Functores adjuntos y teoremas de adjunción

Bruno Stonek
`bruno@stonek.com`

19 de octubre de 2012

Introducción

Introducción

Introducción

Categorías (1)

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

- una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos,

Categorías (1)

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

- una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos,
- para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de flechas (o *morfismos*) $A \to B$ de *dominio* A y *codominio* B,

Categorías (1)

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

- una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos,
- para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de flechas (o *morfismos*) $A \to B$ de *dominio* A y *codominio* B,
- para cada par $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de flechas, una operación de *composición* $g \circ f = gf : A \to C$,

Categorías (1)

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ consta de:

- una clase $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos,
- para cada par (A, B) de objetos, un conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ de flechas (o *morfismos*) $A \to B$ de *dominio* A y *codominio* B,
- para cada par $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ de flechas, una operación de *composición* $g \circ f = gf : A \to C$,
- para cada objeto A, una flecha *identidad* $\mathrm{id}_A : A \to A$.

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \to C$, entonces $f \circ \mathrm{id}_B = f = \mathrm{id}_C \circ f$,

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \to C$, entonces $f \circ \mathrm{id}_B = f = \mathrm{id}_C \circ f$,
- la composición es asociativa: si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son flechas, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \to C$, entonces $f \circ \mathrm{id}_B = f = \mathrm{id}_C \circ f$,
- la composición es asociativa: si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son flechas, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Una categoría es *pequeña* si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Categorías (2)

Definición

Debe cumplirse:

- si $f : B \to C$, entonces $f \circ \mathrm{id}_B = f = \mathrm{id}_C \circ f$,
- la composición es asociativa: si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$ son flechas, entonces $h(gf) = (hg)f$.

Una categoría es *pequeña* si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Notación

$A \in \mathcal{C}$ significará $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: *R*-módulos y morfismos de *R*-módulos.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R-módulos y morfismos de R-módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R-módulos y morfismos de R-módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R-módulos y morfismos de R-módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{C}^{\mathsf{op}}$ es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.
- Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, consideraremos la *categoría producto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**: R-módulos y morfismos de R-módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si $\mathcal{C}$ es una categoría, $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.
- Si $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son categorías, consideraremos la *categoría producto* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$.

Definición

Una flecha $f : A \to B$ es un isomorfismo si existe $g : B \to A$ tal que $gf = \mathrm{id}_A$ y $fg = \mathrm{id}_B$.

Subcategorías

Definición

Una categoría $\mathcal{S}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{C}$ si:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

Subcategorías

Definición

Una categoría $\mathcal{S}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{C}$ si:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$,

Subcategorías

Definición

Una categoría $\mathcal{S}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{C}$ si:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$,
- La composición y las identidades en $\mathcal{S}$ coinciden en $\mathcal{S}$ y en $\mathcal{C}$.

Subcategorías

Definición

Una categoría $\mathcal{S}$ es una subcategoría de una categoría $\mathcal{C}$ si:

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$,
- La composición y las identidades en $\mathcal{S}$ coinciden en $\mathcal{S}$ y en $\mathcal{C}$.

Una subcategoría $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$ es plena si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ para todo $A, B \in \mathcal{S}$.

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$A$$

es inicial si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A & X \end{tikzcd}$$

es inicial si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted] & X \end{tikzcd}$$

es inicial si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$A$$

es final si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X & A \end{tikzcd}$$

es **final** si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dotted] & A
\end{tikzcd}$$

es final si:

Objetos iniciales y finales

Definición

Un objeto $A \in \mathcal{C}$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dotted] & A \end{tikzcd}$$

es final si:

Proposición

Si existe un objeto inicial (o final) entonces es único a menos de un único isomorfismo.

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$A \rightarrowtail^{m} B$$

es un monomorfismo si:

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \arrow[r, tail, "m"] & B \end{tikzcd}$$

es un monomorfismo si: $mf = mg \Rightarrow f = g$

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{e} \twoheadrightarrow B$$

es un epimorfismo si:

Monomorfismos y epimorfismos

Definición

Una flecha

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "e"] & B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

es un epimorfismo si: $fe = ge \Rightarrow f = g$

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$C$$

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$C \xmapsto{F} FC$$

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, mapsto, "F"] \arrow[d, "f"'] & FC \\
C'
\end{tikzcd}$$

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & & FC \arrow[d, "Ff"] \\
C' & \arrow[r, mapsto, "F"] & FC'
\end{tikzcd}$$

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] & & FC \arrow[d, "Ff"] \\ C' \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\longmapsto}"] & & FC' \end{tikzcd}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$,

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] & & FC \arrow[d, "Ff"] \\ C' \arrow[r, phantom, "\overset{F}{\longmapsto}"] & & FC' \end{tikzcd}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces $F(gf) = F(g)F(f)$.

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & FC \\
C' & FC'
\end{tikzcd}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces

Un functor contravariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un functor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dd, "f"'] & & & FC \\ & {} \arrow[r, mapsto, "F"] & {} & \\ C' & & & FC' \arrow[uu, "Ff"'] \end{tikzcd}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces

Un functor contravariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un functor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Functores

Definición

Sean $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorías. Un functor (covariante) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "f"'] & & FC \\
 & \arrow[r, mapsto, "F"] & \\
C' & & FC' \arrow[uu, "Ff"']
\end{tikzcd}$$

Debe cumplirse:

- si $A \in \mathcal{C}$ entonces $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$,
- si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, entonces $F(gf) = F(f)F(g)$.

Un functor contravariante $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un functor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* U : **R-Mod** $\to$ **Set**.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* U : **R-Mod** → **Set**.
- El *bifunctor Hom*, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* U : **R-Mod** → **Set**.
- El *bifunctor Hom*, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

$$A \quad A'$$

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* U : **R-Mod** $\to$ **Set**.
- El *bifunctor Hom*, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

$$A \quad A' \xmapsto{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$$

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* U : **R-Mod** $\to$ **Set**.
- El *bifunctor Hom*, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to$ **Set**.

$$\begin{tikzcd} A & A' \arrow[d, swap, "g"] \arrow[r, mapsto, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)"] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \\ B \arrow[u, "f"] & B' & \end{tikzcd}$$

Definición

Si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son functores, se define su functor composición $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ punto a punto.

Ejemplos

- El *functor de olvido* U : **R-Mod** $\to$ **Set**.
- El *bifunctor Hom*, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$.

$$\begin{tikzcd}
A & A' \arrow[dd, "g"'] & & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A') \arrow[dd, "{[f^*,g_*]}"] \\
 & & {} \arrow[r, mapsto, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)"] & {} & \\
B \arrow[uu, "f"] & B' & & & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,B')
\end{tikzcd}$$

donde $[f^*, g_*](q) = gqf$.

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$i$$

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo J** en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} i & D_i \end{tikzcd}$$

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "e^i_j"'] & D_i \\
j &
\end{tikzcd}$$

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, "e^i_j"'] & D_i \arrow[d, "De^i_j"] \\
j & D_j
\end{tikzcd}$$

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, "e_j^i"'] & D_i \arrow[d, "De_j^i"] \\ j & D_j \end{tikzcd}$$

- Es conmutativo si:

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d, shift right, "f_j^i"'] \arrow[d, shift left, "e_j^i"] & D_i \\ j & D_j \end{tikzcd}$$

- Es conmutativo si:

Diagramas

Definición

Sea $\mathcal{C}$ una categoría y J una categoría pequeña.

- Un diagrama de tipo J en $\mathcal{C}$ es un functor $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[d, shift right, "f_j^i"'] \arrow[d, shift left, "e_j^i"] & D_i \arrow[d, shift right, "Df_j^i"'] \arrow[d, shift left, "De_j^i"] \\
j & D_j
\end{tikzcd}$$

- Es conmutativo si: $De_j^i = Df_j^i$.

Categorías coma

Definición

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la categoría coma $(C \downarrow G)$:

Categorías coma

Definición

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la categoría coma $(C \downarrow G)$:

- Objetos: las flechas $f : C \to GD$, donde $D \in \mathcal{D}$,

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \\ GD & \end{tikzcd}$$

Categorías coma

Definición

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la categoría coma $(C \downarrow G)$:

- Objetos: las flechas $f : C \to GD$, donde $D \in \mathcal{D}$,
- Un morfismo de $f : C \to GD$ a $f' : C \to GD'$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\
GD & & GD'
\end{tikzcd}$$

Categorías coma

Definición

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un functor y $C \in \mathcal{C}$, definimos la categoría coma $(C \downarrow G)$:

- Objetos: las flechas $f : C \to GD$, donde $D \in \mathcal{D}$,
- Un morfismo de $f : C \to GD$ a $f' : C \to GD'$ es una flecha $g : D \to D'$ tal que:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ GD \arrow[rr, "Gg"'] & & GD' \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \textbf{R-Mod} \to \textbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R-módulo.

Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R-módulo.

F_X es un R-módulo libre $\Leftrightarrow$ existe una función "inclusión" $i_X : X \to UF_X$ tal que i_X es inicial en $(X \downarrow U)$.

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i_X"'] \\ UF_X & \end{tikzcd}$$

Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R-módulo.

F_X es un R-módulo libre $\Leftrightarrow$ existe una función "inclusión" $i_X : X \to UF_X$ tal que i_X es inicial en $(X \downarrow U)$.

Esto significa: para todo $M \in \mathbf{R\text{-}Mod}$ y $f : X \to UM$ función,

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "i_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
UF_X & & UM
\end{tikzcd}$$

Ejemplo

Sean R un anillo, X un conjunto, $U : \textbf{R-Mod} \to \textbf{Set}$ el functor de olvido. Sea F_X un R-módulo.

F_X es un R-módulo libre $\Leftrightarrow$ existe una función "inclusión" $i_X : X \to UF_X$ tal que i_X es inicial en $(X \downarrow U)$.

Esto significa: para todo $M \in \textbf{R-Mod}$ y $f : X \to UM$ función, existe un único morfismo $\tilde{f} : F_X \to M$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "i_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
UF_X \arrow[rr, dotted, "U\tilde{f}"'] & & UM
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Sabemos que para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X.

Sabemos que para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X.

Preguntas

¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mod}$?

Sabemos que para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X.

Preguntas

¿Determina F_X un *functor libre* F : **Set** $\to$ **R-Mod**?

En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con U : **R-Mod** $\to$ **Set**?

Transformaciones naturales

Definición

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$ functores.

Transformaciones naturales

Definición

Sean
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] \arrow[phantom, from=U, to=D, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$
functores. Una transformación natural $\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$

A

Transformaciones naturales

Definición

Sean $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau"] \end{tikzcd}$$ functores. Una transformación natural

$\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \to GA$,

$$A \qquad FA \xrightarrow{\tau_A} GA$$

Transformaciones naturales

Definición

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"] \end{tikzcd}$ functores. Una transformación natural

$\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \to GA$, tal que para toda f,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & FA \arrow[r, "\tau_A"] & GA \\ B & & \end{tikzcd}$$

Transformaciones naturales

Definición

Sean $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\tau"] \end{tikzcd}$$ functores. Una transformación natural $\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \to GA$, tal que para toda f,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] & FA \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ B & FB \arrow[r, "\tau_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Transformaciones naturales

Definición

Sean $\mathcal{C}$ $\begin{tikzcd} {} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \tau"] & {} \end{tikzcd}$ $\mathcal{D}$ functores. Una transformación natural

$\tau : F \Rightarrow G$ asigna a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ una flecha $\tau_A : FA \to GA$, tal que para toda f,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \\ B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\tau_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

τ es un isomorfismo natural si τ_A es un isomorfismo para todo A: escribimos $F \cong G$.

Conos

Definición

Sea $D : J \to \mathcal{C}$ un diagrama.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[d, "De^i_j"] \\
D_j
\end{tikzcd}$$

Conos

Definición

Sea $D : J \to \mathcal{C}$ un diagrama.
Un cono para D es $(C, (\lambda_j)_{j \in J})$, donde

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dd, "De_j^i"] \\
C \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\
 & D_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para toda $e_j^i : i \to j$.

Morfismos de conos

Definición

Sean (C, λ_j) y (C', μ_j) dos conos para $D : J \to \mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i \\
C' \arrow[urr, bend left, "\mu_i"] & C \arrow[ur, "\lambda_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Morfismos de conos

Definición

Sean (C, λ_j) y (C', μ_j) dos conos para $D : J \to \mathcal{C}$. Un morfismo de conos $f : (C', \mu_j) \to (C, \lambda_j)$ es $f : C' \to C$ tal que:

$$\begin{tikzcd} & & D_i \\ C' \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, bend left, "\mu_i"] & C \arrow[ur, "\lambda_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in J$.

Morfismos de conos

Definición

Sean (C, λ_j) y (C', μ_j) dos conos para $D : J \to \mathcal{C}$. Un morfismo de conos $f : (C', \mu_j) \to (C, \lambda_j)$ es $f : C' \to C$ tal que:

$$\begin{tikzcd} & & D_i \\ C' \arrow[rru, bend left, "\mu_i"] \arrow[r, "f"'] & C \arrow[ru, "\lambda_i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $i \in J$.

Así, los conos para D forman una categoría.

Límites

Definición

Un límite para el diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D.

Límites

Definición

Un límite para el diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D.
Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$

$$\begin{tikzcd}
 & D_i \arrow[dd, "De_j^i"] \\
\varprojlim D \arrow[ru, "\lambda_i"] \arrow[rd, "\lambda_j"'] & \\
 & D_j
\end{tikzcd}$$

Límites

Definición

Un límite para el diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D.

Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$ tal que si (C', μ_j) es otro cono,

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i \arrow[d, "De_j^i"] \\
C' \arrow[urr, bend left, "\mu_i"] \arrow[drr, bend right, "\mu_j"'] & \varprojlim D \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\
 & & D_j
\end{tikzcd}$$

Límites

Definición

Un límite para el diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D.

Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$ tal que si (C', μ_j) es otro cono, existe una única flecha $f : C' \to \varprojlim D$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i \arrow[dd, "De^i_j"] \\
C' \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[urr, bend left, "\mu_i"] \arrow[drr, bend right, "\mu_j"'] & \varprojlim D \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\
 & & D_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Límites

Definición

Un límite para el diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ es un objeto final en la categoría de conos para D.
Es un cono $(\varprojlim D, \lambda_j)$ tal que si (C', μ_j) es otro cono, existe una única flecha $f : C' \to \varprojlim D$ tal que:

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i \arrow[dd, "De_j^i"] \\
C' \arrow[urr, bend left, "\mu_i"] \arrow[r, dotted, "f"] \arrow[drr, bend right, "\mu_j"'] & \varprojlim D \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\
 & & D_j
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Es único a menos de un único isomorfismo en la categoría de conos.

Productos

Definición

Si J es una categoría pequeña y *discreta*, i.e. sus únicas flechas son identidades, el límite de un diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ es un producto.

$$\begin{tikzcd}
 & & D_i \\
X \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[r, dotted, "f"'] & \prod\limits_{j\in J} D_j \arrow[ur, "p_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.
- En **Grp**, el producto directo de grupos con las proyecciones.

Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R**-**Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.
- En **Grp**, el producto directo de grupos con las proyecciones.
- En **Top**, el producto cartesiano con la topología producto, y las proyecciones.

Igualadores

Definición

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Igualadores

Definición

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd} \qquad fi = gi$$

Igualadores

Definición

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$fi = gi$$

$$fi' = gi'$$

Igualadores

Definición

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\
X \arrow[u, dotted, "\theta"] \arrow[ur, "i'"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$fi = gi$$

$$fi' = gi'$$

Pullbacks

Definición

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Pullbacks

Definición

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

$$f p_A = g p_B$$

Pullbacks

Definición

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[drr, bend left, "p'_B"] \arrow[ddr, bend right, "p'_A"'] & & \\
& D \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$f p_A = g p_B$$

$$f p'_A = g p'_B$$

Pullbacks

Definición

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rd, dotted, "\theta"] \arrow[rrd, bend left, "p'_B"] \arrow[rdd, bend right, "p'_A"'] & & \\
& D \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_A"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$f p_A = g p_B$$

$$f p'_A = g p'_B$$

Colímites

Definición

Si $D : J \to \mathcal{C}$ es un diagrama,

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[d, "De^i_j"'] \\
D_j
\end{tikzcd}$$

Colímites

Definición

Si $D : J \to \mathcal{C}$ es un diagrama, su colímite es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dd, "De^i_j"'] \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\
& \varinjlim D \\
D_j \arrow[ur, "\lambda_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Definición

Si $D : J \to \mathcal{C}$ es un diagrama, su colímite es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dd, "De^i_j"'] \arrow[dr, "\lambda_i"] \arrow[drr, bend left, "\mu_i"] & & \\
& \varinjlim D & C' \\
D_j \arrow[ur, "\lambda_j"'] \arrow[urr, bend right, "\mu_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Definición

Si $D : J \to \mathcal{C}$ es un diagrama, su colímite es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dr, "\lambda_i"] \arrow[drr, bend left, "\mu_i"] \arrow[dd, "De^i_j"'] & & \\
& \varinjlim D \arrow[r, dotted, "f"] & C' \\
D_j \arrow[ur, "\lambda_j"'] \arrow[urr, bend right, "\mu_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

Colímites

Definición

Si $D : J \to \mathcal{C}$ es un diagrama, su colímite es $(\varinjlim D, \lambda_i)$.

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dd, "De^i_j"'] \arrow[dr, "\lambda_i"] \arrow[drr, bend left, "\mu_i"] & & \\
& \varinjlim D \arrow[r, dotted, "f"] & C' \\
D_j \arrow[ur, "\lambda_j"'] \arrow[urr, bend right, "\mu_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

También se define *coproducto*, *coigualador*, *pushout*.

Coproductos

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
 & \coprod_{j\in J} D_j \arrow[r, dotted, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Coproductos

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
& \coprod_{j\in J} D_j \arrow[r, dotted, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.

Coproductos

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
 & \coprod_{j\in J} D_j \arrow[r, dotted, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.

Coproductos

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
& \coprod\limits_{j\in J} D_j \arrow[r, dotted, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.
- En **Grp**, el producto libre de grupos.

Coproductos

$$\begin{tikzcd}
D_i \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[drr, bend left, "f_i"] & & \\
& \coprod_{j\in J} D_j \arrow[r, dotted, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.
- En **Grp**, el producto libre de grupos.
- En **Top**, la unión disjunta con la topología final respecto de las inclusiones.

Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp**...) el producto "coincide" con el producto en **Set**?

Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp**...) el producto "coincide" con el producto en **Set**?

¿Cómo explicar que en **Top** tanto el producto como el coproducto "coinciden" con el de **Set**?

Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp**...) el producto "coincide" con el producto en **Set**?

¿Cómo explicar que en **Top** tanto el producto como el coproducto "coinciden" con el de **Set**?

Precisemos el sentido de las preguntas.

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva límites si para todo $D : J \to \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \to \mathcal{D}$.

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva límites si para todo $D : J \to \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \to \mathcal{D}$. Análogamente con colímites.

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva límites si para todo $D : J \to \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \to \mathcal{D}$. Análogamente con colímites.

Preguntas

¿Cómo explicar que el functor de olvido U : **R-Mod** → **Set** (o en **Grp**...) preserva límites?

Preservación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ preserva límites si para todo $D : J \to \mathcal{C}$ con límite $(\varprojlim D, \lambda_i)$ se tiene que $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$ es el límite de $FD : J \to \mathcal{D}$. Análogamente con colímites.

Preguntas

¿Cómo explicar que el functor de olvido U : **R-Mod** → **Set** (o en **Grp**...) preserva límites?

¿Cómo explicar que el functor de olvido U : **Top** → **Set** preserva tanto límites como colímites?

(Co)completitud

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ es completa si todo diagrama en $\mathcal{C}$ tiene límite.

(Co)completitud

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ es cocompleta si todo diagrama en $\mathcal{C}$ tiene colímite.

(Co)completitud

Definición

Una categoría $\mathcal{C}$ es cocompleta si todo diagrama en $\mathcal{C}$ tiene colímite.

Ejemplos

Set, **R-Mod**, **Top** son completas y cocompletas.

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ crea límites si:

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ crea límites si: para cada diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ crea límites si: para cada diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

- existe un único cono (C, λ_i) para D (a menos de isomorfismo) tal que $(FC, F\lambda_i)$ es el límite de FD,

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ crea límites si: para cada diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

- existe un único cono (C, λ_i) para D (a menos de isomorfismo) tal que $(FC, F\lambda_i)$ es el límite de FD,
- (C, λ_i) es el límite de D.

Creación de límites

Definición

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ crea límites si: para cada diagrama $D : J \to \mathcal{C}$ tal que FD tiene límite,

- existe un único cono (C, λ_i) para D (a menos de isomorfismo) tal que $(FC, F\lambda_i)$ es el límite de FD,
- (C, λ_i) es el límite de D.

Observación

Si $\mathcal{D}$ es una categoría completa y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ crea límites, entonces $\mathcal{C}$ es completa.

1. Definiciones básicas de la teoría de categorías

2. Adjunciones

3. Teoremas de adjunción

Adjunciones

Definición

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ functores.

Adjunciones

Definición

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ functores. (F, G) es un par adjunto si existe un isomorfismo natural τ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)", ""{name=U, below}] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)"', ""{name=D, above}] & & \mathbf{Set} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\tau", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

Adjunciones

Definición

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ functores. (F, G) es un par adjunto si existe un isomorfismo natural τ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)"'] \arrow[r, phantom, "\cong \Downarrow \tau"] & \mathbf{Set} \end{tikzcd}$$

Es decir: si hay biyecciones

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B)$$

naturales en $A \in \mathcal{C}$, $B \in \mathcal{D}$.

Identidades triangulares

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.*

Identidades triangulares

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* (F, G) *es un par adjunto si y sólo si*

existen $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "GF"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\eta"] \end{tikzcd}$ *y* $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "FG"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\epsilon"] \end{tikzcd}$

Identidades triangulares

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* (F, G) *es un par adjunto si y sólo si*

existen $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "GF"', ""{name=L, above}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow, "\eta"] \end{tikzcd}$ *y* $\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, bend left=50, "FG", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=50, "\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"', ""{name=L, above}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=L, Rightarrow, "\epsilon"] \end{tikzcd}$ *tales que*

$$\begin{tikzcd} FC \arrow[r, "F(\eta_C)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{FC}"'] & FGFC \arrow[d, "\epsilon_{FC}"] \\ & FC \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GD \arrow[r, "\eta_{GD}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{GD}"'] & GFGD \arrow[d, "G(\epsilon_D)"] \\ & GD \end{tikzcd}$$

conmutan para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$.

Propiedad universal

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.*

Propiedad universal

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* (F, G) *es un par adjunto si y sólo si*

existe $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "GF"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \eta"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$ *con* η_C *inicial en* $(C \downarrow G)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Propiedad universal

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* (F, G) *es un par adjunto si y sólo si*

existe $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "GF"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\eta"] \end{tikzcd}$ *con* η_C *inicial en* $(C \downarrow G)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Para todo $C \in \mathcal{C}$*,*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\eta_C"'] \\ GFC & \end{tikzcd}$$

Propiedad universal

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* (F, G) *es un par adjunto si y sólo si*

existe $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "GF"'{name=D}] & \mathcal{C} \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\eta"] \end{tikzcd}$ *con* η_C *inicial en* $(C \downarrow G)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ *y* $f : C \to GD$,

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dr, "f"] & \\ GFC & & GD \end{tikzcd}$$

Propiedad universal

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores.* (F, G) *es un par adjunto si y sólo si*

existe $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"{name=U}] \arrow[r, bend right, "GF"'{name=L}] & \mathcal{C} \arrow[Rightarrow, from=U, to=L, "\eta"] \end{tikzcd}$ *con* η_C *inicial en* $(C \downarrow G)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Para todo $C \in \mathcal{C}$, $D \in \mathcal{D}$ *y* $f : C \to GD$*, existe una única* $g : FC \to D$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dr, "f"] & \\ GFC \arrow[rr, dotted, "Gg"'] & & GD \end{tikzcd}$$

conmuta.

Unicidad

Proposición

Si (F, G) *y* (F, G') *son pares adjuntos, entonces* $G \cong G'$.

Unicidad

Proposición

Si (F, G) *y* (F, G') *son pares adjuntos, entonces* $G \cong G'$*.*

Si (F, G) *y* (F', G) *son pares adjuntos, entonces* $F \cong F'$*.*

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ functores. Si existe $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(C \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$ functores. Si existe $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(C \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor.

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ functores. Si existe $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(C \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Supongamos que existen* $\eta_C : C \to GF_C$ *iniciales en* $(C \downarrow G)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Construcción puntual de adjuntos

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ functores. Si existe $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(C \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Supongamos que existen* $\eta_C : C \to GF_C$ *iniciales en* $(C \downarrow G)$ *para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Entonces existe un único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *tal que* $FC = F_C$ *y* $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ *sea una transformación natural.*

Construcción puntual de adjuntos

Sean
$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$$
functores. Si existe $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ tal que η_C es inicial en $(C \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces (F, G) es un par adjunto.

Proposición

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Supongamos que existen $\eta_C : C \to GF_C$ iniciales en $(C \downarrow G)$ para todo $C \in \mathcal{C}$.

Entonces existe un único functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $FC = F_C$ y $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$ sea una transformación natural.

(F, G) es un par adjunto y η cumple la propiedad universal.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \textbf{R-Mod} \to \textbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X,

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X, es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \to UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X, es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \to UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Por la construcción puntual, existe un único functor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{R\text{-}Mod}$ tal que $FX = F_X$ para todo X, e $i : \mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$ sea una transformación natural.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \textbf{R-Mod} \to \textbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X, es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \to UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Por la construcción puntual, existe un único functor $F : \textbf{Set} \to \textbf{R-Mod}$ tal que $FX = F_X$ para todo X, e $i : \mathrm{id}_{\textbf{Set}} \Rightarrow UF$ sea una transformación natural.

i satisface la propiedad universal para que (F, U) sea un par adjunto.

Ejemplo

Sea R un anillo, $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ el functor de olvido.

Para todo conjunto X existe un R-módulo libre F_X, es decir, existe un objeto inicial $i_X : X \to UF_X$ en $(X \downarrow U)$.

Por la construcción puntual, existe un único functor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{R\text{-}Mod}$ tal que $FX = F_X$ para todo X, e $i : \mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$ sea una transformación natural.

i satisface la propiedad universal para que (F, U) sea un par adjunto.

Los módulos libres determinan un functor libre que es el adjunto a izquierda del functor de olvido.

Preguntas

1. ¿Determina F_X un *functor libre* $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{R\text{-}Mod}$?

Preguntas

1. ¿Determina F_X un *functor libre* F : **Set** $\to$ **R-Mod**?

Respuestas

1. Sí, queda automáticamente definido en las flechas.

Preguntas

1. ¿Determina F_X un *functor libre* F : **Set** $\to$ **R-Mod**?
2. En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con U : **R-Mod** $\to$ **Set**?

Respuestas

1. Sí, queda automáticamente definido en las flechas.

Preguntas

1. ¿Determina F_X un *functor libre* F : **Set** $\to$ **R-Mod**?
2. En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con U : **R-Mod** $\to$ **Set**?

Respuestas

1. Sí, queda automáticamente definido en las flechas.
2. Es su adjunto a izquierda.

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores. Si* (F, G) *es un par adjunto entonces:*

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores. Si* (F, G) *es un par adjunto entonces:*

- *G preserva límites,*
- *F preserva colímites.*

Teorema

Sean $\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] & \mathcal{D} \arrow[l, bend left, "G"] \end{tikzcd}$ *functores. Si* (F, G) *es un par adjunto entonces:*

- *G preserva límites,*
- *F preserva colímites.*

Ejemplo

El functor de olvido $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ no tiene un adjunto a derecha.

Ejemplo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \\
\mathbf{Top} \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}$$

Ejemplo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[d, bend right, "L"'] \\
\mathbf{Top} \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}$$

(L, U),

$L =$ topología discreta,

Verificar que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(LA, X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(A, UX)$ naturalmente.

Ejemplo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[d, bend right=60, "L"'] \arrow[d, bend left=60, "R"] \\
\mathbf{Top} \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}$$

(L, U), (U, R) son pares adjuntos.

$L =$ topología discreta, $R =$ topología indiscreta.

Verificar que $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(UX, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(X, RA)$ naturalmente.

Preguntas

1. ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ preserva límites?

Preguntas

1. ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R}\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Set}$ preserva límites?

Respuestas

1. U tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.

Preguntas

1. ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \textbf{R-Mod} \to \textbf{Set}$ preserva límites?
2. ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \textbf{Top} \to \textbf{Set}$ preserva tanto límites como colímites?

Respuestas

1. U tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.

Preguntas

1. ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{R\text{-}Mod} \to \mathbf{Set}$ preserva límites?
2. ¿Cómo explicar que el functor de olvido $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ preserva tanto límites como colímites?

Respuestas

1. U tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.
2. U tiene tanto un adjunto a izquierda (topología discreta) como un adjunto a derecha (topología indiscreta).

Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$.

Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$. El functor $\mathbf{0} \to \mathcal{C}$ preserva límites pero no tiene adjunto a izquierda.

Ejemplo

Sea $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$. El functor $\mathbf{0} \to \mathcal{C}$ preserva límites pero no tiene adjunto a izquierda.

Pregunta

¿Bajo qué hipótesis adicionales se cumple

$$G \text{ preserva límites } \Rightarrow G \text{ tiene un adjunto a izquierda?}$$

1. Definiciones básicas de la teoría de categorías
2. Adjunciones
3. Teoremas de adjunción

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es débilmente inicial si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \to C$.

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es débilmente inicial si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \to C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es débilmente inicial si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \to C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es débilmente inicial si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \to C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*
- *$\mathcal{D}$ es completa,*

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es débilmente inicial si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \to C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*
- *$\mathcal{D}$ es completa,*
- *$(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,*

Teorema general del functor adjunto

Definición

Un subconjunto $\mathcal{I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es débilmente inicial si para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $I \in \mathcal{I}$ y una flecha $I \to C$.

Teorema

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*
- *$\mathcal{D}$ es completa,*
- *$(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,*

entonces G es un adjunto a derecha.

Lema del objeto inicial

Lema

Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa. $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial $\mathcal{I}$.

Lema del objeto inicial

Lema

Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa. $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial $\mathcal{I}$.

Idea de la demostración.

- Sea $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$: el conjunto $\{P\}$ es débilmente inicial.

Lema del objeto inicial

Lema

Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa. $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial $\mathcal{I}$.

Idea de la demostración.

- Sea $P = \prod\limits_{I \in \mathcal{I}} I$: el conjunto $\{P\}$ es débilmente inicial.
- Consideramos el "igualador" del diagrama $\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=3] & P \end{tikzcd}$.

Lema del objeto inicial

Lema

Sea $\mathcal{A}$ una categoría completa. $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial $\mathcal{I}$.

Idea de la demostración.

- Sea $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$: el conjunto $\{P\}$ es débilmente inicial.
- Consideramos el "igualador" del diagrama $\begin{tikzcd} P \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift right=3] \arrow[r, phantom, "\vdots"] & P \end{tikzcd}$.
- El objeto igualador es inicial.

☐

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *preserva límites y* $\mathcal{D}$ *es completa,*

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *preserva límites y* $\mathcal{D}$ *es completa, entonces* $(C \downarrow G)$ *es completa para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites y $\mathcal{D}$ es completa, entonces $(C \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (C \downarrow G) \to \mathcal{D}$:

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *preserva límites y* $\mathcal{D}$ *es completa, entonces* $(C \downarrow G)$ *es completa para todo* $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (C \downarrow G) \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] & & \\ GD & & \arrow[r, mapsto, "P"] & D \end{tikzcd}$$

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *preserva límites y* $\mathcal{D}$ *es completa, entonces* $(C \downarrow G)$ *es completa para todo* $C \in \mathcal{C}$*.*

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (C \downarrow G) \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & & & \\
GD & & GD' & {} \arrow[r, maps to, "P"] & D & D'
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites y $\mathcal{D}$ es completa, entonces $(C \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (C \downarrow G) \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & & \\
GD \arrow[rr, "Gh"'] & & GD' \arrow[r, phantom, "\xmapsto{P}"] & D \arrow[r, "h"'] & D'
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites y $\mathcal{D}$ es completa, entonces $(C \downarrow G)$ es completa para todo $C \in \mathcal{C}$.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$; definimos un functor $P : (C \downarrow G) \to \mathcal{D}$:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & & \\
GD \arrow[rr, "Gh"'] & & GD' \arrow[r, phantom, "\overset{P}{\longmapsto}"] & D \arrow[r, "h"'] & D'
\end{tikzcd}$$

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites, entonces P crea límites. ☐

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*
- $(C \downarrow G)$ *admite un conjunto débilmente inicial para todo* $C \in \mathcal{C}$*,*

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*
- *$\mathcal{D}$ es completa,*
- *$(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial para todo $C \in \mathcal{C}$,*

entonces G es un adjunto a derecha.

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*
- $(C \downarrow G)$ *admite un conjunto débilmente inicial para todo* $C \in \mathcal{C}$*,*

entonces G *es un adjunto a derecha.*

Demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$.

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*
- $(C \downarrow G)$ *admite un conjunto débilmente inicial para todo* $C \in \mathcal{C}$*,*

entonces G *es un adjunto a derecha.*

Demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$.

$(C \downarrow G)$ es completa pues $\mathcal{D}$ lo es y G preserva límites.

Teorema (general del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*
- $(C \downarrow G)$ *admite un conjunto débilmente inicial para todo* $C \in \mathcal{C}$*,*

entonces G *es un adjunto a derecha.*

Demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$.

$(C \downarrow G)$ es completa pues $\mathcal{D}$ lo es y G preserva límites.

Como $(C \downarrow G)$ admite un conjunto débilmente inicial y es completa, entonces admite un objeto inicial. ☐

Condición del conjunto solución

La última condición significa:

Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$,

$$C$$

Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto $\mathcal{F}$ de flechas $C \to GD_i$

$$C$$

Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto $\mathcal{F}$ de flechas $C \to GD_i$ tal que para toda $g : C \to GD$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "g"] & \\
 & GD
\end{tikzcd}$$

Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto $\mathcal{F}$ de flechas $C \to GD_i$ tal que para toda $g : C \to GD$ existe una $f_i : C \to GD_i$ en $\mathcal{F}$

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g"] & \\
GD_i & & GD
\end{tikzcd}$$

Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo $C \in \mathcal{C}$, existe un conjunto $\mathcal{F}$ de flechas $C \to GD_i$ tal que para toda $g : C \to GD$ existe una $f_i : C \to GD_i$ en $\mathcal{F}$ y una $t : D_i \to D$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[dr, "g"] & \\
GD_i \arrow[rr, "Gt"'] & & GD
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ preserva límites.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$,

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y U : **Grp** → **Set** preserva límites.

Sea $X \in$ **Set**, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y U : **Grp** $\to$ **Set** preserva límites.

Sea $X \in$ **Set**, $\{G_i\}_{i\in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.
Sea $\mathcal{F} = \{f : X \to UG_i\}_{i\in I}$.

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.
Sea $\mathcal{F} = \{f : X \to UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \to UG$ función.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & \\
 & UG
\end{tikzcd}$$

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$. Sea $\mathcal{F} = \{f : X \to UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \to UG$ función. Sea $H = \langle \operatorname{Im} f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & \\
& UG
\end{tikzcd}$$

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ preserva límites.

Sea $X \in \mathbf{Set}$, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.
Sea $\mathcal{F} = \{f : X \to UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in \mathbf{Grp}$ y $f : X \to UG$ función. Sea $H = \langle \mathrm{Im}\, f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$ luego $H \simeq G_i$ para algún i.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "f"] & \\
& UG
\end{tikzcd}$$

Grupos libres

Ejemplo

Grp es completa y U : **Grp** $\to$ **Set** preserva límites.

Sea $X \in$ **Set**, $\{G_i\}_{i \in I}$ un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$.
Sea $\mathcal{F} = \{f : X \to UG_i\}_{i \in I}$.

Sean $G \in$ **Grp** y $f : X \to UG$ función. Sea $H = \langle \operatorname{Im} f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$ luego $H \simeq G_i$ para algún i.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "f"] & \\
UG_i \arrow[rr, "U\iota"'] & & UG
\end{tikzcd}$$

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*
- *$\mathcal{D}$ es completa,*

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*
- $\mathcal{D}$ *admite un cogenerador,*

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *un functor. Si:*

- G *preserva límites,*
- $\mathcal{D}$ *es completa,*
- $\mathcal{D}$ *admite un cogenerador,*
- $\mathcal{D}$ *es bien potenciada,*

Teorema (especial del functor adjunto)

Sea $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un functor. Si:

- *G preserva límites,*
- *$\mathcal{D}$ es completa,*
- *$\mathcal{D}$ admite un cogenerador,*
- *$\mathcal{D}$ es bien potenciada,*

entonces G es un adjunto a derecha.

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto cogenerador si:

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto cogenerador si: dadas f, g con $f \neq g$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto cogenerador si: dadas f, g con $f \neq g$, existe $i \in I$ y $h : B \to K_i$ tal que $hf \neq hg$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & K_i \end{tikzcd}$$

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto cogenerador si: dadas f, g con $f \neq g$, existe $i \in I$ y $h : B \to K_i$ tal que $hf \neq hg$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & K_i \end{tikzcd}$$

$K \in \mathcal{C}$ es cogenerador si $\{K\}$ es un conjunto cogenerador.

Cogeneradores

Definición

$\{K_i\}_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ es un conjunto cogenerador si: dadas f, g con $f \neq g$, existe $i \in I$ y $h : B \to K_i$ tal que $hf \neq hg$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & K_i \end{tikzcd}$$

$K \in \mathcal{C}$ es cogenerador si $\{K\}$ es un conjunto cogenerador.

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ completa. $K \in \mathcal{C}$ es cogenerador $\Leftrightarrow$ para todo $X \in \mathcal{C}$ existe un monomorfismo $X \rightarrowtail \prod K$.

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$.

$$C$$

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \to C$ y $m' : M' \to C$ son monomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, tail, "m"'] & & M' \arrow[dl, tail, "m'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \to C$ y $m' : M' \to C$ son monomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "m"'] & & M' \arrow[dl, tail, "m'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \to C$ y $m' : M' \to C$ son monomorfismos,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr, tail, "m"'] & & M' \arrow[dl, tail, "m'"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$,

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \to C$ y $m' : M' \to C$ son monomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, hook, "m"'] & & M' \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, hook', "m'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$, $m' \leq m$.

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \to C$ y $m' : M' \to C$ son monomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, tail, "m"'] & & M' \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, tail, "m'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$, $m' \leq m$.

Un subobjeto de C es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia C bajo $\sim$.

Subobjetos

Definición

Sea $C \in \mathcal{C}$. Si $m : M \to C$ y $m' : M' \to C$ son monomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, shift left, "f"] \arrow[dr, hook, "m"'] & & M' \arrow[ll, shift left, "g"] \arrow[dl, hook', "m'"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

$m \leq m'$ si existe f tal que $m'f = f$.

Definimos $m \sim m'$ si: $m \leq m'$, $m' \leq m$.

Un subobjeto de C es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia C bajo $\sim$.

$\mathcal{C}$ es bien potenciada si todo C admite un *conjunto* de subobjetos.

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C.

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C.

Idea de la demostración.

Si $\{ M_i \overset{m_i}{\rightarrowtail} C \}_{i \in I}$ es un conjunto completo de representantes de subobjetos de C,

$$\begin{tikzcd}
 & M_2 \arrow[d, tail, "m_2"] \\
M_1 \arrow[r, tail, "m_1"'] & C
\end{tikzcd}$$

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C.

Idea de la demostración.

Si $\{\ M_i \overset{m_i}{\rightarrowtail} C\ \}_{i \in I}$ es un conjunto completo de representantes de subobjetos de C, tomamos su "pullback".

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M_2 \arrow[d, tail, "m_2"] \\
M_1 \arrow[r, tail, "m_1"'] & C
\end{tikzcd}$$

Proposición

Sea $\mathcal{C}$ completa y bien potenciada. Para todo $C \in \mathcal{C}$ existe un menor subobjeto de C.

Idea de la demostración.

Si $\{ M_i \overset{m_i}{\rightarrowtail} C \}_{i \in I}$ es un conjunto completo de representantes de subobjetos de C, tomamos su "pullback".

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] \arrow[dr, tail, "m"] & M_2 \arrow[d, tail, "m_2"] \\
M_1 \arrow[r, tail, "m_1"'] & C
\end{tikzcd}$$

☐

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, tail, "a"'] & \\
& K
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \\
A \arrow[dr, tail, "a"'] & & \\
 & K &
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo;

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[dd, tail, "m"] \\
A \arrow[rd, tail, "a"'] & & \\
& K & \prod K
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dd, tail, "m"] \\
A \arrow[dr, tail, "a"'] & & \\
 & K \arrow[r, "k"'] & \prod K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & K \\
K \arrow[r, dotted, "k"'] \arrow[urr, bend left, "\mathrm{id}_K"] & \prod K \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k. Tomamos el pullback.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[dd, "m'"'] & X \arrow[dd, tail, "m"] \\
A \arrow[dr, tail, "a"'] & & \\
 & K \arrow[r, "k"'] & \prod K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & K \\
K \arrow[r, dotted, "k"'] \arrow[urr, bend left, "\mathrm{id}_K"] & \prod K \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k. Tomamos el pullback. m' es un monomorfismo.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[d, tail, "m'"'] & X \arrow[d, tail, "m"] \\
A \arrow[r, tail, "a"'] & K \arrow[r, "k"'] & \prod K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & K \\
K \arrow[urr, bend left, "\mathrm{id}_K"] \arrow[r, dotted, "k"'] & \prod K \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k. Tomamos el pullback. m' es un monomorfismo. Existe h.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[r, "q"] \arrow[dd, tail, "m'"'] & X \arrow[dd, tail, "m"] \\
A \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, tail, "a"'] & & \\
& K \arrow[r, "k"'] & \prod K
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & K \\
K \arrow[rru, bend left, "\mathrm{id}_K"] \arrow[r, dotted, "k"'] & \prod K \arrow[ru, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema

Si $\mathcal{A}$ es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces $\mathcal{A}$ tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso: $K \in \mathcal{A}$ cogenerador).

Sea a un representante del menor subobjeto de K. Sea $X \in \mathcal{A}$. Existe m monomorfismo; existe k. Tomamos el pullback. m' es un monomorfismo. Existe h. Entonces $qh : A \to X$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[r, "q"] \arrow[dd, tail, "m'"'] & X \arrow[dd, tail, "m"] \\
A \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, tail, "a"'] & & \\
 & K \arrow[r, "k"'] & \prod K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & K \\
K \arrow[urr, bend left, "\mathrm{id}_K"] \arrow[r, dotted, "k"'] & \prod K \arrow[ur, "\pi_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *preserva límites, con* $\mathcal{D}$ *completa, bien potenciada y con un cogenerador* $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ *es un adjunto a derecha.*

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites, con $\mathcal{D}$ completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites, con $\mathcal{D}$ completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- $\mathcal{D}$ completa, G preserva límites $\Rightarrow (C \downarrow G)$ completa.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ preserva límites, con $\mathcal{D}$ completa, bien potenciada y con un cogenerador $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ es un adjunto a derecha.

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- $\mathcal{D}$ completa, G preserva límites $\Rightarrow (C \downarrow G)$ completa.
- Los subobjetos de $f : C \to GB$ están representados por flechas $f_0 : C \to GB_0$, donde $B_0 \to B$ representa un subobjeto.

Teorema especial del functor adjunto

Teorema (especial del functor adjunto)

Si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ *preserva límites, con* $\mathcal{D}$ *completa, bien potenciada y con un cogenerador* $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$ *es un adjunto a derecha.*

Idea de la demostración.

Sea $C \in \mathcal{C}$. Basta ver que $(C \downarrow G)$ es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- $\mathcal{D}$ completa, G preserva límites $\Rightarrow (C \downarrow G)$ completa.
- Los subobjetos de $f : C \to GB$ están representados por flechas $f_0 : C \to GB_0$, donde $B_0 \to B$ representa un subobjeto.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GK)$ es un conjunto cogenerador de $(C \downarrow G)$. □

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea **CompHaus** $\subset$ **Top**;

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea **CompHaus** $\subset$ **Top**; veamos que i : **CompHaus** $\to$ **Top** tiene un adjunto a izquierda r : **Top** $\to$ **CompHaus**.

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea **CompHaus** $\subset$ **Top**; veamos que i : **CompHaus** $\to$ **Top** tiene un adjunto a izquierda r : **Top** $\to$ **CompHaus**.

Existe r si y sólo si para cada $X \in$ **Top**

$$X$$

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea **CompHaus** $\subset$ **Top**; veamos que i : **CompHaus** $\to$ **Top** tiene un adjunto a izquierda r : **Top** $\to$ **CompHaus**.

Existe r si y sólo si para cada $X \in$ **Top** existe $rX \in$ **CompHaus** y $\eta_X : X \to irX$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \\
irX &
\end{tikzcd}$$

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea **CompHaus** $\subset$ **Top**; veamos que i : **CompHaus** $\to$ **Top** tiene un adjunto a izquierda r : **Top** $\to$ **CompHaus**.

Existe r si y sólo si para cada $X \in$ **Top** existe $rX \in$ **CompHaus** y $\eta_X : X \to irX$ tal que para cada $C \in$ **CompHaus** y $f : X \to iC$

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\
irX & & iC
\end{tikzcd}$$

Compactificación de Stone-Čech

Ejemplo

Sea **CompHaus** $\subset$ **Top**; veamos que i : **CompHaus** $\to$ **Top** tiene un adjunto a izquierda r : **Top** $\to$ **CompHaus**.

Existe r si y sólo si para cada $X \in$ **Top** existe $rX \in$ **CompHaus** y $\eta_X : X \to irX$ tal que para cada $C \in$ **CompHaus** y $f : X \to iC$ existe una única $g : rX \to C$ tal que

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ irX \arrow[rr, dotted, "ig"'] & & iC \end{tikzcd}$$

conmuta.

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e i : **CompHaus** $\rightarrow$ **Top** preserva límites,

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e i : **CompHaus** $\to$ **Top** preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e i : **CompHaus** $\to$ **Top** preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow$ $[0, 1] \in$ **CompHaus** es un cogenerador:

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e i : **CompHaus** $\to$ **Top** preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow [0,1] \in$ **CompHaus** es un cogenerador:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e i : **CompHaus** $\to$ **Top** preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow [0,1] \in$ **CompHaus** es un cogenerador:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \arrow[r] & {[0,1]} \end{tikzcd}.$$

Compactificación de Stone-Čech (2)

Ejemplo

- **CompHaus** es completa e i : **CompHaus** $\to$ **Top** preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn $\Rightarrow$ $[0,1] \in$ **CompHaus** es un cogenerador:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & C \arrow[r] & {[0,1]} \end{tikzcd}.$$

Esto exhibe **CompHaus** como *subcategoría reflexiva* de **Top**.