Álgebra II. Hoja de ejercicios 1: Subanillos, homomorfismos, álgebra de grupo Universidad de El Salvador, ciclo par 2018

Por cualquier pregunta, no duden en escribir al grupo ues-algebra-2@googlegroups.com.

Ejercicio 1. *Verifique que hay una cadena de subanillos*

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] \subset \mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big] \subset \mathbb{R}$$

donde

$$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}, \quad \mathbb{Z}\Big[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big] := \Big\{a + b\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} \;\Big|\; a, b \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

Ejercicio 2. *Consideremos el anillo de las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respecto a las operaciones **punto por punto***

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Demuestre que hay una cadena de subanillos

$$\begin{aligned} &\{\text{funciones constantes } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \subset \{\text{funciones polinomiales } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \\ &\qquad \subset \{\text{funciones continuas } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} \subset \{\text{funciones } \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Homomorfismos de anillos

Ejercicio 3. *Sea R un anillo conmutativo y $M_n(R)$ el anillo de las matrices de $n \times n$ con coeficientes en R. ¿Cuáles aplicaciones de abajo son homomorfismos?*

1) *La proyección*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto x_{11}.$$

2) *La traza*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}.$$

3) *El determinante $A \mapsto \det A$.*

Ejercicio 4. *Sea $f\colon R \to S$ un homomorfismo de anillos conmutativos y sea $n = 1, 2, 3, \ldots$*

1) *Demuestre que f induce un homomorfismo de los anillos de matrices correspondientes $f_*\colon M_n(R) \to M_n(S)$ dado por*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x_{11}) & f(x_{12}) & \cdots & f(x_{1n}) \\ f(x_{21}) & f(x_{22}) & \cdots & f(x_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_{n1}) & f(x_{n2}) & \cdots & f(x_{nn}) \end{pmatrix}.$$

2) *Demuestre que f induce un homomorfismo de grupos* $\mathrm{GL}_n(f)\colon \mathrm{GL}_n(R) \to \mathrm{GL}_n(S)$.

3) *Demuestre que el diagrama de homomorfismos de grupos*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GL}_n(R) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\mathrm{GL}_n(f)"'] & R^\times \arrow[d, "f^\times"] \\
\mathrm{GL}_n(S) \arrow[r, "\det"'] & S^\times
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(Sugerencia: use la fórmula $\det(x_{ij}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot x_{1\sigma(1)} \cdots x_{n\sigma(n)}$*.)*

Ejercicio 5. *Sea R un anillo conmutativo. Calcule $Z(M_n(R))$, el centro del anillo de las matrices de $n \times n$ con coeficientes en R.*
(Véanse los ejercicios donde calculamos el centro del grupo lineal general $\mathrm{GL}_n(R)$*.)*

Ejercicio 6.

1) *Demuestre que un isomorfismo de anillos $R \to S$ se restringe a un isomorfismo de grupos $R^\times \to S^\times$.*

2) *Demuestre que los anillos de polinomios $\mathbb{Z}[X]$ y $\mathbb{Q}[X]$ no son isomorfos.*

Ejercicio 7. *Sea $f\colon R \to S$ un homomorfismo sobreyectivo de anillos. Demuestre que $f(Z(R)) \subseteq Z(S)$.*

Álgebra de grupo

Ejercicio 8. *Sea R un anillo conmutativo y G un grupo. Demuestre que*

$$\epsilon\colon R[G] \twoheadrightarrow R, \quad \sum_{g \in G} a_g\, g \mapsto \sum_{g \in G} a_g$$

es un homomorfismo sobreyectivo de anillos.

Ejercicio 9. *Sea R un anillo conmutativo y G un grupo finito. Consideremos $t := \sum_{g \in G} 1 \cdot g \in R[G]$. Demuestre que $t^2 = |G|\, t$.*

Ejercicio 10. *En este ejercicio vamos a calcular el centro del álgebra de grupo $R[G]$. Consideremos*

$$x = \sum_{g \in G} a_g\, g \in R[G].$$

1) *Demuestre que $x \in Z(R[G])$ si y solamente si $h\, x = x\, h$ para todo $h \in G$.*

2) *Deduzca que $x \in Z(R[G])$ si y solamente si $a_g = a_{hgh^{-1}}$ para cualesquiera $g, h \in G$.*

Entonces, el centro de $R[G]$ consiste en los elementos $\sum_{g \in G} a_g\, g$ cuyos coeficientes a_g son constantes sobre las clases de conjugación de G.