Boletín de Matemáticas

Vol. VI Nº 2, pp. 36 - 51

LAS NOCIONES MATEMATICAS , II

ALONSO TAKAHASHI

2. PARADOJAS

(La Crisis de los Fundamentos)

Paradojas lógicas y semánticas .

El edificio que con base en la *teoría de conjuntos* de Cantor había empezado a construirse, que prometía fundamentar toda la Matemática y que, con la introducción de la *aritmética del infinito* parecía abrir las puertas de un fascinante e inexplorado paraíso, vaciló súbitamente con la irrupción de las llamadas *paradojas* o *antinomias* . Entre ellas la más famosa, debido probablemente a la sencillez de su enunciado, es la presentada por B. Russell y de la cual daremos enseguida una versión particularmente conocida.

Paradoja de Russell. En cierto pueblo el barbero se encarga de afeitar a todas las personas que *no* se afeitan a sí mismas, y solamente a esas personas. ¿Quién afeita al barbero? Naturalmente hay sólo dos posibilidades:

se afeita a sí mismo o no se afeita a sí mismo. Pero ambas conducen a una contradicción.

En Junio de 1901 Russell observó que esencialmente la misma situación podría plantearse en términos más técnicos y *usando precisamente el lenguaje, las nociones y las mismas formas de razonamiento empleados en la Teoría de Conjuntos*. En efecto, de acuerdo con la descripción de "conjunto" dada por Cantor existen conjuntos que son elementos de sí mismos. Por ejemplo, el conjunto de todas las ideas es a su vez una idea. Por otra parte, los conjuntos que aparecen normalmente en la naturaleza o en las construcciones matemáticas *no* son elementos de sí mismos; por ejemplo, una colección de lápices *no* es un lápiz, el conjunto $\mathbb{N}$ no es un número natural. Consideremos la colección A formado por éstos últimos, es decir, A es la extensión de la propiedad "X es un conjunto tal que $X \notin X$". Dicho en otros términos: un conjunto X es un miembro de A si y sólo si X no pertenece a X. Ahora bien, de acuerdo con el principio del tercero excluído, debe verificarse que $A \in A$ o que $A \notin A$. Pero si A pertenece a A entonces, por la misma definición de A, vemos que A no debe pertenecer a A. Y si A no pertenece a A entonces A pertenece a A. Luego en cualquier caso se llega a una contradicción.

Obsérvese que en cada una de las versiones de la paradoja de Russell se parte de una colección U de objetos (los habitantes del pueblo, los conjuntos) y de una relación binaria $\alpha \to \beta$ ("α es afeitado por β", "α pertenece a β"). Enseguida, y *usando explícitamente la totalidad* U, se describe un objeto especial w de U (el barbero, el conjunto A) exigiendo que, *para cualquier* α de U, α esté en la relación con

w si y solo si α *no* está en dicha relación consigo mismo. La contradicción aparece cuando esto se aplica en particular a w.

Hacia 1926 Ramsey introdujo una división de las paradojas en *lógicas* (como la de Russell) y *semánticas* (la Semántica estudia el sentido de los signos en un lenguaje), entendiendo por paradojas semánticas aquellas contradicciones planteadas recurriendo al *significado* usual de palabras como *cierto*, *falso*, *mentir*, *designar* que intervienen en su enunciado. Veamos algunos ejemplos clásicos.

***Paradoja del mentiroso*.** Una persona afirma "Miento", es decir, "Lo que estoy diciendo en este mismo momento es falso". Entonces, si está mintiendo, lo que dice es cierto y por lo tanto no está mintiendo. Y si dice la verdad entonces lo que afirma es falso, luego no dice la verdad.

***"Paradoja" de Epiménides*.** Se cuenta que el filósofo cretense Epiménides de Gnoso afirmaba "Los cretenses siempre mienten". A pesar de la aparente similitud de esta afirmación con la anterior, ella no plantea una auténtica antinomia y es curioso observar que, en realidad, a partir de la aseveración de Epiménides puede concluirse que debe haber por lo menos un cretense que, en alguna ocasión, dice la verdad. En efecto, si la afirmación fuese cierta, siendo Epiménides un cretense, la misma debería ser falsa. Esta contradicción indica que no puede suponerse que la afirmación es cierta. Luego debe ser falsa (reducción al absurdo). Pero, si la afirmación "(todos) los cretenses siempre mienten" es *falsa*, se deduce que existe por lo menos un cretense que *no siempre* miente (Principio del Tercero Excluído).

Paradoja de Richard. Esta contradicción, planteada por J. Richard en 1905, es particularmente interesante debido a que se formula con base en un *método diagonal* semejante al empleado por Cantor para establecer la no enumerabilidad del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales .

Empecemos observando que algunas oraciones de nuestro idioma designan números, por ejemplo: "el cociente de la longitud de una circunferencia por su diámetro" designa el número 3,14159 . . . , "dos tercios" el número 0,66 . . . , etc. Ahora bien, para cada n ($n = 1, 2, \ldots$) el número de frases castellanas de n letras y que designan números reales es claramente finito pudiendo entonces ser ordenadas en orden lexicográfico (orden de diccionario). Colocando en primer término la lista de las frases de una letra, a continuación la lista de las frases de dos letras y así sucesivamente se logra una lista de frases

$$\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \end{array}$$

en la cual figuran todas las oraciones castellanas que designan números reales .

Llamemos *n-simo número de Richard* al número real designado por la frase P_n y consideremos la oración *el número real entre cero y uno y cuya n-sima cifra decimal es uno si la n-sima cifra decimal del n-simo número de Richard no es uno e igual a dos en caso contrario .* Esta frase designa un número real r bien determinado y por lo tanto debe fi -

gurar en nuestra lista de todas las frases que designan números reales. Supongamos que ocupa el k-simo lugar en dicha lista, es decir, el número r es el k-simo número de Richard. Pero, por su misma definición, r difiere de éste en la k-sima cifra decimal; entonces r no puede ser igual a él. (Obsérvese que, como cada cifra decimal de r es 1 ó 2, no hay ambiguedad en su representación decimal).

Paradoja del condenado a muerte. En el Quijote (1605) se cuenta que, siendo Sancho Panza gobernador de la ínsula Barataria, le fue planteada esta pregunta : sobre un río caudaloso " estaba una puente y al cabo della una horca y una casa de audiencia , en la cual de ordinario había cuatro jueces que juzgaban la ley que puso el dueño del río ". . . : " *si algúno pasase por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va ; y si jurare verdad, dejenle pasar ; y si dijere mentira , muera por ello ahorcado* " . . . " Sucedió, pues, que tomando juramento a un hombre , juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento, y dijeron : *Si a éste hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y , conforme a la ley debe morir ; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y , habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre* " .

Esta misma paradoja puede plantearse en términos más actuales : un señor a quien le han secuestrado un hijo recibe una llamada diciendole que si acierta cuál será la suerte de su hijo, éste le será devuelto ileso (previo el pago de un rescate, naturalmente) y en caso contrario el niño morirá .

El padre contesta : creo que lo matarán .

Además de la paradoja de Russell surgieron por la misma época otras contradicciones lógicas en el seno mismo de la teoría de conjuntos, cuyo planteamiento es de carácter más técnico. Los ejemplos más conocidos son la paradoja de Burali - Forti (1897) referente al mayor número ordinal y la de Cantor acerca del cardinal del conjunto de todos los conjuntos. Más recientemente (1953) Shen ha enunciado otras paradojas en la misma teoría de conjuntos, algunas de las cuales se presentan como casos límites entre las paradojas lógicas y las semánticas.

Paradoja de Shen. Diremos que un conjunto A es *infundado* si hay una sucesión de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ (no necesariamente distintos) tales que $\ldots \in A_3 \in A_2 \in A_1 \in A$; en caso contrario diremos que A es *fundado*. Sea M la colección de todos los conjuntos fundados. Si M es infundado debe existir una sucesión $\ldots \in A_3 \in A_2 \in A_1 \in M$; en particular, $\ldots \in A_3 \in A_2 \in A_1$, indicando que A_1 es también infundado. Luego $A_1 \notin M$, lo cual es contradictorio. Luego debemos tener que M es fundado, es decir, $M \in M$. Pero entonces $\ldots \in M \in M \in M$, lo cual prueba que M es infundado.

La Crisis.

La consideración de las paradojas lógicas que indiscutiblemente indicaban contradicciones inherentes a las formas generales de los argumentos propios de la teoría de conjuntos precipitó la llamada *Crisis de los Fundamentos* cuyo impacto en el ánimo de muchos de los mejores matemáticos de la época es patente en las siguientes palabras de G. Frege : "Es difícil que a un investigador pueda sucederle algo más infortunado que descubrir, al final de su labor, que los cimientos de su edificio vacilan " ... " Fue ésta la situación en que me encontré colocado merced a una carta de Mr. Bertrand Russell, justamente cuando estaba a punto de completarse la impresión de este libro " (se refiere a *Grundgesetze der Arithmetik* , Las leyes fundamentales de la Aritmética, 1903). Y agrega: " Aún ahora no veo cómo puede fundamentarse estrictamente la Aritmética ... si no nos es permitido pasar de un concepto a su extensión. ¿Puede siempre hablarse de la extensión de un concepto, hablar de un conjunto ? Y si no, ¿ cómo se reconocen los casos excepcionales ? . . ."

La actitud de Cantor ante las paradojas fue bastante singular pues aunque su aritmética de números transfinitos fue quizás la mayor motivación del entusiasmo por los conjuntos, él personalmente nunca se interesó seriamente en la aplicación de éstas nociones a la fundamentación de la teoría de los números naturales y por su intermedio al resto de la Matemática. No sólo ésto sino que, a pesar de haber formulado una paradoja similar a la de Burali - Forti, no veía en tales argumentos una seria objeción a su teoría sino más bien una falta de comprensión de la misma. Ya en 1899 Cantor hablaba de una diferencia intrínseca entre colecciones o multiplicidades (Vielheiten) " demasiado grandes" para ser manejadas como unidades (so pena de contradicción) y aquellas de " tamaño más reducido" y que, si así se desea, pueden ser consideradas como *elementos* de otras colecciones . Son éstas últimas las que reciben el nombre de *conjuntos* (Mengen) y constituyen los *objetos matemáticos* propiamente dichos. Para evitar tropiezos desagradables con esas entidades monstruosas debido a su tamaño descomunal, es suficiente tener cierta práctica en su manejo y nunca apartarse de ciertas reglas cuando de generar colecciones se trate. Cantor mencionaba, por ejemplo, que una subcolección de un conjunto es un conjunto, la colección de todas las partes de un conjunto, es un conjunto, una colección equipotente con un conjunto es un conjunto, etc. Desde este punto de vista, algo como "la colección de todos los conjuntos" es decir, la colección de todos los objetos matemáticos no es ya un objeto matemático.

Usando aún otra figura diríamos que hay multiplicidades que pueden ser miradas como *Uno* (son los conjuntos) mientras que otras *solamente* pueden ser consideradas como *Muchos*; y ésta diferencia está en la misma naturaleza de los objetos. La posición a adoptar frente a las paradojas es entonces sencilla: si alguien es lo bastante negligente para meterse a manejar engendros, debe atenerse a las consecuencias y no debe culpar de ellas a nadie sino a su propia necedad. De hecho, es sabido que Cantor criticó el argumento de Burali-Forti insinuando que su autor aún no había entendido el concepto de conjunto bien ordenado.

En todo caso Cantor no trató de formalizar y publicar sus ideas a éste respecto y sus opiniones han llegado a conocerse especialmente por su correspondencia con otros matemáticos. Sinembargo, su clarividencia en el ámbito del universo por él creado se manifestó aún a pesar de su desinterés. En efecto, su idea (¿ o intuición?) de "limitar el tamaño" de los objetos matemáticos (conjuntos) probó más tarde ser uno de los dispositivos usados con más éxito para liberar los Fundamentos de las Matemáticas de todas las paradojas conocidas.

Soluciones propuestas .

La crisis que en un principio parecía comprometer seriamente el desarrollo de la Matemática estimuló el análisis de los Fundamentos con la esperanza de clarificarlos y garantizar su legitimidad. En ésta empresa se distinguieron principalmente tres enfoques : el *logicismo* (Whitehead, Russell, Frege, en Inglaterra) cuyo propósito fue reducir el problema a la lógica y luego tratar de resolverlo allí ; el *intuicionismo* (Brouwer, Heyting, en Holanda) que pretendía limitar drásticamente las construcciones a casos finitos o al menos intuibles; y el *formalismo* (Zermelo, Hilbert, en Alemania) que basado en los trabajos de la *escuela axiomática* (Peano, Dedekind) se propuso como objetivo la formulación a priori de un sistema consistente de axiomas para la Teoría de Conjuntos .

Las complicaciones que se presentaron eventualmente en los dos primeros sistemas y en particular la artificialidad del logicismo y los sacrificios exigidos por el intuicionismo, todo contrapuesto con la elegancia del formalismo y los indiscutibles éxitos del método axiomático, determinaron una progresiva aceptación de éstos últimos. Observando que, como ya lo insinuaran Frege y Cantor, las contradicciones lógicas en la Teoría de Conjuntos (Russell, Burali-Forti, Cantor) eran planteadas con base en colecciones que intuitivamente eran "demasiado grandes", se dedujo la necesidad de revisar el principio o "axioma" de extensión (llamado también "axioma de abstracción") esto es, la "ley", intuitivamente indiscutible y en completa concordancia con la descripción cantoriana de los conjuntos, que permite pasar de una condición cualquiera P a su extensión, es decir, garantiza la *existen-*

cia de *el conjunto de todos los objetos que satisfacen la condición* P. Admitido con esta liberalidad, el principio ocasiona una generación desordenada de colecciones produciendo eventualmente criaturas teratológicas.

En las tres paradojas arriba mencionadas la condición P es, respectivamente, "X no es un elemento de X", "X es un número ordinal" y "X es un conjunto" y tiene como extensión "el conjunto de todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos", "el conjunto de todos los números ordinales" y "el conjunto de todos los conjuntos", respectivamente. En cada caso particular, la aplicación del principio de extensión supone que, una vez fijada la propiedad P y "antes" de empezar a seleccionar aquellos objetos que la satisfacen, tengamos ante nosotros la totalidad, el dominio completo de los objetos susceptibles de ser seleccionados para luego sí proceder a la selección, tomando aquellos que satisfagan la condición P y desechando los otros. Las complicaciones surgen cuando ésta situación no es explícita, es decir, cuando no es posible afirmar que aquél dominio no se altera "durante" el proceso mismo de selección, apareciendo en su seno elementos inesperados. Así por ejemplo, si D es la colección de *todos los objetos* o cosas existentes y de entre sus miembros pretendemos seleccionar aquellos que son conjuntos (para así obtener *el conjunto* U *de todos los conjuntos*), este mismo acto hace aparecer un nuevo objeto, a saber U, el cual es a su vez un conjunto, es decir, uno de los objetos que deberían haber estado previamente en D y precisamente uno de los que habría sido seleccionado para conformar a U (? ? ?).

La modificación del problemático principio de extensión propuesta por Zermelo consistía en restringir el proceso para generar conjuntos a partir de condiciones, al caso en el cual se cuenta *de antemano* con un *conjunto* M

del cual se procede a *separar* aquellos elementos *especificados* por la condición en cuestión. El principio así obtenido recibió el nombre de *Axioma de Especificación* (o *de Separación*) y fue enunciado más o menos en los términos siguientes : *Dados una condición* P *y un conjunto (Menge)* M, *existe un subconjunto (Untermenge)* A *de* M *cuyos elementos son precisamente aquellos elementos de* M *que satisfacen la condición* P.

Se observa que el principio así restringido no nos faculta, como el original, a *crear* libremente conjuntos a partir de condiciones sino a *separar* de un conjunto *preexistente* M aquellos objetos que satisfacen una determinada condición y con ellos formar un nuevo conjunto A (el cual es naturalmente una parte de M). Los elementos de A son aquellos elementos de M *especificados* por la condición P.

En este contexto las paradojas de Russell, Burali-Forti y Cantor quedan eliminadas de facto pues ni siquiera pueden formularse. Russell, por ejemplo, debe ahora partir de un conjunto M y definir el conjunto A de todos los X de M tales que X no pertenece a X. Es decir, $X \in A$ sí y sólo si $X \in M$ y $X \notin X$. Como antes debemos tener que $A \in A$ ó $A \notin A$. Pero en este caso de $A \in A$ no podemos concluir que $A \notin A$ sino simplemente que, *si* $A \in M$ *entonces* $A \notin A$. Concluyéndose que $A \notin M$. Similarmente, de $A \notin A$ no se concluye que $A \in A$ sino que, si $A \in M$ *entonces* $A \in A$ y de nuevo se obtiene que $A \notin M$. Y así, la límpida contradicción de antes se reduce ahora a un resultado inofensivo, a saber, $A \notin M$.

Sinembargo, sabemos que no todas las paradojas son de tipo lógico pues las hay que se derivan de la existencia en los lenguajes naturales de afirmaciones que se refieren a sí mismas, de frases cuyo sentido depende esencialmente del *significado usual* de las palabras empleadas. Son contradicciones que surgen debido a confusiones entre el lenguaje *en el cual se habla* y el lenguaje *acerca del cual se habla* (pues, en cierta medida, las teorías no son más que lenguajes especializados). En términos más técnicos, hay una incorporación, generalmente inconsciente, de la semántica del lenguaje ordinario al lenguaje técnico de las teorías. Un detenido análisis de estas situaciones condujo a Zermelo y sus sucesores a introducir una segunda restricción : es necesario *describir* cuidadosamente el lenguaje a emplearse en la teoría. En particular, es necesario describir con precisión lo que es una "afirmación", una "condición" o "propiedad". El nombre técnico dado a las expresiones correctas del lenguaje de una teoría es el de *fórmulas bien formadas*.

La descripción lograda posteriormente por Skolem y Fraenkel (1922) es de tipo genético : a partir de ciertas fórmulas bien formadas básicas se obtienen todas las otras aplicando ciertas reglas de combinación fijas de una vez por todas. Intuitivamente, las afirmaciones y condiciones así obtenidas son perfectamente sensatas y manejables.

Salvo algunas modificaciones, el sistema de Zermelo era como sigue : Las fórmulas básicas son las del tipo

$X \in M$ (X es un elemento de M) y

$X = Y$ (X es igual a Y)

y se considera como bien formada cualquier fórmula construida a partir de otras fórmulas bien formadas con ayuda de la negación : *es falso que* . . . , las conjunciones : . . . *y* . . . ; . . . , *ó* . . . ; *si* . . . *entonces* . . . , y los ``cuantificadores'' : *para todo* . . . , . . . ; *existe un* . . . *tal que* . . . .

Con estos refinamientos, la forma definitiva del principio propuesto en lugar del axioma de extensión (o abstracción) es la siguiente :

> Dada una fórmula bien formada P y dado un conjunto M, existe un (único) conjunto A cuyos elementos son los elementos de M que satisfacen la condición P.

Este conjunto es el *conjunto de* los X de M tales que P y se denota

$$\{ X \in M \; : \; P(X) \; \}$$

(Se escribe $P(X)$ ó $P\{X\}$ en lugar de P para indicar más explícita - mente que se trata de una condición que se refiere a X).

Obsérvese que éste *no* es *un* axioma simple sino que en realidad, para cada fórmula P, se obtiene un axioma distinto. Potencialmente representa una infinidad de axiomas : uno para cada fórmula P. Es pues un ``molde'' o ``esquema'' para ``fabricar'' axiomas. Se dice entonces que es un ``axioma - esquema'' : es el *axioma esquema de separación* (o *especificación*). Puede verificarse que las precauciones descritas son suficientes para eliminar las paradojas semánticas conocidas. Sinembargo, es necesario pagar un precio por la restricción impuesta al principio de extensión. En efecto, si ya no podemos *crear* libremente objetos matemáticos (conjuntos) sino que debemos obtenerlos necesariamente a partir de otros ya existentes, ¿ Cómo podemos asegurar que hay siquiera uno de ellos para empezar el proceso ? Así pues, uno de los axiomas de Zermelo debe estar destinado a garantizar la existencia de conjuntos (infinitos, para poder desarrollar la Aritmética), mientras que otros más reglamentan el uso de la igualdad. El resto, siguiendo las ideas de Cantor, describen procedimientos "lícitos" para obtener nuevos conjuntos a partir de otros dados. Todas estas "reglas de juego" han sido elegidas con el propósito de obtener un "universo" de objetos matemáticos suficientemente rico para permitir el desarrollo de la matemática usual pero que a la vez garantice la no aparición de entidades monstruosas (inconsistencias).

Los resultados obtenidos no son empero completamente satisfactorios y es así como Poincaré comentaba acerca de la labor de Zermelo que, *aunque ha cerrado muy bien su redil , no estoy seguro de que no haya encerrado al lobo en él*. Y en efecto, si bien las precauciones tomadas eran suficientes para excluir las paradojas *conocidas*, no era posible garantizar, en modo alguno, que más tarde no aparecerían otras que eran menos evidentes y cuyo acceso, por así decir, no había sido completamente bloqueado por las vallas levantadas. Había que esperar hasta que Gödel demostrara sus famosos teoremas para tener alguna claridad sobre este problema. Y cuando ésta llegó, la respuesta fue desconcertante : si el sistema *es* consistente entonces es imposible probar que lo es .

La teoría de Zermelo tuvo diversas variantes, todas ellas más o menos equivalentes entre sí. En una de ellas, y quizás siguiendo más de cerca las ideas de Cantor y del mismo Zermelo en sus planteamientos iniciales, se admite la existencia de colecciones arbitrarias a las cuales se da el nombre de *clases* mientras que un *conjunto* es, por definición, una clase que es un elemento de alguna otra clase, es decir, una clase X es un conjunto si existe una clase Y tal que $X \in Y$. En este caso se admite un "axioma de extensión" más elástico : *Para cada condición* (fórmula bien formada) P *existe una* (única) *clase cuyos elementos son los conjuntos* X *tales que* $P(X)$.

En particular, tomando como P la fórmula $X = X$, se obtiene una clase cuyos elementos son precisamente todos los conjuntos (tales que $X = X$, pero esto *siempre* es cierto). Esta es pues *la clase de todos los conjuntos* o *clase universal*. Si a ésta clase la designamos Ω, el argumento de Russell se desenvolvería como sigue : Sea A la clase determinada por la condición $X \notin X$; en éste caso eso significa que $X \in A$ si y sólo si X *es un conjunto* y $X \notin X$. Luego *si* X *es un conjunto*, entonces $X \in A$ si y sólo si $X \notin X$.

Como en el argumento clásico, debemos tener que $A \in A$ o bien $A \notin A$. Pero si $A \in A$ entonces $A \notin A$ (a menos que A no sea un conjunto); y si $A \notin A$ entonces $A \in A$ (de nuevo, a menos que A no sea un conjunto). Luego A no puede ser un conjunto. Es así como la insidiosa "paradoja" de Russell es en este caso un inocente teorema, a saber : La clase A no es un conjunto.

Esta línea de ideas fue desarrollada por von Neumann y perfeccionada por Bernays Gödel y varios otros cuyos profundos y minuciosos análisis han arrojado mucha luz sobre el famoso problema de los Fundamentos. Los resultados indiscutiblemente positivos (aunque a veces inesperados y sorprendentes) justifican el que a esta crisis de la Matemática se la considere como una verdadera *crisis de crecimiento* .

* * *

El problema de Ozma

Supongamos que, empleando algún supermoderno radiotelescopio, es posible establecer comunicación con una raza inteligente de un remoto planeta. Nos preguntamos entonces si existe alguna manera de comunicarles a esos seres nuestra noción de *derecha* e *izquierda* (no en sentido político). Se sobreentiende que no contamos con ningún objeto o estructura asimétricos que pueda ser observado simultáneamente por ellos y nosotros, pues en tal caso el problema se soluciona trivialmente. Esta pregunta ha sido llamada " el problema de Ozma" haciendo referencia al personaje del mismo nombre en la obra de L. F. Baum acerca del utópico país de Oz. Uno de los habitantes de ese extraño lugar tiene orejas gigantescas que, al ser colocadas contra el suelo, le permiten oir sonidos a varios miles de kilómetros : son algo así como radiotelescópios.

La respuesta al Problema de Ozma es afirmativa pero no es trivial y se basa en ciertas peculiares características del Cobalto 60 sometido a ciertas condiciones especiales.

(Una descripción más detallada de éste problema y su solución y de otros temas igualmente interesantes se encuentra en " The Ambidextrous Universe" de Martin Gardner).