistor" sobre CP^2 o CH^2. El fibrado "twistor" correspondiente a ν_-, que representaremos por $\mathcal{Z}$, es una variedad compleja de dimensión tres que posee una métrica Einstein-Kaehler (indefinida en el caso de CH^2). Al igual que en el caso de C^2, en los Teoremas 2 y 3 caracterizamos las superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme en CP^2 y en CH^2 como aquéllas para las que ν_- es armónica, y las que tienen diferencial cúbica Θ idénticamente nula como aquéllas para las que ν_- es holomorfa.

En resumen, en cualquier espacio complejo modelo, se dispone, asociada a nuestra inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme, de la correspondiente diferencial cuadrática de Hopf de la aplicación armónica ν_-. Lo interesante en nuestra situación es que esta dos-diferencial es el producto tensorial de la diferencial cúbica Θ y del campo holomorfo naturalmente asociado al campo conforme JH; es decir, se tienen dos objetos holomorfos por el precio de uno. Ello nos permite probar que en el caso que la superficie sea compacta y orientable, o bien es minimal o el género de la superficie es menor que dos (Proposición 5).

La posibilidad de jugar con dos objetos holomorfos nos permite encontrar fuera de los ceros de H (que constituyen un conjunto aislado) sistemas de coordenadas $z = x + iy$ en donde la métrica inducida en la superficie viene dada por $g = e^{2u(x)}|dz|^2$, con $u(x)$ una solución de la e.d.o.

$$u''(x) + \frac{c}{4}e^{2u(x)} + \frac{e^{4u(x)} - \mu^2 e^{2\eta x} e^{-4u(x)}}{2} = 0, \tag{1}$$

donde c es la curvatura seccional holomorfa del espacio ambiente y η, μ son ciertas constantes con $\mu \geq 0$.

Si consideramos las ecuaciones de Frenet de nuestra inmersión en el caso de C^2 o las ecuaciones de Frenet del levantamiento local horizontal al espacio total de la fibración de Hopf de nuestra inmersión en el caso de CP^2 o CH^2, tenemos que las condiciones de integrabilidad para dichas ecuaciones equivalen a que $u(x)$ sea una solución de (0.1). Así (véase Teorema 4), controlando las soluciones de (0.1) e integrando las correspondientes ecuaciones de Frenet, disponemos de un camino para clasificar completamente nuestra familia de superficies en el caso no minimal.

Cuando $\eta \neq 0$, no conocemos las soluciones de (0.1); pero, afortunadamente, los posibles ejemplos compactos (que como comentamos anteriormente serían de género cero o uno) se corresponden con soluciones de (0.1) con $\eta = 0$.

Por tanto, desde esta óptica podemos limitarnos a considerar sólo soluciones $u(x)$ de la e.d.o. tipo Toda afín (cf. [BPW]) siguiente:

$$u''(x) + \frac{c}{4}e^{2u(x)} + \frac{e^{4u(x)} - \mu^2 e^{-4u(x)}}{2} = 0. \tag{2}$$

En el Apéndice (Proposición 15) se consigue integrar la ecuación (0.2) expresándose las soluciones de la misma en términos de ciertas funciones elípticas, lo que nos permite un control razonable de las mismas.

En los Capítulos 3, 4 y 5 se aborda de una manera ordenada la clasificación de la familia de superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme integrando las correspondientes ecuaciones de Frenet. Gran parte de los resultados más significativos de los mismos pueden encontrarse en [CU1], [CU2], [CU3] y [CU4].

En el Capítulo 3 se estudia la situación en que la diferencial cúbica Θ se anula idénticamente, esto es, el caso en que ν_- es holomorfa. Esta propiedad significa que $\mu = 0$ y de este modo la ecuación (0.1) es independiente de η, lo que nos permite determinar no sólo el caso compacto, sino dar una clasificación completa (Teorema 5), apareciendo la ya citada esfera de Whitney como único ejemplo en C^2, familias uniparamétricas de esferas en CP^2 y CH^2, así como otros ejemplos no compactos en CH^2 (véase Definición 6). Un estudio detallado de las principales propiedades geométricas de los ejemplos obtenidos se ofrece en la Proposición 10. Finalizamos el capítulo 3 obteniendo ciertas desigualdades integrales y caracterizando los ejemplos compactos obtenidos como los únicos que alcanzan la igualdad (Corolario 1). Para hacerse una idea de los tipos de desigualdades que aparecen, sirva como botón de muestra la obtenida en el caso de C^2 (Corolario 1):

"Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ una inmersión lagrangiana de una esfera Σ. Entonces:

$$\int_\Sigma |H|^2 dA \geq 8\pi,$$

y se da la igualdad si y sólo si ϕ es la esfera de Whitney (mencionada anteriormente)."

Comentar que el hecho que una diferencial cúbica holomorfa sobre una superficie compacta de género cero sea necesariamente idénticamente nula, permite en el Corolario 2 clasificar todas las esferas lagrangianas con forma de Maslov conforme en los tres espacios complejos modelo.

En el Capítulo 4, se aborda la clasificación de las superficies compactas con forma de Maslov conforme y con diferencial cúbica Θ no idénticamente nula, cuando la variedad ambiente es C^2. En este contexto, la superficie ha de ser un toro y la ecuación (0.2) se reduce entonces a la conocida ecuación senh-Gordon

$$u''(x) + \operatorname{senh} 4u(x) = 0.$$

Obtenemos entonces (véanse Corolarios 3 y 4) una familia 2-paramétrica de toros lagrangianos con forma de Maslov conforme embebidos en C^2. De entre ellos, los únicos conocidos son los correspondientes a la solución constante $u(x) = 0$, que se caracterizan por ser las únicas superficies lagrangianas compactas y orientables con curvatura media paralela (Corolario 5). En la Proposición 12, calculamos el área de los mismos y comprobamos que, "desafortunadamente", no testifican que la conjetura de Willmore sea falsa, ya que para ellos $\int |H|^2 dA \geq 2\pi^2$ y sólo el toro de Clifford alcanza la igualdad.

Conviene observar que la familia de métricas inducidas por estos toros en su recubridor universal coincide con la correspondiente familia de métricas obtenida con las superficies de Delaunay [De].

En el Teorema 7 se clasifican también todas las superficies lagrangianas llanas con forma de Maslov conforme en C^2.

En el Capítulo 5, se trata un problema similar al abordado en el Capítulo 4, ahora con el espacio ambiente el plano proyectivo complejo CP^2. En este caso, tanto la ecuación (0.2) como las ecuaciones de Frenet de las inmersiones se complican extraordinariamente. No obstante, obtenemos una familia 3-paramétrica, $\{\phi^\lambda_{a,\alpha}\}$, de inmersiones lagrangianas con forma de Maslov conforme de R^2 en CP^2 (Teoremas 9 y 11) que incluyen los recubridores universales de los toros con curvatura media paralela en CP^2, que aparecen cuando el parámetro a (que hace alusión a la solución de la ecuación (0.2)) se corresponde con el de la solución constante de (0.2); caracterizamos después en términos de ciertas condiciones de racionalidad aquellas inmersiones que son doblemente periódicas (Teorema 14), clasificando así todos los toros lagrangianos (no minimales) con forma de Maslov conforme en CP^2 (Corolarios 7 y 9).

Aunque las superficies minimales de CP^2 se han estudiado desde diversos puntos de vista ([ChW], [EGT], [ES]), no se dispone de resultados específicos sobre las superficies lagrangianas minimales de CP^2, aparte de los ya mencionados.

De los tres parámetros de los que depende la anterior familia, el primero de ellos, λ (que es positivo), "mide" la no minimalidad de la inmersión. Haciendo tender λ a cero, obtenemos una familia 2-paramétrica

$$\{\phi_{a,\alpha}(z) = \lim_{\lambda\to 0} \phi^\lambda_{a,\alpha}(z)\}$$

de inmersiones minimales lagrangianas de R^2 en CP^2 (Teorema 10). El espacio paramétrico para esta familia de inmersiones viene dado por:

$$\Gamma = \{(1,0)\} \cup]1,+\infty[\times [0,\pi/2].$$

En el Corolario 6 caracterizamos la familia $\{\phi_{a,\alpha} \,/\, (a,\alpha) \in \Gamma\}$ del siguiente modo:

"Sea $\phi : (\Sigma, g) \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana minimal de una superficie completa y orientable. Entonces, ϕ es invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2 si y sólo si ϕ es totalmente geodésica o su recubridor universal es congruente a $\phi_{a,\alpha}$ con $(a,\alpha) \in \Gamma$."

Finalmente, en el Teorema 13 caracterizamos de nuevo en términos de ciertas condiciones de racionalidad aquellas inmersiones $\phi_{a,\alpha}$ que son doblemente periódicas, lo que nos permite clasificar las superficies lagrangianas compactas y orientables minimales de CP^2 invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2 (Corolario 8). Aparte de los ya mencionados (la inmersión totalmente geodésica y el toro de Clifford), éstos son los primeros ejemplos de superficies compactas lagrangianas minimales de CP^2.

Chapter 1

Superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme.

En este primer capítulo introducimos la familia de supeficies lagrangianas en superficies de Kaehler con curvatura seccional holomorfa constante que vamos a estudiar en esta memoria, caracterizándola por un lado en términos de la llamada forma de Maslov y por otro mediante la holomorfía de una diferencial cúbica naturalmente asociada a la superficie.

1.1 La forma de Maslov.

Sea (N, g, J) una superficie de Kaehler, esto es, una 4-variedad riemanniana (N, g) junto con una estructura casicompleja J compatible con g y paralela respecto a la conexión de Levi-Civita de g. Si $\Omega(X, Y) = g(X, JY)$, con X e Y campos tangentes a N, es la 2-forma de Kaehler de N, entonces la orientación estándar en N viene dada por 4-forma $\Omega \wedge \Omega$.

Una superficie de Kaehler (N, g, J) tiene curvatura seccional holomorfa constante c si su tensor de curvatura riemanniano R verifica

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\,(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y + \\ +g(JY,Z)JX - g(JX,Z)JY + 2g(X,JY)JZ)\,,$$

para cualesquiera campos X, Y, Z tangentes a N.

Los ejemplos más representativos de superficies de Kaehler con curvatura seccional holomorfa constante (respectivamente nula, positiva y negativa) son el plano euclídeo complejo C^2, el plano proyectivo complejo CP^2 con la métrica de Fubini-Study y el plano hiperbólico complejo CH^2 con la métrica de Bergman. Es bien conocido que cualquier superficie de Kaehler completa simplemente conexa con curvatura seccional holomorfa constante puede identificarse con alguno de los tres ejemplos anteriores, según el signo de la curvatura (véase [KN], por ejemplo). Además, por un teorema de Synge [Sy], toda superficie de Kaehler completa con curvatura seccional holomorfa constante positiva es necesariamente simplemente conexa, y en consecuencia el plano proyectivo complejo.

> A partir de ahora, representaremos por $\mathcal{N}(c)$ a C^2, CP^2 ó CH^2 con sus métricas canónicas de curvatura seccional holomorfa constante c.

Si consideramos CP^2 dotado de la métrica de Fubini-Study g de curvatura seccional holomorfa constante $c = 4$, notando por $\Pi : S^5(1) \longrightarrow CP^2$ la fibración de Hopf, CP^2 se identifica con $S^5(1)/S^1$ vía Π. Representaremos por $\langle\, ,\, \rangle$ la métrica euclídea en C^3 así como la inducida en $S^5(1)$, que convierte a Π en una submersión riemanniana. La estructura compleja de C^3, que induce la estructura compleja J de CP^2 via Π, será igualmente notada con J.

Análogamente, el plano hiperbólico complejo CH^2 con la métrica de Bergmann g de curvatura seccional holomorfa constante $c = -4$, puede identificarse con $H_1^5(-1)/S^1$ vía la fibración de Hopf $\Pi : H_1^5(-1) \longrightarrow CH^2$, donde $H_1^5(-1) = \{z \in C^3;\ (z, z) = -1\}$ es el espacio anti-De Sitter, siendo $(\ ,\ )$ la forma hermítica

$$(z, w) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} - z_3\overline{w_3},$$

para cualesquiera $z, w \in C^3$. Así, $\langle z, w\rangle = \Re(z, w)$ (donde $\Re$ denota parte real) induce una métrica de Lorentz sobre $H_1^5(-1)$ de curvatura constante -1. Del mismo modo, tanto la estructura compleja de CH^2 como la de C^3, que induce ésta sobre CH^2 via Π, serán también notadas por J.

Sea $U(3)$ (resp. $U^1(3)$) el grupo unitario de orden 3, esto es, el subgrupo de Lie del grupo lineal $Gl(3, C)$ compuesto por los isomorfismos complejos de C^3 que preservan el producto escalar $\langle\, ,\, \rangle$ de C^3 (resp. el subgrupo de Lie del grupo lineal $Gl(3, C)$ compuesto por los isomorfismos complejos de C^3 que conservan la forma hermítica $(\, ,\,)$ de C_1^3. Entonces $U(3)$ (resp. $U^1(3)$) actúa transitivamente sobre $S^5(1)$ (resp. sobre $H_1^5(-1)$) mediante isometrías que conservan la descomposición del espacio tangente a $S^5(1)$ (resp. a $H_1^5(-1)$) en los correspondientes subespacios horizontal y vertical (véase §1.2). El grupo cociente $PU(3) = U(3)/S^1$ (resp. $PU^1(3) = U^1(3)/S^1$) —identificando S^1 con el subgrupo de $U(3)$ formado por los isomorfismos de la forma $e^{i\theta}I$, con $\theta \in R$ e I la identidad de C^3— actúa transitivamente por isometrías holomorfas sobre CP^2 (resp. sobre CH^2), constituyendo de hecho el grupo de Lie de todas las isometrías holomorfas (cf. [Wf]) de CP^2 (resp. de CH^2).

Así pues, de ahora en adelante, para referirnos a la isometría holomorfa $[A] \in PU(3)$ (resp. $[A] \in PU^1(3)$), donde $A \in U(3)$ (resp. $A \in U^1(3)$), diremos simplemente la "isometría holomorfa inducida por A vía la fibración de Hopf Π".

Definición 1 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ una inmersión de una superficie Σ en una superficie de Kaehler (N, g, J). Se dice que ϕ es una* inmersión lagrangiana *(o que Σ es una* superficie lagrangiana *de N) si $\phi^*\Omega = 0$, donde Ω es la 2-forma de Kaehler de N, esto es, $g(\phi_* V, J\phi_* W) = 0$ para cualesquiera campos V y W tangentes a Σ.*

La terminología para este tipo de inmersiones es muy variada y la consulta de diferentes fuentes bibliográficas puede dar lugar a confusión. El término "totalmente real" es frecuentemente utilizado.

En esta memoria, estamos interesados esencialmente en el estudio de ciertas familias de superficies (compactas) lagrangianas en el plano euclídeo complejo C^2, el plano proyectivo complejo CP^2 y el plano hiperbólico complejo CH^2.

Comenzaremos esta sección resaltando las propiedades más inmediatas de las superficies lagrangianas.

Si $\phi^*TN = T\Sigma \oplus T^\perp\Sigma$ es la descomposición canónica del fibrado inducido ϕ^*TN siendo $T\Sigma$ y $T^\perp\Sigma$ los fibrados tangente a Σ y normal a ϕ respectivamente, entonces la condición $\phi^*\Omega = 0$ significa que J define un isomorfismo de fibrados entre $T\Sigma$ y $T^\perp\Sigma$. Esta propiedad posee consecuencias geométricas interesantes que recogemos en el siguiente resultado.

Proposición 1 *Para una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ de una superficie Σ en una superficie de Kaehler (N, g, J), se verifica:*

(i) *Si $\overline{\nabla}$ es la conexión en $\phi^*TN = T\Sigma \oplus T^\perp\Sigma$ inducida de la conexión de Levi-Civita de N y $\overline{\nabla} = \nabla + \nabla^\perp$ la correspondiente descomposición, entonces*

$$J \circ \nabla = \nabla^\perp \circ J.$$

(ii) *Si σ es la segunda forma fundamental de ϕ y A_ξ denota el endomorfismo de Weingarten asociado a un campo normal ξ, entonces*

$$\sigma(X,Y) = JA_{JX}Y = JA_{JY}X,$$

para cualesquiera campos tangentes X e Y a Σ. Como consecuencia, si C es la forma trilinear definida sobre Σ mediante

$$C(X,Y,Z) = g(\sigma(X,Y),JZ), \tag{1.1}$$

donde X, Y, Z son campos tangentes a Σ, entonces C es simétrica en sus tres argumentos.

Demostración: Por ser N una superficie de Kaehler, $\overline{\nabla}J = 0$. Así, para cualesquiera campos X e Y tangentes a Σ se cumple $\overline{\nabla}_X JY = J\overline{\nabla}_X Y$. Empleando en esta igualdad las fórmulas de Gauss y de Weingarten de la inmersión ϕ, se tiene:

$$\nabla^\perp_X JY - A_{JY}X = J\nabla_X Y + J\sigma(X,Y).$$

Separando las componentes tangencial y normal se prueba (i) y teniendo en cuenta la simetría de σ y que $J^2 = -I$ la primera parte de (ii). Aplicando ésta en la igualdad $g(A_{JY}X,Z) = g(X,A_{JY}Z)$ se concluye (ii).

En este epígrafe pretendemos introducir una familia destacada de superficies lagrangianas de una superficie de Kaehler definida en términos de la llamada forma de Maslov. Si H denota el vector curvatura media de la inmersión lagrangiana ϕ, entonces JH es un campo tangente a Σ y procede la siguiente definición.

Definición 2 *Si $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ es una inmersión lagrangiana de una superficie Σ en una superficie de Kaehler N, se define la* forma de Maslov *de ϕ como la 1-forma ϖ sobre Σ dada por $\varpi(X) = \Omega(X,H)$, para X tangente a Σ.*

Maslov introdujo la llamada clase de Maslov para superficies lagrangianas de C^2 (o más generalmente para subvariedades lagrangianas de C^n), como una clase de cohomología 1-dimensional, probando que dicha clase de cohomología es entera. Posteriormente, Morvan [M] dio una interpretación bajo el punto de vista riemanniano de la clase de Maslov comprobando que $(1/\pi)[\varpi]$ era exactamente la clase de Maslov. Esto permite la licencia de llamar a ϖ la forma de Maslov.

En general, esta 1-forma no es cerrada y por tanto no define una clase de cohomología. En el siguiente resultado se buscan condiciones suficientes bajo las cuales ϖ es cerrada.

Proposición 2 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ una inmersión lagrangiana de una superficie Σ en una superficie de Kaehler N. Si N es Einstein, entonces ϖ es cerrada y en consecuencia define una clase de cohomología $[\varpi] \in H^1_{\mathrm{dR}}(\Sigma)$, llamada la clase de Maslov de ϕ.*

Demostración: Si X e Y son campos tangentes a Σ, la diferencial de ϖ viene dada por

$$d\varpi(X,Y) = X\varpi(Y) - Y\varpi(X) - \varpi([X,Y]) = Xg(Y,JH) - \\ -Yg(X,JH) - g([X,Y],JH) = g(\nabla^\perp_Y H, JX) - g(\nabla^\perp_X H, JY).$$

Pero $H = (1/2)\sum_{i=1}^2 \sigma(E_i,E_i)$, donde $\{E_1,E_2\}$ es una referencia ortonormal local en Σ. Así, usando la ecuación de Codazzi y la proposición 1(ii), notando por S el tensor de Ricci de N y por ρ su curvatura escalar, se tiene:

$$d\varpi(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} R(Y,X,E_i,JE_i) = \\ = (1/2)S(JX,Y) = -(1/2)\rho(\phi^*\Omega)(X,Y) = 0,$$

la penúltima igualdad por ser N Einstein y la última por ser ϕ lagrangiana.

Consecuentemente, cuando N tiene curvatura seccional holomorfa constante, ϖ es cerrada.

Con esta terminología, el que una superficie lagrangiana sea minimal equivale a que la forma de Maslov ϖ sea idénticamente nula. En la siguiente definición, vamos a introducir la familia de superficies lagrangianas que será objeto de estudio en esta memoria. Posteriores caracterizaciones justifican la siguiente definición.

Definición 3 *Se dice que la* forma de Maslov *ϖ de una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ es* conforme *si el campo JH tangente a Σ es un campo conforme, esto es, las transformaciones infinitesimales del campo JH son transformaciones conformes.*

En particular, las superficies lagrangianas con vector curvatura media paralelo tienen forma de Maslov conforme.

Proposición 3 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ una inmersión lagrangiana de una superficie Σ. Entonces la forma de Maslov ϖ de ϕ es conforme si y sólo si*

$$\nabla^\perp_X H = -(\mathrm{div} JH/2)JX,$$

para cualquier campo X tangente a Σ, siendo $\mathrm{div}JH$ *la divergencia del campo JH.*

Demostración: Si $\mathcal{L}$ denota la derivada de Lie en Σ, para cualesquiera campos X e Y tangentes a Σ, usando la proposición 1(i) se tiene:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{JH}\, g)(X,Y) &= JH\, g(X,Y) - g([JH,X],Y) - g(X,[JH,Y]) = \\ &= -g(\nabla^{\perp}_X H, JY) - g(\nabla^{\perp}_Y H, JX) = -2g(\nabla^{\perp}_X H, JY),\end{aligned}$$

debiéndose la última igualdad al hecho de ser ϖ cerrada.

Ahora bien, que JH sea un campo conforme significa que $\mathcal{L}_{JH}\, g$ es proporcional a g, concretamente,

$$(\mathcal{L}_{JH}\, g)(X,Y) = (\mathrm{div}JH)\, g(X,Y),$$

de donde se sigue fácilmente el resultado.

Supongamos ahora que $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ es una inmersión lagrangiana de una superficie *orientable* Σ. Vamos a definir una diferencial cúbica sobre Σ que notaremos por Θ y que está naturalmente asociada a ϕ, la cual nos permitirá caracterizar analíticamente las inmersiones lagrangianas con forma de Maslov conforme.

Sea $z = x + iy$ una coordenada local isoterma sobre un abierto $U \subset \Sigma$ de modo que la métrica inducida sobre Σ se exprese como $g = e^{2u}|dz|^2$ con u una función diferenciable definida sobre U y $|dz|^2$ representando la métrica euclídea. Representemos por $\partial_z = (1/2)(\partial_x - i\partial_y)$ y $\partial_{\bar{z}} = (1/2)(\partial_x + i\partial_y)$ los operadores de Cauchy-Riemann en U. Se verifica entonces que

$$\begin{aligned} g(\partial_z, \partial_z) = 0 \quad &, \quad g(\partial_z, \partial_{\bar{z}}) = e^{2u}/2, \\ \nabla_{\partial_z}\partial_z = 2u_z\partial_z \quad &, \quad \nabla_{\partial_z}\partial_{\bar{z}} = 0, \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde g y ∇ se han extendido C-linealmente al complexificado del fibrado tangente a Σ. La estructura compleja de Σ asociada a la métrica inducida g se denotará por I y es dada por

$$I\partial_z = i\partial_z.$$

Definición 4 *Asociada a una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow N$ de una superficie orientable Σ en una superficie de Kaehler N, se define una diferencial cúbica Θ sobre Σ por*

$$\Theta(z) = f(z)dz^3, \text{ con } f(z) = 4C(\partial_z, \partial_z, \partial_z),$$

siendo C la extensión de la forma trilineal dada en (1.1) a los correspondientes fibrados complexificados.

En [ChW], Chern y Wolfson estudiaron esta diferencial cúbica para inmersiones minimales (no necesariamente lagrangianas) en CP^2, comprobando que dicha diferencial Θ es entonces siempre holomorfa. Una tal inmersión minimal (no compleja) es llamada superminimal si se anula concretamente esta diferencial cúbica Θ. El término superminimal fue introducido por Bryant (cf. [Br]) para inmersiones minimales de la 4-esfera S^4. Usando la idea de espacio twistor, en [Br] y [ChW] fue probado que cualquier estructura conforme sobre una superficie admite una inmersión superminimal conforme en S^4 o CP^2.

En el siguiente resultado caracterizamos la familia de inmersiones lagrangianas con forma cúbica Θ holomorfa como precisamente aquéllas cuya forma de Maslov es conforme.

Proposición 4 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ una inmersión lagrangiana de una superficie orientable Σ. Entonces la diferencial cúbica Θ asociada a ϕ es holomorfa si y sólo si la forma de Maslov ϖ de ϕ es conforme.*

Demostración: Sea $\mathcal{L}$ la derivada de Lie en Σ que extendemos C-linealmente al complexificado. Entonces:

$$(\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_z, \partial_z) = (1/4)\,((\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_x, \partial_x) - \\ -(\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_y, \partial_y)) - (i/2)(\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_x, \partial_y),$$

y así es claro que JH es un campo conforme si y sólo si

$$(\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_z, \partial_z) = 0.$$

Por otro lado, usando (1.2), se tiene:

$$(\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_z, \partial_z) = -2g([JH, \partial_z], \partial_z) = -2g(\nabla^{\perp}_{\partial_z} H, J\partial_z).$$

Pero $\sigma(\partial_z, \partial_{\overline{z}}) = (e^{2u}/2)H$, de donde usando la ecuación de Codazzi de ϕ, resulta:

$$\nabla^{\perp}_{\partial_z} H = 2e^{-2u}(\nabla\sigma)(\partial_{\overline{z}}, \partial_z, \partial_z),$$

siendo $\nabla\sigma$ la derivada covariante de σ. Luego, si ∇C es la derivada covariante de C, concluimos:

$$(\mathcal{L}_{JH}\, g)(\partial_z, \partial_z) = -4e^{-2u}(\nabla C)(\partial_{\overline{z}}, \partial_z, \partial_z, \partial_z) = e^{-2u} f_{\overline{z}}.$$

Por tanto, Θ es holomorfa si y sólo si JH es conforme.

En el caso en que la superficie lagrangiana con forma de Maslov conforme en $\mathcal{N}(c)$ sea compacta, el Teorema de Riemann-Roch impone importantes restricciones.

En general, si X es un campo en una superficie riemanniana orientable (Σ, g), asociado a X se define un campo complejo de tipo (1,0) dado por

$$\mathcal{X}_X = -2e^{-2u} g(X, \partial_{\bar{z}})\partial_z,$$

donde $z = x+iy$ es un sistema de coordenadas complejo en el cual la métrica g se escribe como $g = e^{2u}|dz|^2$.

Entonces, usando (1.2), es fácil ver que

$$\left(e^{-2u} g(X, \partial_{\bar{z}})\right)_{\bar{z}} = e^{-2u} (\mathcal{L}_X\, g)(\partial_{\bar{z}}, \partial_{\bar{z}}),$$

de donde se sigue que $\mathcal{X}_X$ es un campo holomorfo en Σ si y solo si X es un campo conforme. Es importante poner de manifiesto que los ceros de X y de $\mathcal{X}_X$ coinciden.

Supongamos entonces que $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ es una inmersión lagrangiana de una superficie Σ compacta y orientable. Si representamos a $\mathcal{X}_{JH}$ sencillamente por $\mathcal{X}$, tenemos que $\mathcal{X}$ es un campo complejo de tipo (1,0) en la superficie Σ y que la familia de superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme está también caracterizada por la holomorfía de $\mathcal{X}$.

El Teorema de Riemann-Roch (cf.[FK]) dice entonces que si el género de la superficie Σ es mayor que uno, dicho campo es idénticamente nulo. También la diferencial Θ es holomorfa si ϖ es conforme (proposición 4) y el mismo teorema asegura que si la superficie Σ es una esfera, Θ se anula idénticamente. Puesto que además en C^2 y CH^2 no existen superficies minimales compactas, podemos resumir este razonamiento en el siguiente resultado.

Proposición 5 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ una inmersión lagrangiana con forma de Maslov ϖ conforme de una superficie compacta y orientable Σ de género γ.*

(a) *Si $c \leq 0$, entonces $\gamma \leq 1$ y si $\gamma = 0$, la diferencial cúbica Θ asociada a ϕ se anula idénticamente.*

(b) *Si $c > 0$ y $\gamma \geq 2$ entonces ϕ es una inmersión minimal. Si $\gamma = 0$, la diferencial cúbica Θ se anula idénticamente y la única inmersión minimal en este caso es la totalmente geodésica.*

La última afirmación de (b) se deduce fácilmente una vez calculado el módulo de la función f que define la diferencial Θ (definición 4) tal y como se hace en (1.4) posteriormente.

En este caso, esto es, cuando Σ es compacta, es posible caracterizar la familia de inmersiones anteriormente definida mediante desigualdades integrales.

Proposición 6 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ una inmersión lagrangiana de una superficie Σ compacta y orientable de género γ y curvatura de Gauss K. Entonces:*

(a)

$$\int_\Sigma |\nabla^\perp H|^2 dA \geq \int_\Sigma K|H|^2 dA,$$

y la igualdad se da si y sólo si la forma de Maslov ϖ de ϕ es conforme.

(b)

$$\int_\Sigma (|H|^2 + c/2) dA \geq 8\pi(1-\gamma),$$

dándose la igualdad si y sólo si la diferencial cúbica Θ asociada a ϕ se anula idénticamente.

Demostración: Sea $\{e_1, e_2\}$ una referencia local ortonormal de Σ. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{2} |\nabla^\perp_{e_i} H + (\mathrm{div} JH/2) Je_i|^2 = |\nabla^\perp H|^2 - (\mathrm{div} JH)^2/2.$$

Así, de la proposición 3 se sigue que

$$2|\nabla^\perp H|^2 \geq (\mathrm{div} JH)^2, \tag{1.3}$$

dándose la igualdad si y sólo si la forma de Maslov de ϕ es conforme.

Por otro lado, la fórmula de Bochner [Bo] para el campo JH, junto con la proposición 1, conduce a

$$\triangle |H|^2 = 2K|H|^2 + 2g(\nabla(\mathrm{div} JH), JH) + 2|\nabla^\perp H|^2.$$

Pero

$$\mathrm{div}((\mathrm{div}JH)JH) = (\mathrm{div}JH)^2 + g(\nabla(\mathrm{div}JH), JH).$$

De este modo, integrando las dos últimas ecuaciones y haciendo uso del Teorema de la divergencia, se tiene que

$$0 = \int_\Sigma K|H|^2 dA + \int_\Sigma |\nabla^\perp H|^2 dA - \int_\Sigma (\mathrm{div}JH)^2 dA.$$

Usando (1.3) en la anterior igualdad integral se obtiene (a).

De la definición 4, por un cálculo directo, no es difícil comprobar que

$$|f|^2 = e^{6u}(|\sigma|^2 - 3|H|^2). \tag{1.4}$$

Por tanto, $|\sigma|^2 \geq 3|H|^2$ y la igualdad se da si y sólo si $\Theta \equiv 0$. Usando ahora la ecuación de Gauss de ϕ,

$$K = \frac{c}{4} + 2|H|^2 - \frac{|\sigma|^2}{2}, \tag{1.5}$$

y el Teorema de Gauss-Bonnet, se concluye (b).

1.2 Descripción local.

Una herramienta fundamental en el estudio que pretendemos realizar en esta memoria es la descripción local que disponemos de una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ de una superficie orientable Σ y que seguidamente detallamos.

Para ello, en primer lugar vamos a poner de manifiesto que si $c \neq 0$ tales inmersiones son, al menos localmente, proyección —vía la fibración de Hopf Π— de inmersiones horizontales que pueden verse en el espacio euclídeo complejo 3-dimensional.

Tanto en el caso del plano proyectivo complejo CP^2 como del plano hiperbólico complejo CH^2 (seguimos idéntica notación que en la sección §1.1), el subespacio vertical de la fibración de Hopf $\Pi : S^5(1) \longrightarrow CP^2$ (resp. $\Pi : H_1^5(-1) \longrightarrow CH^2$) en un punto $p \in S^5(1)$ (resp. $p \in H_1^5(-1)$), V_p, viene dado por $V_p = \mathrm{gen}(Jp)$, y el subespacio horizontal de Π en $p \in S^5(1)$ (resp. $p \in H_1^5(-1)$), H_p, es el complemento ortogonal de V_p en $T_pS^5(1)$ (resp. en $T_pH_1^5(-1)$).

De este modo, una inmersión $\psi : \Sigma \longrightarrow S^5(1)$ (resp. $\psi : \Sigma \longrightarrow H_1^5(-1)$) se dice *horizontal* si $d\psi_p(v) \in H_{\psi(p)}$, $\forall v \in T_p\Sigma$, $\forall p \in \Sigma$.

En el siguiente resultado, constatamos que las superficies *lagrangia-nas* de CP^2 (resp. de CH^2) son —localmente— proyecciones por la fibración de Hopf de inmersiones *horizontales* en $S^5(1)$ (resp. en $H_1^5(-1)$).

Proposición 7 *Si $\psi : \Sigma \longrightarrow S^5(1)$ (resp. $\psi : \Sigma \longrightarrow H_1^5(-1)$) es una inmersión horizontal de una superficie Σ en $S^5(1)$ (resp. en $H_1^5(-1)$), entonces $\phi = \Pi \circ \psi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ (resp. $\phi = \Pi \circ \psi : \Sigma \longrightarrow CH^2$), donde Π es la fibración de Hopf de CP^2 (resp. de CH^2), es una inmersión lagrangiana.*

Recíprocamente, si $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ (resp. $\phi : \Sigma \longrightarrow CH^2$) es una inmersión lagrangiana de una superficie Σ en CP^2 (resp. en CH^2), existe un levantamiento local horizontal de ϕ, $\psi : U \subset \Sigma \longrightarrow S^5(1)$ (resp. $\psi : U \subset \Sigma \longrightarrow H_1^5(-1)$), con U un abierto simplemente conexo de Σ, único salvo rotaciones de $S^5(1)$ (resp. de $H_1^5(-1)$).

Demostración: En primer lugar, es claro que al ser ψ una inmersión horizontal entonces ϕ es una inmersión. En segundo lugar, si ω es la 1-forma sobre Σ definida por

$$\omega(v) = \langle \psi_*(v), J\psi \rangle$$

con v tangente a Σ, es fácil calcular

$$d\omega(v, w) = 2\langle \psi_*(w), J\psi_*(v) \rangle = 2g(\phi_*(w), J\phi_*(v)), \tag{1.6}$$

con v y w vectores tangentes a Σ. Si suponemos ψ horizontal, como el espacio vertical de Π en $p \in S^5(1)$ (resp. $p \in H_1^5(-1)$) es V_p =gen$\{Jp\}$, entonces $\omega = 0$ y por tanto $\phi = \Pi \circ \psi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ (resp. $\phi = \Pi \circ \psi : \Sigma \longrightarrow CH^2$) es lagrangiana utilizando (1.6).

Para el recíproco, asumamos ahora que $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ (resp. $\phi : \Sigma \longrightarrow CH^2$) es lagrangiana. Sea $\psi : U \subset \Sigma \longrightarrow S^5(1)$ (resp. $\psi : U \subset \Sigma \longrightarrow H_1^5(-1)$) un levantamiento local a $S^5(1)$ (resp. a $H_1^5(-1)$) definido sobre un abierto simplemente conexo U de Σ. Por ser ϕ lagrangiana, de (1.6) se sigue que $d\omega = 0$ y por consiguiente existe $\eta \in C^\infty(U)$ tal que $d\eta = \omega$. Así, $\widetilde{\psi} = e^{-i\eta}\psi = \cos\eta\, \psi - \operatorname{sen}\eta\, J\psi$ es otro levantamiento de ϕ a $S^5(1)$ (resp. a $H_1^5(-1)$) y no es difícil obtener que

$$\langle \widetilde{\psi}_*(v), J\widetilde{\psi} \rangle = -d\eta(v) + \omega(v) = 0,$$

para cualquier vector tangente v sobre Σ. Luego $\widetilde{\psi}$ es un levantamiento local horizontal de ϕ a $S^5(1)$ (resp. a $H_1^5(-1)$), que renombramos de nuevo por ψ.

Además, si $\widehat{\psi}$ es otro levantamiento local horizontal de ϕ a $S^5(1)$ (resp. a $H_1^5(-1)$), entonces existe $\theta \in C^\infty(U)$ tal que $\widehat{\psi} = e^{i\theta}\psi$. Imponiendo que $\widehat{\psi}$ es horizontal se concluye que θ es constante, por lo que ψ es único salvo rotaciones.

Observemos que el hecho de ser ψ un levantamiento horizontal de ϕ y Π una submersión riemanniana nos dice las métricas inducidas en Σ por ψ y ϕ coinciden, esto es, $\psi^*\langle\,,\,\rangle = \phi^* g$.

Para finalizar este primer capítulo, vamos a obtener las ecuaciones de Frenet en C^3 del levantamiento horizontal local de una inmersión lagrangiana bien en el plano proyectivo complejo o en el plano hiperbólico complejo.

Si $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ es una inmersión lagrangiana de una superficie orientable Σ, consideremos $z = x+iy$ una coordenada local isoterma sobre un abierto $U \subset \Sigma$ de modo que la métrica inducida se escribe en U como $g = e^{2u}|dz|^2$.

Designaremos por ψ el correspondiente levantamiento local horizontal de ϕ que podemos considerar definido sobre el propio abierto U si $c = \pm 4$ (véase proposición 7), y al mismo tiempo —por unificar notación— la propia inmersión ϕ si $c = 0$; es decir:

$$\begin{aligned} \psi : U \longrightarrow S^5(1) \subset C^3 \quad &, \quad \text{si } c = 4, \\ \psi : U \longrightarrow H_1^5(-1) \subset C_1^3 \quad &, \quad \text{si } c = -4, \\ \psi = \phi : U \longrightarrow C^2 \quad &, \quad \text{si } c = 0. \end{aligned}$$

Notando igualmente por $\langle\,,\,\rangle$ la correspondiente métrica de C^3, C_1^3 y C^2 respectivamente, si $c \pm 4$ se tiene que para cualesquiera campos tangentes V y W, se cumple —por ser ψ horizontal— que $\langle \psi_* V, \psi_* W\rangle = g(\phi_* V, \phi_* W)$, por lo que ψ es conforme si y sólo lo es ϕ.

En este caso, puesto que ϕ es una inmersión conforme sobre el abierto isotermo U, el carácter conforme de ψ queda recogido en

$$\langle \psi_z, \psi_z\rangle = 0, \quad \langle \psi_z, \psi_{\bar z}\rangle = \frac{e^{2u}}{2}, \tag{1.7}$$

mientras que el carácter lagrangiano de ϕ se traduce en

$$\langle \psi_z, J\psi_{\bar z}\rangle = 0. \tag{1.8}$$

Asimismo, el carácter horizontal de ψ si $c = \pm 4$ puede resumirse en

$$\langle \psi, \psi\rangle = \pm 1, \quad \langle \psi, J\psi_z\rangle = 0. \tag{1.9}$$

Aquí, $\psi_z = (1/2)(\psi_x - i\psi_y)$ y $\psi_{\overline{z}} = (1/2)(\psi_x + i\psi_y)$, y por supuesto $\langle\, ,\,\rangle$ y J se extienden a los correspondientes fibrados complexificados por C-linealidad.

Teniendo en cuenta que para $c = \pm 4$ la proyección de Hopf es una submersión riemanniana, que ψ es un levantamiento horizontal de ϕ y utilizando entonces (1.7), (1.8) y (1.9), se obtienen por los argumentos usuales las ecuaciones de Frenet para ψ que vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
\psi_{zz} &= 2u_z\psi_z + \frac{\overline{h}}{2}J\psi_z + \frac{e^{-2u}f}{2}J\psi_{\overline{z}},\\
\psi_{z\overline{z}} &= \frac{h}{2}J\psi_z + \frac{\overline{h}}{2}J\psi_{\overline{z}} - \frac{c}{8}e^{2u}\psi,\\
\psi_{\overline{z}\,\overline{z}} &= 2u_{\overline{z}}\psi_{\overline{z}} + \frac{e^{-2u}\overline{f}}{2}J\psi_z + \frac{h}{2}J\psi_{\overline{z}},
\end{aligned} \tag{1.10}$$

donde f es la función que define la forma cúbica Θ (véase definición 4) y h es la función dada por

$$h(z) = 4e^{-2u}\langle\psi_{z\overline{z}}, J\psi_{\overline{z}}\rangle. \tag{1.11}$$

Es interesante observar que el campo vectorial complejo $\mathcal{X}$ de tipo (1,0) asociado al campo JH que definimos en §1.1 puede expresarse en términos de esta función h mediante

$$\mathcal{X}(z) = e^{-2u}h\,\partial_z, \tag{1.12}$$

sin más que tener en cuenta que Π es una submersión riemanniana y que ψ es un levantamiento (local) horizontal de ϕ.

Chapter 2

El levantamiento twistor de una superficie lagrangiana.

Las superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme en $\mathcal{N}(c)$ son caracterizadas en este capítulo mediante la armonicidad de una de las componentes de la aplicación de Gauss de cada superficie si $c = 0$ y si $c = \pm 4$ a través de lo que puede considerarse la generalización más natural, como es la armonicidad de sus levantamientos "twistor" (de Gauss).

Finalizamos el capítulo realizando un estudio local de este tipo de superficies lagrangianas que concluye con un método de construcción de las mismas a partir de soluciones de una determinada ecuación diferencial ordinaria.

2.1 La aplicación de Gauss de una superficie lagrangiana en el plano euclídeo complejo.

En la teoría clásica de superficies, las propiedades geométricas de la inmersión (minimalidad, curvatura media constante, etc.) se traducen en comportamientos regulares de su aplicación de Gauss. Vamos a estudiar qué significa para una superficie lagrangiana el hecho de que la forma de Maslov a ella asociada sea conforme en términos de su aplicación de Gauss. Comencemos por el caso más clásico, esto es, cuando la variedad ambiente es el plano euclídeo complejo.

La aplicación de Gauss ν de una superficie orientable Σ en C^2, $\phi : \Sigma \longrightarrow$

C^2, asigna a cada punto de la superficie el plano tangente orientado a la misma en dicho punto, esto es, $\nu(p) = \phi_*(T_p\Sigma)$, $p \in \Sigma$. Procedemos entonces, en primer lugar, a identificar la grassmanniana de dos-planos orientados en $C^2 \equiv R^4$, $G_2(4)$, con el conjunto de dos-vectores unitarios descomponibles de $\bigwedge^2 R^4$. Los detalles de esta identificación pueden encontrarse en [CM1].

Consideremos $\bigwedge^2 R^4 = \{v \wedge w \,/\, v, w \in R^4\}$ dotado de la métrica $\langle\,\langle , \rangle\,\rangle$ definida mediante

$$\langle\,\langle v \wedge w, x \wedge y \rangle\,\rangle = \langle v, x\rangle\langle w, y\rangle - \langle v, y\rangle\langle w, x\rangle,$$

para cualesquiera $v \wedge w, x \wedge y \in \bigwedge^2 R^4$, siendo $\langle\, , \,\rangle$ la métrica euclídea de $C^2 \equiv R^4$.

Si $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ es una base ortonormal orientada de R^4, consideramos los supespacios $\bigwedge^2_\pm R^4$ de $\bigwedge^2 R^4$ generados respectivamente por los vectores

$$\begin{aligned} E^1_\pm &= \frac{1}{2}\left(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4\right), \\ E^2_\pm &= \frac{1}{2}\left(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2\right), \\ E^3_\pm &= \frac{1}{2}\left(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3\right). \end{aligned}$$

Si $S^2_\pm$ son respectivamente las esferas dos-dimensionales de $\bigwedge^2_\pm R^4$ de radios $1/\sqrt{2}$ (respecto la métrica $\langle\,\langle , \rangle\,\rangle$), entonces $G_2(4)$ puede identificarse con $S^2_+ \times S^2_-$ mediante la aplicación

$$P \in G_2(4) \longmapsto \left(\frac{1}{2}(v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4), \frac{1}{2}(v_1 \wedge v_2 - v_3 \wedge v_4)\right),$$

donde $\{v_1, v_2\}$ es una base ortonormal orientada del plano P de modo que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base ortonormal de R^4 que define la misma orientación que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Por supuesto, en $C^2 \equiv R^4$ estamos considerando la orientación estándar de $(C^2, \langle\, , \,\rangle, J)$ como variedad de Kaehler (definida en §1.1).

De este modo, si $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2 \equiv R^4$ es una inmersión *lagrangiana* de una superficie orientable Σ y $\nu : \Sigma \longrightarrow G_2(4)$ es su correspondiente aplicación de Gauss, al tomar en R^4 la base $\{e_1, e_2 = Je_1, e_3, e_4 = Je_3\}$, si $\{v, w\}$ es una base ortonormal orientada de $T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$, resulta que $\{v, w, Jw, Jv\}$ define la misma orientación que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Así, la aplicación de Gauss de ϕ,

$\nu : \Sigma \longrightarrow S^2_+ \times S^2_-$, es dada por

$$\nu(p) = \left(\frac{1}{2} (v \wedge w - Jv \wedge Jw) , \frac{1}{2} (v \wedge w + Jv \wedge Jw) \right),$$

donde $\{v, w\}$ es una base ortonormal orientada de $T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$.

Pero además, $(1/2)(v \wedge w - Jv \wedge Jw)$ es ortogonal a E^1_+, esto es, $\langle \langle v \wedge w - Jv \wedge Jw, E^1_+ \rangle \rangle = 0$. Se tiene entonces que ν cae en el producto de una circunferencia máxima S^1_+ de S^2_+ y S^2_-. Resumiendo, la aplicación de Gauss de ϕ dada anteriormente puede verse como

$$\nu : \Sigma \longrightarrow S^1_+ \times S^2_-.$$

Una *aplicación* $\varphi : M \longrightarrow N$ entre variedades riemannianas se dice *armónica* si es punto crítico del funcional energía. Ello equivale, a través de la ecuación de Euler-Lagrange asociada al anterior problema variacional, a que el campo tensión de la aplicación, $\tau(\varphi)$, sea idénticamente nulo.

Caso que el dominio de la aplicación sea una superficie Σ, dicho campo tensión adopta una forma especialmente sencilla. De hecho, si $z = x + iy$ es una coordenada local compleja sobre Σ entonces $\tau(\varphi)$ viene dado, salvo un factor conforme, mediante

$$\tau(\varphi) = (\varphi^{-1}\nabla^N)_{\partial_{\bar{z}}} \varphi_*(\partial_z),$$

donde ∇^N es la conexión riemanniana de N y ∂_z, $\partial_{\bar{z}}$ los operadores de Cachy-Riemann.

Ruh y Vilms probaron en [RV] que *"Una inmersión $\phi : \Sigma \longrightarrow R^4$ tiene curvatura media paralela si y sólo si su aplicación de Gauss ν es una aplicación armónica".* Si ϕ es lagrangiana y tiene curvatura media paralela, usando la proposición 1(i) de §1.1 se tiene que JH es un campo paralelo sobre Σ. Por tanto, o bien $JH \equiv 0$ y ϕ es una inmersión minimal, o JH es un campo paralelo (no nulo). En este último caso, Σ es llana y no es difícil ver que la segunda forma fundamental de ϕ es paralela. Estas superficies son entonces necesariamente cilindros y toros clasificados por Hoffman [Ho].

Podemos pensar en generalizar la anterior propiedad estudiando por separado la armonicidad de la segunda componente de la aplicación de Gauss, tal y como hacemos en el siguiente resultado.

Teorema 1 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ una inmersión lagrangiana de una superficie orientable Σ, ϖ la forma de Maslov de ϕ, Θ la diferencial cúbica asociada a ϕ y $\nu = (\nu^+, \nu^-) : \Sigma \longrightarrow S^1_+ \times S^2_-$ su aplicación de Gauss. Entonces:*

(a) ν^- *es una aplicación antiholomorfa si y sólo si* ϕ *es minimal.*

(b) ν^- *es una aplicación holomorfa si y sólo* Θ *es idénticamente nula.*

(c) ν^- *es una aplicación armónica si y sólo si* ϖ *es conforme (esto es,* Θ *es holomorfa).*

Nota 1 Podría igualmente estudiarse la armonicidad de la primera componente de la aplicación de Gauss, $\nu^+ : \Sigma \longrightarrow S^1_+$, resultando ser equivalente al hecho que la forma de Maslov sea armónica ([CU1]). Este tipo de superficies suele recibir el nombre de “H-minimales” ya que pueden ser caracterizadas como puntos críticos del funcional área para deformaciones hamiltonianas de la superficie. Diversos problemas de estabilidad para estas superficies han sido estudiados en [CM2], [Oh] y [U3].

Demostración: Comenzamos expresando ν^- en coordenadas complejas. Si $z = x + iy$ es una coordenada local isoterma sobre Σ, donde la métrica inducida en Σ se escribe como $e^{2u}|dz|^2$, con $|dz|^2$ la métrica euclídea, entonces $\{e^{-u}\phi_x, e^{-u}\phi_y\}$ es una referencia local ortonormal orientada. Así, podemos escribir:

$$\nu^- = -ie^{-2u}\left(\phi_z \wedge \phi_{\overline{z}} + J\phi_z \wedge J\phi_{\overline{z}}\right),$$

habiendo extendido $\wedge$ C-linealmente al fibrado tangente complexificado.

Es fácil comprobar que los dos-vectores

$$V = 2e^{-2u}\left(\phi_z \wedge J\phi_z + \phi_{\overline{z}} \wedge J\phi_{\overline{z}}\right),\ W = 2e^{-2u}\left(\phi_z \wedge J\phi_z - \phi_{\overline{z}} \wedge J\phi_{\overline{z}}\right),$$

constituyen una base ortonormal del plano tangente a S^2_- en $\nu^-(z)$. Además, la estructura compleja canónica $\mathcal{J}$ sobre S^2_- es justamente la que verifica que $\mathcal{J}V = W$.

La estructura compleja sobre Σ, I, viene dada por $I\partial_z = i\partial_z$. Así pues, ν^- es una aplicación holomorfa (resp. antiholomorfa) si y sólo si se verifica que $\mathcal{J}\nu^-_z = i\nu^-_z$ (resp. $\mathcal{J}\nu^-_z = -i\nu^-_z$) Pero puesto que ν^-_z es tangente a S^2_-, teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{J}$, podemos concluir:

ν^- es holomorfa (resp. antiholomorfa) $\Leftrightarrow$ $\langle \nu^-_z, W\rangle = -i\langle \nu^-_z, V\rangle$ (resp. $\langle \nu^-_z, W\rangle = i\langle \nu^-_z, V\rangle$).

De la expresión de ν^- y (1.10), se sigue (recuérdese que $\phi = \psi$ si $c = 0$):

$$\nu^-_z = ie^{-2u}\left(h\,\phi_z \wedge J\phi_z + fe^{-2u}\phi_{\overline{z}} \wedge J\phi_{\overline{z}}\right), \tag{2.1}$$

de donde

$$\langle \nu_z^-, V\rangle = ie^{-2u}(f - e^{2u}h)/2,$$
$$\langle \nu_z^-, W\rangle = -e^{-2u}(f + e^{2u}h)/2.$$

Por tanto, ν^- es holomorfa (resp. antiholomorfa) si y sólo si $f \equiv 0$ (resp. $h \equiv 0$). De (1.11), por un cálculo directo, es fácil comprobar

$$|h|^2 = e^{2u}|H|^2, \tag{2.2}$$

con lo que se prueban (a) y (b).

Para probar (c), si $\tau(\nu^-)$ denota el campo tensión de ν^-, entonces en este caso $\tau(\nu^-)$ es la componente tangencial de $\nu^-_{z\bar{z}}$. A partir de (2.1), utilizando (1.10) y tras un largo cálculo, se obtiene:

$$\tau(\nu^-) = i\left(e^{-4u}f_{\bar{z}}\,\phi_{\bar{z}} \wedge J\phi_{\bar{z}} - e^{-2u}(h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}}h)\,\phi_z \wedge J\phi_z\right).$$

Pero de (1.11), usando de nuevo (1.10), se llega a que

$$h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}}h = e^{-2u}\overline{f_{\bar{z}}}, \tag{2.3}$$

con lo que $\tau(\nu^-) = -2e^{-4u}\Im(f_{\bar{z}}\,\phi_{\bar{z}} \wedge J\phi_{\bar{z}})$, donde $\Im$ denota parte imaginaria. Así, $\tau(\nu^-) = 0 \Leftrightarrow f_{\bar{z}} = 0$, lo que prueba (c).

2.2 El levantamiento twistor de una inmersión lagrangiana en los planos pro- yectivo e hiperbólico complejos.

Si pretendemos hacer un estudio similar al de la sección anterior en el caso en que la variedad ambiente sea CP^2 o CH^2, el planteamiento es un poco más complicado.

Si $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$, $c = \pm 4$, es una inmersión lagrangiana de una superficie orientable Σ, entonces su aplicación de Gauss (generalizada) ν es la aplicación de la superficie Σ en el fibrado grassmanniano de 2-planos orientados sobre $\mathcal{N}(c)$,

$$\nu : \Sigma \longrightarrow G_2(T\mathcal{N}(c)),$$

que aplica cada punto $p \in \Sigma$ en el 2-plano orientado $d\phi_p(T_p\Sigma)$ (cf. [HO]). En el caso de C^2 este fibrado es trivial. En [JR2] se estudia una versión del resultado de Ruh y Vilms [RV] comentado en §2.1 para superficies lagrangianas de superficies Kaehler-Einstein. La fibra en un punto $x \in \mathcal{N}(c)$ es la grassmanniana de 2-planos orientados en $T_x\mathcal{N}(c)$, $G_2(T_x\mathcal{N}(c))$. Al igual que en el caso de $\mathcal{N}(c)$, $c = 0$, podemos identificar $G_2(T_x\mathcal{N}(c))$ con el conjunto de 2-vectores unitarios descomponibles de $T_x\mathcal{N}(c)$, $\bigwedge^2(T_x\mathcal{N}(c))$. Así, de manera análoga al caso de C^2, podemos descomponer las fibras del anterior fibrado en el producto $S^2_+(x) \times S^2_-(x)$ de las esferas de radio $1/\sqrt{2}$ de $\bigwedge^2_\pm(T_x\mathcal{N}(c))$, aunque en general dicha descomposición no es global. Esta descomposición a nivel de fibras proporciona dos fibrados sobre $\mathcal{N}(c)$, $\bigcup_{x\in\mathcal{N}(c)} S^2_\pm(x)$, de fibra tipo S^2, que son conocidos como los fibrados "twistor" de Penrose y que representaremos por $\mathcal{P}_\pm$. A partir de las proyecciones naturales

$$G_2(T\mathcal{N}(c)) \longrightarrow \mathcal{P}_\pm$$

la aplicación de Gauss ν factoriza en dos aplicaciones

$$\nu^\pm : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_\pm$$

que son llamadas los levantamientos "twistor" (de Gauss) de ϕ. (Consúltese por ejemplo [ES], [Fr] o [JR1] entre otros)

En el caso de C^2, estos fibrados vuelven a ser triviales.

Al igual que en el caso del plano euclídeo complejo, el hecho de ser ϕ lagrangiana supone que ν^+ toma valores en un subfibrado de $\mathcal{P}_+$ de fibra tipo S^1. En consecuencia, y por similitud con el caso de C^2, estudiamos el levantamiento "twistor" $\nu^- : \Sigma \longrightarrow \mathcal{P}_-$.

El fibrado $\mathcal{P}_-$ es perfectamente conocido para el plano proyectivo complejo (cf. [ES] y [Ga], por ejemplo) y ha sido menos estudiado para el plano hiperbólico complejo (cf. [V]). Aunque existen diversas formas de identificar dichos fibrados, escogeremos la más adecuada a nuestros propósitos. En esta memoria no vamos a explicitar la citada identificación; puede consultarse [ES] al respecto. Aunque aparentemente no hay grandes diferencias entre ambos fibrados twistor, conviene poner de manifiesto que $\mathcal{P}_-$ es más rico en propiedades (véase [AHS]). Por ejemplo, $\mathcal{P}_+$ no tiene estructura de variedad compleja.

Comencemos describiendo $\mathcal{P}_-$ en el caso del plano proyectivo complejo CP^2.

Sea $M = \{(x,y) \in S^5(1) \times S^5(1) \,/\, \langle x,y\rangle = \langle x,Jy\rangle = 0\}$, donde $\langle,\rangle$ es la métrica euclídea en C^3 y J su estructura compleja. Entonces M es una variedad de dimensión 8. La acción natural de $S^1 \times S^1$ sobre $S^5(1) \times S^5(1)$ puede ser restringida a M y el cociente obtenido, $M/S^1 \times S^1$, lo representaremos por $\mathcal{Z}$. Así, disponemos de una aplicación proyección

$$\Pi \times \Pi : M \longrightarrow \mathcal{Z},$$

donde $\Pi : S^5(1) \longrightarrow CP^2$ es la fibración de Hopf (véase §1.2). En consecuencia,

$$\mathcal{Z} = \{([z],[w]) \in CP^2 \times CP^2 \,/\, z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + z_3\overline{w_3} = 0\}.$$

Podemos resumir la situación planteada en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} M & \hookrightarrow & S^5(1) \times S^5(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{Z} & \hookrightarrow & CP^2 \times CP^2 \end{array}$$

En $CP^2 \times CP^2$ consideramos la estructura compleja $\mathcal{J}$ dada por

$$\mathcal{J} = (J, -J),$$

siendo J la estructura compleja canónica en CP^2. Ello supone que en realidad estamos considerando la variedad compleja $CP^2 \times (CP^2)^*$. Entonces resulta que $\mathcal{Z}$ es una hipersuperficie compleja de $(CP^2 \times CP^2, \mathcal{J})$, y en consecuencia, $(\mathcal{Z}, \mathcal{J})$ es una variedad compleja de dimensión compleja tres. Si $\hat{g}$ es la métrica en $\mathcal{Z}$ inducida de la métrica producto $g \times g$ de $CP^2 \times CP^2$ (g denota la métrica de Fubini-Study), entonces $(\mathcal{Z}, \hat{g}, \mathcal{J})$ es una variedad Einstein-Kaehler ([V]).

Observemos que existen dos proyecciones canónicas $p_i : \mathcal{Z} \longrightarrow CP^2$, $i = 1, 2$, dadas por

$$p_1([z],[w]) = [z],$$
$$p_2([z],[w]) = [w],$$

y que $p_i : (\mathcal{Z}, \mathcal{J}) \longrightarrow (CP^2, J)$, $i = 1, 2$, son —respectivamente— holomorfa y antiholomorfa. No obstante, podemos definir una tercera proyección natural

$$p : \mathcal{Z} \longrightarrow CP^2,$$

dada por

$$p([x],[y]) = [z],$$

donde $\langle z,x\rangle = \langle z,Jx\rangle = 0$ y $\langle z,y\rangle = \langle z,Jy\rangle = 0$. Esta última proyección no es, por supuesto, ni holomorfa ni antiholomorfa. La proyección p define un fibrado de fibra tipo CP^1 el cual se conoce como el *fibrado "twistor" de* CP^2. A $(\mathcal{Z},\hat{g},J)$ se le llama entonces el *espacio "twistor" de* CP^2, el cual puede identificarse con $\mathcal{P}_-$ (cf. [ES],[V]).

La proyección twistor p puede interpretarse que transforma la pareja de rectas complejas de C^3 generadas por $x,y\in C^3$ en una tercera recta compleja, la generada por $z\in C^3$, que es ortogonal a las dos anteriores, interpretación ésta en sintonía con la identificación que se hace en [Ga] del espacio twistor del plano proyectivo complejo con una cierta variedad de banderas.

Sea ahora $\phi:\Sigma\longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana de una superficie Σ orientable. Sea $\psi:U\longrightarrow S^5(1)$ un levantamiento local horizontal de ϕ a $S^5(1)$, donde $(U,z=x+iy)$ es un sistema de coordenadas isotermo de modo que en U la métrica inducida (por ϕ o por ψ) viene dada por $g=e^{2u}|dz|^2$ (véase proposición 7 en §1.2).

Sean

$$\psi^1 = \frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}\left(\psi_x + J\psi_y\right),$$
$$\psi^2 = \frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}\left(\psi_x - J\psi_y\right).$$

El hecho que $\psi:U\longrightarrow C^3$ sea totalmente real por (1.8), nos asegura que

$$|\psi^i|^2 = 1,\ i=1,2,\ \langle\psi^1,\psi^2\rangle = \langle\psi^1,J\psi^2\rangle = 0.$$

Así, $\tilde{\psi}=(\psi^1,\psi^2)$ define una aplicación de U en M,

$$\tilde{\psi}=(\psi^1,\psi^2):U\longrightarrow M.$$

Si se considerase otro levantamiento $\eta:U\longrightarrow S^5(1)$ de ϕ, a partir de la proposición 7 de §1.2 se sigue que existe $\theta\in R$ tal que $\eta=e^{i\theta}\psi$. Por tanto, $\eta^i = e^{i\theta}\psi^i$, $i=1,2$, y en consecuencia $\tilde{\eta}=e^{i\theta}\cdot\tilde{\psi}$, donde $e^{i\theta}\cdot(z,w) = (e^{i\theta}z, e^{i\theta}w)$, para $(z,w)\in C^3\times C^3$. Por consiguiente, $\Pi\times\Pi\circ\tilde{\eta}=\Pi\times\Pi\circ\tilde{\psi}$ como aplicaciones de U en $\mathcal{Z}$. Por tanto, existe una aplicación $\tilde{\phi}$ bien definida

$$\tilde{\phi}:U\longrightarrow\mathcal{Z},$$

independiente del levantamiento local horizontal de ϕ que es dada localmente por $\Pi \times \Pi \circ \tilde{\psi}$, donde ψ es un levantamiento local horizontal de ϕ a $S^5(1)$.

Siguiendo un razonamiento estándar de conexión, es trivial verificar que $\tilde{\phi}$ está globalmente definida en Σ. Luego hemos construido una aplicación

$$\tilde{\phi} : \Sigma \longrightarrow \mathcal{Z}.$$

Puesto que localmente $\tilde{\phi} = \Pi \times \Pi \circ \tilde{\psi}$, donde $\tilde{\psi} = (\psi^1, \psi^2)$ y además es fácil ver que $\langle \psi, \psi^i \rangle = \langle \psi, J\psi^i \rangle = 0$ por (1.9), se tiene que $p \circ \tilde{\phi} = \phi$, y en consecuencia $\tilde{\phi}$ es un levantamiento (canónico) de ϕ a $\mathcal{Z}$ llamado el *levantamiento "twistor"* de ϕ.

En la identificación anteriormente mencionada, $\tilde{\phi}$ se corresponde con ν_- (cf.[ES]).

Estamos ya en condiciones de enunciar y demostrar lo que es la versión del teorema 1 para el plano proyectivo complejo, resultado éste que va a caracterizar geométricamente la familia de superficies lagrangianas de CP^2 que pretendemos estudiar en esta memoria.

Teorema 2 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana de una superficie orientable Σ y $\tilde{\phi} : \Sigma \longrightarrow \mathcal{Z}$ su levantamiento "twistor" al espacio "twistor" $(\mathcal{Z}, \hat{g}, J)$ de CP^2. Entonces:*

(a) $\tilde{\phi} : (\Sigma, I) \longrightarrow (\mathcal{Z}, J)$ *es holomorfa si y sólo si la diferencial cúbica Θ asociada a ϕ es idénticamente nula.*

(b) $\tilde{\phi} : (\Sigma, g) \longrightarrow (\mathcal{Z}, \hat{g})$ *es armónica si y sólo si la forma de Maslov ϖ de ϕ es conforme (esto es, Θ es holomorfa).*

Demostración: En primer lugar, es un ejercicio sencillo comprobar que el subespacio vertical de $\Pi \times \Pi : M \longrightarrow \mathcal{Z}$ en un punto $(x, y) \in M$ es dado por

$$V_{(x,y)} = \text{gen}\{(Jx, 0), (0, Jy)\}.$$

Además, el subespacio normal de M en $S^5(1) \times S^5(1)$ en un punto $(x, y) \in M$ viene dado por

$$\text{gen}\{(y, x), J(y, x)\}.$$

Por tanto, siguiendo la notación precedente, si $\tilde{\psi} = (\psi^1, \psi^2) : U \longrightarrow M$ es un levantamiento local de $\tilde{\phi}$ a M, no es difícil comprobar que el subespacio horizontal de $\Pi \times \Pi : M \longrightarrow \mathcal{Z}$ (respecto a la métrica de $S^5(1) \times S^5(1)$) en un punto $\tilde{\psi}(z)$ está generado por $\{E_i, JE_i;\ i = 1, 2, 3\}$ donde

$$E_1 = (\psi, 0),\ E_2 = (0, \psi),\ E_3 = (\psi^2, -\psi^1).$$

Comencemos probando (a). La aplicación $\tilde{\phi} : (\Sigma, I) \longrightarrow (\mathcal{Z}, J)$ es holomorfa si y sólo si $J\left(\tilde{\phi}_*(\partial_z)\right) = \tilde{\phi}_*(i\partial_z)$. Para manipular esta igualdad, consideremos levantamientos horizontales al fibrado $\Pi \times \Pi : M \longrightarrow \mathcal{Z}$. Representaremos, en general, mediante v^* el levantamiento horizontal a M de un vector v tangente a $\mathcal{Z}$. Por tanto, es claro que $\tilde{\phi}$ es holomorfa si y sólo si $\left[J\left(\tilde{\phi}_*(\partial_z)\right)\right]^* = [\tilde{\phi}_*(i\partial_z)]^*$.

Pero como $\Pi \times \Pi \circ \tilde{\psi} = \tilde{\phi}$, se tiene que $[\tilde{\phi}_*(\partial_z)]^* = \tilde{\psi}_z^H$, donde w^H representa, en general, la componente horizontal de un vector w tangente a M. En consecuencia, $\tilde{\phi}$ será una aplicación holomorfa si y sólo si $(J\tilde{\psi}_z)^H = (i\tilde{\psi}_z)^H$.

Ahora bien, ya que ψ^1 y ψ^2 pueden reescribirse como

$$\psi^1 = \frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}[\psi_z + \psi_{\bar{z}} + i(J\psi_z - J\psi_{\bar{z}})], \tag{2.4}$$
$$\psi^2 = \frac{e^{-u}}{\sqrt{2}}[\psi_z + \psi_{\bar{z}} - i(J\psi_z - J\psi_{\bar{z}})],$$

es un simple ejercicio comprobar que

$$\langle J\tilde{\psi}_z, E_i\rangle = \langle i\tilde{\psi}_z, E_i\rangle = -\frac{ie^u}{2\sqrt{2}},\ i = 1, 2,$$
$$\langle J\tilde{\psi}_{\bar{z}}, JE_i\rangle = \langle i\tilde{\psi}_z, JE_i\rangle = \frac{e^u}{2\sqrt{2}},\ i = 1, 2,$$

y en consecuencia

$$(J\tilde{\psi}_z - i\tilde{\psi}_z)^H = \alpha E_3 + \beta JE_3,$$

para ciertas funciones complejas α y β.

Usando (1.10), es inmediato comprobar que $\alpha = -e^{-2u}f$ y $\beta = -ie^{-2u}f$, lo que demuestra (a).

Para probar (b), notemos en primer lugar que si $\widehat{\nabla}$ representa la conexión inducida en $\tilde{\phi}^*T\mathcal{Z}$ de la conexión de Levi-Civita de $\mathcal{Z}$, entonces la tensión de $\tilde{\phi}$ viene dada por (véase §2.1):

$$\tau(\tilde{\phi}) = \widehat{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\phi}_*(\partial_z).$$

Al igual que en la demostración de (a), procedemos a calcular el levantamiento de $\tau(\tilde{\phi})$ al fibrado $\tilde{\psi}^*TM$.

Teniendo en cuenta las ecuaciones fundamentales de una submersión (cf. [O]) así como las propiedades de la fibración de Hopf Π, no es difícil verificar que el levantamiento horizontal del campo tensión de $\tilde{\phi}$ viene dado por

$$\tau(\tilde{\phi})^* = \tilde{\psi}^H_{z\bar{z}} - 2\Re\left(\widetilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\psi}^V_z\right)^H, \tag{2.5}$$

donde $\widetilde{\nabla}$ es la conexión inducida en $\tilde{\psi}^*TM$ de la conexión de Levi-Civita de M, $\Re$ representa parte real y ^{H}, ^{V} componentes horizontal y vertical respectivamente.

Ahora, usando (2.4) junto con (1.10), es sencillo ver que

$$\tilde{\psi}^V_z = (\bar{h}/2 + iu_z)(J\psi^1, 0) + (\bar{h}/2 - iu_z)(0, J\psi^2),$$

de donde se sigue que

$$\left(\widetilde{\nabla}_{\partial_{\bar{z}}}\tilde{\psi}^V_z\right)^H = (\bar{h}/2 + iu_z)((J\psi^1)^H_{\bar{z}}, 0) + (\bar{h}/2 - iu_z)(0, (J\psi^2)^H_{\bar{z}}).$$

Luego de (2.5) se obtiene que

$$\begin{aligned}\tau(\tilde{\phi})^* = \Big((\psi^1)^H_{z\bar{z}} &- 2\Re(\bar{h}/2 + iu_z)J(\psi^1)^H_{\bar{z}}\,, \\ (\psi^2)^H_{z\bar{z}} &- 2\Re(\bar{h}/2 - iu_z)(J\psi^2)^H_{\bar{z}}\Big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Haciendo entonces uso de (1.10), (2.4) y (2.6), tras un largo y tedioso cálculo, se concluye:

$$\begin{aligned}\langle\tau(\tilde{\phi})^*, E_i\rangle &= \langle\tau(\tilde{\phi})^*, JE_i\rangle = 0,\ i = 1, 2,\\ \langle\tau(\tilde{\phi})^*, E_3\rangle &= \frac{e^{-2u}}{2}\Im(f_{\bar{z}}) - \frac{1}{2}\Im(h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}}h),\\ \langle\tau(\tilde{\phi})^*, JE_3\rangle &= \frac{e^{-2u}}{2}\Re(f_{\bar{z}}) + \frac{1}{2}\Re(h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}}h),\end{aligned}$$

donde $\Im$ representa parte imaginaria.

Pero de (2.3) se deduce que $\Re(h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}}h) = e^{-2u}\Re(f_{\bar{z}})$ e $\Im(h_{\bar{z}} - 2u_{\bar{z}}h) = -e^{-2u}\Im(f_{\bar{z}})$, por lo que utilizando (2.6) se tiene que

$$\tau(\tilde{\phi})^* = e^{-2u}\left(\Im(f_{\bar{z}})(\psi^2, -\psi^1) + \Re(f_{\bar{z}})J(\psi^2, -\psi^1)\right).$$

Por consiguiente, $\tau(\tilde{\phi}) = 0$ si y sólo si $f_{\overline{z}} = 0$, lo que prueba (b).

Tratamos finalmente el caso del plano hiperbólico complejo.

Aunque el espacio "twistor" de CH^2 ha sido menos estudiado, podemos realizar un planteamiento semejante al caso de CP^2 que describimos a continuación sin ahondar en los detalles.

Sea $B_2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in C^3 \,/\, |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 = 1\}$ y $\langle , \rangle$ la métrica usual de C^3_1, esto es, $\langle , \rangle = \Re(,)$, donde $(,)$ es la forma hermítica

$$(z, w) = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} - z_3\overline{w_3},$$

para cualesquiera $z, w \in C^3$.

Sea $M = \{(x, y) \in B_2 \times B_2 \,/\, \langle x, y\rangle = \langle x, Jy\rangle = 0\}$, donde J es la estructura compleja de C^3. Consideremos la proyección $\pi : C^3_1 - \{0\} \longrightarrow CH^2$ y definamos $A_2 = \pi(B_2)$.

El espacio "twistor" del plano hiperbólico complejo, que notaremos igualmente por $(\mathcal{Z}, \hat{g}, J)$, es definido por

$$\mathcal{Z} = \{([z], [w]) \in A_2 \times A_2 \,/\, z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} - z_3\overline{w_3} = 0\},$$

$$J = (J, -J),$$

con J la estructura compleja canónica en CH^2, y $\hat{g}$ es la métrica producto de las métricas inducidas en A_2 por π de la métrica $-\langle , \rangle$ en B_2. $(\mathcal{Z}, \hat{g}, J)$ es una variedad indefinida Einstein-Kaehler con signatura (compleja) uno (cf. [V]).

Análogamente, podemos definir una proyección natural

$$p : \mathcal{Z} \longrightarrow CH^2,$$

dada por

$$p([x], [y]) = [z],$$

donde $\langle z, x\rangle = \langle z, Jx\rangle = 0$ y $\langle z, y\rangle = \langle z, Jy\rangle = 0$, la cual se conoce como el *fibrado "twistor" de* CH^2.

El siguiente resultado, del que omitimos su demostración debido a que es —en esencia— bastante similar a la realizada para el caso del plano proyectivo complejo, es la versión del teorema 2 en este caso.

Teorema 3 *Sea* $\phi : \Sigma \longrightarrow CH^2$ *una inmersión lagrangiana de una superficie orientable* Σ *y* $\tilde{\phi} : \Sigma \longrightarrow \mathcal{Z}$ *su levantamiento "twistor" al espacio "twistor"* $(\mathcal{Z}, \hat{g}, J)$ *de* CH^2*. Entonces:*

(a) $\tilde{\phi} : (\Sigma, I) \longrightarrow (\mathcal{Z}, J)$ *es holomorfa si y sólo si la diferencial cúbica* Θ *asociada a* ϕ *es idénticamente nula.*

(b) $\tilde{\phi} : (\Sigma, g) \longrightarrow (\mathcal{Z}, \hat{g})$ *es armónica si y sólo si la forma de Maslov* ϖ *de* ϕ *es conforme (esto es,* Θ *es holomorfa).*

Friedrich [Fr] introdujo el concepto de inmersión "twistor" holomorfa para aquéllas inmersiones de una superficie orientada en una 4-variedad riemanniana orientada cuyo levantamiento "twistor" es una aplicación holomorfa (véase también [Fi]). Siguiendo esta nomenclatura y a la vista de los resultados de los teoremas 1, 2 y 3, adoptamos de ahora en adelante la terminología que introducimos en la siguiente definición.

Definición 5 *Sea* $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ *una inmersión lagrangiana de una superficie orientable* Σ *y sea* Θ *la diferencial cúbica naturalmente asociada a* ϕ *(definición 4 en §1.1). Diremos que* ϕ *es* twistor holomorfa *si* Θ *es idénticamente nula y diremos que* ϕ *es* twistor armónica *si* Θ *es holomorfa, esto es, la forma de Maslov asociada a* ϕ *es conforme.*

Nota 2 Cuando la variedad ambiente es el plano proyectivo complejo o el plano hiperbólico complejo, una inmersión lagrangiana twistor holomorfa (resp. twistor armónica) está caracterizada precisamente por la holomorfía (resp. la armonicidad) de su levantamiento twistor (teoremas 2 y 3).

Para el caso del plano Euclídeo complejo, el fibrado twistor es trivial, $\mathcal{Z} \equiv R^4 \times S^2_-$, y el levantamiento twistor en este caso viene dado por $\widetilde{\phi} = (\phi, \nu^-)$; por tanto, la "twistor-holomorfía" (resp. "twistor-armonicidad") de una inmersión lagrangiana en C^2 (véase definición 5) sólo supone, según el teorema 1, la holomorfía (resp. la armonicidad) de la parte vertical de su correspondiente levantamiento twistor. A tal respecto, comentar que por ejemplo en [Wo] se estudian ciertas propiedades relacionadas sólo con la parte vertical de determinadas aplicaciones ligadas a la aplicación de Gauss generalizada.

No obstante, mientras que el calificativo "twistor holomorfa" está plenamente extendido, preferiblemente utilizaremos el apelativo de inmersiones con forma de Maslov conforme en lugar de inmersiones "twistor armónicas".

El objetivo de la presente memoria se centra entonces en el estudio por un lado de las inmersiones lagrangianas twistor holomorfas en $\mathcal{N}(c)$ (que se realizará en el capítulo 3) y de las inmersiones lagrangianas con forma de

Maslov conforme —con especial hincapié en las compactas— en los planos euclídeo y proyectivo complejo (que abordaremos en los capítulos 4 y 5 respectivamente).

2.3 Estudio local.

En el §1.2 ofrecimos una descripción local de una inmersión lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ de una superficie orientable Σ, que concluía con las ecuaciones de Frenet de ϕ si $c = 0$ o del correspondiente levantamiento local horizontal ψ si $c = \pm 4$ (véase proposición 7 en §1.2).

En el siguiente resultado, completamos la citada descripción local de aquellas inmersiones lagrangianas objeto de nuestro estudio, que son las inmersiones lagrangianas con forma de Maslov conforme.

Proposición 8 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ una inmersión lagrangiana con forma de Maslov ϖ conforme de una superficie orientable Σ. Entonces, alrededor de cada punto donde el vector curvatura media H no se anula, existe una parametrización conforme de Σ, $(U, z = x + iy)$, y números reales η, μ con $\mu \geq 0$, tales que la métrica inducida g sobre U viene dada por $g = e^{2u(x)}|dz|^2$, siendo $|dz|^2$ la métrica euclídea sobre U y donde $u = u(x)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria*

$$u''(x) + \frac{c}{4}e^{2u(x)} + \frac{e^{4u(x)} - \mu^2 e^{2\eta x} e^{-4u(x)}}{2} = 0, \tag{2.7}$$

escribiéndose en tal coordenada la diferencial cúbica asociada a ϕ como $\Theta(z) = \mu e^{i\alpha} e^{\eta z}(dz)^3$, con $\alpha \in R$.

Demostración: Trabajamos en un abierto isotermo U con coordenada local compleja $z = x + iy$, siguiendo la notación usada en §1.1 y §1.2.

Ya que la forma de Maslov de ϕ es conforme, de la proposición 4 de §1.1 obtenemos que Θ (i.e. f) es holomorfa, y por tanto también lo es la función $k = e^{-2u}h$ teniendo en cuenta (2.3). Obsérvese que de (1.12) se sigue que $\mathcal{X}(z) = k(z)\partial_z$ es el campo de tipo (1,0) asociado al campo conforme JH, el cual es holomorfo al serlo la función $k(z)$.

Supongamos de ahora en adelante que H no tiene ceros sobre U. Ello supone, según (2.2), que k no se anula en U y por tanto podemos normalizar haciendo $k \equiv 1$. De hecho, $1/k(z)$ es una función holomorfa bien definida y sin ceros sobre U y si $w(z)$ es solución de $dw/dz = 1/k(z)$, puede tomarse w como buena coordenada sobre U. En este caso, $h(w) = e^{2u(w)}$ y renombrando w como z consideremos pues que $h(z) = e^{2u(z)}$.

Por otro lado, de (1.11) y (1.12), utilizando la definición de $\mathcal{X}$ dada en §1.1, se deduce que

$$h_z = 2\Omega(\nabla^{\perp}_{\partial_z} H, \phi_* \partial_{\overline{z}}),$$

donde Ω representa la dos-forma de Kaehler de $\mathcal{N}(c)$. Puesto que la forma de Maslov ϖ es cerrada (proposición 2 en §1.1), de la anterior igualdad se concluye fácilmente:

$$\Im(h_z) = 0. \tag{2.8}$$

Pero ya que ahora $h(z) = e^{2u(z)}$, (2.8) obliga entonces a que $\Im(u_z) = 0$, lo cual conduce a que la función u que determina la métrica inducida sobre u depende solamente de la variable x, esto es, $u = u(x)$.

A continuación, usando (1.4) y (2.2) junto con la ecuación de Gauss (1.5) en la igualdad $\triangle_0 u = -e^{2u}K$, siendo K la curvatura de Gauss de Σ y $\triangle_0$ el laplaciano de la métrica euclídea $|dz|^2$, se deduce que u satisface en general la ecuación diferencial

$$\triangle_0 u + (c/4)e^{2u} + (|h|^2 - |f|^2 e^{-4u})/2 = 0. \tag{2.9}$$

Pero puesto que u depende sólo de la variable x, resulta entonces que u satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$u'' + \frac{c}{4}e^{2u} + \frac{e^{4u} - |f|^2 e^{-4u}}{2} = 0. \tag{2.10}$$

Ahora bien, si U_0 denota el conjunto de los ceros de f en U, teniendo en cuenta que el logaritmo del módulo de una función holomorfa es una función armónica, obtenemos que $\log|f|$ es una función armónica en $U - U_0$. De (2.10) se sigue que $|f|_y = 0$ lo que combinado con el hecho que $(\log|f|)_{xx} + (\log|f|)_{yy} = 0$ conlleva entonces que $|f| = \mu e^{\eta x}$ en $U - U_0$, con $\eta \in R$ y $\mu > 0$. Puesto que f es continua en U, necesariamente $U_0 = U$ o $U_0 = \emptyset$, por lo que podemos concluir que $|f|^2 = \mu^2 e^{2\eta x}$, con η, $\mu \in R$, $\mu \geq 0$. Pero es fácil comprobar que la holomorfía de f obliga entonces a que $f(z) = \mu e^{i\alpha} e^{\eta z}$, $\alpha \in R$, lo que concluye la demostración.

Seguidamente procedemos a estudiar las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones de Frenet dadas en (1.10). Estas se reescriben matricialmente como

$$X_z = AX + BJX, \qquad X_{\overline{z}} = \hat{A}X + B^*JX, \tag{2.11}$$

donde

$$X = \begin{pmatrix} \psi_z \\ \psi_{\overline{z}} \\ \psi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2u_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ce^{2u}/8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2u_{\overline{z}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \overline{h} & fe^{-2u} & 0 \\ h & \overline{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo B^* la transpuesta conjugada de B.

De esta forma, no es complicado deducir que las condiciones de integrabilidad para (2.11), $X_{z\overline{z}} = X_{\overline{z}z}$, vienen dadas por las siguientes ecuaciones diferenciales matriciales

$$A_{\overline{z}} - \hat{A}_z + [B^*, B] = 0, \ B_{\overline{z}} - B^*_z + [A, B^*] + \left[B, \hat{A}\right] = 0,$$

las cuales es sencillo ver que equivalen a las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} 4u_{z\overline{z}} + \frac{c}{4}e^{2u} + \frac{|h|^2 - e^{-4u}|f|^2}{2} &= 0, \\ \Im(h_z) &= 0, \\ e^{-2u}\overline{f_{\overline{z}}} + 2u_{\overline{z}}h - h_{\overline{z}} &= 0. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Si suponemos ahora que ϕ tiene forma de Maslov conforme y que H nunca se anula, entonces razonando como en la demostración de la proposición 8 las matrices que determinan las ecuaciones de Frenet (2.11) se reducen a

$$A = \begin{pmatrix} u' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ce^{2u}/8 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u' & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \frac{e^{2u}}{2}\begin{pmatrix} 1 & \mu e^{-4u}e^{i\alpha}e^{\eta z} & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

así pues, resulta que en este contexto las ecuaciones de Frenet (2.11) se escriben finalmente como

$$\psi_{zz} = u'\psi_z + \frac{e^{2u}}{2}J\psi_z + \frac{\mu e^{i\alpha}e^{\eta z}e^{-2u}}{2}J\psi_{\overline{z}},$$

$$
\begin{aligned}
\text{(2.13)} \qquad \psi_{z\overline{z}} &= \frac{e^{2u}}{2} J\psi_z + \frac{e^{2u}}{2} J\psi_{\overline{z}} - \frac{c}{8} e^{2u}\psi \\
\psi_{\overline{z}\overline{z}} &= u'\psi_{\overline{z}} + \frac{\mu e^{-i\alpha} e^{\eta\overline{z}} e^{-2u}}{2} J\psi_z + \frac{e^{2u}}{2} J\psi_{\overline{z}},
\end{aligned}
$$

y además es claro que en esta situación las ecuaciones (2.12) equivalen a la e.d.o. (2.7), porque las dos últimas condiciones de integrabilidad se verifican por (2.8) y (2.3) respectivamente y la primera se corresponde con (2.9) la cual, como probamos en la demostración de la proposición 8, se reduce a (2.7) cuando ϕ tiene forma de Maslov conforme y H no tiene ceros; conseguimos de este modo una especie de recíproco de la proposición 8. Teniendo en cuenta que las soluciones de (2.7) están definidas en todo R por teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, podemos resumir todo lo anterior en el siguiente teorema.

Teorema 4 *Sean α, η y μ números reales con $\mu \geq 0$. Si $u : R \longrightarrow R$ es una solución de (2.7), fijadas condiciones iniciales $\psi(z_0), \psi_z(z_0), \psi_{\overline{z}}(z_0)$ compatibles con las condiciones $\psi = \overline{\psi}$, $\psi_{\overline{z}} = \overline{\psi_z}$, entonces integrando las ecuaciones (2.13) (y proyectando vía la fibración de Hopf Π si $c = \pm 4$) se obtiene una única inmersión lagrangiana conforme con forma de Maslov ϖ conforme,*

$$\phi_{u,\alpha} : (R^2, e^{2u(x)}|dz|^2) \longrightarrow \mathcal{N}(c),$$

($\phi_{u,\alpha} = \Pi \circ \psi$, si $c = \pm 4$; $\phi_{u,\alpha} = \psi$, si $c = 0$), donde $|dz|^2$ es la métrica euclídea, tal que la diferencial cúbica holomorfa asociada a $\phi_{u,\alpha}$ se escribe como $\Theta(z) = \mu e^{i\alpha} e^{\eta z}(dz)^3$.

Nota 3 Observamos que cuando $\mu > 0$ si variamos α, para cada solución de (2.7), podemos conseguir una familia uniparamétrica en $\alpha \in [0, 2\pi[$ de inmersiones lagrangianas. En este caso, $S(x, y) = (x, -y)$ es una isometría de $(R^2, e^{2u(x)}|dz|^2)$ y las inmersiones $\psi_{u,2\pi-\alpha} \circ S$ y $\psi_{u,\alpha}$ son congruentes ya que verifican exactamente las mismas ecuaciones de Frenet (2.13). Luego es suficiente considerar $\alpha \in [0, \pi]$.

Nota 4 En el sistema de coordenadas donde Θ se escribe como en el enunciado del teorema 4, el campo holomorfo $\mathcal{X}$ asociado al campo conforme JH, usando (1.12) se escribe como $\mathcal{X}(z) = \partial_z$, por lo que a partir de la definición de $\mathcal{X}$ (véase §1.1) resulta que JH puede escribirse como $JH = -\partial_x$. Usando entonces la proposición 3 de §1.1 y (1.2), se sigue que $\nabla^{\perp}_V H = -u' JV$ para cualquier vector tangente V en $(x, y) \in R^2$. Luego:

> La inmersión $\phi_{u,\alpha}$ del teorema 4 tiene vector curvatura media paralelo (no nulo) si y sólo si u es constante.

En tal caso, de la ecuación (2.7), necesariamente $\eta = 0$. Si además $c \geq 0$, también $\mu > 0$.

Chapter 3

Superficies lagrangianas "twistor" holomorfas.

Siguiendo las directrices del teorema 4 de §2.3, estudiamos en este capítulo las inmersiones lagrangianas twistor holomorfas en $\mathcal{N}(c)$, esto es aquellas cuya diferencial cúbica Θ es idénticamente nula, consiguiendo su completa clasificación y obteniendo explícitamente todos los ejemplos.

3.1 Integración de las ecuaciones.

Puesto que del teorema 4 de §2.3 la condición $\Theta \equiv 0$ equivale a que $\mu = 0$, en este caso la ecuación (2.7) adopta la forma

$$u'' + \frac{c}{4}e^{2u} + \frac{e^{4u}}{2} = 0, \ c \in \{4, 0, -4\}.$$

Por teoría cualitativa sobre ecuaciones diferenciales ordinarias se tiene asegurado que la ecuación anterior posee un punto crítico; así podemos considerar —sin pérdida de generalidad— sólo aquellas soluciones de dicha ecuación que verifiquen $u'(0) = 0$. Es un simple ejercicio comprobar que la solución del problema de valores iniciales:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
u'' + \frac{c}{4}e^{2u} + \frac{e^{4u}}{2} = 0, \ c \in \{4, 0, -4\}, \\[2ex]
e^{2u(0)} = a \Leftrightarrow u(0) = \log \sqrt{a}, \\[2ex]
u'(0) = 0,
\end{array}
\right.
\tag{3.1}
$$

viene dada por

$$
e^{2u(x)} = \left\{
\begin{array}{ll}
\frac{a(a+c)}{c/2+(a+c/2)\cosh(\sqrt{a(a+c)}x)}, & \text{si } c = 4 \text{ ó } c = 0 \text{ ó } c = -4 \text{ y } a > 4, \\[2ex]
\frac{a(4-a)}{2-(a-2)\cos(\sqrt{a(4-a)}x)}, & \text{si } c = -4 \text{ y } a < 4, \\[2ex]
\frac{4}{1+4x^2}, & \text{si } c = -4 \text{ y } a = 4.
\end{array}
\right.
\tag{3.2}
$$

Nota 5 Observemos que cuando $c = 0$ es claro que la solución general de (3.1) puede escribirse como $e^{2u(x)} = a/\cosh(ax) = (a/2)e^{2u_0(ax/2)}$, donde $e^{2u_0(x)} = 2/\cosh(2x)$ sería la solución con $a = 2$. Cabe esperar pues que en este caso las inmersiones asociadas a cada solución de (3.1) estén estrechamente relacionadas. De hecho, puede probarse directamente que la inmersión asociada a la solución $u(x)$ es la misma que la asociada a $u_0(x)$ —salvo una homotecia en R^4— verificando que ambas cumplen las mismas ecuaciones de Frenet, por lo que el teorema 4 de §2.3 sólo aporta una inmersión en el caso $c = 0$, hecho que posteriormente pondremos explícitamente de manifiesto al integrar las ecuaciones de Frenet de la inmersión.

Nótese también que si $c < 0$, aparecen distintos tipos de soluciones de (3.1) dependiendo de las condiciones iniciales fijadas. Si representamos por $u(x, a)$ la solución de (3.1), es sencillo verificar que cuando $c = -4$ y $a < 4$ se cumple que $u(x, 4-a) = u(x + \pi/\sqrt{a(4-a)}, a)$, por lo que es suficiente considerar —salvo reparametrizaciones— $a \in]0, 2]$ en lugar de $a \in]0, 4[$ en este caso. Justamente cuando $a = 2$ aparece la solución constante $u(x) = \log\sqrt{2}$.

Para proceder a la integración de las ecuaciones de Frenet (2.13), utilizaremos coordenadas cartesianas de modo que éstas se reescriben, teniendo en cuenta que en este caso $\mu = 0$, como:

$$
\psi_{xx} = u'\psi_x + \frac{3e^{2u}}{2}J\psi_x - \frac{c}{4}e^{2u}\psi,
$$

$$\begin{aligned}\psi_{xy} &= u'\psi_y + \frac{e^{2u}}{2}J\psi_y, \\ \psi_{yy} &= -u'\psi_x + \frac{e^{2u}}{2}J\psi_x - \frac{c}{4}e^{2u}\psi.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Recuérdese que en este caso (véase nota 3 en §2.3) no hay familia paramétrica para cada solución de (3.1).

Proposición 9 *En adecuados sistemas de referencia de C^2 ó C^3, la inmersión $\psi : R^2 \longrightarrow S^5(1)$ (si $c = 4$), $\psi : R^2 \longrightarrow C^2$ (si $c = 0$), $\psi : R^2 \longrightarrow H_1^5(-1)$ (si $c = -4$), dada en el teorema 4 de §2.3 y asociada a una solución $u(x,a)$ de (3.1) viene dada por:*

- *Si $c = 4$ ó $c = -4$ y $a > 4$,*

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = \frac{4}{c + (2a+c)\cosh(2Bx)} &\Big(\sqrt{a+c}\cosh(Bx)\cos(By), \\ &\sqrt{a}\,\mathrm{senh}(Bx)\cos(By), \sqrt{a+c}\cosh(Bx)\,\mathrm{sen}(By), \\ &\sqrt{a}\,\mathrm{senh}(Bx)\,\mathrm{sen}(By), B\cosh(2Bx), -\mathrm{senh}(2Bx)\Big);\end{aligned}$$

- *si $c = 0$ y $a = 2$ (véase nota 5),*

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{\cosh 2x} &(\cosh x\cos y, \mathrm{senh}\, x\cos y, \\ &\cosh x\,\mathrm{sen}\, y, \mathrm{senh}\, x\,\mathrm{sen}\, y);\end{aligned}$$

- *si $c = -4$ y $a \leq 2$ (véase nota 5),*

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = \frac{4}{4 - (2a-4)\cos(2Bx)} &(B\cos(2Bx), -\mathrm{sen}(2Bx), \\ &\sqrt{4-a}\cos(Bx)\cosh(By), \sqrt{a}\,\mathrm{sen}(Bx)\cosh(By), \\ &\sqrt{4-a}\cos(Bx)\,\mathrm{senh}(By), \sqrt{a}\,\mathrm{sen}(Bx)\,\mathrm{senh}(By)\Big),\end{aligned}$$

  siendo $B = \sqrt{|A|}$ con $A = a(a+c)/4$.

- *Y si $c = -4$ y $a = 4$,*

$$\begin{aligned}\psi(x,y) = \frac{1}{1+4x^2} &\Big(2y, 4xy, 2x - 4x^3 - 4xy^2, \\ &6x^2 + 2y^2, 1 + 6x^2 + 2y^2, 4x^3 + 4xy^2\Big).\end{aligned}$$

Demostración: De (3.1) y (3.3) es fácil ver que $\psi(-,y)$ satisface la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + A\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \tag{3.4}$$

con

$$A = \frac{a(a+c)}{4}.$$

Nótese que si $c = 4$ ó $c = 0$, entonces necesariamente $A > 0$, mientras que si $c = -4$, A puede ser positivo (si $a > 4$), cero (si $a = 4$) o negativo (si $a < 4$). Obsérvemos también que de (3.1) se tiene que la integral primera $u'^2 + (c/4)e^{2u} + e^{4u}/4$ es constante, y esa constante es precisamente A según las condiciones iniciales que hemos impuesto. De (3.4) se sigue:

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \cos(\sqrt{A}y)C_1(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{A}y)C_2(x) + C_3(x), \\ \cosh(\sqrt{-A}y)C_1(x) + \operatorname{senh}(\sqrt{-A}y)C_2(x) + C_3(x), \\ y^2C_1(x) + yC_2(x) + C_3(x), \end{cases} \tag{3.5}$$

según que $A > 0$, $A < 0$ y $A = 0$, respectivamente. para ciertas curvas $C_j(x)$, $j = 1,2,3$, en C^3 (resp. en C^2) si $c \neq 0$ (resp. si $c = 0$).

Es claro que si $A \neq 0$:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\psi_{yy}(x,0)/A, \\ C_2(x) &= \psi_y(x,0)/\sqrt{|A|}, \\ C_3(x) &= \psi(x,0) + \psi_{yy}(x,0)/A. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Usando (3.5) y (3.6) en las ecuaciones de Frenet (3.3) no es difícil comprobar que las curvas $C_j(x)$, $j = 1,2,3$, verifican las siguientes e.d.os.

$$\begin{aligned} C_i' &= u'C_i + \frac{e^{2u}}{2}JC_i, \ i = 1,2, \\ C_3' &= \frac{(c/4)e^{2u}}{(c/4)e^{2u} - A}(u'C_3 + \frac{e^{2u}}{2}JC_3). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando ahora que ψ es una inmersión conforme y, si $c = \pm 4$, además horizontal, se tiene:

$$\langle C_1(x), C_1(x)\rangle = e^{2u(x)}/A,$$

$$\begin{aligned}
(3.8)\qquad |C_2(x)|^2 &= e^{2u(x)}/|A|,\\
\langle C_3(x), C_3(x)\rangle &= 4/c - e^{2u(x)}/A,\\
\langle C_j, C_k\rangle &= \langle C_j, JC_k\rangle = 0,\ j \neq k,
\end{aligned}$$

con $j,k \in \{1,2,3\}$ (resp. $j,k \in \{1,2\}$) si $c = \pm 4$ (resp. si $c = 0$). De (3.8), se deduce que en el caso $c = -4$ si A es positivo (resp. negativo), C_3 (resp. C_1) es temporal y C_1 y C_2 (resp. C_2 y C_3) son espaciales. La integración de (3.7), usando (3.8), conduce a

$$(3.9)\qquad C_i(x) = \frac{e^{u(x)}}{\sqrt{|A|}} e^{iG(x)/2},\ i = 1,2,$$

en el plano complejo $\Pi_i = \text{gen}\{e_i = C_i(0)/|C_i(0)|, Je_i\}$[1], $i = 1,2$, siendo $G(x) = \int_0^x e^{2u(s)}ds$, y

$$(3.10)\qquad C_3(x) = \frac{\sqrt{A - (c/4)e^{2u(x)}}}{A} e^{i(\widehat{G}(x)+\pi)/2},\ \text{si } c = \pm 4,$$

en el plano complejo $\Pi_3 = \text{gen}\{e_3 = -JC_3(0)/|C_3(0)|, Je_3\}$, siendo $\widehat{G}(x) = \int_0^x (e^{4u(s)}/((c/4)e^{2u(s)} - A))ds$; y por supuesto:

$$(3.11)\qquad C_3(x) = C_3(0),\ \text{si } c = 0.$$

Entonces, tras un largo cálculo, que pasa por calcular $G(x)$ y $\widehat{G}(x)$ de los que se conoce explícitamente el integrando a partir de (3.2), utilizando (3.2), (3.9), (3.10) y (3.11), se prueba:

- Si $A > 0$, en los respectivos planos Π_j, $j = 1,2,3$:

  $$C_i(x) = \frac{4\left(\sqrt{a+c}\cosh(Bx) + i\sqrt{a}\,\text{senh}(Bx)\right)}{c + (2a+c)\cosh(2Bx)},\ i = 1,2,$$

  y

  $$C_3(x) = \frac{4\,(B\cosh(2Bx) - i\,\text{senh}(2Bx))}{c + (2a+c)\cosh(2Bx)},\ \text{si } c = \pm 4,$$

  y salvo una traslación en R^4, podemos tomar

  $$C_3(x) \equiv 0,\ \text{si } c = 0.$$

[1]Decir que $V = a + ib$ en el plano complejo $\Pi = \text{gen}\{v, Jv\}$ equivale a que V se expresa como $V = av + bJv$.

- Si $A < 0$, en los respectivos planos Π_j, $j = 1, 2, 3$:

$$C_i(x) = \frac{4\left(\sqrt{4-a}\cos(Bx) + i\sqrt{a}\,\mathrm{sen}(Bx)\right)}{4-(2a-4)\cos(2Bx)}, \quad i = 1, 2,$$

y

$$C_3(x) = \frac{4\left(B\cos(2Bx) - i\,\mathrm{sen}(2Bx)\right)}{4-(2a-4)\cos(2Bx)}.$$

En las anteriores expresiones, $B = \sqrt{|A|}$.

Llevando estas expresiones a (3.5) resultan las dadas para $\psi(x, y)$ en el enunciado de la proposición si $A \neq 0$. Hacemos notar que si $c = 0$ entonces $A = a/2$ y así pues, todas las inmersiones son homotéticas —salvo un cambio de coordenadas— como anunciamos en la nota 5. Eligiendo en este caso por comodidad la condición inicial $a = 2$ aparece la inmersión esperada.

Finalmente analicemos el caso $A = 0$. Ocurre entonces que C_1, C_2, C_3 ($\psi_{yy}(x, 0)/2$, $\psi_y(x, 0)$, $\psi(x, 0)$ respectivamente) no son ortogonales y además C_1 es isótropo. Para la integración en este caso definimos el siguiente vector auxiliar

$$v(x) = \psi_x(x, 0) - u'(x)\psi(x, 0) - \frac{e^{2u(x)}}{2} J\psi(x, 0).$$

En primer lugar, de (3.3) se sigue que $v' = e^{2u}Jv$ por lo que $v(x) = e^{iG(x)}$ en el plano gen$\{v(0), Jv(0)\}$. Ahora bien, resulta que C_1 puede expresarse en función de v y Jv mediante:

$$C_1 = (1/2)(-u'v + (e^{2u}/2)Jv)$$

y, por otro lado, precisamente v aparece como término independiente en la ecuación diferencial que verifica C_3, es decir:

$$C_3' = u'C_3 + (e^{2u}/2)JC_3 + v.$$

Si $u_1 = \psi_x(0, 0)/\sqrt{a}$, $u_2 = \psi_y(0, 0)/\sqrt{a}$, $u_3 = \psi(0, 0)$, después de un largo cálculo, utilizando (3.2), (3.5) y tras resolver la ecuación no homogénea para C_3, se concluye que en los planos complejos gen$\{u_j, Ju_j\}$, $j = 1, 2, 3$, la inmersión ψ en este caso se escribe como aparece en el enunciado de la proposición.

3.2 Ejemplos y clasificación.

A la vista de las expresiones explícitas de las inmersiones ψ que brinda la proposición 9, analizamos a continuación propiedades de simetría y periodicidad de las mismas que permitan conocer qué tipo de superficies lagrangianas se obtienen aplicando el teorema 4 de §2.3 en los tres ambientes modelos que estudiamos en esta memoria.

En primer lugar, las inmersiones ψ dadas en la proposición 9 claramente verifican:

$$\psi(x,y)=\begin{cases}\psi(x,y+2\pi/B), & \text{si } c>0 \text{ ó } c<0 \text{ y } a>4,\\[2ex] \psi(x,y+2\pi), & \text{si } c=0,\\[2ex] \psi(x+2\pi/B,y), & \text{si } c<0 \text{ y } a\le 2,\end{cases} \tag{3.12}$$

donde $B=\sqrt{|A|}$ con $A=a(a+c)/4$. Luego, vía las aplicaciones exponenciales $w=e^{Bz}:C\longrightarrow C^*$, $w=e^{z}:C\longrightarrow C^*$, $w=e^{iB\bar{z}}:C\longrightarrow C^*$, $z=x+iy$, respectivamente, las anteriores inducen inmersiones (también conformes) de C^* en $S^5(1)$, C^2 o $H_1^5(-1)$ según $c=4$, $c=0$ ó $c=-4$ respectivamente, que continuamos nombrando por ψ y que vienen dadas por las siguientes expresiones (donde consideramos, por notación, $w=u+iv$):

- Si $c=4$ ó si $c=-4$ y $a>4$,

$$\psi(w)=\frac{4}{c(|w|^2+1)^2+2a(|w|^4+1)}\Big(\sqrt{a+c}(|w|^2+1)u, \\ \sqrt{a}(|w|^2-1)u,\sqrt{a+c}(|w|^2+1)v,\sqrt{a}(|w|^2-1)v, \\ B(|w|^4+1),1-|w|^4\Big).$$

- Si $c=0$ y $a=2$ (véase nota 5),

$$\psi(w)=\frac{2}{\sqrt{a}(|w|^4+1)}\Big((|w|^2+1)u,(|w|^2-1)u, \\ (|w|^2+1)v,(|w|^2-1)v\Big).$$

- Si $c=-4$ y $a\le 2$ (véase nota 5),

$$\psi(w)=\frac{1}{|w|^2-(a-2)(u^2-v^2)/2}\Big(B(u^2-v^2)+2uvi, \\ (|w|^2-1)(\sqrt{4-a}u+i\sqrt{a}v)/2,(|w|^2+1)(\sqrt{4-a}u+i\sqrt{a}v)/2\Big).$$

En los dos primeros casos ($c = 4$; $c = -4$ y $a > 4$; $c = 0$) es fácil comprobar que las inmersiones ψ pueden ser definidas para $z = 0$ y ∞, y en consecuencia, a través de la proyección estereográfica $w = u + iv \mapsto (x, y, z) = \left(\frac{2u}{1+|w|^2}, \frac{2v}{1+|w|^2}, \frac{|w|^2-1}{1+|w|^2}\right)$, definen inmersiones de la esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en $S^5(1)$, $H_1^5(-1)$ y C^2 que notaremos también por ψ. En el último caso ($c = -4$, $a \leq 2$) esta extensión no es posible. Así:

- Si $c = 4$, $\psi : S^2 \longrightarrow S^5(1)$ ó si $c = -4$ y $a > 4$, $\psi : S^2 \longrightarrow H_1^5(-1)$ viene dada por

$$\psi(x, y, z) = \frac{2}{c + a(1 + z^2)} \Big(\sqrt{a + c}\, x, \sqrt{a}\, xz,$$
$$\sqrt{a + c}\, y, \sqrt{a}\, yz, 2z, (c/|c|)\sqrt{a(a + c)}\, (1 + z^2)\Big).$$

- Si $c = 0$ (y $a = 2$), $\psi : S^2 \longrightarrow C^2$ viene dada por

$$\psi(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{1 + z^2} (x, xz, y, yz).$$

- Si $c = -4$ y $a \leq 2$, $\psi : C^* \longrightarrow H_1^5(-1)$ viene dada por

$$\psi(z = x + iy) = \frac{1}{|z|^2 - (a - 2)(x^2 - y^2)/2} \Big(B(x^2 - y^2) + 2xyi,$$
$$(|z|^2 - 1)(\sqrt{4 - a}x + i\sqrt{a}y)/2, (|z|^2 + 1)(\sqrt{4 - a}x + i\sqrt{a}y)/2\Big),$$

Nota 6 Observemos que en el caso $c = 4$, ψ puede ser definida para $a = 0$ obteniéndose

$$\psi(x, y, z) = (x, 0, y, 0, z, 0)$$

que es el embebimiento totalmente geodésico horizontal de S^2 en $S^5(1)$ que es totalmente real en C^3.

Salvo en el caso $c = 0$, lo que obtenemos son familias uniparamétricas (dependiendo de la condición inicial $a = e^{2u(0)}$) de esferas y cilindros que para su mejor estudio parametrizamos del siguiente modo:

Si $c = 4$, definimos

$$t = \operatorname{senh}^{-1}(\sqrt{a}/2).$$

Así $\sqrt{a + 4} = 2 \cosh t$.

Si $c = -4$ y $a > 4$, definimos

$$t = \cosh^{-1}(\sqrt{a}/2).$$

Así $\sqrt{a-4} = 2\operatorname{senh} t$. Es obvio que en ambos casos t varía en $]0, \infty[$ pues $a > 0$.

Y si $c = -4$ y $a \leq 2$, definimos

$$s = \pi/4 - \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{a}/2).$$

Así $\sqrt{4-a} = 2\cos(\pi/4 - s)$. De este modo, puesto que en este caso $a \in]0, 2]$ (véase nota 5) s varía en $[0, \pi/4[$.

Destacamos en la siguiente definición las superficies encontradas por todo el anterior razonamiento y procedemos a nombrarlas de manera que podamos distinguirlas unas de otras en posteriores alusiones.

Definición 6 *Para cada $t \in [0, \infty[$, se define $\psi_t : S^2 \longrightarrow S^5(1)$ por*

$$\psi_t(x, y, z) = \frac{1}{c_t^2 + s_t^2 z^2}\Big(c_t x, s_t xz, c_t y, s_t yz, z, s_t c_t(1 + z^2)\Big)$$

con $c_t = \cosh t$ y $s_t = \operatorname{senh} t$.

Se define $\chi : S^2 \longrightarrow C^2$ por

$$\chi(x, y, z) = \frac{\sqrt{2}}{1 + z^2}\,(x, xz, y, yz)\,.$$

Para cada $t \in]0, \infty[$, se define $\widehat{\psi}_t : S^2 \longrightarrow H_1^5(-1)$ por

$$\widehat{\psi}_t(x, y, z) = \frac{1}{s_t^2 + c_t^2 z^2}\Big(s_t x, c_t xz, s_t y, c_t yz, z, -s_t c_t(1 + z^2)\Big)\,,$$

con $s_t = \operatorname{senh} t$ y $c_t = \cosh t$.

Para cada $s \in [0, \pi/4[$, se define $\Psi_s : C^* \longrightarrow H_1^5(-1)$ por

$$\Psi_s(z) = \frac{1}{|w(z)|^2}\left(\cos^2\! s\, z^2 - \operatorname{sen}^2\! s\, \overline{z}^2, \frac{|z|^2 - 1}{\sqrt{2}} w(z), \frac{|z|^2 + 1}{\sqrt{2}} w(z)\right),$$

donde $w(z) = \cos s\, z + \operatorname{sen} s\, \overline{z}$.

Se define $\eta : C \longrightarrow H_1^5(-1)$ por

$$\eta(x, y) = \frac{1}{1+4x^2}\left(2y, 4xy, 2x - 4x^3 - 4xy^2, 6x^2 + 2y^2, 1 + 6x^2 + 2y^2, 4x^3 + 4xy^2\right).$$

Nota 7 La inmersión χ es bien conocida y salvo deformaciones lagrangianas es la inmersión de Whitney (cf. [Wn]). La inmersión χ será también llamada la *inmersión de Whitney* e igualmente nos referiremos a $\chi(S^2)$ como la *esfera de Whitney.*

Utilizando de nuevo el teorema 4 de §2.3, al proyectar las inmersiones ψ_t, $\widehat{\psi}_t$, Ψ_s y η vía la fibración de Hopf correspondiente, éstas proporcionan ejemplos de superficies lagrangianas en los planos proyectivo e hiperbólico complejo. En el siguiente resultado se recogen las propiedades geométricas más interesantes de las mismas.

Proposición 10 (a) *Para $t \in [0, \infty[$, $\phi_t = \Pi \circ \psi_t : S^2 \longrightarrow CP^2$ satisface las siguientes propiedades:*

(a1) *ϕ_t es una inmersión lagrangiana twistor holomorfa.*

(a2) *Si $t \neq 0$, entonces $\phi_t : S^2 - \{N, S\} \longrightarrow CP^2$ es un embebimiento. ϕ_0 es la inmersión totalmente geodésica de S^2 en CP^2.*

(a3) *El área de $(S^2, \phi_t^* g)$ es $8\pi \arctan(\tanh t)/ \operatorname{senh} 2t$.*

(a4) *La curvatura de Gauss K_t de $(S^2, \phi_t^* g)$ verifica $1 \leq K_t \leq 1 + 2\operatorname{senh}^2 t$. Además, $K_t(x, y, z) = 1$ ($K_t(x, y, z) = 1 + 2\operatorname{senh}^2 t$ resp.) si y sólo si $z = \pm 1$ ($z = 0$ resp.).*

(a5) *ϕ_t es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2 inducido, via Π, por:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \ \beta \in R \right\}.$$

(b) *La inmersión de Whitney $\chi : S^2 \longrightarrow C^2$ satisface las siguientes propiedades:*

(b1) *χ es una inmersión lagrangiana twistor holomorfa.*

(b2) *$\chi : S^2 - \{N, S\} \longrightarrow C^2$ es un embebimiento.*

(b3) *El área de $(S^2, \chi^*\langle , \rangle)$ es $2\pi^2$.*

(b4) *La curvatura de Gauss K de $(S^2, \chi^*\langle , \rangle)$ verifica $0 \leq K \leq 1$. Además, $K(x, y, z) = 0$ (respectivamente $K(x, y, z) = 1$) si y sólo si $z = \pm 1$ (respectivamente $z = 0$).*

(b5) χ *es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de* C^2 *dado por:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} ;\ \beta \in R \right\}.$$

(c) *Para* $t \in]0,\infty[$, $\widehat{\phi}_t = \Pi \circ \widehat{\psi}_t : S^2 \longrightarrow CH^2$ *satisface las siguientes propiedades:*

(c1) $\widehat{\phi}_t$ *es una inmersión lagrangiana twistor holomorfa.*

(c2) *El área de* $(S^2, \widehat{\phi}_t^* g)$ *es* $8\pi \arctan(\coth t)/\operatorname{senh} 2t$.

(c3) *La curvatura de Gauss* K_t *de* $(S^2, \widehat{\phi}_t^* g)$ *verifica* $-1 \leq K_t \leq -1 + 2\cosh^2 t$. *Además,* $K_t(x,y,z) = -1$ *(respectivemente* $K_t(x,y,z) = -1 + 2\cosh^2 t$*) si y sólo si* $z = \pm 1$ *(respectivamente* $z = 0$*).*

(c4) $\widehat{\phi}_t$ *es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de* CH^2 *inducido, via* Π, *por:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta & 0 \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ \beta \in R \right\}.$$

(c5) $\widehat{\phi}_0$ *puede ser definida para* $z > 0$, *y así identificando el plano hiperbólico real* RH^2 *con* $\{(x,y,z) \in S^2 \,/\, z > 0\}$, *se tiene que* $\widehat{\phi}_0$ *define el embebimiento lagrangiano totalmente geodésico de* $RH^2(-1)$ *en* CH^2.

(d) *Para* $s \in [0,\pi/4[$, $\Phi_s = \Pi \circ \Psi_s : C^* \longrightarrow CH^2$ *satisface las siguientes propiedades:*

(d1) Φ_s *es un embebimiento conforme lagrangiano twistor holomorfo.*

(d2) $\Phi_s^* g$ *es una métrica completa.*

(d3) *La curvatura de Gauss* K_s *de* $(C^*, \Phi_s^* g)$ *verifica* $-\operatorname{sen} 2s \leq K_s \leq \operatorname{sen} 2s$. *Además,* $K_s(z) = -\operatorname{sen} 2s$ *(respectivamente* $K_s(z) = \operatorname{sen} 2s$*) si y sólo si* $\Im(z) = 0$, $\Re(z) < 0$ *(respectivamente* $\Im(z) = 0$, $\Re(z) > 0$*).*

(d4) $\int_{C^*} K_s \, dA_s = 0$.

(d5) $\Phi_{\pi/4}$ *puede ser definida para* $\Re(z) > 0$, *y así identificando el plano hiperbólico real* RH^2 *con el semiespacio* $\Re(z) > 0$, *se tiene que* $\Phi_{\pi/4}$ *define el embebimiento lagrangiano totalmente geodésico de* $RH^2(-1)$ *en* CH^2.

(e) $\Upsilon = \Pi \circ \eta : C \longrightarrow CH^2$ *satisface las siguientes propiedades:*

(e1) Υ *es un embebimiento conforme lagrangiano twistor holomorfo.*

(e2) $\Upsilon^* g$ *es una métrica completa.*

(e3) *La curvatura de Gauss de* $(C, \Upsilon^* g)$ *verifica* $-1 < K \leq 1$.

(e4) $\int_C K \, dA = 0$.

Nota 8 $\{\phi_t,\, t \geq 0\}$ es una deformación por esferas lagrangianas de la inmersión totalmente geodésica de S^2 en CP^2 que degenera en un punto cuando $t \to \infty$. ϕ_0 es la única superficie lagrangiana superminimal (esto es, minimal con $\Theta \equiv 0$) de CP^2.

La proposición 5 de §1.1 no descarta en principio la existencia de superficies lagrangianas compactas con género uno y forma cúbica Θ idénticamente nula en el plano hiperbólico complejo. Como consecuencia del apartado (d1) de la proposición 10, podemos afirmar que no existen toros lagrangianos con $\Theta \equiv 0$ en CH^2.

Demostración: En primer lugar, es claro que todos los ejemplos corresponden a inmersiones lagrangianas twistor holomorfas a partir del teorema 4 de §2.3 (recuérdese que tomábamos $\mu = 0$ al principio del capítulo).

Que Ψ_s y Υ son embebimientos, al igual que χ y ϕ_t cuando se restringen a la esfera menos los polos norte y sur, se sigue fácilmente de las expresiones explícitas de estas inmersiones dadas en la definición 6.

Para calcular el área de las esferas $\phi_t(S^2)$, $\chi(S^2)$, $\widehat{\phi}_t(S^2)$, si aplicamos el teorema del cambio de variable teniendo en cuenta que todas las inmersiones de las que proceden estas esferas son periódicas en la variable y (véase (3.12)), denotando por dA el elemento de área en cualquiera de éstas, se llega a $\int dA = (2\pi/B) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2u(x)} dx$, con $B = \sqrt{|A|}$. Las expresiones dadas en (a3), (b3) y (c2) se siguen del cálculo de las integrales impropias que aparecen en cada caso, de las que conocemos explícitamente el integrando a partir de (3.2) y teniendo presente la parametrización escogida en cada situación para la condición inicial de (3.1).

Para todos estos ejemplos, disponemos también de una expresión explícita en términos de funciones elementales de la función curvatura $K(x)$, dada por $K(x) = -e^{-2u(x)}u''(x) = c/4 + e^{2u(x)}/2$, donde $e^{2u(x)}$ viene dada en (3.2). Los puntos críticos de $K(x)$ coinciden pues con los puntos críticos de $u(x)$, lo que permite obtener las acotaciones dadas en (a4), (b4), (c3), (d3) y (e3). En el mismo sentido, es un ejercicio verificar que $\Phi_s(C^*)$ y $\Upsilon(C)$ tienen curvatura total cero.

La invariabilidad que aluden los apartados (a5) y (c4), que por supuesto han de interpretarse como que $F_\beta \circ \psi_t = \psi_t \circ f_\beta$ y $F_\beta \circ \widehat{\psi}_t = \widehat{\psi}_t \circ f_\beta$ donde F_β (resp. f_β) es la rotación de ángulo $\beta \in R$ en C^3 restringida a $S^5(1)$ o a $H_1^5(-1)$ (resp. en R^3 restringida a S^2), es clara a partir de las expresiones dadas para ψ_t y $\widehat{\psi}_t$ en la definición 6. De modo análogo ocurre para el apartado (b5) considerando ahora F_β la rotación de ángulo $\beta \in R$ en C^2.

El apartado (d2) se sigue a partir de que $\Phi_s^* g = \Psi_s^* <,>$, por lo que la completitud de la métrica $\Phi_s^* g$ se deduce fácilmente del hecho que la aplicación exponencial es conforme, de (3.12) y de la acotación $a \leq e^{2u(x)} \leq 4-a$ (véase (3.2)).

Para probar la completitud de la métrica $\Upsilon^* g$ es necesario y suficiente comprobar que la longitud $L(\gamma)$ de cualquier curva divergente, i.e. que se sale de todo compacto, $\gamma : [0, +\infty[\longrightarrow C$, $\gamma(0) = (0,0)$, es infinita. Para ello consideramos la sucesión exhaustiva de compactos $A_n = \{z \in C \,/\, |z| \leq n\}$, $n \in N$. Sea $t_n \in [0, +\infty[$ el número real no negativo que verifica $\gamma(t_n) \in \partial A_n$ y $t < t_n \Rightarrow \gamma(t) \in A_n$; esto es, t_n proporciona el primer instante que la curva γ atraviesa la frontera del compacto A_n, que está bien definido justamente por tratarse γ de una curva divergente. Entonces, denotando por $\|\,,\,\|$ (resp. por $|\,,\,|$) la norma respecto la métrica $\Upsilon^* g$ (resp. respecto la métrica euclídea), se tiene:

$$L(\gamma) = \int_0^{+\infty} \| \gamma'(t) \| \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \gamma'(t) \| \, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{2|\gamma'(t)|}{\sqrt{1 + 4\gamma_1(t)^2}} dt,$$

habiendo utilizado (3.2) en la última igualdad. Pero si $t \in [t_{n-1}, t_n]$, entonces $\gamma_1(t)^2 \leq |\gamma(t)|^2 \leq n^2$ pues $\gamma(t) \in A_n$. Por tanto:

$$L(\gamma) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 4n^2}} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\gamma'(t)| dt \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1 + 4n^2}},$$

debiéndose la última acotación a que $\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\gamma'(t)| dt$ es la longitud de γ entre $\gamma(t_{n-1})$ y $\gamma(t_n)$, que es por supuesto mayor que la distancia euclídea entre ambos puntos de la curva. De este modo, hemos acotado inferiormente la longitud de la curva γ por la suma de una serie que es divergente. Luego γ tiene longitud infinita como queríamos probar.

Comentar finalmente que cuando el plano hiperbólico real se identifica con el hemisferio norte (abierto) de la esfera unidad, es bien conocido que la inmersión $\Pi\left(\frac{1}{z}(0,x,0,y,1,0)\right) = \widehat{\phi}_0(x,y,z)$ representa un embebimiento lagrangiano totalmente geodésico de RH^2 en CH^2.

Lo mismo sucede con la inmersión $\Phi_{\pi/4}$ que lleva $z = x+iy$ en $\Pi\left(\frac{1}{x}(0, y, (|z|^2-1)/2, 0, (|\right.$ la cual también representa un embebimiento lagrangiano totalmente geodésico del plano hiperbólico real en el plano hiperbólico complejo, pero esta vez cuando se identifica RH^2 con el semiplano abierto $x > 0$ en el plano R^2.

Para finalizar este capítulo, y como recopilación de todo el estudio precedente que hemos realizado, clasificamos completamente las superficies lagrangianas twistor holomorfas, esto es, aquéllas con diferencial cúbica Θ idénticamente nula (definición 5 en§2.2).

Teorema 5 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow \mathcal{N}(c)$ una inmersión lagrangiana twistor holomorfa de una superficie orientable Σ en $\mathcal{N}(c)$ Entonces ϕ es totalmente geodésica o $\phi(\Sigma)$ es un abierto de $\phi_t(S^2)$ para algún $t \in]0,\infty[$, si $c = 4$; de $\chi(S^2)$, si $c = 0$; de $\widehat{\phi}_t(S^2)$ para algún $t \in]0,\infty[$, de $\Phi_s(C^*)$ para algún $s \in [0,\pi/4[$ o de $\Upsilon(C)$, si $c = -4$.*

Nota 9 Caso que ϕ sea totalmente geodésica, si $c = 4$, $\phi(\Sigma)$ será un abierto de $\phi_0(S^2)$; si $c = 0$, será un abierto de un plano lagrangiano de C^2. Y si $c = -4$, será un abierto del plano hiperbólico real.

Demostración: Puesto que $\Theta \equiv 0$ es holomorfa, el campo complejo $\mathcal{X}$ asociado al campo JH, también es holomorfo (cf. §1.1) sobre Σ. Si $\mathcal{X} \equiv 0$, de (1.4), (1.12) y (2.2) se sigue que ϕ es totalmente geodésica.

En caso contrario, $\mathcal{X}$ tiene sólo ceros aislados. Entonces consideramos $\Sigma' = \{p \in \Sigma : \mathcal{X}(p) \neq 0\}$, que es también conexo. Para cualquier $p \in \Sigma'$, sea $(U, z = x+iy)$ una coordenada local isoterma centrada en p, con U un abierto simplemente conexo de Σ'. Por la proposición 8 de §2.3 y el teorema 4 de §2.3 y la correspondiente integración de las ecuaciones (3.1) y (3.3) realizada en §3.1, si ψ es el levantamiento local horizontal de ϕ (véase proposición 7 en §1.2) que podemos considerar definido sobre U si $c = \pm 4$ y al mismo tiempo la propia inmersión ϕ si $c = 0$, se concluye que $\psi(U)$ es un abierto en $\psi_t(S^2-\{N,S\})$ si $c=4$, en $\chi(S^2-\{N,S\})$ si $c=0$, en $\widehat{\psi}_t(S^2-\{N,S\})$, $\Psi_s(C^*)$ o $\eta(C)$ si $c=-4$ (véase definición 6) donde N y S representan los polos norte y sur de S^2 respectivamente.

Puesto que Σ' es conexo, obtenemos que $\phi(\Sigma')$ es un abierto de $\phi_t(S^2-\{N,S\})$ si $c=4$, de $\chi(S^2-\{N,S\})$ si $c=0$, en $\widehat{\phi}_t(S^2-\{N,S\})$, $\Phi_s(C^*)$ o $\Upsilon(C)$ si $c=-4$, de donde se sigue el resultado..

Conjugando la proposición 6(b), la nota 7 y el teorema 5, se concluye el siguiente corolario.

Corolario 1 (i) *Si $\phi:\Sigma\longrightarrow CP^2$ es una inmersión lagrangiana de una esfera Σ, entonces:*

$$\int_\Sigma (|H|^2+2)dA \geq 8\pi$$

y se da la igualdad si y sólo si ϕ es congruente con ϕ_t para algún $t\in[0,\infty[$.

(ii) *Si $\phi:\Sigma\longrightarrow C^2$ es una inmersión lagrangiana de una esfera Σ, entonces:*

$$\int_\Sigma |H|^2 dA \geq 8\pi$$

y se da la igualdad si y sólo si ϕ es la inmersión de Whitney.

(iii) *Si $\phi:\Sigma\longrightarrow CH^2$ es una inmersión lagrangiana de una superficie compacta y orientable Σ de género γ, entonces:*

$$\int_\Sigma (|H|^2-2)dA \geq 8\pi(1-\gamma)$$

y se da la igualdad si y sólo si ϕ es congruente con $\widehat{\phi}_t$ para algún $t\in]0,\infty[$.

La desigualdad dada en (ii) es conocida y es la particularización en nuestro caso de la clásica desigualdad de Wintgen (cf. [Wi]). Puede consultarse [We], donde la esfera de Whitney es uno de los ejemplos allí descritos, para una extensión de la citada desigualdad.

Si hacemos uso de una consecuencia del Teorema de Riemann Roch que dice que una diferencial cúbica holomorfa sobre una esfera es necesariamente idénticamente nula (véase proposición 5 en §1.1), obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2 *Si $\phi:\Sigma\longrightarrow\mathcal{N}(c)$ es una inmersión lagrangiana con forma de Maslov ϖ conforme de una esfera Σ, entonces ϕ es congruente a ϕ_t, $t\in[0,\infty[$ si $c=4$; a χ si $c=0$; o a $\widehat{\phi}_t$, $t\in]0,\infty[$ si $c=-4$.*

Chapter 4

Superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme en el plano euclídeo complejo.

Al estudiar las superficies lagrangianas compactas y orientables con forma de Maslov conforme en el plano euclídeo complejo C^2, la proposi- ción 5 reduce las mismas a los casos de esferas y toros. En §3.2, el corolario 2 caracteriza la esfera de Whitney como la única superficie lagrangiana con forma de Maslov conforme en C^2 con género cero.

En el presente capítulo, procedemos a clasificar todos los toros lagrangianos con forma de Maslov conforme en el plano euclídeo complejo (en la línea de los trabajos de Bobenko [B] y Pinkall y Sterling [PS]) siguiendo de nuevo las directrices del teorema 4 de §2.3. En este caso, la ecuación diferencial (2.7) es la conocida ecuación senh-Gordon.

También clasificamos las superficies lagrangianas llanas con forma de Maslov conforme en C^2.

4.1 Clasificación de los toros lagrangianos con forma de Maslov conforme en el plano euclídeo complejo.

Para determinar todos los toros lagrangianos con forma de Maslov conforme en el plano euclídeo complejo, el siguiente resultado establece el camino a seguir para conseguir tal clasificación.

Proposición 11 *Para clasificar —salvo homotecias— todas las inmersiones lagrangianas con forma de Maslov conforme de un toro en C^2, es suficiente determinar qué inmersiones $\psi : R^2 \longrightarrow C^2$ dadas en el teorema 4 de §2.3 y asociadas a soluciones $u = u(x)$ del problema de valores iniciales*

$$u'' + \operatorname{senh} 4u = 0,\ a = e^{2u(0)},\ u'(0) = 0, \tag{4.1}$$

formado por la ecuación senh-Gordon y las condiciones iniciales dadas, son doblemente periódicas.

Demostración: Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme de un toro Σ en C^2. Sea $\psi : C \longrightarrow C^2$ el correspondiente levantamiento de ϕ al recubridor universal de Σ. Entonces es claro que ψ conserva el carácter lagrangiano y si $\widetilde{\varpi}$ denota la forma de Maslov de ψ, entonces $\widetilde{\varpi}$ es también conforme. Es decir, ψ es también una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme. Sean pues Θ y $\mathcal{X}$ la diferencial cúbica holomorfa y el campo holomorfo asociados a ψ (véase §1.1). Si $z = x + iy$ es la coordenada usual de C, al expresar Θ y $\mathcal{X}$ en este sistema de coordenadas, resulta que las funciones que los definen son funciones enteras, i.e. holomorfas sobre C, que están acotadas por proyectarse en una superficie compacta. Consecuentemente han de ser constantes. Resumiendo, podemos escribir $\Theta(z) = \rho e^{i\beta}(dz)^3$ y $\mathcal{X}(z) = \varrho e^{i\vartheta}\partial_z$, ρ, $\varrho \geq 0$, β, $\vartheta \in R$.

Analicemos la posible nulidad de Θ y $\mathcal{X}$. Si $\varrho = 0$, ψ es una inmersión minimal a partir de (1.12) y (2.2) y por tanto también ϕ lo será. Y si $\rho = 0$, denotando por $\widetilde{K}$ y $\widetilde{H}$ la curvatura de Gauss y la curvatura media de ψ, usando (1.4) junto con la ecuación de Gauss de ψ resulta que $\widetilde{K} = |\widetilde{H}|^2/2$. Por tanto, $K = |H|^2/2$, donde K y H representan la curvatura de Gauss y la curvatura media de ϕ. Aplicando entonces el Teorema de Gauss-Bonnet se concluye también en este caso que ϕ es una inmersión minimal de Σ en C^2, lo cual es imposible por la compacidad del toro Σ. Por consiguiente podemos asegurar que $\rho, \varrho > 0$.

Si cambiamos ahora la coordenada empleada en C de manera apropiada, podemos normalizar reescribiendo Θ y $\mathcal{X}$ como

$$\Theta(z) = \mu e^{i\alpha}(dz)^3,\ \mu > 0, \quad \text{y} \quad \mathcal{X}(z) = \partial_z.$$

De esta forma, para clasificar todas las inmersiones lagrangianas con forma de Maslov conforme de un toro en C^2, necesitamos conocer qué inmersiones de las dadas en el teorema 4 de §2.3 para $\eta = 0$ son doblemente periódicas.

Pero es más, empleando los argumentos usuales observamos que, salvo homotecias en $C^2 \equiv R^4$ y cambios de coordenadas en C, en este caso ($\eta = 0$) es suficiente estudiar las inmersiones asociadas a la llamada ecuación senh-Gordon. En concreto, se verifica que si $\widehat{\psi}$ es la inmersión asociada a una solución de la ecuación

$$u'' + \frac{e^{4u} - \mu^2 e^{-4u}}{2} = 0,$$

entonces es fácil comprobar que $\widehat{\psi}(z)$ es congruente con $\mu^{-1/4}\psi(\mu^{1/2}z)$, siendo ψ la inmersión asociada a la función $u(\mu^{-1/2}x) - \log \mu^{1/4}$ solución de

$$u'' + \operatorname{senh} 4u = 0.$$

Finalmente, es bien conocido que las soluciones de la ecuación diferencial de (4.1) son siempre periódicas, por lo que podemos, sin pérdida de generalidad, restringirnos a considerar sólo aquellas soluciones de la ecuación diferencial de (4.1) que satisfagan la condición inicial $u'(0) = 0$.

En el Apéndice de esta memoria se procede a la integración explícita de (4.1) en términos de las llamadas funciones elípticas de Jacobi. Sin perjuicio de ello, recogemos en el siguiente resultado aquellas propiedades de las mismas útiles para nuestro propósito.

Lema 1 *Sea $u = u(x,a)$ la solución del problema de valores iniciales (4.1). Entonces:*

(a) *u es una función par, i.e. $u(-x) = u(x)$, $\forall\, x \in R$.*

(b) *Existe $T > 0$, dependiendo de la condición inicial a, verificando $\forall\, x \in R$:*

$$u(x + 2T) = u(x),\ u(T - x) = u(T + x) = -u(x). \tag{4.2}$$

(c) *Si $x \in R$, se tiene:*

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = kT,\ k \in Z. \tag{4.3}$$

(d) *La única solución constante de (4.1) es la idénticamente nula, $u \equiv 0$, que se corresponde con la condición inicial $a = 1$.*

(e) *Si F y G son las funciones dadas por*

$$F(x) = \int_0^x e^{2u(s)} ds \text{ y } G(x) = \int_0^x e^{-2u(s)} ds,$$

entonces $\forall\, x \in R$ se cumple:

$$F(x + 2T) = F(x) + \pi,\ G(x + 2T) = G(x) + \pi. \tag{4.4}$$

Demostración: En la proposición 15(a) del Apéndice, se resuelve explícitamente el p.v.i. (4.1). Entonces, (b) se sigue de (A.4), (c) a partir de (A.9) y (A.7) junto con (b) y para (e) es necesario utilizar (A.10) y (A.7).

Nota 10 De (4.2) se sigue que $u(x, 1/a) = u(x + T, a)$. Por tanto, si $\psi_{a,\alpha}$ es la inmersión asociada a $u(x, a)$, salvo reparametrizaciones de las inmersiones, concretamente $\psi_{a,\alpha}(x, y) = \psi_{1/a,\alpha}(x + T, y)$, es suficiente considerar $a \geq 1$, o equivalentemente $u(0) \geq 0$.

Una vez controladas las soluciones de (4.1) el paso siguiente es analizar las ecuaciones de Frenet de las inmersiones $\psi : R^2 \longrightarrow C^2$ que aludíamos en la proposición 11. En este caso, a partir de (2.13), éstas se escriben empleando coordenadas cartesianas como sigue:

$$\begin{aligned}
\psi_{xx} &= u'\psi_x + \frac{3e^{2u} + \cos\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_x - \frac{\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_y, \\
\psi_{xy} &= u'\psi_y - \frac{\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_x + \frac{e^{2u} - \cos\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_y, \\
\psi_{yy} &= -u'\psi_x + \frac{e^{2u} - \cos\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_x + \frac{\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_y.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

En el siguiente teorema respondemos la cuestión planteada en la proposición 11, así como describimos las inmersiones asociadas a las soluciones de (4.1), mediante las curvas coordenadas $y \mapsto \psi(x, y)$.

Teorema 6 *Sea $\psi_{a,\alpha} : (R^2, e^{2u(x,a)}|dz|^2) \longrightarrow C^2$ la inmersión lagrangiana con forma de Maslov ϖ conforme asociada a una solución $u = u(x,a)$ de (4.1) (véase proposición 11) con $a \geq 1$ (véase nota 10) y $\alpha \in [0,\pi]$ (véase nota 3 en §2.3).*

Si $a = 1$, esto es, u es la solución constante $u \equiv 0$, entonces en apropiados sistemas de referencia de C^2, las inmersiones $\psi_{1,\alpha} : (R^2, |dz|^2) \longrightarrow C^2$ vienen dadas por:

$$\psi_{1,0}(x,y) = (e^{2ix}/2, y)$$

y

$$\psi_{1,\alpha}(x,y) = \\ = \frac{1}{2}\left(\sec(\alpha/4)e^{i(2\cos^2(\alpha/4)x - \operatorname{sen}(\alpha/2)y)}, \csc(\alpha/4)e^{i(2\operatorname{sen}^2(\alpha/4)x + \operatorname{sen}(\alpha/2)y)}\right),$$

con $\alpha \neq 0$.

Si $a > 1$, en apropiados sistemas de referencia de C^2, se tiene:

$$\psi_{a,0}(x,y) = \frac{\sqrt{2}ae^{u(x)}}{a^2-1}\left(e^{i(\int_0^x \operatorname{senh} 2u(s)ds - \frac{a^2-1}{2a}y)}, e^{i(\int_0^x \operatorname{senh} 2u(s)ds + \frac{a^2-1}{2a}y)}\right),$$

$$\psi_{a,\pi}(x,y) = \frac{\sqrt{2}ae^{u(x)}}{a^2+1}\left(e^{i(\int_0^x \cosh 2u(s)ds - \frac{a^2+1}{2a}y)}, e^{i(\int_0^x \cosh 2u(s)ds + \frac{a^2+1}{2a}y)}\right),$$

En cualquier caso, las inmersiones $\psi_{a,\alpha}$, con $(a,\alpha) \neq (1,0)$, satisfacen las siguientes propiedades:

(a) *Para cualesquiera $x, y \in R$,*

$$\psi_{a,\alpha}(x, y + 2\pi/l) = \psi_{a,\alpha}(x,y)$$

donde l es la constante positiva (dependiendo de a y α) dada por $l = (1/2)(a^2 - 2\cos\alpha + 1/a^2)^{1/2}$.

(b) *Las curvas $\{c_x : y \mapsto \psi_{a,\alpha}(x,y),\ x \in R\}$ son circunferencias en C^2 de radio $e^{u(x,a)}/l$ centradas en un mismo punto P_0.*

(c) *Existe un número real τ (dependiendo de a y α), $0 \leq \tau \leq 2\pi/l$, tal que*

$$\psi_{a,\alpha}(x + 2T, y + \tau) = \psi_{a,\alpha}(x,y),$$

donde $2T$ es el período de u (véase lema 1).

(d) *Las circunferencias* c_x *y* $c_{x'}$*, con* $x, x' \in (0, 2T)$*,* $x \neq x'$*, no se cortan entre sí.*

Nota 11 Nótese en primer lugar que $l = 0$ si y sólo si $(a, \alpha) = (1, 0)$, esto es, $u \equiv 0$ y $\alpha = 0$.

Por otro lado, si $a = 1$ entonces $l = \mathrm{sen}(\alpha/2)$; mientras que si $a > 1$, cuando $\alpha = 0$ entonces $l = (a^2 - 1)/2a$ y cuando $\alpha = \pi$ entonces $l = (a^2 + 1)/2a$.

En segundo lugar es claro que, si $\alpha \neq 0$, entonces:

$$\psi_{1,\alpha}(x + \pi, y + \pi/\tan(\alpha/4)) = \psi_{1,\alpha}(x, y),\ \forall (x, y) \in R^2,$$

lo que viene a identificar en el caso constante el vector $(2T, \tau)$ con $(\pi, \pi/\tan(\alpha/4)$. En el Apéndice queda recogido precisamente que el semiperíodo $T = T(a)$ de la solución $u(x, a)$ converge a $\pi/2$ cuando se hace tender a a 1.

Por otra parte, utilizando que $\int_0^x \mathrm{senh}\, 2u(s)ds = (F(x) - G(x))/2$ y $\int_0^x \cosh 2u(s)ds = (F(x) + G(x))/2$ (véase lema 1) de (4.4) se pone de manifiesto que

$$\psi_{a,0}(x + 2T, y) = \psi_{a,0}(x, y),\ \psi_{a,\pi}(x + 2T, y + 2a\pi/(a^2 + 1) = \psi_{a,\pi}(x, y),$$

$\forall\, (x, y) \in R^2$, En otras palabras, $\tau(a, 0) = 0$ y $\tau(a, \pi) = 2a\pi/(a^2 + 1)$.

Finalmente, comentar que la inmersión

$$\psi_{1,\pi}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i(x-y)}, e^{i(x+y)} \right),$$

corresponde al toro de Clifford.

Demostración: El caso singular $(a, \alpha) = (1, 0)$ es claro, puesto que en este caso las ecuaciones de Frenet (4.5) de la inmersión $\psi = \psi_{1,0}$ se reducen sencillamente a

$$\psi_{xx} = 2J\psi_x,\ \psi_{xy} = \psi_{yy} = 0;$$

así, de las dos últimas ecuaciones se deduce que $\psi(x, y) = y\psi_y(0, 0) + \psi(x, 0)$, y la integración de la primera conduce a que $\psi(x, 0)$ es una circunferencia en el plano generado por $\psi_x(0, 0)$ y $J\psi_x(0, 0)$, concretamente:

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{2} \left(\mathrm{sen}\, 2x\psi_x(0, 0) - \cos 2xJ\psi_x(0, 0) \right).$$

Expresando ψ en la referencia ortogonal de $C^2 \equiv R^4$ dada por $e_1 = -J\psi_x(0,0)$, Je_1, $e_2 = \psi_y(0,0)$, Je_2 se obtiene la expresión explícita dada para $\psi_{1,0}$ en el enunciado del teorema.

En los demás casos, es decir, si $(a,\alpha) \neq (1,0)$, para simplificar la notación, introducimos las siguientes funciones:

$$b = \frac{e^{2u} - \cos\alpha\, e^{-2u}}{2},\ c = \frac{3e^{2u} + \cos\alpha\, e^{-2u}}{2},\ d = \frac{\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2}. \tag{4.6}$$

Así, las ecuaciones (4.5) para $\psi = \psi_{a,\alpha}$ se reescriben como

$$\begin{array}{rcl} \psi_{xx} & = & u'\psi_x + cJ\psi_x - dJ\psi_y, \\ \psi_{xy} & = & u'\psi_y - dJ\psi_x + bJ\psi_y, \\ \psi_{yy} & = & -u'\psi_x + bJ\psi_x + dJ\psi_y. \end{array} \tag{4.7}$$

Usando (4.1) y (4.6) es fácil comprobar que la derivada de $u'^2 + b^2 + d^2$ es cero, y por tanto:

$$u'^2 + b^2 + d^2 = (b^2 + d^2)(0) = l^2. \tag{4.8}$$

Haciendo uso de (4.1), (4.6), (4.7) y (4.8) se prueba que $\psi_{yy} + l^2\psi$ no depende ni de la variable x ni de la variable y. Así pues, $\psi_{yy}(x,y) + l^2\psi(x,y) \equiv P_0$, $\forall\,(x,y) \in R^2$. Salvo una traslación en R^4, podemos tomar $P_0 \equiv 0$ y de este modo

$$\psi_{yy} + l^2\psi = 0.$$

Integrando esta ecuación llegamos a

$$\psi(x,y) = \cos(ly)C_1(x) + \operatorname{sen}(ly)C_2(x), \tag{4.9}$$

para ciertas curvas $C_i(x)$, $i = 1,2$, en C^2, lo que prueba (a).

Obsérvese que

$$C_1(x) = \psi(x,0) = -\psi_{yy}(x,0)/l^2, \quad C_2(x) = \psi_y(x,0)/l. \tag{4.10}$$

De (4.7), (4.8) y (4.10) se sigue que

$$|C_i(x)|^2 = e^{2u(x)}/l^2,\ i = 1,2,\ \langle C_1(x), C_2(x)\rangle = 0, \tag{4.11}$$

lo que demuestra (b).

Para probar (c), estudiamos la variación de los planos que contienen las circunferencias $\{c_x,\, x \in R\}$. Para ello consideramos la curva

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : R \longrightarrow G_2(4) \equiv S^2_+ \times S^2_-$$

de modo que $\gamma(x)$ es el plano $\Pi(x)$ que contiene la circunferencia c_x. Para estudiar esta curva, seguimos la descripción realizada en §2.1 acerca de $G_2(4)$.

Tomamos $\mathcal{B}(x) = \{u_1(x), u_2(x), u_3(x), u_4(x)\},\ x \in R$, la base ortonormal de C^2 dada por

$$u_1(x) = \frac{\psi_x(x,0)}{e^{u(x)}}, u_2(x) = Ju_1(x), u_3(x) = \frac{\psi_y(x,0)}{e^{u(x)}}, u_4(x) = Ju_3(x)$$

Notamos $u_i \equiv u_i(0),\ 1 \leq i \leq 4$. De (4.9) se sigue que

$$\begin{aligned} v_1(x) = \frac{C_1(x)}{|C_1(x)|} &= (1/l)(u'u_1(x) - bu_2(x) - du_4(x)), \\ v_2(x) = \frac{C_2(x)}{|C_2(x)|} &= u_3(x), \end{aligned}$$

es una base ortonormal del plano $\Pi(x)$. Definiendo

$$\begin{aligned} v_3(x) &= \frac{(u'^2+b^2)^{-1/2}}{l}\Big(u'du_1(x) - bdu_2(x) + (u'^2+b^2)u_4(x)\Big), \\ v_4(x) &= (u'^2+b^2)^{-1/2}\left(bu_1(x) + u'u_2(x)\right), \end{aligned}$$

(de (4.3) y (4.8) puede comprobarse la buena definición de ambos) resulta que para cualquier $x \in R$, $\{v_1(x), v_2(x), v_3(x), v_4(x)\}$ es también una base ortonormal de C^2 que define la misma orientación que $\mathcal{B}(0)$. Con ello, estamos en condiciones de expresar la curva γ como sigue:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \frac{1}{2}\left(v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4\right)(x), \\ \gamma_2(x) &= \frac{1}{2}\left(v_1 \wedge v_2 - v_3 \wedge v_4\right)(x). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Para estudiar ambas componentes de γ, y teniendo en mente la descripción de $G_2(4)$, representaremos por $E_1^{\pm}(x)$, $E_2^{\pm}(x)$, $E_3^{\pm}(x)$ las bases ortonormales de los subespacios $\bigwedge^2_+(x)$ (resp. $\bigwedge^2_-(x)$) de $\bigwedge^2 R^4$ dadas por

$$\begin{aligned} E_1^{\pm}(x) &= \frac{1}{2}(u_1 \wedge u_2 \pm u_3 \wedge u_4)(x), \\ E_2^{\pm}(x) &= \frac{1}{2}(u_1 \wedge u_3 \pm u_4 \wedge u_2)(x), \\ E_3^{\pm}(x) &= \frac{1}{2}(u_1 \wedge u_4 \pm u_2 \wedge u_3)(x). \end{aligned}$$

De este modo, γ_1 y γ_2 se reescriben como

$$\gamma_1(x) = \frac{1}{l}(dE_1^+ + u'E_2^+ - bE_3^+)(x), \tag{4.13}$$
$$\gamma_2(x) = \frac{1}{l}(-dE_1^- + u'E_2^- + bE_3^-)(x).$$

De (4.7) se deduce que E_1^+, E_2^+ E_3^+ (resp. E_1^-, E_2^-, E_3^-) verifican los siguientes sistemas de e.d.o.s:

$$\frac{d}{dx}E_1^+ = 0, \quad \frac{d}{dx}E_2^+ = (b+c)E_3^+, \quad \frac{d}{dx}E_3^+ = -(b+c)E_2^+$$

(resp.

$$\frac{d}{dx}E_1^- = 2dE_2^-, \quad \frac{d}{dx}E_2^- = -2dE_1^- + (b-c)E_3^-, \quad \frac{d}{dx}E_3^- = (c-b)E_2^-).$$

Utilizando entonces (4.1), (4.6), (4.13) y las anteriores ecuaciones, sin más que derivar se comprueba que $\gamma_2' \equiv 0$ y se determinan E_1^+, E_2^+ E_3^+, de modo que

$$\gamma_2(x) = \gamma_2(0) = (1/l)\left(-d(0)E_1^-(0) + b(0)E_3^-(0)\right) \tag{4.14}$$

y

$$\gamma_1(x) = (1/l)\Big[(u'\cos k + b\,\mathrm{sen}\, k)(x)E_2^+(0) + \tag{4.15}$$
$$+ d(x)E_1^+(0) + (u'\,\mathrm{sen}\, k - b\cos k)(x)E_3^+(0)\Big],$$

donde $k(x) = \int_0^x (b(s) + c(s))ds$.

Según (4.6) y el lema 1 se tiene que $k(x) = 2F(x)$ y aplicando (4.4), $k(x + 2T) = k(x) + 2\pi$. Además u', b y d son periódicas de período $2T$ a partir de (4.6) y (4.2). De todo ello, se concluye que $\gamma_1(x + 2T) = \gamma_1(x)$, $\forall x \in R$. Puesto que de (4.14) γ_2 es constante, hemos demostrado que para cualquier $x \in R$, $\Pi(x)$ y $\Pi(x + 2T)$ son planos coincidentes. Hacemos notar que en el presente razonamiento, $2T$ es el mínimo período para $\Pi(x)$.

Recopilando, se tiene que c_x y c_{x+2T} son dos circunferencias coplanarias con el mismo centro y mismo radio (apartado (b)) ya que $2T$ es el período de u. Entonces necesariamente son reparametrización una de la otra, esto es, existe $\tau(x)$, $0 \leq \tau(x) \leq 2\pi/l$, tal que $c_x(y) = c_{x+2T}(y + \tau(x))$, lo que se traduce en $\psi(x + 2T, y + \tau(x)) = \psi(x, y)$. Derivando respecto a x en esta igualdad y calculando el módulo del resultado, se tiene que $\tau'(x) = 0$ por lo que $\tau(x)$ es constante, lo que finaliza la demostración de (c) por este camino.

Para probar (d), supongamos que las circunferencias c_x y $c_{x'}$, $x, x' \in (0, 2T)$ se cortan entre sí. Entonces han de tener el mismo radio puesto que están centradas en el mismo punto, según (b). Por tanto, también a partir de (b), se deduce que $u(x) = u(x')$. De (4.2), la única posibilidad es entonces que $x' = 2T - x$ con $x \in (0, T)$. Pero además los planos $\Pi(x)$ y $\Pi(2T - x)$ tienen una intersección no trivial por cortarse las circunferencias c_x y c_{2T-x} en ellos contenidas. Puesto que $\{v_1(x), v_2(x)\}$ es una base ortonormal de $\Pi(x)$ (véase anteriormente), se tiene que $q(x) = v_1(x) \wedge v_2(x) \wedge v_1(2T-x) \wedge v_2(2T-x) = 0$. De (4.12) y (4.14), para cualquier $x \in R$, se obtiene que

$$\Pi(x) \equiv (\gamma_1(x), \gamma_2(x)) = (v_1(x) \wedge v_2(x) - \gamma_2(0), \gamma_2(0)). \tag{4.16}$$

Por (4.14), (4.15) y (4.16) llegamos a

$$\begin{aligned} v_1(x) \wedge v_2(x) = (1/l) \Big[& d(x) E_1^+(0) + (u' \cos k + b \operatorname{sen} k)(x) E_2^+(0) \\ & + (u' \operatorname{sen} k - b \cos k)(x) E_3^+(0) - d(0) E_1^-(0) + b(0) E_3^-(0) \Big] . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Utilizando (4.2), (4.4) y (4.6) concluimos que $u'(2T - x) = -u'(x)$, $b(2T - x) = b(x)$, $d(2T - x) = d(x)$ y $k(2T - x) = 2\pi - k(x)$. Así, podemos escribir $q(x)$ explícitamente a partir de (4.8) y (4.17):

$$q(x) = (1/l^2)(u' \cos k + b \operatorname{sen} k)^2(x)\, u_1 \wedge u_2 \wedge u_3 \wedge u_4.$$

El hecho que $q(x) = 0$ se traduce entonces, según (4.17), en que $v_1(x) \wedge v_2(x) = v_1(2T - x) \wedge v_2(2T - x)$ y por consiguiente $\Pi(x) = \Pi(2T - x)$, por (4.16). Pero esto último es imposible pues $x \in (0, B)$ y ya hicimos observar que $2T$ es el mínimo período posible para $\Pi(x)$. Este razonamiento finaliza esta demostración de (d).

La demostración de los apartados (c) y (d) del teorema 6 se ha realizado estudiando la curva de planos que contienen las circunferencias $\{c_x; x \in R\}$ descritas en el apartado (b) del teorema. No obstante, somos capaces de obtener explícitamente las inmersiones $\psi_{a,\alpha}$ mediante integración de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales para las curvas C_i, $i = 1, 2$, obtenidos manipulando las ecuaciones de Frenet (4.7). Sin embargo, aunque resulte extraño, es bastante complicado comprobar por este proceso (c) y (d) pues las mencionadas expresiones explícitas para $\psi_{a,\alpha}$ envuelven complicadas integrales elípticas de las que es difícil obtener la información que precisamos.

A título ilustrativo, ofrecemos a continuación la obtención de las expresiones aludidas para $\psi_{a,0}$ y $\psi_{a,\pi}$ en diferentes sistemas de referencia de $C^2 \equiv R^4$.

Retomando la demostración del teorema una vez obtenido (4.11), utilizando (4.10) y (4.7), se obtiene:

$$\langle C_1(x), JC_2(x)\rangle = -d(x)e^{2u(x)}/l^3. \tag{4.18}$$

Por otro lado, también de (4.7) se deducen las e.d.os que verifican las curvas C_i, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} C_1' &= u'C_1 + bJC_1 + (d/l)JC_2', \\ C_2' &= u'C_2 + bJC_2 - (d/l)JC_1'. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Consideremos ahora que $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$; entonces $d \equiv 0$ según (4.6). En este caso, C_1 y C_2 verifican la misma ecuación diferencial (véase (4.19)) que una vez integrada conduce a

$$C_i(x) = e^{u(x)-u(0)}e^{iB_{0,\pi}(x)}C_i(0), \tag{4.20}$$

donde $B_{0,\pi}(x) = \int_0^x b(s)ds = (F(x) \mp G(x))/2$ (véase (4.6) y lema 1) según que $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$ respectivamente. Pero es más, en estos dos casos, $\{e_1 = C_1(0)/|C_1(0)|, e_2 = Je_1, e_3 = C_2(0)/|C_2(0)|, e_4 = Je_3\}$ constituye, utilizando (4.18), una referencia ortonormal de R^4. En la misma, teniendo en cuenta (4.9), (4.11) y (4.20), resulta que las inmersiones $\psi_{a;0,\pi} : R^2 \longrightarrow R^4$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{a;0,\pi}(x, y) = \frac{e^{u(x)}}{l}\, &(\cos ly \cos B_{0,\pi}(x), \cos ly \,\mathrm{sen}\, B_{0,\pi}(x), \\ &\mathrm{sen}\, ly \cos B_{0,\pi}(x), \mathrm{sen}\, ly \,\mathrm{sen}\, B_{0,\pi}(x)) \,. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nótese que si reexpresamos $\psi_{a;0,\pi} : R^2 \longrightarrow C^2$ en la referencia $\overline{e_1} = (e_1 + e_4)/\sqrt{2}$, $\overline{e_2} = J\overline{e_1}$, $\overline{e_3} = (e_1 - e_4)/\sqrt{2}$, $\overline{e_4} = J\overline{e_3}$, es posible reescribir (4.21) tal y como aparece en el enunciado del teorema, lo que permite probar sencillamente (d) si $\alpha = 0, \pi$.

En el caso en que u es la solución constante, $u \equiv 0$, no es excesivamente complicado obtener explícitamente las inmersiones $\psi_{1,\alpha}$, $\alpha \neq 0$, correspondientes a la solución constante. Si retomamos la demostración del teorema en (4.19), utilizando que ahora $e^{2u} \equiv a = 1$ en (4.6), llegaríamos a

$$\begin{aligned} C_1' &= \mathrm{sen}^2(\alpha/2)JC_1 + \cos(\alpha/2)JC_2', \\ C_2' &= \mathrm{sen}^2(\alpha/2)JC_2 - \cos(\alpha/2)JC_1', \end{aligned}$$

de donde se sigue:

$$C_1' = JC_1 - \cos(\alpha/2)C_2,$$
$$C_2' = JC_2 + \cos(\alpha/2)C_1,$$

cuya integración, una vez llevada a (4.9), conduce a la expresión dada en el enunciado del teorema para $\psi_{1,\alpha}$, si $\alpha \neq 0$.

Los apartados (a) y (c) del anterior teorema ponen de manifiesto que todas las inmersiones $\psi_{a,\alpha}$ son doblemente periódicas, salvo para el caso $(a,\alpha) = (1,0)$, en el que la inmersión $\psi_{1,0}$ define un cilindro circular recto en un cierto hiperplano de C^2. Luego proporcionan ejemplos de toros lagrangianos con forma de Maslov conforme, todos ellos embebidos en C^2 según el apartado (d) del citado teorema. Para ellos, teniendo en cuenta la nota 11, adoptaremos la nomenclatura que se recoge en el resultado siguiente.

Corolario 3 *Sea $u = u(x,a)$ una solución del problema de valores iniciales (4.1) con $a \geq 1$ y sea $\alpha \in [0,\pi]$ tal que $(a,\alpha) \neq (1,0)$. Sea $\Lambda_{a,\alpha}$ el retículo en C dado por:*

$$\Lambda_{a,\alpha} = \text{gen}\{(0, 2\pi/l), (2T, \tau)\},$$

si $a > 1$, y

$$\Lambda_{1,\alpha} = \text{gen}\{(0, 2\pi/\operatorname{sen}(\alpha/2)), (\pi, \pi/\tan(\alpha/4))\},$$

$T_{a,\alpha}$ el toro $C/\Lambda_{a,\alpha}$ y $\phi_{a,\alpha} : T_{a,\alpha} \longrightarrow C^2$ la inmersión inducida por $\psi_{a,\alpha}$. Entonces $\phi_{a,\alpha}$ es un embebimiento lagrangiano con forma de Maslov conforme de $T_{a,\alpha}$ en C^2.

De la nota 11, se sigue que el retículo de los toros $T_{a,0}$ es rectangular, concretamente $\Lambda_{a,0} = \text{gen}\{(0, 4a\pi/(a^2-1)), (2T, 0)\}$, mientras que para los toros $T_{a,\pi}$ viene dado por $\Lambda_{a,\pi} = \text{gen}\{(0, 4a\pi/(a^2+1)), (2T, 2a\pi/(a^2+1))\}$.

De este modo, por la proposición 11 y el teorema 6, hemos clasificado todas las superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme de una superficie compacta de género uno en C^2.

Corolario 4 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme de un toro Σ en el plano euclídeo complejo. Entonces ϕ es congruente con $\phi_{a,\alpha}$ para algún $a \geq 1$ y algún $\alpha \in [0,\pi]$, excepto para $(a,\alpha) = (1,0)$.*

En §2.1 hicimos notar que una inmersión lagrangiana con vector curvatura media H paralelo en C^2 o bien es minimal o JH es un campo paralelo sin ceros en la superficie. Apoyándonos en este resultado, podemos concluir la siguiente clasificación.

Corolario 5 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow C^2$ una inmersión lagrangiana con vector curvatura media paralelo de una superficie compacta y orientable Σ en el plano euclídeo complejo. Entonces ϕ es congruente con $\phi_{1,\alpha}$ para algún $\alpha \in]0, \pi]$.*

Finalizamos este epígrafe recogiendo en la siguiente proposición las propiedades más destacadas de los toros $T_{a,\alpha}$ descritos en el corolario 3

Proposición 12 (i) *El área $A(a, \alpha)$ de $(T_{a,\alpha}, \phi^*_{a,\alpha}\langle,\rangle)$ es $2\pi^2/l$, con $l = (1/2)(a^2 - 2\cos\alpha + 1/a^2)^{1/2}$ (véase teorema 6).*

(ii) *Se verifica que $\int_{T_{a,\alpha}} |H|^2 dA_{a,\alpha} \geq 2\pi^2$ y la igualdad se da si y sólo si $T_{a,\alpha}$ es el toro de Clifford.*

(iii) *$\phi_{a,\alpha}$ es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de C^2 dado por:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} ;\ \beta \in R \right\}.$$

(iv) *Los embebimientos $\phi_{1,\alpha}$, $\alpha \neq 0$, definen una familia de toros llanos embebidos en una hiperesfera de C^2 de radio $r(\alpha) = 1/\operatorname{sen}(\alpha/2)$, con curvatura media constante $\widehat{H}(\alpha) = \cos(\alpha/2)$.*

$\{\phi_{1,\alpha},\ 0 \leq \alpha \leq \pi\}$ constituye una deformación del cilindro circular recto al toro de Clifford (nota 11) mediante superficies lagrangianas con curvatura media paralela.

Demostración: Para probar (i), si dA denota el elemento de área del toro $(T_{a,\alpha}, \phi^*_{a,\alpha}\langle,\rangle)$, aplicando el teorema del cambio de variable, teniendo en cuenta el retículo $\Lambda_{a,\alpha}$ de $T_{a,\alpha}$ (corolario 3), resulta del lema 1:

$$\int dA = (2\pi/l) \int_0^{2T} e^{2u(x)} dx = (2\pi/l) F(2T),$$

y entonces (i) es una consecuencia directa de (4.4).

De (1.12) y (2.2), puesto que el campo holomorfo asociado a la inmersión $\phi_{a,\alpha}$ se escribe como $\mathcal{X}(z) = \partial_z$ (nota 4 en §2.3), se sigue que $|H|^2 = e^{2u}$, por lo que razonando como en el cálculo del área de los toros, se tiene:

$$\int_{T_{a,\alpha}} |H|^2 dA_{a,\alpha} = \frac{2\pi}{l} \int_0^{2T} e^{4u(x)} dx. \tag{4.22}$$

Sea entonces $E = E(p^2)$ la integral elíptica completa de segunda clase (véase Apéndice §A.1), con $p^2 = 1 - a^{-4}$. Haciendo uso de la proposición 15(a), (A.11) y (A.13), podemos calcular $\int_0^{2T} e^{4u} dx = 2aE$. Luego, llevado a (4.22) resulta que $\int_{T_{a,\alpha}} |H|^2 dA_{a,\alpha} = (4\pi a/l)E$. Así podemos estimar que

$$\int_{T_{a,\alpha}} |H|^2 dA_{a,\alpha} \geq \int_{T_{a,\pi}} |H|^2 dA_{a,\pi} = \frac{8\pi E}{1 + \sqrt{1-p^2}}. \tag{4.23}$$

Pero resulta que $\pi/4 \leq E/(1 + \sqrt{1-p^2})$ y la igualdad se da si y sólo si $p^2 = 0$, esto es, $u \equiv 0$ (véase (A.1) en el Apéndice). Usando esta desigualdad en (4.23) se prueba (ii).

El apartado (iii) ha de interpretarse como que $F_\beta \circ \phi_{a,\alpha} = \phi_{a,\alpha} \circ f_\beta$ donde F_β (resp. f_β) es la rotación de ángulo $\beta \in R$ en C^2 (resp. la rotación de ángulo $\beta \in R$ en R^2).

El apartado (iv) es un ejercicio a partir de la expresión explícita de $\psi_{1,\alpha}$ que aporta el teorema 6.

4.2 Superficies lagrangianas llanas.

Para completar el estudio de las superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme de C^2, abordamos el caso restante, esto es, las inmersiones $\phi_{u,\alpha} : (C, e^{2u(x)}|dz|^2) \longrightarrow C^2$ dadas en el teorema 4 de §2.3 asociadas a soluciones de la ecuación

$$u'' + \frac{e^{4u} - \mu^2 e^{2\eta x} e^{-4u}}{2} = 0, \tag{4.24}$$

con $\mu > 0$ y $\eta \neq 0$.

El siguiente resultado pone de manifiesto que en este caso no hay familia uniparamétrica de inmersiones lagrangianas asociadas a cada solución de (4.24) y que ésta puede simplificarse en cierta medida.

Lema 2 *Existe una única inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme asociada a cada solución de (4.24) y —salvo homotecias— es suficiente considerar las inmersiones* $\phi_u : (C, e^{2u(x)}|dz|^2) \longrightarrow C^2$ *asociadas a soluciones* $u = u(x)$ *de la ecuación*

$$u'' + \frac{e^{4u} - e^{8\epsilon x}e^{-4u}}{2} = 0,\ \epsilon = \operatorname{sgn}\eta = \pm 1. \tag{4.25}$$

Demostración: En primer lugar se tiene que la inmersión $\phi_{u,\alpha}(z)$ verifica a partir de (2.13) las siguientes ecuaciones de Frenet:

$$\begin{aligned} \phi_{zz} &= u'\phi_z + \frac{e^{2u}}{2}J\phi_z + \frac{\mu e^{i\alpha}e^{\eta z}e^{-2u}}{2}J\phi_{\bar{z}}, \\ \phi_{z\bar{z}} &= \frac{e^{2u}}{2}J\phi_z + \frac{e^{2u}}{2}J\phi_{\bar{z}}, \end{aligned}$$

que son las mismas que satisface la inmersión $\phi_{u,0}$ cuando se escriben éstas utilizando $z + (\alpha/\eta)i$ como coordenada en C.

Además, si $\hat{\phi}(z)$ es la inmersión asociada a una solución $\hat{u}$ de (4.24), entonces no es difícil comprobar que es congruente con la inmersión

$$\frac{2}{\sqrt{|\eta|}}\phi\left(\frac{|\eta|z + \epsilon\log(16\mu/\eta^2)}{4}\right),$$

siendo ϕ la inmersión asociada a la función

$$u(x) = \hat{u}(4x/|\eta| - (1/\eta)\log(16\mu/\eta^2))$$

solución de (4.25), sin más que asegurándonos que las ecuaciones de Frenet que ambas inmersiones satisfacen coinciden. Por tanto, salvo homotecias y cambios de coordenadas en C, podemos restringirnos a estudiar las inmersiones asociadas a soluciones de (4.25).

Nota 12 Cabe preguntarse qué relación guardan las inmersiones asociadas a soluciones de (4.25) según que $\epsilon = 1$ ó $\epsilon = -1$, es decir, según que $\eta > 0$ ó $\eta < 0$.

Para dar respuesta a ello, observemos en primer lugar que u es solución de (4.25) para $\epsilon = 1$ si y sólo si $v(x) = u(-x)$ es solución de (4.25) para $\epsilon = -1$.

Además, si consideramos la inmersión $\phi_v(z)$ y comparamos las ecuaciones de Frenet queésta verifica con las que satisface la inmersión ϕ_u escrita en la coordenada $-z$, nos encontramos que dichas ecuaciones serían exactamente las mismas sin más que cambiar la estructura compleja inicial J en C^2 por su opuesta $-J$.

En este sentido, podemos pues —sin pérdida de generalidad— asumir de ahora en adelante que $\epsilon = 1$.

No podemos aspirar a resolver (4.25) —ya con $\epsilon = 1$— completamente (de [Sm] puede extraerse algún resultado parcial sobre el comportamiento asintótico de las soluciones de (4.25)); pero sí hacemos notar que $u(x) = x$ es la *única* solución de (4.25) para $\epsilon = 1$ que proporciona una inmersión ϕ de C con una métrica inducida *llana*, $e^{2x}|dz|^2$, en C^2.

Considerando $\alpha = 0$ (véase lema 2) y teniendo en cuenta que la diferencial cúbica asociada a ϕ es ahora $\Theta(z) = e^{4z}(dz)^3$, concluimos que las ecuaciones de Frenet para ϕ escritas en coordenadas cartesianas vienen dadas por

$$
\begin{array}{rcl}
\phi_{xx} & = & \phi_x + \frac{e^{2x}}{2}(3+\cos 4y)J\phi_x - \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen} 4yJ\phi_y, \\
\phi_{xy} & = & \phi_y - \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen} 4yJ\phi_x + \frac{e^{2x}}{2}(1-\cos 4y)J\phi_y, \\
\phi_{yy} & = & -\phi_x + \frac{e^{2x}}{2}(1-\cos 4y)J\phi_x + \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sen} 4yJ\phi_y.
\end{array} \tag{4.26}
$$

Si realizamos el cambio de variable $w = e^z = e^{x+iy} = u+iv$, nos encontramos con que (4.26) se reescriben sencillamente como

$$
\begin{array}{rcl}
\phi_{uu} & = & 2uJ\phi_u, \\
\phi_{uv} & = & 0, \\
\phi_{vv} & = & 2vJ\phi_v,
\end{array}
$$

cuya integración, una vez deshecho el anterior cambio de variable, conduce a

$$\phi(x,y) = (C(e^x\cos y), S(e^x\cos y), C(e^x\operatorname{sen} y), S(e^x\operatorname{sen} y)),$$

donde C y S son las integrales de Fresnel definidas por $C(a) = \int_0^a \cos t^2 dt$ y $S(a) = \int_0^a \operatorname{sen} t^2 dt$ (cf. [AS]).

Por ser ϕ simplemente periódica de período 2π, i.e. $\phi(x,y+2\pi) = \phi(x,y)$, $\forall (x,y) \in R^2$, sucede que ϕ induce una inmersión de C^* en C^2 via la aplicación exponencial $e^z : C \longrightarrow C^*$ que puede extenderse sin problema regularmente a 0. Puesto que es claro que la métrica inducida es la euclídea (recuérdese que $e^{2x}|dz|^2$ es la métrica inducida por ϕ sobre C) hemos obtenido una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme

$$\Phi : (C, |dz^2|) \longrightarrow C^2$$

dada por

$$\Phi(x, y) = (C(x), S(x), C(y), S(y)) \, .$$

Φ viene descrita como producto de un par de curvas del tipo $\beta(s) = (C(s), S(s))$, cuya curvatura es fácil comprobar que verifica $k(s) = 2s$; una curva con tal propiedad se denomina clotoide o espiral de Cornu (cf. [St]), la cual aparece en la teoría de la difracción.

Así pues, podemos describir Φ como el producto de dos "espirales de Cornu" y es sencillo también verificar que es un embebimiento.

Este último estudio nos permite clasificar las inmersiones lagrangianas con forma de Maslov conforme de superficies llanas en C^2. Usando la proposición 8 de §2.3, el teorema 4 de §2.3, el corolario 3 y la proposición 12(iv), concluimos el siguiente resultado.

Teorema 7 *Una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme de una superficie orientable llana en C^2 es localmente congruente a $\phi_{1,\alpha}$ para algún $\alpha \in [0, \pi]$, o a la "inmersión de Cornu" Φ, o a un plano.*

Chapter 5

Superficies lagrangianas con forma de Maslov conforme en el plano proyectivo complejo.

De la proposición 5 de §1.1 se sigue que una superficie lagrangiana compacta con forma de Maslov conforme en CP^2 es de género menor o igual que uno o minimal. Clasificadas en §3.2 las esferas con forma de Maslov conforme en CP^2 (corolario 2), procedemos en este capítulo a clasificar todos los toros (no minimales) con forma de Maslov conforme en el plano proyectivo complejo, y en cuanto al caso minimal, aportamos una nueva familia de toros minimales lagrangianos caracterizados por su invariabilidad por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2.

5.1 Superficies lagrangianas minimales en el plano proyectivo complejo.

El siguiente resultado, debido a Yau [Y] y Naitoh-Takeuchi [NT], es el más importante conocido acerca de superficies lagrangianas minimales compactas en CP^2, pues caracteriza los dos únicos ejemplos hasta ahora conocidos.

> Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana minimal de una superficie compacta orientable.

a) Si Σ tiene género cero, entonces Σ es totalmente geodésica y es la inmersión estándar de $S^2(1)$ en CP^2.

b) Si el género de Σ es no nulo y la curvatura de Gauss de Σ es no negativa o no positiva, entonces necesariamente Σ es llana y ϕ es el toro de Clifford generalizado.

Nota 13 El toro de Clifford generalizado es el cociente por la fibración de Hopf del siguiente embebimiento isométrico:

$$S^1(1/\sqrt{3}) \times S^1(1/\sqrt{3}) \times S^1(1/\sqrt{3}) \hookrightarrow S^5(1) \subset C^3.$$

En esta memoria vamos a construir una nueva familia de toros minimales lagrangianos cuya caracterización requiere la siguiente definición.

Definición 7 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión de una superficie Σ en CP^2 y $G = \{F_t \,/\, t \in R\}$ un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2. Se dice que ϕ es* invariante por G*, o abreviadamente* G-invariante*, si para cada punto $p \in \Sigma$ existe un número real positivo $\epsilon > 0$ tal que $F_t(\phi(p)) \subset \phi(\Sigma)$ para $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.*

Para una inmersión minimal lagrangiana $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ se tiene, por supuesto, que la diferencial cúbica $\Theta(z) = f(z)dz^3$ asociada a ϕ (véase definición 4 en §1.1) es holomorfa; en una coordenada local isoterma $z = x+iy$ donde la métrica inducida g se escriba como $g = e^{2u}|dz|^2$, a partir de (1.4) y utilizando la ecuación de Gauss de ϕ (1.5), se tiene:

$$|f|^2 = e^{6u}|\sigma|^2 = 2e^{6u}(1-K),$$

donde σ es la segunda forma fundamental de la superficie y K su curvatura de Gauss. Por tanto, Θ se anula en este caso justamente en los ceros de σ. Tales puntos los llamaremos *puntos geodésicos* de ahora en adelante. Para una inmersión lagrangiana minimal sucede que el campo $\mathcal{X}$ asociado (véase (1.12) y (2.2)) es idénticamente nulo.

Comenzamos probando que las superficies lagrangianas minimales (no totalmente geodésicas) G-invariantes poseen un comportamiento local completamente similar a las superficies lagrangianas (no minimales) con forma de Maslov conforme en el sentido que recogía la proposición 8 de §2.3.

Proposición 13 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana minimal (no totalmente geodésica) de una superficie orientable Σ invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2. Entonces, alrededor de cada punto, existe una parametrización conforme de Σ, $(U, z = x + iy)$, y un número real $\alpha \in [0, 2\pi[$ tales que la métrica inducida g sobre Σ y la diferencial cúbica holomorfa Θ asociada a ϕ vienen dadas por $g = e^{2u(x)}|dz|^2$ y $\Theta(z) = \sqrt{2}e^{i\alpha}dz^3$ respectivamente, donde $u = u(x)$ es una solución de la ecuación diferencial ordinaria*

$$u'' + e^{2u} - e^{-4u} = 0. \tag{5.1}$$

En particular, ϕ no tiene puntos geodésicos.

Demostración: Sea Y el campo de Killing sobre CP^2 asociado al grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas $\{F_t\}$ por el que ϕ es invariante. Entonces, para cualquier punto $p \in \Sigma$, si $T_p\Sigma$ denota el plano tangente de Σ en p, $\mathcal{Y}_{\phi(p)} = \frac{d}{dt}|_0 F_t(\phi(p)) \in \phi_*(T_p\Sigma)$, ya que $F_t(\phi(p))$ es una curva en $\phi(\Sigma)$. Por tanto, Y induce un campo X sobre Σ, que sigue siendo de Killing respecto a la métrica inducida, y que está ϕ-relacionado con Y, esto es, $\phi_*(X_p) = Y_{\phi(p)}$. Si $\{\varphi_t\}$ es el grupo uniparamétrico local de isometrías de (Σ, g) asociado al campo X, se verifica que

$$\varphi_t^* C = C, \tag{5.2}$$

donde C es la forma trilineal definida en (1.1).

Por otro lado, $g^* = |\sigma|^{2/3} g$ es una métrica sobre Σ cuyos puntos de ramificación son los puntos geodésicos de ϕ. Por tanto, g^* es una métrica regular sobre $\Sigma' = \{p \in \Sigma \,/\, \sigma_p \neq 0\}$. En [Y] se prueba que

$$\triangle \log |\sigma|^{1/3} = K, \tag{5.3}$$

donde $\triangle$ es el laplaciano de la métrica g. Por tanto, (Σ', g^*) es una superficie llana.

Hacemos notar que si $\tilde{u}$ es la función sobre Σ' definida por $\tilde{u} = -\log |\sigma|^{1/3}$, usando (5.3) y la ecuación de Gauss de ϕ, $K = 1 - |\sigma|^2/2$, resulta que $\tilde{u}$ satisface la ecuación de Toda afín ([BPW])

$$\triangle^* \tilde{u} + e^{2\tilde{u}} - \frac{e^{-4\tilde{u}}}{2} = 0, \tag{5.4}$$

donde $\triangle^*$ es el laplaciano de la métrica g^*.

Una consecuencia de (5.2) es que $|\sigma|^2$ es constante a lo largo de las curvas integrales del campo X y por consiguiente $X(|\sigma|^2) = 0$. Esto implica que X es también un campo de Killing sobre (Σ', g^*) puesto que $g^* = |\sigma|^{2/3} g$ en Σ'.

A continuación vamos a comprobar que $\{p \in \Sigma \,/\, X_p \neq 0\} = \Sigma'$. En primer lugar, si p es un punto geodésico de ϕ, de (5.2) se sigue $\varphi_t(p)$, $|t| < \epsilon$, son también puntos geodésicos y puesto que éstos son aislados obtenemos que $\varphi_t(p) = p$, lo que implica que $X_p = 0$. Recíprocamente, si $X_p = 0$ y p no es un punto geodésico entonces $\varphi_t(p) = p$, para t en un cierto intervalo. Usando esto en (5.2) no es difícil probar que $(d\varphi_t)_p = Id$. Luego $\varphi_t = Id$ y entonces $F_t \circ \phi = \phi$ en un entorno W de p. Esto supone que ϕ es totalmente geodésica sobre W, lo que contradice las hipótesis de la proposición.

Ya que se ha probado que X no tiene ceros en Σ', por los argumentos usuales puede probarse que para cada punto $p \in \Sigma'$ existe una coordenada local compleja $(U, z = x + iy)$, $U \subset \Sigma'$, alrededor de p tal que $X = \partial/\partial y$. Así, de (5.2) obtenemos que la función holomorfa $f(z)$ que define la diferencial cúbica Θ asociada a ϕ es constante sobre las curvas $x =$constante y entonces es constante sobre U. Luego existen números reales μ, α, $\mu > 0$, tal que $\Theta(z) = \mu e^{i\alpha} dz^3$. Pero ahora, de la expresión de $|f|^2$, se sigue que $\mu^{2/3} = e^{2u}|\sigma|^{2/3}$ y puesto que $X = \partial/\partial y$ y $X(|\sigma|^2) = 0$, tenemos que $u(z) = u(x)$. También obtenemos que $g^* = \mu^{2/3}|dz|^2$, lo que implica que $g^*(X,X) = \mu^{2/3}$ y por tanto concluimos que $g^*(X,X)$ es una función constante sobre Σ' puesto que Σ' es una superficie conexa. Al normalizar tomamos $g^*(X,X) = \sqrt[9]{2}$. Entonces $g^* = \sqrt[3]{2}|dz|^2$, $u = \tilde{u} + (1/6)\log 2$ y de (5.4) concluímos que $u = u(x)$ verifica la e.d.o. (5.1). Observamos también que la diferencial cúbica Θ se escribe ahora como $\Theta(z) = \sqrt{2} e^{i\alpha} dz^3$, con $\alpha \in [0, 2\pi[$, y hacemos notar que X es un campo paralelo sobre (Σ', g^*) puesto que se trata de un campo de Killing de norma constante sobre una superficie llana.

Para finalizar la demostración, únicamente resta verificar que $\Sigma' = \Sigma$. Para ello, si p es un punto geodésico entonces $X_p = 0$. Sea entonces $\gamma : [0, \epsilon[\longrightarrow \Sigma$ una curva tal que $\gamma(0) = p$ y tal que $\gamma_{|(0,\epsilon)}$ es una geodésica de (Σ', g^*) con $g^*(\gamma', \gamma') = \sqrt[3]{2}$. Si $h : (0, \epsilon) \longrightarrow R$ es la función dada por $h(t) = \tilde{u}(\gamma(t)) + (1/6)\log 2$, entonces $\lim_{t\to 0} h(t) = \infty$. Puesto que X es paralelo en (Σ', g^*) y $X_{\gamma(0)} = 0$, se tiene que $g^*(X_{\gamma(t)}, \gamma'(t)) = 0$. Así podemos comprobar fácilmente que $h''(t) = \sqrt[3]{2}(\triangle^* \tilde{u})(\gamma(t))$. De (5.4) se sigue ahora que $h(t)$ cumple la e.d.o. (5.1). Pero las soluciones de esta ecuación están acotadas puesto que son periódicas (véase lema 3), lo que contradice el hecho que $\lim_{t\to 0} h(t) = \infty$. Por consiguiente, no hay puntos geodésicos en Σ, lo cual concluye la demostración.

A la vista del resultado de la proposición 13, el paso siguiente en el estudio de una inmersión lagrangiana ϕ minimal (no totalmente geodésica) G-invariante en CP^2 consiste en analizar las ecuaciones de Frenet del levantamiento local ψ de ϕ vía la fibración de Hopf Π (véase proposición 7 en §1.2). Dado que ϕ es minimal, también lo es ψ, por lo que las ecuaciones de Frenet de ψ se obtienen de (1.10) considerando ahora $h \equiv 0$ y $f = \sqrt{2}e^{i\alpha}$ (proposición 13), es decir:

$$\begin{aligned} \psi_{zz} &= u'\psi_z + \frac{\sqrt{2}e^{i\alpha}e^{-2u}}{2}J\psi_{\bar{z}}, \\ \psi_{z\bar{z}} &= -\frac{e^{2u}}{2}\psi, \\ \psi_{\bar{z}\bar{z}} &= u'\psi_{\bar{z}} + \frac{\sqrt{2}e^{-i\alpha}e^{-2u}}{2}J\psi_z, \end{aligned} \tag{5.5}$$

Sucede entonces que las condiciones de integrabilidad de de (5.5) son también equivalentes a que la función $u = u(x)$ que determina la métrica inducida satisfaga la ecuación (5.1). Resumimos en el siguiente resultado este último razonamiento, que es la versión del teorema 4 de §2.3 en este contexto.

Teorema 8 *Sea $u : R \longrightarrow R$ una solución de (5.1) y $\alpha \in R$. Dadas condiciones iniciales $\psi(z_0), \psi_z(z_0), \psi_{\bar{z}}(z_0)$, compatibles con las condiciones $\psi = \overline{\psi}$, $\psi_{\bar{z}} = \overline{\psi_z}$, al integrar las ecuaciones de Frenet (5.5) y proyectar sobre CP^2 vía la fibración de Hopf Π, se obtiene una familia uniparamétrica de inmersiones lagrangianas minimales invariantes por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2,*

$$\phi_{u,\alpha} = \Pi \circ \psi_{u,\alpha} : (R^2, e^{2u}|dz|^2) \longrightarrow CP^2,$$

tal que $\Theta(z) = \sqrt{2}e^{i\alpha}dz^3$ es la diferencial cúbica holomorfa asociada a $\phi_{u,\alpha}$.

Demostración: Solamente necesitamos demostrar que $\phi_{u,\alpha}$ es invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2. De hecho, es claro que $\varphi_t(x,y) = (x, y+t)$ son isometrías de $(R^2, e^{2u}|dz|^2)$. Por tanto, si $\psi_{u,\alpha} : U \subset R^2 \longrightarrow S^5(1)$ es el levantamiento horizontal local de $\phi_{u,\alpha}$ a $S^5(1)$, usando (5.5) se sigue que $\psi_{u,\alpha} \circ \varphi_t$ y $\psi_{u,\alpha}$ verifican las mismas ecuaciones de Frenet y por tanto existe una isometría F_t de $S^5(1)$ tal que $F_t \circ J = J \circ F_t$ y $F_t \circ \psi_{u,\alpha} = \psi_{u,\alpha} \circ \varphi_t$. De este modo, vía Π, $\{F_t \,/\, t \in R\}$ se proyecta en un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2, y de la propia construcción de F_t se desprende que $\phi_{u,\alpha}$ es invariante por él.

5.2 Integración de las ecuaciones.

El estudio realizado en la sección anterior pone de manifiesto que pueden estudiarse simultáneamente —en lo referente a comportamiento local— las superficies lagrangianas no minimales con forma de Maslov conforme y las superficies lagrangianas minimales (no totalmente geodésicas) G-invariantes del plano proyectivo complejo.

Para determinar todos los toros lagrangianos de las anteriores familias, el siguiente resultado establece el camino a seguir para conseguir tal clasificación.

Proposición 14 *Para clasificar todas las inmersiones lagrangianas de un toro no minimal con forma de Maslov conforme o de un toro minimal (no totalmente geodésico) invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas en CP^2, es suficiente determinar qué inmersiones $\psi^{\lambda}_{u,\alpha} : R^2 \longrightarrow S^5(1) \subset C^3$, $\lambda \geq 0$, dadas en el teorema 4 de §2.3 si $\lambda > 0$ y en el teorema 8 si $\lambda = 0$, asociadas a soluciones $u = u(x)$ del problema de valores iniciales*

$$(5.6) \qquad u'' + e^{2u} + \frac{\lambda^2 e^{4u} - 2e^{-4u}}{2} = 0,\ \lambda \geq 0, \quad a = e^{2u(0)},\ u'(0) = 0,$$

hacen que $\phi^{\lambda}_{u,\alpha} = \pi \circ \psi^{\lambda}_{u,\alpha} : R^2 \longrightarrow CP^2$, $\lambda \geq 0$, sea doblemente periódica.

Demostración: Sea $\phi : M \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme de un toro M en CP^2.

Notemos por $\widetilde{\phi} : C \longrightarrow CP^2$ el correspondiente levantamiento de ϕ al recubridor universal de M. Entonces es claro que $\widetilde{\phi}$ es de nuevo una inmersión lagrangiana y con forma de Maslov conforme, que será doblemente periódica respecto algún retículo de $C \equiv R^2$.

Sean Θ y $\mathcal{X}$ la diferencial cúbica holomorfa y el campo vectorial holomorfo asociados a $\widetilde{\phi}$ (véase §1.1). Si $z = x + iy$ es la coordenada usual de C, al expresar Θ y $\mathcal{X}$ en este sistema de coordenadas, resulta que las funciones que los definen son funciones enteras, i.e. holomorfas sobre C (véase proposición 4 en §1.1), que están acotadas por proyectarse en una superficie compacta. Consecuentemente han de ser constantes. Resumiendo, podemos escribir $\Theta(z) = \rho e^{i\beta}(dz)^3$ y $\chi(z) = \varrho e^{i\vartheta}\partial_z$, ρ, $\varrho \geq 0$, β, $\vartheta \in R$.

Analicemos la posible nulidad de Θ y $\mathcal{X}$. Si $\varrho = 0$, ψ es una inmersión minimal a partir de (2.2) y por tanto también ϕ lo será. Y si $\rho = 0$, denotando por $\widetilde{K}$ y $\widetilde{H}$ la curvatura de Gauss y la curvatura media de $\widetilde{\phi}$, usando (1.4) junto con la ecuación de Gauss de $\widetilde{\phi}$ resulta que $\widetilde{K} = 1 + |\widetilde{H}|^2/2$. Por tanto, $K = 1 + |H|^2/2$, donde K y H representan la curvatura de Gauss y la curvatura media de ϕ. Aplicando entonces el Teorema de Gauss-Bonnet se llega a una contradicción. Por consiguiente podemos asegurar que $\rho > 0$ y que $\varrho \geq 0$, siendo $\varrho = 0$ cuando ϕ es minimal.

Si cambiamos ahora la coordenada empleada en C escogiendo $w = w(z) = 2^{-1/6}\rho^{1/3}e^{-i\vartheta}z$ normalizamos Θ y $\mathcal{X}$ (renombrando w como z) reescribiendo

$$\Theta(z) = \sqrt{2}e^{i\alpha}(dz)^3 \quad \text{y} \quad \chi(z) = \lambda\partial_z,\ \lambda \geq 0.$$

De esta forma, para clasificar todas las inmersiones lagrangianas de un toro no minimal con forma de Maslov conforme ϖ en CP^2, necesitamos conocer qué inmersiones de las dadas en el teorema 4 de §2.3 para $\eta = 0$ asociadas a soluciones de la ecuación diferencial de (5.6) con $\lambda > 0$ (con la única salvedad que con la normalización escogida, ahora se tiene que $|h|^2 = \lambda^2 > 0$ en lugar de $|h|^2 = 1$) son doblemente periódicas, mientras que para clasificar las inmersiones lagrangianas minimales G-invariantes hemos de hacer lo propio con las dadas en el teorema 8 asociadas a soluciones de la ecuación diferencial de (5.6) con $\lambda = 0$.

Finalmente, puesto que las soluciones de la ecuación (5.6) son siempre periódicas (véase el lema que sigue a esta proposición) podemos, sin pérdida de generalidad, restringirnos a considerar sólo aquellas soluciones de la ecuación diferencial de (5.6) que satisfagan la condición inicial $u'(0) = 0$.

El primer paso a realizar consiste en estudiar las soluciones del problema de valores iniciales (5.6). En el Apéndice de esta memoria se procede a la integración explícita de éste en términos de las llamadas funciones elípticas de Jacobi. Sin perjuicio de ello, recogemos en el siguiente resultado aquellas propiedades de las mismas útiles para nuestro propósito.

Lema 3 *Sea $u = u(x,a) \equiv u_\lambda(x,a)$, $\lambda \geq 0$, la solución del problema de valores iniciales (5.6). Entonces:*

(i) *Si $a_0 = a_0(\lambda)$ es la única solución positiva de la ecuación $\lambda^2 a^4 + 2a^3 - 2 = 0$, entonces $u(x, a_0) = 1/2 \log a_0$ es la única solución constante de (5.6).*

(ii) *Existe $T > 0$, dependiendo de λ y de la condición inicial a, verificando :*

$$u(x + 2T) = u(x),\ u(T - x) = u(T + x),\ \forall\, x \in R.$$

(iii) *u es una función par, i.e., $u(-x) = u(x)$, $\forall\, x \in R$.*

(iv) $u'(x) = 0 \Leftrightarrow x = nT$, $n \in Z$

(v) *Si $\hat{a} = e^{2u(T)}$, entonces $u(x, \hat{a}) = u(x + T, a)$.*

(vi) *Si $a > a_0$, se cumple:*

$$\hat{a} \leq e^{2u(x)} \leq a,\ \forall\, x \in R,$$

dándose la primera igualdad (resp. la segunda) si y sólo si $x = (2k + 1)T$, $k \in Z$ (resp. $x = 2kT$, $k \in Z$).

(vii) *Se verifica la siguiente convergencia puntual:*

$$u_\lambda(x, a) \to u_0(x, a), \text{ si } \lambda \to 0,\ \forall\, x \in R.$$

Demostración: Consúltese en el Apéndice la proposición 15, apartados (b) y (c) y el corolario 10, junto con (A.7) y (A.9) para (iii).

Nota 14 En el Apéndice (nota 20) se prueba igualmente que $e^{2u(0)} \geq a_0 \Leftrightarrow e^{2u(T)} \leq a_0$. Teniendo en cuenta el apartado (v) del anterior lema, podemos limitarnos a considerar aquellas soluciones de (5.6) con condición inicial $a = e^{2u(0)} \geq a_0$.

Esta situación es completamente similar a lo que ocurría para las soluciones de la ecuación (3.1) en el caso $c = -4$ y $a < 4$ (véase nota 5 en §3.1) y para las soluciones de la ecuación senh-Gordon (4.1) (véase nota 10 en §4.1).

El conjunto de soluciones de (5.6) a considerar puede pues, para cada $\lambda \geq 0$, parametrizarse en el intervalo $[a_0(\lambda), +\infty[$, correspondiendo $a_0(\lambda)$ con la única solución constante de (5.6).

El siguiente paso consiste en proceder a la integración de las ecuaciones de Frenet de los levantamientos $\psi^\lambda_{u,\alpha}$ a $S^5(1)$ de las inmersiones $\phi^\lambda_{u,\alpha}$, $\lambda \geq 0$, las cuales —tras el lema 3— renombraremos como $\psi^\lambda_{a,\alpha}$ y $\phi^\lambda_{a,\alpha}$ respectivamente.

A partir de (2.13) y (5.5), utilizando coordenadas cartesianas y denotando simplemente por ψ a $\psi^\lambda_{a,\alpha}$ por comodidad en la notación, éstas vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
&\psi_{xx} = u'\psi_x + \tfrac{3\lambda e^{2u}+\sqrt{2}\cos\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_x - \\
&-\tfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_y - e^{2u}\psi, \\
&\psi_{xy} = u'\psi_y - \tfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_x + \tfrac{\lambda e^{2u}-\sqrt{2}\cos\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_y, \\
&\psi_{yy} = -u'\psi_x + \tfrac{\lambda e^{2u}-\sqrt{2}\cos\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_x + \\
&+\tfrac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha\, e^{-2u}}{2} J\psi_y - e^{2u}\psi.
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

A la hora de determinar el espacio paramétrico de las inmersiones $\psi^\lambda_{a,\alpha}$, $\lambda \geq 0$, para éstas sigue siendo válida la observación realizada en la nota 3 en §2.3 acerca de la suficiencia de considerar $\alpha \in [0,\pi]$ puesto que $\psi^\lambda_{a,2\pi-\alpha}(x,y)$ y $\psi^\lambda_{a,\alpha}(x,-y)$ verifican las mismas ecuaciones de Frenet. Por tanto, existe una isometría F de $S^5(1)$ tal que $F \circ J = J \circ F$ y $(F \circ \psi^\lambda_{a,2\pi-\alpha})(x,y) = \psi^\lambda_{a,\alpha}(x,-y)$. De este modo, F se proyecta en una isometría $\hat{F}$ de CP^2 vía la fibración de Hopf y resulta que $\phi^\lambda_{a,2\pi-\alpha}$ y $\phi^\lambda_{a,\alpha}$ son inmersiones congruentes mediante $\hat{F}$.

Así pues, de lo anterior junto con la nota 14, se sigue que el conjunto de inmersiones lagrangianas $\phi^\lambda_{a,\alpha} = \Pi \circ \psi^\lambda_{a,\alpha}$, $\lambda \geq 0$, puede parametrizarse en el siguiente subconjunto de R^2: $[a_0(\lambda), +\infty[\times[0,\pi]$, con $\lambda \geq 0$.

Pero en el caso minimal ($\lambda = 0$), este subconjunto puede reducirse ostensiblemente. En concreto, por un lado $\psi^0_{a,\pi-\alpha}(x,y)$ y $\psi^0_{a,\alpha}(-x,y)$, $\alpha \in [0,\pi]$, satisfacen las mismas ecuaciones de Frenet, por lo que siguiendo un razonamiento semejante al de más arriba, es suficiente —si $\lambda = 0$— tomar $\alpha \in [0,\pi/2]$. Por otro lado, para la solución constante $a(0) = 1$, de forma análoga se concluye que las inmersiones $\phi^0_{1,\alpha}$ y $\phi^0_{1,0} \circ R_{\alpha/3}$ ($R_{\alpha/3}$ es una rotación en R^2 de ángulo $\alpha/3$ que por supuesto es una isometría de $(R^2, |dz|^2)$) son inmersiones congruentes, que corresponden al toro de Clifford generalizado (nota 13) y que posteriormente obtendremos explícitamente. De lo anterior se concluye que podemos pues considerar:

$$\Gamma^\lambda = [a_0(\lambda), +\infty[\times[0,\pi],\ \lambda > 0,$$

y

$$\Gamma^0 = \{(1,0)\} \cup (]1,+\infty[\times[0,\pi/2])\,.$$

Como consecuencia de la proposición 13 y el teorema 8, junto con el anterior razonamiento, podemos concluir el siguiente resultado.

Corolario 6 *Sea $\phi : (\Sigma, g) \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana minimal de una superficie completa y orientable. Si ϕ es invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2, entonces o ϕ es totalmente geodésica o el recubridor universal de ϕ es congruente a $\phi^0_{a,\alpha}$, con $(a,\alpha) \in \Gamma^0$.*

Procedemos a continuación a obtener explícitamente las inmersiones $\psi^\lambda_{a,\alpha}$ con $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda \geq 0$, mediante la completa integración de las ecuaciones de Frenet (5.7), proceso éste clave en el desarrollo de este capítulo pues es la llave para posteriormente estudiar la doble periodicidad de estas inmersiones para obtener de ese modo todos los toros lagrangianos con forma de Maslov conforme en el plano proyectivo complejo.

Estamos representando simplemente por ψ a $\psi^\lambda_{a,\alpha}$ cuando no haya lugar a confusión y escribimos u en lugar de u_λ en las mismas circunstancias para simplificar la notación.

Multiplicando (5.6) por $2u'$ e integrando, se obtiene la llamada ecuación de energía de u, que viene dada por

$$u'^2 + e^{2u} + \frac{\lambda^2 e^{4u}}{4} + \frac{e^{-4u}}{2} = A, \tag{5.8}$$

donde A es una constante que se determina a partir de las condiciones iniciales. En este caso, se tiene:

$$A = a + \frac{\lambda^2 a^2}{4} + \frac{1}{2a^2}. \tag{5.9}$$

De (5.7) y (5.8), se obtiene:

$$(\psi_{yy} + L\psi)_y = -\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{2}} J\psi, \tag{5.10}$$

donde

$$L = A - \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{2}}. \tag{5.11}$$

L es una constante que depende de λ, a y α; estudiando L como función de $\lambda \geq 0$ a partir de (5.11) y (5.9) es fácil deducir que siempre L es positivo para $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda \geq 0$.

Derivando respecto a y en (5.10), se llega a que $\psi(-,y)$ satisface la siguiente ecuación diferencial lineal

$$\frac{\partial^6\psi}{\partial y^6} + 2L\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} + L^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2}\psi = 0. \tag{5.12}$$

Procede entonces obtener información sobre las raíces de la ecuación característica de (5.12), i.e. $m^6 + 2Lm^4 + L^2m^2 + (\operatorname{sen}^2\alpha)/2 = 0$; teniendo en mente el cambio $m^2 = r$, recogemos ésta en el lema siguiente.

Lema 4 *El polinomio cúbico* $P(r) = r^3+2Lr^2+L^2r+(\operatorname{sen}^2\alpha)/2$, *con* $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda \geq 0$, *posee tres raíces reales no positivas* $-r_j = -r_j(\lambda,a,\alpha)$, $j = 1,2,3$, *verificando:*

(a) $L \leq r_1 \leq 4L/3$, *dándose la primera igualdad (resp. la segunda) si y sólo si* $\alpha = 0,\pi$ *(resp.* $a = a_0$ *y* $\alpha = \alpha_0 := \cos^{-1}(\lambda a_0^2/\sqrt{2}) = \cos^{-1}\sqrt{1-a_0^3}$*).*

(b) $L - \hat{a} \leq r_2 \leq L$, *siendo* $\hat{a}$ *el único número real positivo tal que* $A(a) = A(\hat{a})$, $\hat{a} \leq a$ *(véase (5.9)), dándose la primera igualdad (resp. la segunda) si y sólo si* $\cos\alpha = \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}$ *(resp.* $\alpha = 0,\pi$*).*

(c) $0 \leq r_3 \leq L - a$, *dándose la primera igualdad (resp. la segunda) si y sólo si* $\alpha = 0,\pi$ *(resp.* $\lambda a^2 \leq \sqrt{2}$ *y* $\cos\alpha = \lambda a^2/\sqrt{2}$*).*

(d) $r_3 \leq L/3 \leq r_2$, *dándose cualquiera de las dos igualdades si y sólo si* $a = a_0$ *y* $\alpha = \alpha_0 := \cos^{-1}(\lambda a_0^2/\sqrt{2}) = \cos^{-1}\sqrt{1-a_0^3}$.

(e) $\sqrt{r_1} = \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}$.

Demostración del lema: Los cuatro primeros apartados se deducen a partir de las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
P(0) = P(-L) &= \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2} \geq 0,\\
P(\hat{a}-L) &= -\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\lambda\hat{a}^2}{2}\right)^2 \leq 0,\\
P(a-L) &= -\left(\frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} - \frac{\lambda a^2}{2}\right)^2 \leq 0,\\
P(-L/3) = P(-4L/3) &= -\frac{4L^3}{27} + \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{2} \leq 0,
\end{aligned}$$

obteniéndose la última desigualdad estudiando $-4L^3/27+\operatorname{sen}^2\alpha/2$ en primer lugar como función de $a \geq a_0$ y posteriormente, con $a = a_0$, como función de $\alpha \in [0,\pi]$, concluyéndose además que se da la igualdad si y sólo si $a = a_0$ y $\cos\alpha = \lambda a_0^2/\sqrt{2} = \sqrt{1-a_0^3}$.

El último apartado se obtiene a partir de la relación de las tres raíces r_1, r_2 y r_3 con los coeficientes del polinomio, esto es:

$$\begin{aligned} r_1 r_2 r_3 &= \operatorname{sen}^2\alpha/2, \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3 &= L^2, \\ r_1 + r_2 + r_3 &= 2L, \end{aligned}$$

de donde resulta fácilmente $r_1 - L = \sqrt{r_2}\sqrt{r_3}$, $L - r_2 = \sqrt{r_1}\sqrt{r_3}$ y $L - r_3 = \sqrt{r_1}\sqrt{r_2}$, y de ahí se concluye (e).

Resolviendo entonces (5.12) en primer lugar cuando las tres raíces características son distintas, esto es, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pi$ y $(a,\alpha) \neq (a_0,\alpha_0)$ (lema 4), resulta:

$$\psi(x,y) = \sum_{j=1}^{3}\{\cos(\sqrt{r_j}y)C_j(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{r_j}y)D_j(x)\}, \tag{5.13}$$

para ciertas curvas $C_j(x)$, $D_j(x)$, $j = 1,2,3$ en C^3.

Puesto que ahora $-r_1 < -L < -r_2$ (lema 4), usando (5.10) en (5.13) no es complicado obtener que $D_1 = JC_1$ y $D_i = -JC_i$, $i = 2,3$. Así conseguimos la siguiente expresión para la inmersión ψ en esta situación:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \cos(\sqrt{r_1}y)C_1(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{r_1}y)JC_1(x) \\ &+ \sum_{i=2}^{3}\{\cos(\sqrt{r_i}y)C_i(x) - \operatorname{sen}(\sqrt{r_i}y)JC_i(x)\}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Pero si $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$, (5.10) se reduce a $\psi_{yyy} + L\psi_y = 0$, de donde

$$\psi^{\lambda}_{a;0,\pi}(x,y) = \cos(\sqrt{L}y)\beta_1(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{L}y)\beta_2(x) + \beta_3(x),$$

para ciertas curvas $\beta_j(x)$ en C^3, $j = 1,2,3$. Por tanto, la expresión de ψ en (5.14) también es válida para los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$ considerando $\beta_1(x) = C_1(x) + C_2(x)$, $\beta_2(x) = JC_1(x) - JC_2(x)$ y $\beta_3(x) = C_3(x)$, ya que del lema 4 en estos casos $r_1 = r_2 = L$ y $r_3 = 0$.

Distinguimos a partir de aquí tres situaciones bien diferenciadas por las técnicas que van a seguirse para completar la obtención explícita de la inmersión $\psi = \psi^{\lambda}_{a,\alpha}$ y que vienen motivados por la distribución de las raíces características estudiadas en el lema 4. Así, dividiremos nuestro estudio en los tres siguientes casos:

(i) caso constante: $\lambda \geq 0$ y $a = a_0(\lambda)$,

(ii) caso minimal: $\lambda = 0$ y $a > a(0) = 1$,

(iii) caso no minimal: $\lambda > 0$ y $a > a_0(\lambda)$.

Caso constante: $\lambda \geq 0$ y $a = a_0(\lambda)$. Por el lema 3(i) se tiene que fijado $\lambda \geq 0$, la condición inicial correspondiente a la solución constante de (5.6), $a_0 = a_0(\lambda)$ es la única solución positiva de la ecuación

$$\lambda a_0^2 = \sqrt{2}\sqrt{1 - a_0^3},$$

por lo que es claro que también λ queda determinado conociendo a_0. En otras palabras, la familia de inmersiones asociada a la solución constante de (5.6) es dos-paramétrica y por tanto la representaremos sencillamente por $\psi_{a_0,\alpha}$.

Es sencillo verificar que $a_0(0) = 1$ y $a_0(+\infty) = 0$. Luego podemos considerar $a_0 \in]0, 1]$ mientras que $\alpha \in [0, \pi]$. Recuérdese que en el caso minimal $\lambda = 0$, que se corresponde ahora con $a_0 = 1$, habíamos concluído anteriormente la no existencia de familia paramétrica en α, hecho que posteriormente pondremos claramente de manifiesto.

En este caso, utilizando (5.11), se tiene:

$$L = L(a_0, \alpha) = \frac{a_0^3 + 2 - 2\sqrt{1 - a_0^3}\cos\alpha}{2a_0^2}. \tag{5.15}$$

En particular, obsérvese que $L(1, \alpha) = 3/2$, $\forall \alpha \in [0, \pi]$.

En cuanto a las raíces característiacas (lema 4), además de los casos ya comentados de multiplicidad ($\alpha = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = L(a_0, 0)$, $r_3 = 0$; $\alpha = \pi \Rightarrow r_1 = r_2 = L(a_0, \pi)$, $r_3 = 0$) aparece ahora, para cada $a_0 \in]0, 1]$, un tercero que sucede justamente cuando $\alpha = \alpha_0 := \cos^{-1}\sqrt{1 - a_0^3}$, ($\alpha_0 = \pi/2$ si $a_0 = 1$) en el que las raíces toman los valores $r_1 = 2a_0$, $r_2 = r_3 = a_0/2$, puesto que de (5.15) se sigue que $L(a_0, \alpha_0) = 3a_0/2$. Fuera de este caso singular, la distibución de las raíces características es la siguiente:

$$\frac{4L}{3} > r_1 \geq L \geq r_2 > L - a_0 > r_3 \geq 0, \; r_2 > \frac{L}{3} > r_3, \tag{5.16}$$

correspondiendo los casos de igualdad a los casos $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.

Fijado entonces $a_0 \in]0,1]$, supongamos en primer lugar que $\alpha \neq \alpha_0$. En tal caso, utilizando en (5.14) que ψ es una inmersión horizontal y conforme, no es complicado concluir que

$$|C_j(x)|^2 = \frac{a_0 + r_j - L}{3r_j - L}, \ \langle C_k, C_l\rangle = \langle C_k, JC_l\rangle = 0, \tag{5.17}$$

$j,k,l = 1,2,3$, $k \neq l$. Obsérvese que puesto que $\alpha \neq \alpha_0$, ni los numeradores ni los denominadores que aparecen en (5.17) se anulan por (5.16). Sin embargo, cuando $\alpha = \alpha_0$, aparecen indeterminaciones del tipo $0/0$ para $|C_i(x)|^2$, $i = 2,3$.

Pero además, llevando (5.14) a las ecuaciones de Frenet (5.7) para este caso, y teniendo en cuenta (5.17), no es difícil comprobar que las curvas $C_j(x)$, $j = 1,2,3$, verifican las siguientes e.d.os.

$$C_j'(x) = \frac{\sqrt{1-a_0^3} - \cos\alpha}{\sqrt{2}(a_0 + r_j - L)} JC_j(x), \ j = 1,2,3, \tag{5.18}$$

cuya integración conduce a

$$C_j(x) = \sqrt{\frac{a_0 + r_j - L}{3r_j - L}}\, e^{i\frac{\sqrt{1-a_0^3}-\cos\alpha}{\sqrt{2}(a_0+r_j-L)}x}, \ j = 1,2,3, \tag{5.19}$$

en el plano complejo $\Pi_j = gen\{e_j = C_j(0)/|C_j(0)|, Je_j\}$, $j = 1,2,3$. Llevando (5.19) a (5.14) completamos la obtención explícita de las inmersiones $\psi_{a_0,\alpha}$ con $\alpha \neq \alpha_0$.

Si llamamos

$$f_j = f_j(a_0,\alpha) := \sqrt{\frac{a_0 + r_j - L}{3r_j - L}} \text{ y } G_j = G_j(a_0,\alpha) := \frac{\sqrt{1-a_0^3} - \cos\alpha}{\sqrt{2}(a_0 + r_j - L)},$$

$j = 1,2,3$, nótese que $f_1 \to 1/\sqrt{3}$ y $G_1 \to 0$ si $\alpha \to \alpha_0$, mientras que para f_i, G_i, $i = 2,3$, aparecen indeterminaciones del tipo $0/0$ difíciles de solventar debido a que esta indeterminación se mantiene incluso aplicando reiteradamente la regla de L'Hôpital. Por todo ello, procedemos a la integración por separado del caso singular $\alpha = \alpha_0$, aunque no cabe duda que la inmersión ψ_{a_0,α_0} que vamos a obtener es límite de las ya integradas $\psi_{a_0,\alpha}$ cuando $\alpha \to \alpha_0$.

Caso que $\alpha = \alpha_0$, dos de las raíces de la ecuación característica de (5.12) se repiten. Como comentamos anteriormente, en este caso:

$$r_1 = 4L(a_0, \alpha_0)/3 = 2a_0,\ r_2 = r_3 = L(a_0, \alpha_0)/3 = L(a_0, \alpha_0) - a_0 = a_0/2.$$

O sea, el polinomio $P(r)$ se escribe ahora como $(r + 2a_0)(r + a_0/2)^2$. Luego, $\psi = \psi_{a_0,\alpha_0}$ tendría la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \cos(\sqrt{2a_0}y)\gamma_1(x) + \operatorname{sen}(\sqrt{2a_0}y)J\gamma_1(x) + \\ &+ \cos(\sqrt{2a_0}y/2)\gamma_2(x) - \operatorname{sen}(\sqrt{2a_0}y/2)J\gamma_2(x) \\ &+ y\left(\cos(\sqrt{2a_0}y/2)\gamma_3(x) - \operatorname{sen}(\sqrt{2a_0}y/2)J\gamma_3(x)\right), \end{aligned} \tag{5.20}$$

para ciertas curvas $\gamma_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, en C^3.

Pero en este caso, $\operatorname{sen}\alpha_0 = a_0\sqrt{a_0}$ y $\lambda e^{2u} - \sqrt{2}\cos\alpha_0 e^{-2u} \equiv 0$, por lo que las ecuaciones de Frenet (5.7) de $\psi = \psi_{a_0,\alpha_0}$ se reducen a:

$$\begin{aligned} \psi_{xx} &= \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1-a_0^3}}{a_0}J\psi_x - \frac{\sqrt{2a_0}}{2}J\psi_y - a_0\psi, \\ \psi_{xy} &= -\frac{\sqrt{2a_0}}{2}J\psi_x, \\ \psi_{yy} &= \frac{\sqrt{2a_0}}{2}J\psi_y - a_0\psi. \end{aligned} \tag{5.21}$$

De (5.20) se sigue que:

$$\begin{aligned} \psi(x,0) &= \gamma_1(x) + \gamma_2(x), \\ \psi_y(x,0) &= \sqrt{2a_0}J\gamma_1(x) - \frac{\sqrt{2a_0}}{2}J\gamma_2(x) + \gamma_3(x), \\ \psi_{yy}(x,0) &= -\sqrt{2a_0}J\gamma_1(x) - \frac{a_0}{2}\gamma_2(x) - \sqrt{2a_0}\gamma_3(x). \end{aligned}$$

Manipulando las anteriores ecuaciones y utilizando (5.21), es fácil obtener:

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= \frac{1}{3}\psi(x,0) - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{a_0}}J\psi_y(x,0), \\ \gamma_2(x) &= \frac{2}{3}\psi(x,0) + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{a_0}}J\psi_y(x,0), \\ \gamma_3(x) &= 0, \end{aligned} \tag{5.22}$$

por lo que (5.20) se reduce a:

$$\begin{aligned}(5.23)\qquad \psi(x,y) &= \cos(\sqrt{2a_0}y)\gamma_1(x)+\operatorname{sen}(\sqrt{2a_0}y)J\gamma_1(x)+\\ &+ \cos(\frac{\sqrt{2a_0}}{2}y)\gamma_2(x)-\operatorname{sen}(\frac{\sqrt{2a_0}}{2}y)J\gamma_2(x),\end{aligned}$$

expresión también acorde (al igual que lo sucedido en los otros dos casos de multiplicidad de raíces, $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$), con (5.14) considerando $\gamma_1(x) = C_1(x)$ y $\gamma_2(x) = C_2(x) + C_3(x)$.

De (5.22), utilizando que ψ es horizontal y conforme, se concluye:

$$(5.24)\qquad |\gamma_1(x)|^2 = \frac{1}{3},\ |\gamma_2(x)|^2 = \frac{2}{3},\ \langle\gamma_1,\gamma_2\rangle = \langle\gamma_1, J\gamma_2\rangle = 0.$$

Igualmente, a partir de (5.22) y (5.21), se llega a:

$$(5.25)\qquad \gamma_1' = 0,\ \gamma_2'' - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{1-a_0^3}}{a_0}J\gamma_2' + \frac{3a_0}{2}\gamma_2 = 0.$$

La primera de las anteriores ecuaciones nos dice que $\gamma_1(x) = \gamma_1(0)$, $\forall\, x \in R$; de la segunda, deducimos que

$$(5.26)\qquad \gamma_2^{iv)} + \frac{8-5a_0^3}{a_0^2}\gamma_2'' + \frac{9a_0^2}{2}\gamma_2 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación lineal y teniendo en cuenta que la solución de ésta también ha de verificar la segunda ecuación de (5.25), es fácil conseguir que

$$(5.27)\qquad \gamma_2(x) = \cos(\xi x)v - \operatorname{sen}(\xi x)Jv + \cos(\eta x)w + \operatorname{sen}(\eta x)Jw,$$

donde ξi, $-\xi i$, ηi, $-\eta i$ ($0 < \xi \leq \eta$, $\xi = \eta = \sqrt{3/2} \Leftrightarrow a_0 = 1$) son las raíces de la ecuación caracterítica de (5.26), $v = (\eta\gamma_2(0) + J\gamma_2'(0))/(\eta+\xi)$ y $w = \gamma_2(0) - v$. Es fácil comprobar que $\langle v, w\rangle = \langle v, Jw\rangle = 0$ a partir de (5.24) y (5.22). Finalmente, llevando (5.27) a (5.23), teniendo en cuenta (5.24), se obtiene la expresión explícita de ψ_{a_0,α_0}, que viene dada, en el sistema de referencia $\{\gamma_1(0)/|\gamma_1(0)|, v/|v|, w/|w|\}$, mediante:

$$\begin{aligned}&\psi_{a_0,\alpha_0}(x,y) =\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{i\sqrt{2a_0}y}, \tfrac{\sqrt{2\eta^2+3a_0}}{\eta+\xi}e^{-i(\xi x+\frac{\sqrt{2a_0}}{2}y)}, \tfrac{\sqrt{2\xi^2+3a_0}}{\eta+\xi}e^{i(\eta x-\frac{\sqrt{2a_0}}{2}y)},\right),\end{aligned}$$

donde $\eta > \xi > 0$ son las soluciones de $\eta\xi = 3a_0/2$, $\eta^2 + \xi^2 = (8 - 5a_0^3)/a_0^2$.

Dicho de otro modo, con este procedimiento hemos encontrado los verdaderos valores de las indeterminaciones que nos aparecían al calcular el límite de f_i y G_i, $i = 2, 3$, cuando $\alpha \to \alpha_0$.

En el caso minimal, $\lambda = 0 \Leftrightarrow a_0 = 1$, las fórmulas de Cardano permiten conocer explícitamente de una manera sencilla las raíces características; concretamente:

$$r_1 = 2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + \pi}{3},\ r_2 = 2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha + 2\pi}{3},\ r_3 = 2\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{3}.$$

Además, $f_j(1, \alpha) = 1/\sqrt{3}$, $j = 1, 2, 3$, $G_1(1, \alpha) = -\sqrt{2}\cos((\alpha + \pi)/3)$, $G_2(1, \alpha) = \sqrt{2}\cos((\alpha + 2\pi)/3)$, $G_3(1, \alpha) = \sqrt{2}\cos(\alpha/3)$, $\forall\, \alpha \in [0, \pi/2]$, por lo que resulta:

$$\begin{aligned}
&\psi_{1,\alpha}(x, y) = \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{3}} \Big(e^{\frac{\sqrt{2}i}{2}[(\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} - \cos\frac{\alpha}{3})x + (\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{3} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3})y]}, \\
&\qquad e^{\frac{\sqrt{2}i}{2}[-(\sqrt{3}\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3} + \cos\frac{\alpha}{3})x + (-\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{3} + \operatorname{sen}\frac{\alpha}{3})y]}, \\
&\qquad\qquad e^{\sqrt{2}i[(\cos\frac{\alpha}{3})x - (\operatorname{sen}\frac{\alpha}{3})y]} \Big),
\end{aligned}$$

expresión que pone de manifiesto, tal y como habíamos anunciado anteriormente, la no existencia de familia paramétrica propiamente dicha en este caso, debido a que es fácil comprobar que las inmersiones $\psi_{1,\alpha}$ y $\psi_{1,0} \circ R_{\alpha/3}$ (con $R_{\alpha/3}$ la rotación en R^2 de ángulo $\alpha/3$) coinciden.

Resumimos el resultado de la integración en este caso en el siguiente teorema.

Teorema 9 *En apropiados sistemas de referencia de* C^3*, las inmersiones* $\psi^{\lambda}_{a_0(\lambda),\alpha} \equiv \psi_{a_0,\alpha} : (R^2, a_0|dz|^2) \longrightarrow S^5(1)$*,* $a_0 \in]0, 1[$*,* $\alpha \in [0, \pi]$*, asociadas a la solución constante de (5.6) (véase proposición 14), vienen dadas, si* $\alpha \neq \alpha_0 := \cos^{-1}\sqrt{1 - a_0^3}$*, mediante:*

$$\psi_{a_0,\alpha}(x, y) = \left(f_1 e^{i(G_1 x + \sqrt{r_1} y)}, f_2 e^{i(G_2 x - \sqrt{r_2} y)}, f_3 e^{i(G_3 x - \sqrt{r_3} y)} \right),$$

con

$$f_j := \sqrt{\frac{a_0 + r_j - L}{3r_j - L}} \text{ y } G_j := \frac{\sqrt{1 - a_0^3} - \cos\alpha}{\sqrt{2}(a_0 + r_j - L)},$$

$j = 1,2,3$, siendo

$$L := \frac{a_0^3 + 2 - 2\sqrt{1-a_0^3}\cos\alpha}{2a_0^2}$$

y $-r_1 \leq -r_2 \leq -r_3 \leq 0$, $r_j = r_j(a_0,\alpha)$, $j = 1,2,3$, las raíces del polinomio de tercer grado $r^3 + 2Lr^2 + L^2 r + (\operatorname{sen}^2\alpha)/2$.

Y si $\alpha = \alpha_0 := \cos^{-1}\sqrt{1-a_0^3}$, entonces:

$$\psi_{a_0,\alpha_0}(x,y) = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{i\sqrt{2a_0}y}, \tfrac{\sqrt{2\eta^2+3a_0}}{\eta+\xi}e^{-i(\xi x+\frac{\sqrt{2a_0}}{2}y)}, \tfrac{\sqrt{2\xi^2+3a_0}}{\eta+\xi}e^{i(\eta x-\frac{\sqrt{2a_0}}{2}y)},\right),$$

donde $\eta > \xi > 0$ son las soluciones de $\eta\xi = 3a_0/2$, $\eta^2 + \xi^2 = (8-5a_0^3)/a_0^2$.

En particular:

$$\psi_{1,0}(x,y) = \\ = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{\frac{\sqrt{2}i}{2}(-x+\sqrt{3}y)}, e^{-\frac{\sqrt{2}i}{2}(x+\sqrt{3}y)}, e^{\sqrt{2}ix},\right).$$

Caso minimal: $\lambda = 0$ y $a > 1$. En este caso, L no depende de α, que ahora varía en $[0,\pi/2]$, y se reduce a (véase (5.11) y lema 4(b)):

$$L = A = a + \frac{1}{2a^2} = \hat{a} + \frac{1}{2\hat{a}^2}. \tag{5.28}$$

En cuanto a la distribución de raíces características, a partir del lema 4, tenemos para $\alpha \in [0,\pi/2]$:

$$\frac{4A}{3} > r_1 \geq A \geq r_2 \geq A - \hat{a} = \frac{1}{2\hat{a}^2} > \frac{1}{2a^2} = A - a \geq r_3 \geq 0,$$
$$r_2 > \frac{A}{3} > r_3,$$

debiendo señalar el caso particular $\alpha = \pi/2$, para el que $r_3 = 1/2a^2$, $r_2 = 1/2\hat{a}^2$ y $r_1 = a + \hat{a}$.

Así, puesto que ψ es una inmersión horizontal y conforme, es sencillo concluir a partir de (5.14) que

$$|C_j(x)|^2 = \frac{e^{2u(x)} + r_j - A}{3r_j - A}, \ \langle C_k, C_l\rangle = \langle C_k, JC_l\rangle = 0, \tag{5.29}$$

$j, k, l = 1, 2, 3,\ k \neq l$.

Por otro lado, llevando (5.14) a las ecuaciones de Frenet (5.7) y teniendo en cuenta (5.29), es sencillo comprobar que las curvas $C_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, verifican las siguientes e.d.os.

$$(e^{2u(x)} + r_j - A)C_j'(x) = u'(x)e^{2u(x)}C_j(x) - \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}JC_j(x). \tag{5.30}$$

Surge la necesidad entonces, a partir de (5.30) y (5.29), de controlar los ceros de las curvas C_j, $= 1, 2, 3$, problema que resolvemos en el siguiente lema.

Lema 5 *Un número real x es un cero de la función $e^{2u} + r_j - A$, $j = 1, 2, 3$, $(a, \alpha) \in \Gamma^0$, si y sólo si o bien $j = 2$, $\alpha = \pi/2$, $x = (2k+1)T$, $k \in Z$, o bien $j = 3$, $\alpha = \pi/2$, $x = 2kT$, $k \in Z$.*

Además, cuando $\alpha = \pi/2$ (consúltese el Apéndice, §A.2, para la definición de las funciones elípticas de Jacobi sn, cn y dn),

$$\begin{aligned} e^{2u(x)} + r_1 - A &= (a + \hat{a} + 1/2a)\mathrm{dn}^2(Kx/T), \\ e^{2u(x)} + r_2 - A &= (a - \hat{a})\mathrm{cn}^2(Kx/T), \\ e^{2u(x)} + r_3 - A &= (\hat{a} - a)\mathrm{sn}^2(Kx/T). \end{aligned}$$

Demostración del lema: Consecuencia del lema 4 es que $e^{2u(x)} + r_1 - A$ es una función positiva. Del lema 3(vi), se deduce que

$$\hat{a} + r_i - A \leq e^{2u(x)} + r_i - A \leq a + r_i - A,\ i = 2, 3,$$

dándose la primera igualdad (resp. la segunda igualdad) si y sólo si $x = (2k+1)T$, $k \in Z$ (resp. $x = 2kT$, $k \in Z$). Combinando con el lema 4 la anterior desigualdad se prueba la primera parte del lema.

Para las expresiones dadas en el caso $\alpha = \pi/2$ es necesario acudir al Apéndice, proposición 15(b) y utilizar (A.2).

Ahora, del lema 5 se deduce que si $\alpha \neq \pi/2$, entonces $C_j(x)$ no tiene ceros e integrando (5.30) se llega a

$$C_j(x) = f_j(x)e^{iG_j(x)},\ j = 1, 2, 3, \tag{5.31}$$

en el plano complejo $\Pi_j = gen\{e_j = C_j(0)/|C_j(0)|, Je_j\}$, siendo $f_j(x) = |C_j(x)| = ((e^{2u(x)} + r_j - A)/(3r_j - A))^{1/2}$ y $G_j(x) = (\cos\alpha/\sqrt{2})\int_0^x ds/(A - r_j - e^{2u(s)})$, $j = 1, 2, 3$. Si se consulta el Apéndice, proposición 15(b) y (A.12), se aprecia que las funciones $G_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, son diversas integrales elípticas de tercera especie.

Llevando (5.31) a (5.14) se concluye la integración para $\alpha \neq \pi/2$. Piénsese que si $\alpha = \pi/2$, entonces $G_j(x) = 0$ (las integrales impropias que aparecen si $j = 2$, $x \in (2Z + 1)T$ y $j = 3$, $x \in 2ZT$, son convergentes) y podríamos obtener expresiones explícitas para $f_j(x)$, $j = 1, 2, 3$, utilizando el lema 5.

Si $\alpha = \pi/2$, utilizando la proposición 15(b) del Apéndice junto con (A.2) y (A.9), las ecuaciones (5.30) se reducen ahora a:

$$\begin{aligned} \mathrm{dn}(Kx/T)C_1'(x) &= \frac{d}{dx}(\mathrm{dn}(Kx/T))C_1(x), \\ \mathrm{cn}(Kx/T)C_2'(x) &= \frac{d}{dx}(\mathrm{cn}(Kx/T))C_2(x), \\ \mathrm{sn}(Kx/T)C_3'(x) &= \frac{d}{dx}(\mathrm{sn}(Kx/T))C_3(x). \end{aligned} \tag{5.32}$$

La integración de (5.32) conduce a:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= f_1(0)\mathrm{dn}(Kx/T), \\ C_2(x) &= f_2(0)\mathrm{cn}(Kx/T), \\ C_3(x) &= f_3(T)\mathrm{sn}(Kx/T), \end{aligned}$$

en los planos complejos $\Pi_k = \mathrm{gen}\{e_k = C_k(0)/|C_k(0)|, Je_k\}$, $k = 1, 2$ y $\Pi_3 = \mathrm{gen}\{e_3 = C_3(T)/|C_3(T)|, Je_3\}$. Poniendo las anteriores expresiones en (5.14) concluímos la integración para el caso $\alpha = \pi/2$, que confirma que éste puede verse como límite del caso general cuando $\alpha \to \pi/2$.

A título de resumen, concluímos este segundo caso con el siguiente teorema.

Teorema 10 *En apropiados sistemas de referencia de C^3, las inmersiones $\psi^0_{a,\alpha} \equiv \psi_{a,\alpha} : (R^2, e^{2u(x)}|dz|^2) \longrightarrow S^5(1)$, $(a, \alpha) \in]1, +\infty[\times[0, \pi/2]$, asociadas a la solución $u(x, a)$ de (5.6) con $\lambda = 0$ (véase proposición 14), vienen dadas por:*

$$\psi_{a,\alpha}(x, y) = \left(f_1(x)e^{i(G_1(x)+\sqrt{r_1}y)}, f_2(x)e^{i(G_2(x)-\sqrt{r_2}y)}, f_3(x)e^{i(G_3(x)-\sqrt{r_3}y)}\right)$$

con

$$f_j(x) = \left(\frac{e^{2u(x)} + r_j - A}{3r_j - A}\right)^{\frac{1}{2}} \ \text{y}\ G_j(x) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}} \int_0^x \frac{ds}{A - r_j - e^{2u(s)}},$$

$j = 1, 2, 3$, *siendo*

$$A = a + \frac{1}{2a^2},$$

y donde $-r_1 \le -r_2 \le -r_3 \le 0$, $r_j = r_j(a,\alpha)$, $j = 1,2,3$, *son las raíces del polinomio de tercer grado* $r^3 + 2Ar^2 + A^2 r + (\operatorname{sen}^2\alpha)/2$.

En particular,

$$\psi_{a,\pi/2}(x,y) = \left(\sqrt{\frac{2a^3 + 2a^2\hat{a} - 1}{4a^3 + 6a^2\hat{a} - 1}} \mathrm{dn}(\sqrt{a+\tilde{a}}\, x) e^{i\sqrt{a+\hat{a}}y}, \right.$$

$$\left. \hat{a}\sqrt{\frac{a-\hat{a}}{1-\hat{a}^3}} \mathrm{cn}(\sqrt{a+\tilde{a}}\, x) e^{-i\sqrt{2}y/2\hat{a}}, a\sqrt{\frac{a-\hat{a}}{a^3-1}} \mathrm{sn}(\sqrt{a+\tilde{a}}\, x) e^{-i\sqrt{2}y/2a} \right)$$

donde dn, cn *y* sn *son las funciones elípticas de Jacobi elementales (véase Apéndice, §A.2), y* $\hat{a}$ *y* $\tilde{a}$ *son las raíces de la ecuación* $2a^2x^2 - x - a = 0$.

Nota 15 Del lema 4 se sigue que si $\alpha = 0$ entonces $r_1 = r_2 = A$ y $r_3 = 0$, por lo que las inmersiones $\psi_{a,0}$, $a > 1$, son periódicas en la variable y; concretamente:

$$\psi_{a,0}\left(x, y + \frac{2\pi}{\sqrt{A}}\right) = \psi_{a,0}(x,y),\ \forall\,(x,y) \in R^2.$$

En el otro extremo, las inmersiones $\psi_{a,\pi/2}$, $a > 1$, son periódicas en la variable x; concretamente:

$$\psi_{a,\pi/2}(x + 4T, y) = \psi_{a,\pi/2}(x,y),\ \forall\,(x,y) \in R^2,$$

siendo T el semiperíodo de la fución $u_0(x)$ que es exactamente igual a $K(p^2)/\sqrt{a+\tilde{a}}$ con $K(p^2)$ la integral elíptica completa de primera especie de parámetro $p^2 = (a-\hat{a})/(a+\tilde{a})$ (véase Apéndice, proposición 15(b) y §A.1).

En cualquier caso, la inmersión $\phi_{a,\alpha}$, $(a,\alpha) \in]1,+\infty[\times[0,\pi/2]$, es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2 inducido, vía Π, por

$$\{diag(e^{i\sqrt{r_1}t}, e^{-i\sqrt{r_2}t}, e^{-i\sqrt{r_3}t}) \,/\, t \in R\}.$$

Nota 16 Las inmersiones $\{\phi_{a,\pi/2} \,/\, a \ge 1\}$ van a constituir (véase §5.3.2.) una deformación mediante toros lagrangianos minimales no llanos del toro de Clifford generalizado $\phi_{1,\pi/2}$ (nota 13), que en este sistema de referencia vendría dado como

$$\psi_{1,\pi/2}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{i\sqrt{2}y}, \sqrt{2}\cos(\sqrt{3/2}x)e^{-\frac{\sqrt{2}i}{2}y}, \sqrt{2}\operatorname{sen}(\sqrt{3/2}x)e^{-\frac{\sqrt{2}i}{2}y}\right)$$

Caso no minimal: $\lambda > 0$ y $a > a_0(\lambda)$. En este caso, fijado $\lambda > 0$ y elegido $a > a_0(\lambda)$, utilizando la nota 14 y el lema 3(i) se verifica que $0 < \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2} \leq \lambda a_0^2/\sqrt{2} = \sqrt{1-a_0^3} < 1$, por lo que siempre existe $\alpha \in]0,\pi/2[$ tal que $\cos\alpha = \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}$, con lo que entonces $r_2 = L - \hat{a} = \operatorname{sen}^2\alpha/2\hat{a}^2$; de modo similar, para cuando $\lambda a^2 \leq \sqrt{2}$, puede encontrarse $\alpha \in [0,\pi/2[$ tal que $\cos\alpha = \lambda a^2/\sqrt{2}$, con lo que entonces $r_3 = L - a = \operatorname{sen}^2\alpha/2a^2$ (véase lema 4). Fuera de estos dos casos peculiares, la distribución de las raíces características es semejante a la del caso minimal, pero ahora L (véase (5.11)) sí depende de α (véase lema 4).

Si aprovechamos ahora en (5.14) el hecho que ψ es una inmersión horizontal y conforme, es fácil concluir que

$$|C_j(x)|^2 = \frac{e^{2u(x)} + r_j - L}{3r_j - L}, \ \langle C_k, C_l\rangle = \langle C_k, JC_l\rangle = 0, \tag{5.33}$$

$j,k,l = 1,2,3,\ k \neq l$.

También, llevando (5.14) a las ecuaciones de Frenet (5.7) y teniendo en cuenta (5.33), no es difícil comprobar que las curvas $C_j(x)$, $j = 1,2,3$, verifican las siguientes e.d.os.

$$\begin{aligned} (e^{2u(x)} + r_j - L)C_j'(x) &= \\ = u'(x)e^{2u(x)}C_j(x) &+ \frac{\lambda e^{4u(x)} - \sqrt{2}\cos\alpha}{2}JC_j(x). \end{aligned} \tag{5.34}$$

De nuevo, a la vista de (5.34) y (5.33), hemos de controlar los ceros de las curvas C_j, $= 1,2,3$, tal y como hacemos en el siguiente lema.

Lema 6 *Un número real x es un cero de la función $e^{2u} + r_j - L$, $j = 1,2,3$, $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda > 0$, si y sólo si o bien $j = 2$, $\cos\alpha = \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}$ y $x = (2k+1)T$, $k \in Z$, o bien $j = 3$, $\lambda a^2 \leq \sqrt{2}$, $\cos\alpha = \lambda a^2/\sqrt{2}$ y $x = 2kT$, $k \in Z$.*

Además, cuando $\cos\alpha = \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}$:

$$e^{2u(x)} + r_2 - L = \frac{(a-\hat{a})\mathrm{cn}^2(r_\lambda x)}{1 + s_\lambda^2\mathrm{sn}^2(r_\lambda x)};$$

y cuando $\cos\alpha = \lambda a^2/\sqrt{2}$:

$$e^{2u(x)} + r_3 - L = \frac{(a+a_3)(\hat{a}-a)\mathrm{sn}^2(r_\lambda x)}{(\hat{a}+a_3)(1 + s_\lambda^2\mathrm{sn}^2(r_\lambda x))},$$

donde

$$r_\lambda = (\lambda/2)\sqrt{(a+a_2)(\hat{a}+a_3)},\ s_\lambda^2 = \frac{a-\hat{a}}{\hat{a}+a_3},$$

siendo

$$-a_3 < -a_2 < 0 < \hat{a},\ a_k = a_k(\lambda),\ k = 2,3,$$

las raíces de la ecuación cúbica $\lambda^2 y^3 + (\lambda^2 a + 4)y^2 - (2/a^2)y - 2/a = 0.$

Demostración del lema: El lema 4(a) tiene como consecuencia que $e^{2u(x)} + r_1 - L$ es una función positiva. Del lema 3(vi), se deduce que

$$\hat{a} + r_i - L \leq e^{2u(x)} + r_i - L \leq a + r_i - L,\ i = 2,3,$$

dándose la primera igualdad (resp. la segunda igualdad) si y sólo si $x = (2k+1)T$, $k \in Z$ (resp. $x = 2kT$, $k \in Z$). Combinando con el lema 4(b) y (c) la anterior desigualdad se prueba la primera parte del lema.

Para las expresiones dadas en los casos $\cos\alpha = \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}$ y $\cos\alpha = \lambda a^2/\sqrt{2}$ hay que utilizar la proposición 15(c) del Apéndice y (A.2).

Podemos entonces del lema 6 deducir que salvo los dos casos peculiares, $\cos\alpha \in \{\lambda a^2/\sqrt{2}, \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}\}$, $C_j(x)$ no tiene ceros e integrando (5.34) se llega a

$$C_j(x) = f_j^\lambda(x) e^{iG_j^\lambda(x)},\ j = 1,2,3, \tag{5.35}$$

en el plano complejo $\Pi_j = gen\{e_j = C_j(0)/|C_j(0)|, Je_j\}$, siendo $f_j^\lambda(x) = |C_j(x)| = ((e^{2u(x)} + r_j - L)/(3r_j - L))^{1/2}$ y $G_j^\lambda(x) = (1/2)\int_0^x (\lambda e^{4u(s)} - \sqrt{2}\cos\alpha)ds/(e^{2u(s)} + r_j - L)$, $j = 1,2,3$.

Llevando (5.35) a (5.14) se concluye la integración en el caso general. En los dos casos restantes, siguiendo un razonamiento similar al del caso minimal con $\alpha = \pi/2$ se llega a que si $\cos\alpha = \lambda\hat{a}^2/\sqrt{2}$, entonces:

$$f_2^\lambda(x) e^{iG_2^\lambda(x)} = \sqrt{\frac{a-\hat{a}}{2L-3\hat{a}}}\,\frac{\mathrm{cn}(r_\lambda x)}{\sqrt{1+s_\lambda^2 \mathrm{sn}^2(r_\lambda x)}}\, e^{\frac{\lambda i}{2}\int_0^x (e^{2u(s)}+\hat{a})ds},$$

y si $\cos\alpha = \lambda a^2/\sqrt{2}$, entonces:

$$f_3^\lambda(x) e^{iG_3^\lambda(x)} = \sqrt{\frac{(a+a_3)(a-\hat{a})}{(\hat{a}+a_3)(2L-3\hat{a})}}\,\frac{\mathrm{sn}(r_\lambda x)}{\sqrt{1+s_\lambda^2 \mathrm{sn}^2(r_\lambda x)}}\, e^{\frac{\lambda i}{2}\int_0^x (e^{2u(s)}+a)ds}.$$

Tal y como ocurría en el caso minimal, estas expresiones que acabamos de obtener son a posteriori acordes con las expresiones generales para $f_i^\lambda(x) e^{G_i^\lambda(x)}$, $i = 2,3$.

Teorema 11 *En apropiados sistemas de referencia de C^3, las inmersiones $\psi^\lambda_{a,\alpha} : (R^2, e^{2u(x)}|dz|^2) \longrightarrow S^5(1)$, $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda > 0$, $(a > a_0(\lambda))$, asociadas a la solución $u(x,a)$ de (5.6) con $\lambda > 0$, vienen dadas por*

$$\psi^\lambda_{a,\alpha}(x,y) = \left(f_1^\lambda(x) e^{i(G_1^\lambda(x)+\sqrt{r_1}y)}, f_2^\lambda(x) e^{i(G_2^\lambda(x)-\sqrt{r_2}y)}, f_3^\lambda(x) e^{i(G_3^\lambda(x)-\sqrt{r_3}y)}\right)$$

con

$$f_j^\lambda(x) = \left(\frac{e^{2u_\lambda(x)} + r_j - L}{3r_j - L}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ y } G_j^\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\lambda e^{4u_\lambda(s)} - \sqrt{2}\cos\alpha}{e^{2u_\lambda(s)} + r_j - L},$$

$j = 1, 2, 3$, siendo

$$L = a + \frac{\lambda^2 a^2}{4} + \frac{1}{2a^2} - \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{2}},$$

y donde $-r_1 \le -r_2 < -r_3 \le 0$, $r_j = r_j(\lambda, a, \alpha)$, $j = 1, 2, 3$, son las raíces del polinomio de tercer grado $r^3 + 2Lr^2 + L^2 r + (\operatorname{sen}^2\alpha)/2$.

Nota 17 Del lema 4 se sigue que si $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$ la correspondiente inmersión es periódica en la variable y; esto es:

$$\psi^\lambda_{a;0,\pi}(x, y + \frac{2\pi}{\sqrt{L}}) = \psi^\lambda_{a;0,\pi}(x,y), \ \forall\,(x,y) \in R^2,$$

donde en este caso $L = a + \frac{\lambda^2 a^2}{4} + \frac{1}{2a^2} \mp \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$, respectivamente según que $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$.

En cualquier caso, $\phi^\lambda_{a,\alpha}$, $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda > 0$, también (véase nota 15) es invariante por el grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2 inducido, vía Π, por

$$\{diag(e^{i\sqrt{r_1}t}, e^{-i\sqrt{r_2}t}, e^{-i\sqrt{r_3}t}) \,/\, t \in R\}.$$

Nota 18 A partir del lema 3(vii) se tiene que $u_0(x,a)$ es límite de $u_\lambda(x,a)$ cuando λ tiende a 0. También ocurre que $L \to A$ y por tanto, para cada $j = 1, 2, 3$, $r_j(\lambda, a, \alpha) \to r_j(0, a, \alpha) \equiv r_j(a, \alpha)$, $f_j^\lambda(x) \to f_j^0(x) \equiv f_j(x)$ y $G_j^\lambda(x) \to G_j^0(x) \equiv G_j(x)$, si $\lambda \to 0$.

Todo ello, e incluso el proceso de integración seguido en estos dos últimos casos, pone de manifiesto que, fijados los parámetros a y α, las inmersiones $\psi_{a,\alpha}$ dadas en el teorema 10 son límite de las inmersiones $\psi^\lambda_{a,\alpha}$ cuando $\lambda \to 0$.

5.3 Clasificación de todos los toros.

Abordamos en esta sección, caso por caso, bajo qué condiciones las inmersiones $\phi^\lambda_{a,\alpha} = \pi \circ \psi^\lambda_{a,\alpha}$, $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda \geq 0$, obtenidas explícitamente en §5.2 son doblemente periódicas, para poder así conseguir la clasificación de los toros con forma de Maslov conforme en el plano proyectivo complejo.

5.3.1 Toros lagrangianos con vector curvatura media paralelo en el plano proyectivo complejo.

Comenzamos estableciendo en el siguiente teorema que todas las inmersiones que estudiabamos en el epígrafe anterior bajo el llamado "caso constante" inducen inmersiones doblemente periódicas del plano R^2 (con una métrica homotética a la euclídea) en CP^2.

Teorema 12 *Fijado $\lambda \geq 0$, para todo $a_0 = a_0(\lambda) \in]0,1]$ y para todo $\alpha \in [0,\pi]$, la inmersión $\phi_{a_0,\alpha} = \Pi \circ \psi_{a_0,\alpha} : (R^2, a_0|dz|^2) \longrightarrow CP^2$ es doblemente periódica.*

Demostración: Caracterizamos en primer lugar la periodicidad de $\phi_{a_0,\alpha} = \Pi \circ \psi_{a_0,\alpha}$ respecto a un vector (μ,ν) no nulo. A la vista de las expresiones explícitas dadas en el teorema 9 en §5.2, se tiene que $\phi_{a_0,\alpha}(x+\mu, y+\nu) = \phi_{a_0,\alpha}(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$, si y sólo si existe una función diferenciable $\theta : R^2 \longrightarrow R$ tal que $e^{i\theta(x,y)}\psi_{a_0,\alpha}(x+\mu, y+\nu) = \psi_{a_0,\alpha}(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$. Derivando en esta expresión y utilizando que $\psi_{a_0,\alpha}$ es conforme, se concluye que la función θ es constante, $\theta \in R$, por lo que $e^{i\theta}\psi_{a_0,\alpha}(x+\mu, y+\nu) = \psi_{a_0,\alpha}(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$, lo cual se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
\theta + G_1\mu + \sqrt{r_1}\nu &= 2\pi m_1, \\
\theta + G_2\mu - \sqrt{r_2}\nu &= 2\pi m_2, \\
\theta + G_3\mu - \sqrt{r_3}\nu &= 2\pi m_3,
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

para ciertos $m_j \in Z$, $j = 1,2,3$, si $\alpha \neq \alpha_0 = \cos^{-1}\sqrt{1-a_0^3}$, y

$$
\begin{aligned}
\theta + \sqrt{2a_0}\nu &= 2\pi m_1, \\
\theta - \xi\mu - \frac{\sqrt{2a_0}}{2}\nu &= 2\pi m_2, \\
\theta + \eta\mu - \frac{\sqrt{2a_0}}{2}\nu &= 2\pi m_3,
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

para ciertos $m_j \in Z$, $j = 1, 2, 3$, si $\alpha = \alpha_0$.

Por tratarse en ambos casos de sistemas con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas (θ, μ, ν), en general no homogéneo (salvo que tomasemos $m_1 = m_2 = m_3 = 0$), (μ, ν) será un período de $\phi_{a_0,\alpha}$ si (5.36) y (5.37) son sistemas de Cramer, esto es, con solución única (para cada terna fijada de enteros m_j, $j = 1, 2, 3$). Para ello, basta probar que el determinante de la matriz de coeficientes, Δ, en ambos casos es no nulo.

Es conveniente entonces tener en cuenta que, utilizando el lema 4, si $\alpha > \alpha_0$ entonces $G_2 \geq G_1 > 0 > G_3$, mientras que si $\alpha < \alpha_0$, entonces $G_3 > 0 > G_1 \geq G_2$. Así pues, si $\alpha > \alpha_0$ es fácil concluir de lo anterior que $\Delta < (\sqrt{r_2} + 2\sqrt{r_3})(G_3 - G_2) < 0$ y si $\alpha < \alpha_0$ de modo análogo se llega a que $\Delta > (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})(G_3 - G_1)$. Si $\alpha = \alpha_0$, directamente $\Delta = 3\sqrt{2a_0}(\eta + \xi)/2 > 0$.

Consiguientemente, para cualquier terna de números enteros, m_j, $j = 1, 2, 3$, se encuentra una pareja (μ, ν) que es período de $\phi_{a_0,\alpha}$. La demostración del teorema se concluye asegurándonos de que podemos encontrar un par de vectores (μ_k, ν_k), $k = 1, 2$, linealmente independientes, entre esos períodos. Ello se consigue, por ejemplo, escogiendo $m_1 = 1$, $m_2 = 0$, $m_3 = 0$ para obtener (μ_1, ν_1) y $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = 0$ para obtener (μ_2, ν_2), como es fácil comprobar.

De la nota 4 en §2.3, se sigue que las inmersiones $\psi_{a_0,\alpha}$ están caracterizadas por tener vector curvatura media paralelo, por lo que también las inmersiones $\phi_{a_0,\alpha}$ gozan de esa propiedad. Utilizando la proposición 1 (i), si ϕ es una inmersión lagrangiana con vector curvatura media H paralelo, se sigue que JH es un campo paralelo sobre la superficie, por lo que se anula idénticamente o no tiene ceros. En este último caso la superficie es llana, y si además fuese compacta y orientable necesariamente habría de ser un toro. Por tanto, a modo de resumen y como consecuencia del anterior teorema y del estudio realizado en la sección precedente, se tiene:

Corolario 7 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana con vector curvatura media paralelo de una superficie compacta y orientable Σ en el plano proyectivo complejo. Entonces o ϕ es minimal o el recubridor universal de ϕ es congruente con $\phi_{a_0,\alpha}$ para algún $(a_0, \alpha) \in]0, 1] \times [0, \pi]$.*

Pero es bien conocido que haciendo cociente por la fibración de Hopf, $\Pi : S^5(1) \longrightarrow CP^2$, de las inmersiones

$$\Psi_{R_1,R_2,R_3} : S^1(R_1) \times S^1(R_2) \times S^1(R_3) \hookrightarrow S^5(1),$$

dadas por

$$\Psi(z_1, z_2, z_3) = (z_1, z_2, z_3),$$

con $|z_j| = R_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, $R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1$, restringiendo la acción de S^1 sobre $S^5(1)$ a $S^1(R_1) \times S^1(R_2) \times S^1(R_3)$ (que actúa libre y discontinuamente) se obtienen todas las inmersiones lagrangianas de toros con curvatura media paralela

$$\Phi_{R_1,R_2,R_3} : T^2_{R_1,R_2,R_3} = S^1(R_1) \times S^1(R_2) \times S^1(R_3)/S^1 \longrightarrow CP^2,$$

en el plano proyectivo complejo (cf. [NT]). Por ejemplo, $\Phi_{1/\sqrt{3},1/\sqrt{3},1/\sqrt{3}}$ es la correspondiente al toro de Clifford generalizado (nota 13), que es la única inmersión minimal de la familia.

Esta familia es por supuesto dos-paramétrica y esencialmente puede parametrizarse en el triángulo esférico $\{(x, y, z) \in S^2(1) \,/\, 1 > x \geq y \geq z > 0\}$.

Vamos seguidamente a establecer una correspondencia entre ambas representaciones,

$$\{\phi_{a_0,\alpha} \,/\, (a_0, \alpha) \in]0, 1] \times [0, \pi]\}$$

y

$$\{\Phi_{R_1,R_2,R_3} \,/\, R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 = 1,\ 1 > R_1 \geq R_2 \geq R_3 > 0\},$$

de la misma familia. A partir de las expresiones explícitas de $\phi_{a_0,\alpha} = \Pi \circ \psi_{a_0,\alpha}$ dadas en el teorema 9, observamos que $\psi_{a_0,\alpha}$ cae en el producto de tres circunferencias de radios $f_j = f_j(a_0, \alpha)$, $j = 1, 2, 3$, cumpliéndose a partir de (5.15) y (5.16):

$$\begin{aligned} &\alpha > \alpha_0 \Rightarrow R_1 = f_3,\ R_2 = f_1,\ R_3 = f_2, \\ &\alpha < \alpha_0 \Rightarrow R_1 = f_2,\ R_2 = f_1,\ R_3 = f_3, \end{aligned} \tag{5.38}$$

mientras que si $\alpha = \alpha_0$ entonces $R_2 = 1/\sqrt{3}$ y los valores correspondientes a R_1 y a R_3 son los límites que resuelven las indeterminaciones $0/0$ que aparecen para f_2 y f_3 cuando α tiende a α_0 (véase (5.16)) y que se desprenden de la expresión explícita de ψ_{a_0,α_0} dada en §5.2.

Tenemos así definida mediante (5.38) una aplicación

$$\varphi :]0, 1] \times [0, \pi] \longrightarrow \{(R_1, R_2, R_3) \in S^2(1) \,/\, 1 > R_1 \geq R_2 \geq R_3 > 0\},$$

que relaciona los espacios paramétricos de las dos familias, la cual no es difícil comprobar que verifica, haciendo uso de (5.15), (5.16) y (5.38), las siguientes propiedades:

$$
\begin{aligned}
\varphi(1,\alpha) &= (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}),\ \forall\, \alpha \in [0,\pi];\\
\varphi(a_0,0) &= \left(\sqrt{\frac{a_0}{2L(a_0,0)}}, \sqrt{\frac{a_0}{2L(a_0,0)}}, \sqrt{1-\frac{a_0}{L(a_0,0)}}\right),\\
\varphi(a_0,\pi) &= \left(\sqrt{1-\frac{a_0}{L(a_0,\pi)}}, \sqrt{\frac{a_0}{2L(a_0,\pi)}}, \sqrt{\frac{a_0}{2L(a_0,\pi)}}\right);\\
\lim_{a_0\to 0+} \varphi(a_0,0) &= (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0),\\
\lim_{a_0\to 0+} \varphi(a_0,\pi) &= (1,0,0).
\end{aligned}
$$

Estas propiedades ponen de manifiesto que φ transforma la frontera de $]0,1]\times[0,\pi]$ en la frontera de $\{(R_1,R_2,R_3)\in R^3\,/\,R_1^2+R_2^2+R_3^2=1,\ 1>R_1\geq R_2\geq R_3>0\}$. El establecer entonces explícitamente que φ aplica biyectivamente los interiores de ambos espacios paramétricos es un problema complicado pues incluso en casos relativamente sencillos como por ejemplo cuando $\alpha=0$ ó $\alpha=\pi$, para expresar a_0 en función de los radios R_j, $j=1,2,3$, se requiere resolver ecuaciones de grado 12.

No obstante, no es excesivamente complicado, aunque sí laborioso, poner de manifiesto que, partiendo de que $R_3\to 0$ si $a_0\to 0+$, para cada $a_0\in]0,1[$, $\varphi(a_0,\alpha)$ variando $\alpha\in[0,\pi]$ es el arco de circunferencia máxima en la esfera unidad que une $(1\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ con $(R_1(0+), R_2(0+), 0)$, por lo que φ es una buena manera de relacionar ambas representaciones de la familia de toros lagrangianos con vector curvatura media paralelo, pero queremos hacer hincapié que la representación obtenida en esta memoria aporta inmersiones conformes de cada uno de los toros de la citada familia.

5.3.2 Toros lagrangianos minimales en el plano proyectivo complejo.

A la hora de establecer qué inmersiones $\phi^0_{a,\alpha}$, $(a,\alpha)\in\Gamma^0$, son doblemente periódicas con respecto algún retículo de R^2, consideramos el siguiente subconjunto Γ^0_* de Γ^0:

$$\Gamma^0_* = \{(a,\alpha)\in]1,+\infty[\times[0,\pi/2]\,/\,(r_3/r_2)^{1/2}\in Q \text{ y } F(a,\alpha)\in Q\}$$

donde

$$F(a,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left[(r_3/r_2)^{1/2}G_2(2T) - G_3(2T)\right],$$

$2T$ es el período de u_0 and r_i, G_i, $i = 2, 3$ fueron definidos en el enunciado del teorema 11.

El apropiado manejo de este subconjunto Γ^0_* en el estudio de la doble periodicidad de las inmersiones $\phi_{a,\alpha}$, $(a, \alpha) \in \Gamma^0$ requiere previamente el siguiente lema.

Lema 7 *Las funciones G_j definidas en el teorema 11 verifican las siguientes propiedades:*

(a) $G_j(x + 2mT) = G_j(x) + mG_j(2T)$, $m \in Z$ $j = 1, 2, 3$.

(b) $\sum_{j=1}^3 G_j(2T) = 0$.

(c) *Cuando $\alpha = 0$, se cumple:*

$$G_3(2T)/2\pi = (1/\sqrt{2}\pi) \int_0^{2T} e^{-2u(x)} dx = \Lambda_0(\xi, p),$$

donde Λ_0 es la función Heumann-Lambda (véase por ejemplo [BF]) y ξ y p son constantes dependiendo de la condición inicial a. Cuando a crece de 1 a $+\infty$, entonces $G_3(2T)/2\pi$ decrece monotóni- camente de $1/\sqrt{3}$ a $1/2$.

Demostración: El apartado (a) es claro a partir de la periodicidad de la función u, mientras que el (b) se deduce a partir de que

$$G_1(x) + G_2(x) + G_3(x) = -\arctan\left(\frac{\sqrt{2}u'(x)e^{2u(x)}}{\cos\alpha}\right)$$

para $\alpha \neq \pi/2$.

Para el apartado (c), consúltese en el Apéndice la proposición 15(b) y (A.14).

Ahora podemos hacer notar que a partir del lemas 4(e) y el lema 7(b), el subconjunto Γ^0_* puede definirse de manera equivalente en términos de las otras raíces r_j y $G_j(2T)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Es decir, por ejemplo, Γ^0_* puede definirse cambiando r_2 por r_1 y $G_2(2T)$ por $G_1(2T)$.

En cuanto al tamaño de Γ^0_*, comentar en primer lugar que el conjunto

$$\{a \in]1, +\infty[\, / \,(a, 0) \in \Gamma^0_*\}$$

es denso en $]1, +\infty[$, utilizando que al ser $\alpha = 0$ entonces $r_3 = 0$ (lema 4), y así $F(a, 0) = -G_3(2T)/2\pi$. Haciendo uso del lema 7(c) se concluye la densidad anunciada.

En segundo lugar, también el conjunto

$$\{a \in]1, +\infty[\, / \, (a, \pi/2) \in \Gamma^0_*\}$$

es denso en $]1, +\infty[$, pues si $\alpha = \pi/2$ entonces ahora $F(a, \pi/2) = 0$ y utilizando el lema 4 y la proposición 15(b) del Apéndice se sigue que $(r_3/r_2)^{1/2} = \hat{a}/a = (1 + \sqrt{1 + 8a^3})/4a^3$, que es una función estrictamente decreciente que aplica $]1, +\infty[$ en $]0, 1[$.

Si $\alpha \in]0, \pi/2[$, es complicado obtener una presumible densidad en estos casos también.

El siguiente teorema responde a la cuestión planteada en §5.2 acerca de la decisión sobre qué inmersiones $\phi^0_{a,\alpha}$ son doblemente periódicas.

Teorema 13 *La inmersión $\phi^0_{a,\alpha} : R^2 \longrightarrow CP^2$, $(a, \alpha) \in \Gamma^0$, es doblemente periódica con respecto a algún retículo de R^2 si y sólo si $(a, \alpha) \in \Gamma^0_*$.*

Demostración: En primer lugar probaremos que las periodicidades de $\phi^0_{a,\alpha}$ y $\psi^0_{a,\alpha}$ son equivalentes.

Ya que $\phi^0_{a,\alpha} = \Pi \circ \psi^0_{a,\alpha}$, siendo Π la fibración de Hopf, la periodicidad de $\psi^0_{a,\alpha}$ implica trivialmente la de $\phi^0_{a,\alpha}$.

Recíprocamente, supongamos que $\phi^0_{a,\alpha}$ es periódica. Ello significa que existe un vector no nulo $(\xi, \eta) \in R^2$ tal que

$$\phi^0_{a,\alpha}(x + \xi, y + \eta) = \phi^0_{a,\alpha}(x, y), \tag{5.39}$$

$\forall \, (x, y) \in R^2$. Utilizando por ejemplo que $\phi^0_{a,\alpha}$ es conforme, se llega a que $u_0(x + \xi) = u_0(x)$, $\forall \, x \in R$. Por tanto, del lema 3(ii) se sigue que existe un número entero $m \in Z$ tal que $\xi = 2mT$.

Por otro lado, puesto que $\phi^0_{a,\alpha} = \Pi \circ \psi^0_{a,\alpha}$, entonces (5.39) obliga la existencia de una función diferenciable $\theta : R^2 \longrightarrow R$ tal que

$$\psi^0_{a,\alpha}(x + 2mT, y + \eta) = e^{i\theta(x,y)} \psi^0_{a,\alpha}(x, y), \tag{5.40}$$

$\forall \, (x, y) \in R^2$. Derivando en (5.40) y usando que también $\psi^0_{a,\alpha}$ es conforme concluímos que θ es una función constante.

Utilizando ahora el teorema 11 y el lema 7(a), se obtiene que (5.40) equivale a

$$\begin{aligned} e^{imG_1^0(2T)}e^{i\sqrt{r_1}\eta} &= e^{i\theta} \\ e^{imG_i^0(2T)}e^{-i\sqrt{r_i}\eta} &= e^{i\theta},\ i=2,3, \end{aligned}$$

si $\alpha \neq \pi/2$, y

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{r_1}\eta} &= e^{i\theta} \\ (-1)^m e^{-i\sqrt{r_i}\eta} &= e^{i\theta},\ i=2,3, \end{aligned}$$

si $\alpha = \pi/2$. Usando los lemas 4(e) y 7(b), se concluye en cualquier caso que $e^{3i\theta} = 1$ y así (5.40) implica que $\psi^0_{a,\alpha}(x+6mT, y+3\eta) = \psi^0_{a,\alpha}(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$. Luego $\psi^0_{a,\alpha}$ es también periódica con respecto al vector $(6mT, 3\eta)$.

De este modo, para probar el teorema, hemos de comprobar que $\psi^0_{a,\alpha}$ es doblemente periódica con respecto a algún retículo de R^2 si y sólo si $(a,\alpha) \in \Gamma^0_*$.

Supongamos primeramente que $\psi^0_{a,\alpha}$ es doblemente periódica respecto al retículo generado por $\{(2m_1T,\eta_1),\ (2m_2T,\eta_2)\}$ con $m_k \in Z$, $k=1,2$. Entonces es fácil ver que $\xi = m_1\eta_2 - m_2\eta_1$ es un número real no nulo tal que $\psi^0_{a,\alpha}(x, y+\xi) = \psi^0_{a,\alpha}(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$. Entonces, del teorema 11, se alcanza que $e^{i\sqrt{r_j}\xi} = 1$, $\forall\, j = 1,2,3$. En particular, $(r_3/r_2)^{1/2}$ es un número racional. Si $\alpha = \pi/2$, esto ya significa que $(a,\pi/2) \in \Gamma^0_*$. Si $\alpha \neq \pi/2$, no es restrictivo suponer que $m_1 \neq 0$. De nuevo del teorema 11, la periodicidad de $\psi^0_{a,\alpha}$ con respecto a $(2m_1T,\eta_1)$ implica que $e^{im_1G_i(2T)}e^{-i\sqrt{r_i}\eta_1} = 1$, $i=2,3$, lo que conlleva que

$$m_1 G_i^0(2T) - \sqrt{r_i}\eta_1 \in 2\pi Z,\ i=2,3. \tag{5.41}$$

Ya que $m_1 \in Z^*$ y $(r_3/r_2)^{1/2}$ es un número racional, (5.41) supone que $F(a,\alpha)$ es también un número racional. Por consiguiente hemos probado que $(a,\alpha) \in \Gamma^0_*$.

Para el recíproco, si partimos de que $(a,\alpha) \in \Gamma^0_*$, sean $m_i, n_i \in Z$ con $(m_i,n_i) = 1$, $i = 1,2$ tales que $(r_3/r_2)^{1/2} = m_1/n_1$ y $F(a,\alpha) = m_2/n_2$. Entonces es un ejercicio comprobar que $\psi^0_{a,\alpha}$ es doblemente periódica respecto al retículo generado por $\{(2n_2T, n_2G_2(2T)/\sqrt{r_2}),\quad (0, 2n_1\pi/\sqrt{r_2})\}$ (resp. $\{(4T,0),\ (0,2n_1\pi/\sqrt{r_2})\}$) cuando $\alpha \neq \pi/2$ (resp. cuando $\alpha = \pi/2$), lo que finaliza la demostración.

Nota 19 Observamos que las inmersiones $\psi^0_{a,\alpha} : R^2 \longrightarrow S^5(1)$, $(a,\alpha) \in \Gamma^0_*$, son también doblemente periódicas. Por tanto, definen una familia de toros en $S^5(1)$ que son recubridores finitos de los correspondientes toros definidos por las inmersiones $\phi^0_{a,\alpha} : R^2 \longrightarrow CP^2$, $(a,\alpha) \in \Gamma^0_*$.

Terminamos este epígrafe con el resultado esperado de clasificación, consecuencia del corolario 6 y del teorema 8 y de todo el anterior razonamiento (téngase en cuenta que una superficie lagrangiana minimal compacta y orientable que sea invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2, o es totalmente geodésica o no tiene puntos geodésicos).

Corolario 8 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana minimal de una superficie compacta y orientable en el plano proyectivo complejo. Si ϕ es invariante por un grupo uniparamétrico de isometrías holomorfas de CP^2, entonces ϕ es totalmente geodésica o el recubridor universal de ϕ es congruente a $\phi^0_{a,\alpha}$ con $(a,\alpha) \in \Gamma^0_*$.*

5.3.3 Toros lagrangianos no minimales con forma de Maslov conforme en el plano proyectivo complejo.

Para delimitar qué inmersiones $\phi^\lambda_{a,\alpha}$, $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda > 0$, son doblemente periódicas con respecto algún retículo de R^2, la situación se complica ahora un poco más que en el caso minimal. Consideramos ahora el siguiente subconjunto Γ^λ_* de Γ^λ:

$$\Gamma^\lambda_* = \{(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda \,/\, (r_3/r_2)^{1/2} \in Q \text{ y } F^\lambda(a,\alpha) \in Q\},$$

donde

$$F^\lambda(a,\alpha) = \frac{1}{2\pi}\Big[(r_3/r_2)^{1/2}(G^\lambda_1(2T) - 2G^\lambda_2(2T) + G^\lambda_3(2T)) - \\ (G^\lambda_1(2T) + G^\lambda_2(2T) - 2G^\lambda_3(2T))\Big],$$

$2T$ es el período de u_λ and r_i, $i = 2,3$ y G^λ_j, $j = 1,2,3$ fueron definidos en el enunciado del teorema 11.

Es claro que a partir de la periodicidad de la función u_λ las funciones $G_j^\lambda(x)$ verifican:

$$G_j^\lambda(x+2mT) = G_j^\lambda(x) + mG_j^\lambda(2T),\ m \in Z,\ j = 1,2,3; \tag{5.42}$$

sin embargo, no existe a priori una relación tan "buena" entre los $G_j^\lambda(2T)$ como en el caso minimal (véase lema 7); aun cuando considerasemos la solución constante no conseguimos ninguna propiedad semejante a la recogida en el lema 7(b) para el caso minimal.

Si $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi$, entonces $r_3 = 0$ (lema 4) y las condiciones que definen Γ_λ^* se vuelven un poco más sencillas. Concretamente, utilizando que $r_1 = r_2 = L$ (lema 4), $(a,0) \in \Gamma_*^\lambda$ (resp. $(a,\pi) \in \Gamma_*^\lambda$) si y sólo si $(-L(\lambda,a,0)/\pi)\int_0^{2T}(\lambda e^{4u(s,a)} - \sqrt{2})/(e^{2u(s,a)}(e^{2u(s,a)} - L(\lambda,a,0)))ds \in Q$ ($(-L(\lambda,a,\pi)/\pi)\int_0^{2T}(\lambda e^{4u(s,a)}-\sqrt{2})/(e^{2u(s,a)}(e^{2u(s,a)}-L(\lambda,a,\pi)))ds \in Q$, resp.) por lo que prácticamente podemos concluir en ambos casos la densidad de los conjuntos $\{a\,/\,(a,0) \in \Gamma_*^\lambda\}$ y $\{a\,/\,(a,\pi) \in \Gamma_*^\lambda\}$ en el intervalo $[a_0(\lambda), +\infty[$, tal y como ocurría en el caso minimal cuando $\alpha = 0$ ó $\alpha = \pi/2$ (véase §5.3.2).

El siguiente teorema sería el análogo al teorema 13 en este caso no minimal.

Teorema 14 *La inmersión $\phi_{a,\alpha}^\lambda : R^2 \longrightarrow CP^2$, $(a,\alpha) \in \Gamma^\lambda$, $\lambda > 0$ es doblemente periódica con respecto a algún retículo de R^2 si y sólo si $(a,\alpha) \in \Gamma_*^\lambda$.*

Demostración: Es obvio, puesto que $\phi_{a,\alpha}^\lambda = \Pi \circ \psi_{a,\alpha}^\lambda$, siendo Π la fibración de Hopf, que la periodicidad de $\psi_{a,\alpha}^\lambda$ implica trivialmente la de $\phi_{a,\alpha}^\lambda$. Pero en esta situación general no podemos asegurar el recíproco, precisamente por carecer de una relación que ligue los $G_j^\lambda(2T)$, $j = 1,2,3$.

Para caracterizar la doble periodicidad de $\phi_{a,\alpha}^\lambda$, comencemos suponiendo que $\phi_{a,\alpha}^\lambda$ es periódica. Ello claramente significa, al igual que en el caso minimal, que existe $m \in Z$ y $\eta \in R$, no nulos a la vez, tales que:

$$\phi_{a,\alpha}^\lambda(x+2mT, y+\eta) = \phi_{a,\alpha}^\lambda(x,y), \tag{5.43}$$

$\forall\,(x,y) \in R^2$.

Por otro lado, puesto que $\phi_{a,\alpha}^\lambda = \Pi \circ \psi_{a,\alpha}^\lambda$, entonces (5.43) obliga la existencia de una constante $\theta \in R$ tal que

$$e^{i\theta}\psi_{a,\alpha}^\lambda(x+2mT, y+\eta) = \psi_{a,\alpha}^\lambda(x,y), \tag{5.44}$$

$\forall\,(x,y) \in R^2$.

Utilizando ahora el teorema 11 y (5.42), teniendo en cuenta (5.44), se obtiene:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} e^{imG_1^\lambda(2T)} e^{i\sqrt{r_1}\eta} &= 1, \\ e^{i\theta} e^{imG_i^\lambda(2T)} e^{-i\sqrt{r_i}\eta} &= 1,\ i = 2,3. \end{aligned}$$

De aquí podemos concluir que $\phi_{a,\alpha}^\lambda$ es periódica si y sólo si existen $m \in Z$ y $\eta \in R$, no nulos simultáneamente y existe $\theta \in R$ solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} \theta + G_1^\lambda(2T)m + \sqrt{r_1}\eta &= 2\pi h_1, \\ \theta + G_2^\lambda(2T)m - \sqrt{r_2}\eta &= 2\pi h_2, \\ \theta + G_3^\lambda(2T)m - \sqrt{r_3}\eta &= 2\pi h_3, \end{aligned} \tag{5.45}$$

para ciertos $h_1, h_2, h_3 \in Z$, fijos pero arbitrarios.

Comentar en primer lugar que (5.45) es un sistema de Cramer pues utilizando el lema 4 no es complicado concluir que el determinante de la matriz de coeficientes de (5.45), que viene dado por

$$\begin{aligned} \Delta = G_1^\lambda(2T)(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_2}) - \\ -G_2^\lambda(2T)(\sqrt{r_2} + 2\sqrt{r_3}) + G_3^\lambda(2T)(2\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}), \end{aligned} \tag{5.46}$$

es no nulo. Por tanto, tiene solución única para cada terna de números enteros h_j, $j = 1,2,3$. En particular, el valor de la incógnita m vendría dado por

$$m = \frac{2\pi[h_1(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_2}) - h_2(\sqrt{r_2} + 2\sqrt{r_3}) + h_3(2\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})]}{G_1^\lambda(2T)(\sqrt{r_3} - \sqrt{r_2}) - G_2^\lambda(2T)(\sqrt{r_2} + 2\sqrt{r_3}) + G_3^\lambda(2T)(2\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})}. \tag{5.47}$$

Estamos ya en condiciones de probar el teorema. Si comenzamos suponiendo que $\phi_{a,\alpha}^\lambda$ es doblemente periódica respecto al retículo generado por $\{(2m_1T, \eta_1), (2m_2T, \eta_2)\}$ con $m_k \in Z$, $k = 1,2$, entonces es fácil ver que $\xi = m_1\eta_2 - m_2\eta_1$ es un número real no nulo tal que $\phi_{a,\alpha}^\lambda(x, y+\xi) = \phi_{a,\alpha}^\lambda(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$. Entonces, del teorema 11 no es difícil concluir que $(r_3/r_2)^{1/2}$ es un número racional, digamos $(r_3/r_2)^{1/2} = q \in Q$.

Esto último junto con el hecho de que ahora disponemos de dos soluciones enteras para m en (5.47), m_1 y m_2, alguna de las cuales ha de ser obviamente no nula, conduce rápidamente a que $F^\lambda(a,\alpha) \in Q$. Por consiguiente hemos probado que $(a,\alpha) \in \Gamma_*^\lambda$.

Recíprocamente, si partimos de que $(a,\alpha) \in \Gamma_*^\lambda$, sean $m_i, n_i \in Z$ con $(m_i, n_i) = 1$, $i = 1, 2$ tales que $(r_3/r_2)^{1/2} = q = m_1/n_1$ y $F^\lambda(a,\alpha) = \hat{q} = m_2/n_2$. Entonces es un ejercicio comprobar que $\psi_{a,\alpha}^\lambda(x, y + 2n_1\pi/\sqrt{r_2}) = \psi_{a,\alpha}^\lambda(x,y)$, $\forall\,(x,y) \in R^2$.

Veamos finalmente que la solución m dada en (5.47) es un número entero para algunos h_j, $j = 1, 2, 3$, números enteros concretos. Para ello, es sencillo verificar que si $(\hat{q} - 3q)/(2+q) = r/s$, con $(r,s) = 1$, entonces tomando $h_1 = s$, $h_2 = -s$ y $h_3 = r$ resulta que $m = s \in Z^*$, lo que proporciona un período para $\phi_{a,\alpha}^\lambda$, por supuesto linealmente independiente con $(0, 2n_1\pi/\sqrt{r_2})$, finalizando así la demostración.

Terminamos el capítulo con el resultado esperado de clasificación.

Corolario 9 *Sea $\phi : \Sigma \longrightarrow CP^2$ una inmersión lagrangiana con forma de Maslov conforme de un toro en el plano proyectivo complejo. Entonces ϕ es minimal o el recubridor universal de ϕ es congruente a $\phi_{a,\alpha}^\lambda$ con $(a,\alpha) \in \Gamma_*^\lambda$, $\lambda > 0$.*

Este resultado, junto con el de clasificación de las esferas lagrangianas con forma de Maslov conforme en CP^2 que brinda el corolario 2 de §3.2, completa la clasificación de las superficies lagrangianas compactas y orientables con forma de Maslov conforme en el plano proyectivo complejo (véase proposición 5 en §1.1).

Appendix A

Integración de ecuaciones diferenciales.

En este apéndice, recogemos —a modo de listado— cuantas propieda- des se necesitan acerca de las integrales elípticas y de las funciones elípticas de Jacobi para proceder a integrar las ecuaciones diferenciales ordinarias que aparecen en diferentes capítulos de esta memoria.

A.1 Integrales elípticas.

Un estudio detallado de las integrales elípticas puede encontrarse en [AS] y en [BF]. En esta sección nos limitamos a definir los conceptos fundamentales y a listar solamente aquellas propiedades de las mismas que se utilizan en esta memoria.

Formas canónicas de las integrales elípticas.

Empleando la notación de Legendre, se define la *integral elíptica normal de primera especie* por

$$F(\varphi) = F(\varphi, p) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \ 0 \leq p \leq 1,$$

la *integral elíptica normal de segunda especie* por

$$E(\varphi) = E(\varphi, p) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \theta} d\theta, \ 0 \leq p \leq 1,$$

y la *integral elíptica normal de tercera especie* por

$$\Pi(\varphi, q^2, p) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1 - q^2 \operatorname{sen}^2 \theta)\sqrt{1 - p^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \;\; 0 \leq p \leq 1, q^2 \in R.$$

En cuanto a la nomenclatura empleada, p recibe el nombre de *módulo* y toma valores entre 0 y 1, $p' = \sqrt{1 - p^2}$ se denomina *módulo complementario* y la variable φ se suele llamar el *argumento* y usualmente se entiende que varía entre 0 y $\pi/2$.

Integrales elípticas completas. Cuando el argumento φ toma el valor $\pi/2$ las anteriores integrales elípticas reciben el calificativo de *completas* y se emplea la notación

$$\begin{aligned} K = K(p) &= F(\pi/2, p), \\ E = E(p) &= E(\pi/2, p), \\ \Pi(q^2, p) &= \Pi(\pi/2, q^2, p), \end{aligned}$$

con $q^2 \neq 1$.

Destacamos a continuación las propiedades más relevantes para nuestros propósitos de las funciones anteriormente definidas.

$$E(p) \geq \frac{\pi}{4}(1 + \sqrt{1 - p^2}), \tag{A.1}$$

dándose la igualdad si y sólo si $p^2 = 0$.

Nuevas propiedades de las integrales elípticas requieren la introducción de las funciones elípticas de Jacobi.

A.2 Funciones elípticas de Jacobi.

En [AS], [BF] y [D] se realiza un estudio pormenorizado de las funciones elípticas de Jacobi. Aquí meramente nos centramos en describir las nociones fundamentales y a listar solamente aquellas propiedades de las mismas que se utilizan en esta memoria.

Definiciones.

En lugar de considerar la integral elíptica de primera especie como primer objeto de estudio, Abel y Jacobi le dieron la vuelta al problema e investigaron la inversión de esta integral. Así, denotando la inversa de $F(\varphi)$ por

$\mathrm{am}(x,p)=\varphi$ (función *amplitud*), las funciones elípticas de Jacobi "elementales" se definen por

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}\,x=\mathrm{sn}(x,p) &= \mathrm{sen}\,\varphi,\\ \mathrm{cn}\,x=\mathrm{cn}(x,p) &= \cos\varphi,\\ \mathrm{dn}\,x=\mathrm{dn}(x,p) &= \sqrt{1-p^2\,\mathrm{sen}^2\,\varphi},\end{aligned}$$

denominándose *seno amplitud, coseno amplitud y delta amplitud* respectivamente.

Propiedades.

Las propiedades básicas de estas funciones se describen a continuación agrupadas en diferentes bloques.

- Relaciones fundamentales:

$$\mathrm{sn}^2(x,p)+\mathrm{cn}^2(x,p)=1=p^2\mathrm{sn}^2(x,p)+\mathrm{dn}^2(x,p). \tag{A.2}$$

$$-1\le \mathrm{sn}x\le 1,\ -1\le \mathrm{cn}x\le 1,\ p'\le \mathrm{dn}x\le 1. \tag{A.3}$$

- Relaciones de periodicidad:

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(x+2K)=-\mathrm{sn}\,x,\ \mathrm{sn}(K-x)=\mathrm{sn}(K+x),\\ \mathrm{cn}(x+2K)=-\mathrm{cn}\,x,\\ \mathrm{dn}(x+2K)=\mathrm{dn}\,x,\ \mathrm{dn}(K+x)=\mathrm{dn}(K-x)=1/\mathrm{dn}\,x,\end{aligned} \tag{A.4}$$

donde $K=F(\pi/2)$ es la integral elíptica completa de primera especie.

- Valores especiales del módulo:

$$\mathrm{sn}(x,0)=\mathrm{sen}\,x,\ \mathrm{cn}(x,0)=\cos x,\ \mathrm{dn}(x,0)=1, \tag{A.5}$$

y

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(x,1) &= \tanh x,\\ \mathrm{cn}(x,1)=1/\cosh x \quad &, \quad \mathrm{dn}(x,1)=1/\cosh x.\end{aligned} \tag{A.6}$$

- Valores destacados:

$$\begin{aligned}\mathrm{sn}(0)=0 \quad &, \quad \mathrm{cn}(0)=1=\mathrm{dn}(0)=1,\\ \mathrm{sn}(K)=1,\ \mathrm{cn}(K)=0 \quad &, \quad \mathrm{dn}(K,p)=p'=\sqrt{1-p^2}.\end{aligned} \tag{A.7}$$

- Transformación de Gauss:

$$\text{(A.8)} \qquad \mathrm{dn}(x,p) = \frac{1 - p_1 \mathrm{sn}^2(x_1,p_1)}{1 + p_1 \mathrm{sn}^2(x_1,p_1)},$$

  donde $x_1 = x/(1+p_1)$ y $p_1 = (1-p')/(1+p')$.

- Derivadas:

$$\text{(A.9)} \qquad \begin{aligned} \frac{d}{dx}\mathrm{sn}x &= \mathrm{cn}x\mathrm{dn}x, \\ \frac{d}{dx}\mathrm{cn}x &= -\mathrm{sn}x\mathrm{dn}x, \\ \frac{d}{dx}\mathrm{dn}x &= -p^2\mathrm{sn}x\mathrm{cn}x. \end{aligned}$$

- Integrales:

$$\text{(A.10)} \qquad \begin{aligned} \int \mathrm{dn}(w)dw &= \mathrm{sen}^{-1}(\mathrm{sn}\,w), \\ \int dw/\mathrm{dn}(w) &= \frac{1}{p'}\cos^{-1}\frac{\mathrm{cn}\,w}{\mathrm{dn}\,w}. \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $u = F(\varphi,p)$, pueden relacionarse las integrales elípticas y las funciones elípticas de Jacobi obteniéndose que las integrales elípticas de segunda y tercera especie pueden expresarse como:

$$\text{(A.11)} \qquad E(\varphi,p) = E(u,p) = \int_0^u \mathrm{dn}^2(w,p)dw,$$

y

$$\text{(A.12)} \qquad \Pi(\varphi,q^2,p) = \Pi(u,q^2,p) = \int_0^u \frac{dw}{1 - q^2\mathrm{sn}^2(w,p)},$$

donde sn y dn son funciones elípticas de Jacibi definidas en §A.1. En este contexto, destacamos la siguiente propiedad:

$$\text{(A.13)} \qquad E(u+K) = E(u) + K, \forall u \in R.$$

Las integrales elípticas completas de tercera especie pueden evaluarse en términos de funciones elementales y de las funciones Heumann-Lambda, Λ_0, y KZ de Jacobi (cf. [BF]). A tal respecto, nos interesa destacar el llamado "caso circular", esto es, cuando se verifica que $p^2 < q^2 < 1$, para el que se verifica la siguiente igualdad:

$$\Pi(q^2, p) = \int_0^K \frac{dw}{1 - q^2\mathrm{sn}^2 w} = \frac{q\pi\Lambda_0(\xi, p)}{2\sqrt{(q^2 - p^2)(1 - q^2)}}, \tag{A.14}$$

con $\xi = \mathrm{sen}^{-1}[(q^2 - p^2)/(q^2 p'^2)]^{1/2}$.

A.3 El problema de valores iniciales (c, λ, μ).

Es nuestro objetivo en esta sección la integración de los problemas de valores iniciales (4.1) y (5.6) que aparecen en los capítulos 4 y 5 respectivamente de esta memoria, las cuales podemos escribir simultáneamente mediante el problema de valores iniciales:

$$u'' + \frac{c}{4}e^{2u} + \frac{\lambda^2 e^{4u} - \mu^2 e^{-4u}}{2} = 0,\ a = e^{2u(0)},\ u'(0) = 0, \tag{A.15}$$

que bautizaremos como p.v.i.-(c, λ, μ), donde $c \in \{0, 4\}$ es el que llamaremos *parámetro de curvatura*, $\lambda \geq 0$ es el *parámetro de minimalidad* y $\mu \in \{1, \sqrt{2}\}$ es el *parámetro normalizador*.

Tres son los casos que nos interesan de (A.15) para cubrir (4.1) y (5.6), a saber:

- $(c, \lambda, \mu) = (0, 1, 1)$, cuyo correspondiente p.v.i. es precisamente (4.1):

$$u'' + \sinh 4u = 0,\ a = e^{2u(0)},\ u'(0) = 0; \tag{A.16}$$

- $(c, \lambda, \mu) = (4, 0, \sqrt{2})$, cuyo correspondiente p.v.i es justamente (5.6) si $\lambda = 0$:

$$u'' + e^{2u} - e^{-4u} = 0,\ a = e^{2u(0)},\ u'(0) = 0; \tag{A.17}$$

- $(c, \lambda, \mu) = (4, \lambda > 0, \sqrt{2})$, cuyo correspondiente p.v.i. es (5.6) cuando $\lambda > 0$:

$$u'' + e^{2u} + \frac{\lambda^2 e^{4u} - 2e^{-4u}}{2} = 0,\ a = e^{2u(0)},\ u'(0) = 0. \tag{A.18}$$

Es bien sabido que se conocen las soluciones de la ecuación senh-Gordon. Comentar que en [LS] se resuelven ecuaciones diferenciales mediante técnicas aplicables para la resolución de (A.17). Pero para la más sofisticada de las ecuaciones que necesitamos resolver, esto es (A.18), se requiere el método (también útil para los dos anteriores problemas) que aportamos en la demostración de la siguiente proposición.

Proposición 15 (a) *La solución del problema de valores iniciales (A.16) viene dada por*

$$e^{2u(x)} = a\mathrm{dn}(ax, p),$$

con $p^2 = 1 - (1/a^4)$.

(b) *La solución del problema de valores iniciales (A.17) viene dada por*

$$e^{2u(x)} = a(1 - q^2\mathrm{sn}^2(rx, p)),$$

con

$$p^2 = \frac{a - a_1}{a + a_2},\ q^2 = \frac{a - a_1}{a},\ r = \sqrt{a + a_2},$$

donde

$$-a_2 = -\frac{\sqrt{1 + 8a^3} - 1}{4a^2} < 0 < a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8a^3}}{4a^2}(\leq a)$$

son las raíces de la ecuación cuadrática $2a^2y^2 - y - a = 0$.

(c) *La solución del problema de valores iniciales (A.18) viene dada por*

$$e^{2u(x)} = a\frac{1 - q_\lambda^2\mathrm{sn}^2(r_\lambda x, p_\lambda)}{1 + s_\lambda^2\mathrm{sn}^2(r_\lambda x, p_\lambda)},$$

con

$$p_\lambda^2 = \frac{(a - a_1)(a_3 - a_2)}{(a + a_2)(a_1 + a_3)}, \quad q_\lambda^2 = \tfrac{a_3(a-a_1)}{a(a_1+a_3)},$$
$$r_\lambda = (\lambda/2)\sqrt{(a + a_2)(a_1 + a_3)}, \quad s_\lambda^2 = \tfrac{a-a_1}{a_1+a_3},$$

donde

$$-a_3 < -a_2 < 0 < a_1(\leq a),\ a_k \equiv a_k(\lambda),\ k = 1, 2, 3,$$

son las raíces de la ecuación cúbica $\lambda^2y^3 + (\lambda^2a + 4)y^2 - (2/a^2)y - 2/a = 0$.

Nota 20 En las expresiones explícitas dadas para las soluciones $u = u(x)$ en los apartados (a), (b) y (c) se está suponiendo que la condición inicial a es mayor o igual que la correspondiente condición inicial de la única solución constante de cada ecuación, esto es, $a \geq 1$, $a \geq 1$ y $a \geq a_0$ respectivamente, con a_0 la única solución positiva de la ecuación $\lambda^2 a_0^4 + 2a_0^3 - 2 = 0$. Como puede comprobarse en el transcurso de la demostración de la proposición 15, estas condiciones sobre a no son en absoluto restrictivas.

Demostración: La multiplicación por $2u'$ y posterior integración en la ecuación de (A.15) conduce a

$$u'^2 + \frac{c}{4}e^{2u} + \frac{\lambda^2}{4}e^{4u} + \frac{\mu^2}{4}e^{-4u} = \text{constante} = \mathcal{A}. \tag{A.19}$$

Haciendo el cambio de variable $y = e^{2u}$, de (A.19) obtenemos

$$y'^2 + P(y) = 0, \text{ con } P(y) = \lambda^2 y^4 + cy^3 - 4\mathcal{A}y^2 + \mu^2. \tag{A.20}$$

El grado del polinomio P puede ser 3 ó 4 según los valores de λ y c permitidos para los casos que estamos estudiando.

La ecuación (A.20) puede entonces integrarse mediante el uso de funciones elípticas de Jacobi (véase [D],Cap. 7). En concreto, buscamos una transformación $z = z(y)$ de la forma

$$z^2 = \frac{Ay - B}{Cy - D}, \tag{A.21}$$

con A, B, C, D adecuados para que (A.21) esté bien definido y de forma que (A.20) se traduzca en términos de z como

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = r^2(1 - z^2)(1 - p^2 z^2), \tag{A.22}$$

para algún $p^2 \in [0, 1]$ y algún $r > 0$. De este modo, usando (A.2) y (A.9) se tiene que $z(x) = \text{sn}(rx, p)$, pudiéndose entonces expresar la solución de (A.20) en términos de funciones elípticas de Jacobi invirtiendo la ecuación (A.21), esto es:

$$y = \frac{B - Dz^2}{A - Cz^2}. \tag{A.23}$$

Empleando (A.21), la regla de la cadena para derivar z respecto x, (A.22) y (A.20), se consigue el propósito anteriormente expuesto resolviendo

$$\begin{aligned} 4r^2(Ay-B)(Cy-D)\,((C-A)y+ \\ +(B-D))\left((C-p^2A)y+(p^2B-D)\right) = \\ = -(BC-AD)^2P(y) \end{aligned} \tag{A.24}$$

en las incógnitas A, B, C, D, r y p^2 con la restricción de que la solución y dada en (A.23) sea estrictamente positiva y cumpliendo que $B/A = a$ a partir de las condiciones iniciales de (A.15).

Por ello, es conveniente analizar detalladamente el polinomio $P(y)$ que aparece en (A.20). Comencemos observando que a partir de las condiciones iniciales de (A.15) la constante $\mathcal{A}$ dada en (A.19) viene dada por

$$\mathcal{A} = \frac{c}{4}a + \frac{\lambda^2}{4}a^2 + \frac{\mu^2}{4a^2}. \tag{A.25}$$

Estudiando $\mathcal{A}$ como función de la condición inicial a, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(a)$, $a > 0$, resulta que $\mathcal{A}$ tiene un único punto crítico (que es además mínimo absoluto) en a_0, que es la condición inicial correspondiente a la única solución constante de (A.15) y que resuelve la ecuación $\lambda^2 a_0^4 + (c/2)a_0^3 - \mu^2 = 0$ (véase nota 20). También se tiene que existe un único número real positivo, $\hat{a} = \hat{a}(\lambda)$, tal que $\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(\hat{a})$ con $a \geq a_0 \geq \hat{a}$ (o bien $a \leq a_0 \leq \hat{a}$) y que viene dado en la ecuación

$$(a-\hat{a})\left(ca^2\hat{a}^2 + \lambda^2 a^2\hat{a}^2(a+\hat{a}) - \mu^2(a+\hat{a})\right) = 0. \tag{A.26}$$

Utilizando ahora (A.25) y (A.26) es inmediato comprobar que siempre $P(a) = P(\hat{a}) = 0$, lo que permite factorizar el polinomio $P(y)$ en los tres casos que estamos estudiando.

Concretamente, si $(c, \lambda, \mu) = (4, 0, \sqrt{2})$:

$$P(y) = 4(y-a)(y-\hat{a})\left(y + \frac{a\hat{a}}{a+\hat{a}}\right); \tag{A.27}$$

si $(c, \lambda, \mu) = (0, 1, 1)$:

$$P(y) = (y-a)(y-1/a)(y+a)(y+1/a); \tag{A.28}$$

y si $(c, \lambda, \mu) = (4, \lambda > 0, \sqrt{2})$:

$$P(y) = \lambda^2(y-a)(y-\hat{a})(y+a_2)(y+a_3), \tag{A.29}$$

con $-a_3 < -a_2 < 0$, $a_i \equiv a_i(\lambda)$, $i = 2, 3$, las raíces de la ecuación $\lambda^2 y^2 + (\lambda^2(a + \hat{a})y + 4) + 2/(a\hat{a}) = 0$.

Entonces, considerando por ejemplo $a \geq a_0 \geq \hat{a}$ (igualmente podría- mos sin restricción haber escogido $a \leq a_0 \leq \hat{a}$) y renombrando $\hat{a}$ como a_1, de (A.27) se consigue (A.24) para demostrar (b) eligiendo $A = 1$, $B = a$, $C = 0$, $D = a - \hat{a}$ y p^2 y r como en el enunciado de la proposición. De (A.29) se consigue (A.24) para demostrar (c) eligiendo $A = 1$, $B = a$, $C = -s_\lambda^2$, $D = aq_\lambda^2$ y p_λ^2 y r_λ como en el enunciado de la proposición.

Para probar (a), de (A.28) se consigue (A.24) eligiendo $A = 1$, $B = a$, $C = (1 - a^2)/(1 + a^2)$, $D = a(a^2 - 1)/(a^2 + 1)$, $p^2 = C^2$ y $r = (1 + a^2)/2a$. Entonces estamos en condiciones de poder aplicar (A.8), lo que concluye la demostración de (a).

Corolario 10 *Las funciones $u = u(x, a)$, soluciones respectivas de los problemas de valores iniciales (A.16), (A.17) y (A.18), dadas en la proposición 15, verifican:*

(a) *Son periódicas con período $2T$, siendo $T = K(p)/a$, $T = K(p)/r$ y $T = K(p_\lambda)/r_\lambda$, respectivamente.*

(b) *En los tres casos se cumple $\forall x \in R$,*

$$u(x + T, a) = u(x, \hat{a}),$$

donde $\hat{a} = e^{2u(T,a)}(= 1/a,\ a_1,\ a_1(\lambda)$ respectivamente).

(c) *Si denotamos por $u_\lambda(x, a)$, $\lambda \geq 0$, las soluciones dadas en la proposición 15,(b) y (c), se cumple:*

$$u_\lambda(x, a) \to u_0(x, a), \text{ si } \lambda \to 0.$$

Demostración: La periodicidad de las soluciones $u = u(x, a)$ se sigue de (A.4).

Si $\hat{u}(x) = u(x + T, a)$ es claro que $\hat{u}$ es solución de la ecuación de (A.15); cumple la condición inicial $\hat{u}'(0) = 0$ teniendo en cuenta (A.9) y (A.7); finalmente, el valor de $e^{2\hat{u}(0)} = e^{2u(T,a)}$ se obtiene de las expresiones explícitas dadas en la proposición 15.

Por último, para demostrar la convergencia de u_λ a u_0, basta tener en cuenta a la hora de calcular el correspondiente límite que (véase la demostración de la proposición 15) $\lim_{\lambda \to 0} a_1(\lambda) = a_1$, $\lim_{\lambda \to 0} a_2(\lambda) = a_2$ y $\lim_{\lambda \to 0} a_3(\lambda) = +\infty$, con lo que $\lim_{\lambda \to 0} q_\lambda^2 = q^2$, $\lim_{\lambda \to 0} s_\lambda^2 = 0$, $\lim_{\lambda \to 0} p_\lambda^2 = p^2$ y $\lim_{\lambda \to 0} r_\lambda = r$.

Bibliografía.

[A] M.Audin: *Fibrés normaux d'immersions en dimension double, points doubles d'immersions lagrangiennes et plongementes totalement réels.* Comment. Math. Helvetici **63** (1983), 593–623.

[AS] M.A.Abramowitz & I.A.Stegun: *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York, 1965.

[AHS] M.F.Atiyah, H.J.Hitchin & I.M.Singer: *Self-duality in four dimensional Riemannian geometry.* Proc. Royal Soc. London, Ser. A, **362** (1978), 425–461.

[B] A.I.Bobenko: *All constant mean curvature tori in R^3, S^3, H^3 in terms of theta-functions.* Math. Ann. **290** (1991), 209–245.

[Bo] S.Bochner: *Vectors fields and Ricci curvature.* Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 776–797.

[BPW] J.Bolton, F.Pedit & L.Woodward: *Minimal surfaces and the affine Toda field model.* Preprint.

[Br] R.L.Bryant: *Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere.* J. Differential Geometry **17** (1982), 455–473.

[BF] P.F.Byrd & M.D.Friedman: *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists.* Berlin, Springer, 1954.

[CU1] I.Castro & F.Urbano: *Lagrangian surfaces in the complex Euclidean plane with conformal Maslov form.* Tôhoku Math. J. **45** (1993), 565–582.

[CU2] I.Castro & F.Urbano: *New examples of minimal Lagrangian tori in the complex Projective plane.* Manuscripta Math. **85** (1994), 265–281.

[CU3] I.Castro & F.Urbano: *Twistor holomorphic Lagrangian surfaces in the complex Projective and Hyperbolic planes.* Ann. of Glob. Anal. and Geom. **13** (1995), 59–67.

[CU4] I.Castro & F.Urbano: *On twistor harmonic surfaces in the complex projective plane.* Preprint.

[CM1] B.-Y.Chen & J.M.Morvan: *Géométrie des surfaces lagrangiennes de* C^2. J. Math. Pures Appl. **66** (1987), 321–325.

[CM2] B.-Y.Chen & J.M.Morvan: *Deformations of isotropic submanifolds in Kaehler manifolds.* Aparecerá en J. Geom. and Phys.

[CO] B.-Y.Chen & K.Ogiue: *On totally real submanifolds.* Trans. Amer. Math. Soc. **193** (1974), 257–266.

[ChW] S.S.Chern & J.G.Wolfson: *Minimal surfaces by moving frames.* Amer. J. Math. **105** (1983), 59–83.

[D] H.T.Davis: *Introduction to nonlinear differential and integral equations.* Dover Publications, New York, 1962.

[De] C.Delaunay: *Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante.* J. Math. Pures Appl. Ser. 1 **6** (1841), 309–320.

[ES] J.Eells & S.Salamon: *Twistorial construction of harmonic maps of surfaces into four-manifolds.* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. **12** (1985), 589–640.

[EGT] J.-H.Eschenburg, I.V.Guadalupe & R.A.Tribuzy: *The fundamental equations of minimal surfaces in* CP^2. Math. Ann. **270** (1985), 571–598.

[F1] F.Forstneric: *Complex tangents of real surfaces in complex surfaces.* Duke Math. J. **67** (1992), 353–376.

[F2] F.Forstneric: *On totally real embeddings into* C^n. Exposition. Math. **4** (1986), 243–255.

[FK] H.M.Farkas & I.Kra: *Riemann surfaces.* Lectures Notes on Mathematics, 71, Springer Verlag, New York, 1980.

[Fi] T.Fiedler: *Twistor holomorphic immersions of real surfaces into Kähler surfaces.* Math. Ann. **282** (1988), 337–342.

[Fr] T.Friedrich: *On surfaces in four spaces.* Ann. of Glob. Anal. and Geom. **2** (1984), 257–287.

[Ga] P.Gauduchon: *Les immersions super-minimales d'une surface compacte dans une variété riemannienne orientée de dimension 4.* Asterisque **154-155** (1987), 151–180.

[Gi] A.B.Givental: *Lagrangian embeddings of surfaces and the open umbrella of Whitney.* Funksional Anal. i Prilozhen **20** (1986), 35–41.

[G1] M.Gromov: *Convex integration of differential relations.* Math. USSR-Izv **7** (1973), 329–344.

[G2] M.Gromov: *Partial Differential Relations.* Erge. Math. Grenzgeb. (3) **9**. Springer Verlag, New York (1986).

[HL] R.Harvey & B.Lawson: *Calibrated Geometries.* Acta Math. **148** (1982), 47–157.

[Ho] D.A.Hoffman: *Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature.* J. Differential Geometry **8** (1973), 161–176.

[HO] D.A.Hoffman & R.Osserman: *The geometry of the generalized Gauss map*, Memoirs Amer. Math. Soc. **236** (1980).

[JR1] G.R.Jensen & M.Rigoli: *Twistor and Gauss lifts of surfaces in four-manifolds.* Memoirs Amer. Math. Soc. (1989), 197–232

[JR2] G.R.Jensen & M.Rigoli: *Lagrangian surfaces in Kaehler-Einstein surfaces.* Preprint.

[KN] S.Kobayashi & K.Nomizu: Foundations of Differential Geometry, vol.2. John Willey & Sons, New York, 1969.

[LS] J.Langer & D.A.Singer: *The total squared curvature of closed curves.* J. Differential Geometry **20** (1984), 1–22.

[L] J.A.Lees: *On the classification of the lagrange immersions.* Duke Math. J. **43** (1976), 17–24.

[Ma] W.S.Massey: *Proof of a conjecture of Whitney.* Pacific J. Math. **31** (1969), 143–156.

[MRU] S.Montiel, A.Ros & F.Urbano: *Curvature pinching and eigenvalue rigidity for minimal submanifolds.* Math. Z. **191** (1986), 537–548.

[M] J.M.Morvan: *Classe de Maslov d'une immersion Lagranienne et minimalité.* C. R. Acad. Sc. Paris **292** (1981), 633–636.

[NT] H.Naitoh & M.Takeuchi: *Totally real submanifolds and symmetric bounded domains.* Osaka J. Math. **19** (1982), 717–731.

[Oh] Y.G.Oh: *Second variation and stabilities of minimal Lagrangian submanifolds in Kaehler manifolds.* Invent. Math: **101** (1990), 501–519.

[O] B. O'Neill: *The fundamental equations of a submersion.* Michigan Math. J. **13** (1966), 459–469.

[PS] U.Pinkall & I.Sterling: *On the classification of constant mean curvature tori.* Ann. Math. **130** (1989), 407–451.

[R] W.Rudin: *Totally real Klein bottles in* C^2*.* Proc. Amer. Math. Soc. **82** (1981), 653–654.

[RV] E.A.Ruh & J.Vilms: *The tension field of the Gauss map.* Trans. Amer. Math. Soc. **149** (1970), 569–573.

[Sm] B.Smyth: *A generalization of a theorem of Delaunay on constant mean curvature surfaces.* Preprint.

[St] D.J.Struik: *Geometría Diferencial Clásica.* Aguilar, 1966.

[Sy] J.L.Synge: *On the connectivity of spaces of positive curvature.* Quart. J. Math. **7** (1936), 316–320.

[U1] F.Urbano: *Totally real minimal submanifolds of a complex projective space.* Proc. Am. Math. Soc. **93** (1985), 332–334.

[U2] F.Urbano: *Nonnegatively curved totally real submanifolds.* Math. Ann. **273** (1986), 345–348.

[U3] F.Urbano: *Index of Lagrangian submanifolds of* CP^n *and the Laplacian of 1-forms.* Geom. Dedicata **48** (1993), 309–318.

[V] A.Vitter: *Self-dual Einstein metrics.* Contemporary Mathematics **51** (1986), 113–120.

[We] J.L.Weiner: *On an inequality of P. Wintgen for the integral of the square of the mean curvature.* J. London Math. Soc. (2) **34** (1986), 148–158.

[Wn] A.Weinstein: *Lectures on symplectic manifolds*, Conference Board of the Mathematicals Sciences **29** (1977).

[Wh] H.Whitney: *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space.* Ann. of Math. **45** (1944), 220–246.

[Wi] P.Wintgen: *Sur l'inegalite de Chen–Willmore.* C.R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 993–995.

[Wf] J.A.Wolf: *Spaces of constant curvature.* Mc-Graw Hill, New York, 1967.

[Wo] CM.Wood: *The Gauss section of a Riemannian immersion.* J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 157–168.

[Y] S.T.Yau: *Submanifolds with constant mean curvature I.* Amer. J. Math. **96** (1974), 346–366.