BOLETÍN DE MATEMÁTICAS
VOLUMEN III(1969), fascículos 1-2

LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y EL ESPACIO VECTORIAL $(\mathbb{C},\mathbb{R})$

por
Hernando ALFONSO

Relación de equipolencia entre parejas de puntos del plano:

$$\langle A,B\rangle \overset{p}{\equiv} \langle C,D\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \langle A,B\rangle \cong \langle C,D\rangle \\ \overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{CD} \\ \langle A,B\rangle \overset{o}{\equiv} \langle C,D\rangle \end{cases}$$

donde $\overset{p}{\equiv}$ se lee «es equipolente con», $//$ se lee «es paralela con», $\overset{o}{\equiv}$ se lee «es equiorientada con».

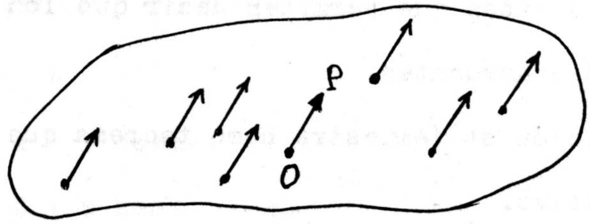
La relación de equipolencia es una equivalencia y, por lo tanto, particiona el conjunto de parejas de puntos del plano, $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$. Cada clase de equipolencia determinada por esta partición determina un vector en el plano:

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left\{ \langle x,y\rangle \; : \; \langle x,y\rangle \overset{p}{\equiv} \langle A,B\rangle \right\}$$

y tenemos además

$$\left[\overrightarrow{AB}\right] = \left[\overrightarrow{CD}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \langle A,B\rangle \overset{p}{\equiv} \langle C,D\rangle$$

Puede establecerse una biyección entre los puntos del plano y los vectores del plano, si se escoge un punto O del plano y se escoge como representante de un vector dado a la pareja cuya primera componente sea O.

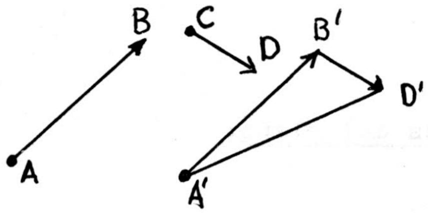


$$\left[\overrightarrow{OP}\right] \longleftrightarrow P$$

Puede establecerse también una biyección entre los elementos del conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ y los puntos del plano, si se define un sistema de coordenadas cartesianas.

Por definición, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{C}$, o sea que los números complejos son parejas ordenadas de números reales.

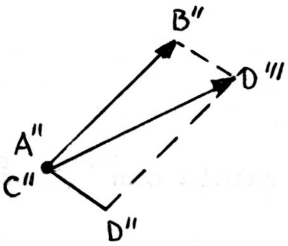
<u>Adición en el conjunto de los vectores del plano</u>. Por definición



$$[\overrightarrow{A'D'}] = [\overrightarrow{AB}] + [\overrightarrow{CD}].$$

Una construcción que lleva al mismo resultado es:

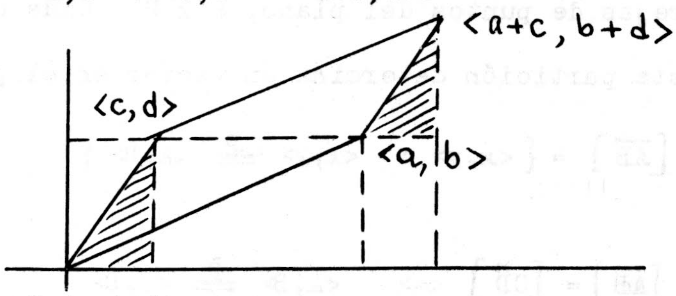
$$[\overrightarrow{A'D'}] = [\overrightarrow{A''D'''}]$$



Se verifica, en casos particulares,que la operación así definida estructura un grupo conmutativo.

<u>Adición en</u> $\mathbb{C}$.

$$\langle a,b\rangle + \langle c,d\rangle = \langle a+c, b+d\rangle$$



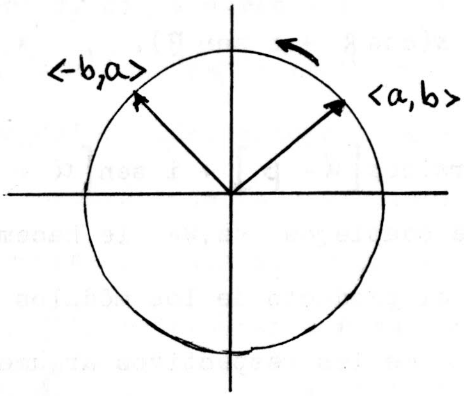
Esta definición está justificada por:

1) La biyección entre los puntos del plano y los vectores del plano.
2) La biyección entre los puntos del plano y los elementos de $\mathbb{C}$.
3) Consideraciones geométricas que permiten decir que los triángulos sombreados de la figura son congruentes.

A partir de esta definición se demuestra como teorema que la adición en $\mathbb{C}$ estructura un grupo conmutativo.

<u>Otras representaciones de los números complejos</u>. <u>El operador</u> i. Definimos un operador que aplica $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ de la manera siguiente: $i\langle a,b\rangle = \langle -b,a\rangle$. Gráficamente, i produce una rotación de 90 grados en el sentido indicado.

Puede establecerse una biyección entre un subconjunto de $\mathbb{C}$ y el conjunto $\mathbb{R}$,



así: $\langle a,0\rangle \longleftrightarrow a$; esta biyección <<conserva>> la adición (y también las otras operaciones) lo cual justifica que se identifique el complejo de la forma $\langle a,0\rangle$ con el número real a.

Por otra parte, según la definición de adición, podemos escribir,

$$\langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + \langle 0,b\rangle .$$

Pero $\langle 0,b\rangle = i\langle b,0\rangle$. O sea que

$$\langle a,b\rangle = \langle a,0\rangle + i\langle b,0\rangle .$$

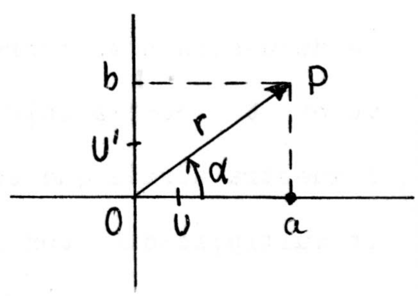
Teniendo en cuenta la identificación mencionada antes,

$$\langle a,b\rangle = a + ib.$$

<u>Representación polar</u>. Sea $z = \langle a,b\rangle$ un número complejo y sea P su punto correspondiente en el plano. Se define

$$\text{Argumento de } z = \text{Arg } z = \alpha$$

$$\text{Módulo de } z = \frac{[OP]}{[OU]} = r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$



Se tiene entonces

$$a = r \cos\alpha$$

$$b = r \operatorname{sen}\alpha$$

$$a + ib = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha).$$

<u>Multiplicación en</u> $\mathbb{C}$. Definimos una aplicación $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ caracterizada de la manera siguiente:

Si

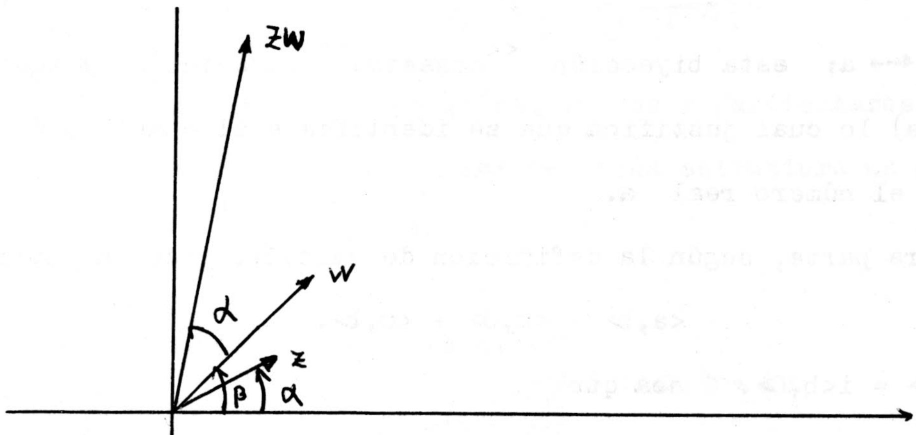
$$z = r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$w = s(\cos\beta + i \operatorname{sen}\beta),$$

entonces

$$zw = rs(\cos\left[\alpha + \beta\right] + i \operatorname{sen}\left[\alpha + \beta\right]) .$$

O sea que a la pareja de complejos $\langle z,w\rangle$ le hacemos corresponder el número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de los complejos dados y cuyo argumento es la suma de los respectivos argumentos. Gráficamente,



Si en la definición de producto que hemos dado desarrollamos $\cos(\alpha + \beta)$ y $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$, y usamos las igualdades

$$a = r\cos\alpha \quad ; \quad b = r \operatorname{sen}\alpha$$

$$c = s\cos\beta \quad ; \quad d = s \operatorname{sen}\beta$$

donde $z = \langle a,b\rangle$ y $w = \langle c,d\rangle$, podemos escribir como definición equivalente

$$zw = \langle a,b\rangle.\langle c.d\rangle = \langle ac-bd, ad+bc\rangle.$$

Se demuestra como teorema que la multiplicación estructura un grupo conmutativo en $\mathbb{C}$ (con la salvedad de que $\langle 0,0\rangle$ no tiene inverso multiplicativo). Se demuestra además que se cumple en $\mathbb{C}$ la propiedad distributiva-recolectiva de la multiplicación con respecto a la adición. Con esto puede afirmarse que $\mathbb{C}$ es un <u>cuerpo</u> (<u>campo</u>) <u>conmutativo</u> con respecto a las operaciones adición y multiplicación.

<u>Potenciación</u>. Definimos la potenciación como una aplicación $\mathbb{C} \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{C}$,

$$z^n = z.z.\ \cdots\ .z \quad \text{(n factores).}$$

Usando la representación polar, si $z = r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\,\alpha)$ entonces

$$z^n = r^n(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\ n\alpha).$$

Si se toma esta última como definición, entonces se pueden demostrar como teoremas las propiedades bien conocidas de la potenciación en $\mathbb{C}$, con exponente entero. Si se quieren determinar los elementos del conjunto $\{w: w^n = z\}$, dado $z = r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\,\alpha)$, debe tenerse en cuenta que $\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$ y $\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{sen}(\alpha + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Además, si se extiende la definición de potenciación a los exponentes fraccionarios y se acepta que $w^n = z \iff w = z^{1/n}$, entonces podemos escribir

$$z = r(\cos\alpha + i\ \mathrm{sen}\,\alpha) \Rightarrow z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n} + i\ \mathrm{sen}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$. Se demuestra que solamente existen n valores diferentes que verifican la igualdad $w^n = z$; a saber, los que se obtienen para $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$.

<u>El espacio vectorial</u> $\mathbb{C}$ <u>sobre el cuerpo</u> $\mathbb{R}$. Destacamos el hecho que $\mathbb{C}$ es un grupo conmutativo con respecto a la adición. Definimos una operación que aplica $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ de la manera siguiente: si $z = \langle a,b\rangle \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces

$$r.z = \langle ra, rb\rangle\ .$$

A partir de esta definición pueden demostrarse como teoremas las siguientes propiedades de esta operación:

1) $a,\ b \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C},\ \ a(bz) = (ab)z$

2) $a \in \mathbb{R},\ z,\ w \in \mathbb{C},\ a(z+w) = az + aw$

3) $a,\ b \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C},\ \ (a+b)z = az + bz$

4) $z \in \mathbb{C},\ 1.z = z$

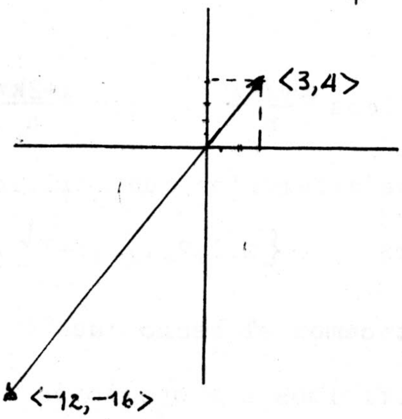
5) $z \in \mathbb{C},\ 0.z = \langle 0,0\rangle$

6) $a \in \mathbb{R},\ \ a.\langle 0,0\rangle = \langle 0,0\rangle$

La estructura definida por las propiedades que acabamos de enunciar se llama espacio vectorial: el espacio vectorial del grupo aditivo $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman escalares ; los elementos de $\mathbb{C}$ se llaman vectores.

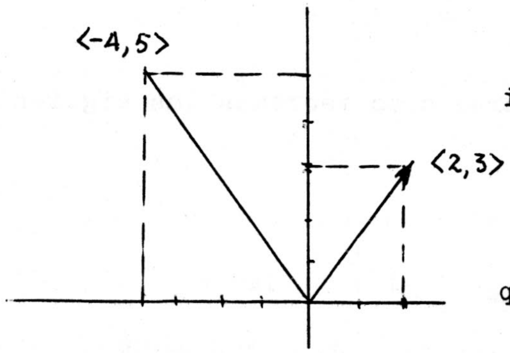
Dependencia lineal e independencia lineal. Definición: Se dice que los vectores z y w son linealmente dependientes si existen escalares a y b tales que $az + bw = 0 = \langle 0,0\rangle$, sin que a y b sean ambos nulos.

EJEMPLO 1. Los vectores $z = \langle 3,4\rangle$ y $w = \langle -12,-16\rangle$ son linealmente dependientes porque $12z + 3w = \langle 0,0\rangle$. Esto se puede expresar de otra manera así: $z = -\frac{1}{4}w$.



Si dos vectores no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes. En otras palabras, los vectores z y w son linealmente independientes si la combinación lineal $az + bw = 0 = \langle 0,0\rangle$ implica necesariamente que $a = b = 0$.

EJEMPLO 2. Los vectores $\langle 2,3\rangle$ y $\langle -4,5\rangle$ son linealmente independientes, porque



$$a\langle 2,3\rangle + b\langle -4,5\rangle = 0$$

implica

$$2a - 4b = 0$$
$$3a + 5b = 0,$$

que a su vez implica

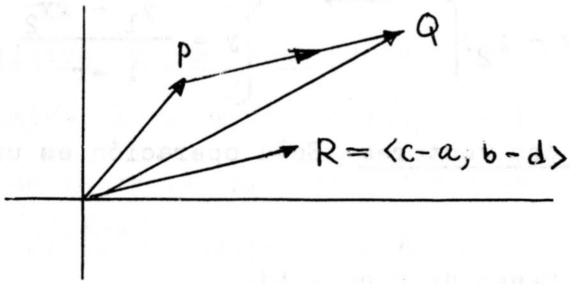
$$a = b = 0.$$

Vectores Unitarios. Los vectores $e_1 = \langle 1,0\rangle$ y $e_2 = \langle 0,1\rangle$ se llaman vectores unitarios. Estos vectores son linealmente independientes, como puede constatarse. Además, cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de e_1 y e_2 ; en efecto, dado el vector $\langle h,k\rangle$, tenemos

$$\langle h,k\rangle = h.\langle 1,0\rangle + k.\langle 0,1\rangle = h.e_1 + k.e_2 \ .$$

Por cumplir estas propiedades se dice que los vectores e_1 y e_2 constituyen una base del espacio vectorial $\mathbb{C}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

Determinación del vector correspondiente a una pareja dada de puntos del plano.



$$[\overrightarrow{PQ}] = [\overrightarrow{OQ}] - [\overrightarrow{OP}]$$

Si

$$\left.\begin{array}{l}[\overrightarrow{OP}] = \langle a,b\rangle \\ [\overrightarrow{OQ}] = \langle c,d\rangle\end{array}\right\} \text{ entonces } \quad [\overrightarrow{PQ}] = \langle c,d\rangle - \langle a,b\rangle$$

$$= \langle c-a, d-b\rangle = [\overrightarrow{OR}] \ .$$

Norma de un vector. Dado el vector $\langle h,k\rangle$ se define la norma de $\langle h,k\rangle$ así:

$$\|\langle h,k\rangle\| = \sqrt{(h^2 + k^2)}$$

Este es el mismo concepto que hemos identificado atrás como «módulo de un número complejo». De acuerdo con la definición, si $z \in \mathbb{C}$, $\|z\| \in \mathbb{R}$. $\|z\|$ es la medida de la distancia entre el origen y el punto correspondiente al vector z.

Distancia entre dos puntos del plano. Sean A y B dos puntos del plano. La distancia entre A y B es $\|[\overrightarrow{AB}]\|$. Si $[\overrightarrow{OA}] = \langle x_1,y_1\rangle$, $[\overrightarrow{OB}] = \langle x_2,y_2\rangle$, entonces

$$[\overrightarrow{AB}] = \langle x_2-x_1, y_2-y_1\rangle$$

y

$$\|[\overrightarrow{AB}]\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}.$$

División de un segmento en una razón dada. Sean A y B dos puntos del plano. Queremos determinar el punto P tal que $[\overrightarrow{AP}] = r[\overrightarrow{BP}]$, donde r es un número real dado. Si $[\overrightarrow{OA}] = \langle x_1, y_1\rangle$, $[\overrightarrow{OB}] = \langle x_2, y_2\rangle$, $[\overrightarrow{OP}] = \langle x, y\rangle$, entonces $[\overrightarrow{AP}] = \langle x-x_1, y-y_1\rangle$ y $[\overrightarrow{BP}] = \langle x-x_2, y-y_2\rangle$. O sea que

$$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = r(x - x_2) \\ \\ y - y_1 = r(y - y_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{x_1 - rx_2}{1 - r} \\ \\ y = \dfrac{y_1 - ry_2}{1 - r} \end{array}\right. , \quad r \neq 1 .$$

<u>Producto escalar de dos vectores</u>. Esta operación es una aplicación $\mathbf{C}\times\mathbf{C} \to \mathbf{R}$ que se define así:

$$\langle a,b\rangle \bullet \langle c,d\rangle = ac + bd.$$

A partir de esta definición se demuestran como teoremas las siguientes propiedades del producto escalar:

1) $(z + w)\bullet r = (z\bullet r) + (w\bullet r)$, z, w, r vectores cualesquiera.

2) $(kz)\bullet w = k(z\bullet w)$, $z, w \in \mathbf{C}$, $k \in \mathbf{R}$

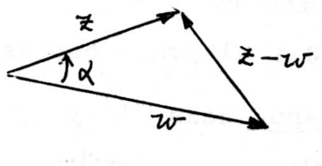
3) $z\bullet w = w\bullet z$, $w, z \in \mathbf{C}$

4) $z\bullet z > 0$, a menos que $z = \langle 0,0\rangle$.

5) $\|z\| = \sqrt{(z\bullet z)}$, $z \in \mathbf{C}$.

6) $\|z \pm w\| = \sqrt{(z\bullet z \pm 2(z\bullet w) + w\bullet w)}$.

<u>Definición de la función coseno</u>. De la figura obtenemos



$$\|z - w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2 - 2\|z\|\cdot\|w\| \cos \alpha$$

$$\|z - w\|^2 = z\bullet z - 2(z\bullet w) + w\bullet w = \|z\|^2 + \|w\|^2 - 2(z\bullet w)$$

o sea que

$$\|z\|\|w\|\cos\alpha = z\bullet w$$

de donde

$$\cos\alpha = \frac{z\bullet w}{\|z\|\cdot\|w\|}$$

Ortogonalidad. z y w son ortogonales si y solamente si $z \circ w = 0$.

Propiedades de la ortogonalidad. Se demuestran las siguientes propiedades:

1) $z \perp w \Rightarrow kz \perp sw \quad (k,s \in \mathbb{R})$

2) $z \perp z \Leftrightarrow z = \langle 0,0 \rangle$

3) $z \perp w$ y $z \perp t \Rightarrow z \perp (w + t)$, $w,z,t \in \mathbb{C}$.

Definición analítica de una recta. Vamos a definir analíticamente la recta que pasa por los puntos A y B tales que $[\overrightarrow{OA}] = \langle x_1,y_1 \rangle$, $[\overrightarrow{OB}] = \langle x_2,y_2 \rangle$. Si P es un punto de la recta AB, entonces existe un número real k tal que $[\overrightarrow{AP}] = k[\overrightarrow{AB}]$. Si $[\overrightarrow{OP}] = \langle x,y \rangle$, entonces

$$\langle x-x_1,y-y_1 \rangle = k.\langle x_2-x_1,y_2-y_1 \rangle ,$$

de donde se obtiene

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} .$$

La expresión $m = (y_2-y_1)/(x_2-x_1)$ se llama coeficiente angular de la recta AB.

Condición de paralelismo entre dos rectas. Supongamos que las rectas $\tilde{r}$ y $\tilde{s}$ (no paralelas a los ejes) están determinadas así: $\tilde{r}$ pasa por los puntos A y B; $\tilde{s}$ pasa por los puntos C y D. Hagamos

$[\overrightarrow{OA}] = \langle x_1,y_1 \rangle$, $[\overrightarrow{OB}] = \langle x_2,y_2 \rangle$, $[\overrightarrow{OC}] = \langle x_1',y_1' \rangle$, $[\overrightarrow{OD}] = \langle x_2',y_2' \rangle$. Entonces, $[\overrightarrow{AB}] = \langle x_2-x_1,y_2-y_1 \rangle$ y $[\overrightarrow{CD}] = \langle x_2'-x_1',y_2'-y_1' \rangle$. Si las rectas AB y CD son paralelas, entonces los vectores $[\overrightarrow{AB}]$ y $[\overrightarrow{CD}]$ pertenecen a la misma dirección (son linealmente dependientes) y, por lo tanto, existe un número real p tal que $[\overrightarrow{AB}] = p[\overrightarrow{CD}]$. Esto significa que

$$\frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ,$$

o sea la igualdad entre los coeficientes angulares.

Condición de ortogonalidad entre dos vectores. Como arriba, supongamos que las rectas $\tilde{r}$ y $\tilde{s}$ estén determinadas por los puntos A, B, C, D. Si las rectas son ortogonales, entonces $[\overrightarrow{AB}] \bullet [\overrightarrow{CD}] = 0$, lo que significa

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} + 1 = 0 .$$

<u>Definición analítica de la circunferencia</u>. La circunferencia de centro C y radio r es el conjunto de los puntos P tales que $\|[\overrightarrow{CP}]\| = r$. Si $[\overrightarrow{OC}] = \langle h,k \rangle$, entonces

$$\{P : \|[\overrightarrow{CP}]\| = r\} = \{\langle x,y \rangle : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}.$$

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
BOGOTA, COLOMBIA

(Recibido en octubre de 1968)