

# Funtores adjuntos y teoremas de adjunción

Bruno Stonek  
bruno@stonek.com

19 de octubre de 2012

# Introducción

## 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías

# Introducción

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones

# Introducción

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones
- 3 Teoremas de adjunción

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones
- 3 Teoremas de adjunción

# Categorías (1)

## Definición

Una **categoría**  $\mathcal{C}$  consta de:

- una clase  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  de **objetos**,

# Categorías (1)

## Definición

Una **categoría**  $\mathcal{C}$  consta de:

- una clase  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  de **objetos**,
- para cada par  $(A, B)$  de objetos, un conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de **flechas** (o *morfismos*)  $A \rightarrow B$  de *dominio*  $A$  y *codominio*  $B$ ,

# Categorías (1)

## Definición

Una **categoría**  $\mathcal{C}$  consta de:

- una clase  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  de **objetos**,
- para cada par  $(A, B)$  de objetos, un conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de **flechas** (o *morfismos*)  $A \rightarrow B$  de *dominio*  $A$  y *codominio*  $B$ ,
- para cada par  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  de flechas, una operación de *composición*  $g \circ f = gf : A \rightarrow C$ ,



# Categorías (1)

## Definición

Una **categoría**  $\mathcal{C}$  consta de:

- una clase  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  de **objetos**,
- para cada par  $(A, B)$  de objetos, un conjunto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  de **flechas** (o *morfismos*)  $A \rightarrow B$  de *dominio*  $A$  y *codominio*  $B$ ,
- para cada par  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$  de flechas, una operación de *composición*  $g \circ f = gf : A \rightarrow C$ ,
- para cada objeto  $A$ , una flecha *identidad*  $\text{id}_A : A \rightarrow A$ .

## Categorías (2)

### Definición

Debe cumplirse:

- si  $f : B \rightarrow C$ , entonces  $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$ ,

## Categorías (2)

### Definición

Debe cumplirse:

- si  $f : B \rightarrow C$ , entonces  $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$ ,
- la composición es asociativa: si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$  son flechas, entonces  $h(gf) = (hg)f$ .

## Categorías (2)

### Definición

Debe cumplirse:

- si  $f : B \rightarrow C$ , entonces  $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$ ,
- la composición es asociativa: si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$  son flechas, entonces  $h(gf) = (hg)f$ .

Una categoría es *pequeña* si  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  es un conjunto.

## Categorías (2)

### Definición

Debe cumplirse:

- si  $f : B \rightarrow C$ , entonces  $f \circ \text{id}_B = f = \text{id}_C \circ f$ ,
- la composición es asociativa: si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$  son flechas, entonces  $h(gf) = (hg)f$ .

Una categoría es *pequeña* si  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  es un conjunto.

### Notación

$A \in \mathcal{C}$  significará  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ .

## Ejemplos

- **Set:** conjuntos y funciones.

## Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**:  $R$ -módulos y morfismos de  $R$ -módulos.

## Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**:  $R$ -módulos y morfismos de  $R$ -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.



## Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**:  $R$ -módulos y morfismos de  $R$ -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si  $\mathcal{C}$  es una categoría,  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.

## Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**:  $R$ -módulos y morfismos de  $R$ -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si  $\mathcal{C}$  es una categoría,  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.
- Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías, consideraremos la *categoría producto*  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ .

## Ejemplos

- **Set**: conjuntos y funciones.
- **R-Mod**:  $R$ -módulos y morfismos de  $R$ -módulos.
- **Top**: espacios topológicos y funciones continuas.
- Si  $\mathcal{C}$  es una categoría,  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es la *categoría opuesta*: mismos objetos y flechas al revés.
- Si  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son categorías, consideraremos la *categoría producto*  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ .

## Definición

Una flecha  $f : A \rightarrow B$  es un **isomorfismo** si existe  $g : B \rightarrow A$  tal que  $gf = \text{id}_A$  y  $fg = \text{id}_B$ .

# Subcategorías

## Definición

Una categoría  $\mathcal{S}$  es una **subcategoría** de una categoría  $\mathcal{C}$  si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,

# Subcategorías

## Definición

Una categoría  $\mathcal{S}$  es una **subcategoría** de una categoría  $\mathcal{C}$  si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ ,

# Subcategorías

## Definición

Una categoría  $\mathcal{S}$  es una **subcategoría** de una categoría  $\mathcal{C}$  si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ ,
- La composición y las identidades en  $\mathcal{S}$  coinciden en  $\mathcal{S}$  y en  $\mathcal{C}$ .

# Subcategorías

## Definición

Una categoría  $\mathcal{S}$  es una **subcategoría** de una categoría  $\mathcal{C}$  si:

- $\text{Ob}(\mathcal{S}) \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$ ,
- $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para todo  $A, B \in \text{Ob}(\mathcal{S})$ ,
- La composición y las identidades en  $\mathcal{S}$  coinciden en  $\mathcal{S}$  y en  $\mathcal{C}$ .

Una subcategoría  $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$  es **plena** si  $\text{Hom}_{\mathcal{S}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$  para todo  $A, B \in \mathcal{S}$ .

# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$A$

es **inicial** si:



# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$A \quad X$

es **inicial** si:

# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$$A \dashrightarrow X$$

es **inicial** si:

# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$A$

es **final** si:

# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$X \quad A$

es **final** si:

# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$$X \cdots \longrightarrow A$$

es **final** si:

# Objetos iniciales y finales

## Definición

Un objeto  $A \in \mathcal{C}$

$$X \cdots \longrightarrow A$$

es **final** si:

## Proposición

*Si existe un objeto inicial (o final) entonces es único a menos de un único isomorfismo.*

# Monomorfismos y epimorfismos

## Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{m} B$$

es un **monomorfismo** si:

# Monomorfismos y epimorfismos

## Definición

Una flecha

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} A \xrightarrow{m} B$$

es un **monomorfismo** si:  $mf = mg \Rightarrow f = g$



# Monomorfismos y epimorfismos

## Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{e} \twoheadrightarrow B$$

es un **epimorfismo** si:

# Monomorfismos y epimorfismos

## Definición

Una flecha

$$A \xrightarrow{e} B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

es un **epimorfismo** si:  $fe = ge \Rightarrow f = g$

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$\mathcal{C}$

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ f \downarrow & & \\ \mathcal{C}' & & \end{array}$$

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ f \downarrow & \xrightarrow{F} & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}' & & \mathcal{D}' \end{array}$$

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\ f \downarrow & \xrightarrow{F} & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}' & & \mathcal{D}' \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si  $A \in \mathcal{C}$  entonces  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$ ,



# Functores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 f \downarrow & \xrightarrow{F} & \downarrow Ff \\
 \mathcal{C}' & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si  $A \in \mathcal{C}$  entonces  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$ ,
- si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ , entonces  $F(gf) = F(g)F(f)$ .

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & & F\mathcal{C} \\ f \downarrow & & \\ \mathcal{C}' & & F\mathcal{C}' \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si  $A \in \mathcal{C}$  entonces  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$ ,
- si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ , entonces

Un **functor contravariante**  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 f \downarrow & \xrightarrow{F} & \uparrow Ff \\
 \mathcal{C}' & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si  $A \in \mathcal{C}$  entonces  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$ ,
- si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ , entonces

Un **functor contravariante**  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

# Funtores

## Definición

Sean  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  categorías. Un **functor** (covariante)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & & \mathcal{D} \\
 f \downarrow & \xrightarrow{F} & \uparrow Ff \\
 \mathcal{C}' & & \mathcal{D}'
 \end{array}$$

Debe cumplirse:

- si  $A \in \mathcal{C}$  entonces  $F(\text{id}_A) = \text{id}_{FA}$ ,
- si  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ , entonces  $F(gf) = F(f)F(g)$ .

Un **functor contravariante**  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor  $\mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ .

## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Ejemplos

- El *functor de olvido*  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Ejemplos

- El *functor de olvido*  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- El *bifunctor Hom*,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Ejemplos

- El *functor de olvido*  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- El *bifunctor Hom*,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

$A \ A'$



## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Ejemplos

- El *functor de olvido*  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- El *bifunctor Hom*,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

$$A \quad A' \quad \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A')$$

## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Ejemplos

- El *functor de olvido*  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- El *bifunctor Hom*,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & A' & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \\
 \uparrow f & \downarrow g & \\
 B & B' & 
 \end{array}$$

## Definición

Si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, se define su functor **composición**  $GF : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  punto a punto.

## Ejemplos

- El *functor de olvido*  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ .
- El *bifunctor*  $\text{Hom}, \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 A & A' & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A') \\
 \uparrow f & \downarrow g & \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -)} \downarrow [f^*, g_*] \\
 B & B' & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, B')
 \end{array}$$

donde  $[f^*, g_*](q) = gqf$ .

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$i$

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$i \quad D_i$$

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ e_j^i \downarrow & & \\ j & & \end{array}$$

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ e_j^i \downarrow & & \downarrow De_j^i \\ j & & D_j \end{array}$$



# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ e_j^i \downarrow & & \downarrow De_j^i \\ j & & D_j \end{array}$$

- Es **conmutativo** si:

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc} i & & D_i \\ \downarrow f_j^i & & \\ j & & D_j \end{array}$$

- Es **conmutativo** si:

# Diagramas

## Definición

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $J$  una categoría pequeña.

- Un **diagrama de tipo  $J$**  en  $\mathcal{C}$  es un functor  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\begin{array}{ccc}
 i & & D_i \\
 \downarrow f_j^i & & \downarrow Df_j^i \\
 e_j^i & & De_j^i \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 j & & D_j
 \end{array}$$

- Es **conmutativo** si:  $De_j^i = Df_j^i$ .

# Categorías coma

## Definición

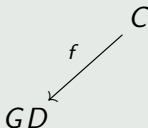
Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor y  $C \in \mathcal{C}$ , definimos la **categoría coma**  $(C \downarrow G)$ :

## Categorías coma

### Definición

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor y  $C \in \mathcal{C}$ , definimos la **categoría coma**  $(C \downarrow G)$ :

- Objetos: las flechas  $f : C \rightarrow GD$ , donde  $D \in \mathcal{D}$ ,

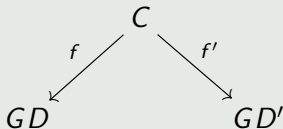


# Categorías coma

## Definición

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor y  $C \in \mathcal{C}$ , definimos la **categoría coma**  $(C \downarrow G)$ :

- Objetos: las flechas  $f : C \rightarrow GD$ , donde  $D \in \mathcal{D}$ ,
- Un morfismo de  $f : C \rightarrow GD$  a  $f' : C \rightarrow GD'$



# Categorías coma

## Definición

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor y  $C \in \mathcal{C}$ , definimos la **categoría coma**  $(C \downarrow G)$ :

- Objetos: las flechas  $f : C \rightarrow GD$ , donde  $D \in \mathcal{D}$ ,
- Un morfismo de  $f : C \rightarrow GD$  a  $f' : C \rightarrow GD'$  es una flecha  $g : D \rightarrow D'$  tal que:

$$\begin{array}{ccc} & C & \\ f \swarrow & & \searrow f' \\ GD & \xrightarrow{Gg} & GD' \end{array}$$

es conmutativo.

## Ejemplo

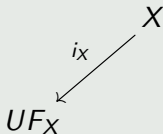
Sean  $R$  un anillo,  $X$  un conjunto,  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido. Sea  $F_X$  un  $R$ -módulo.



## Ejemplo

Sean  $R$  un anillo,  $X$  un conjunto,  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido. Sea  $F_X$  un  $R$ -módulo.

$F_X$  es un  $R$ -módulo libre  $\Leftrightarrow$  existe una función “inclusión”  
 $i_X : X \rightarrow UF_X$  tal que  $i_X$  es inicial en  $(X \downarrow U)$ .

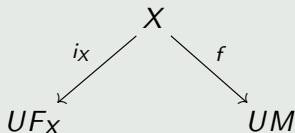


## Ejemplo

Sean  $R$  un anillo,  $X$  un conjunto,  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido. Sea  $F_X$  un  $R$ -módulo.

$F_X$  es un  $R$ -módulo libre  $\Leftrightarrow$  existe una función “inclusión”  
 $i_X : X \rightarrow UF_X$  tal que  $i_X$  es inicial en  $(X \downarrow U)$ .

Esto significa: para todo  $M \in \mathbf{R}\text{-Mod}$  y  $f : X \rightarrow UM$  función,

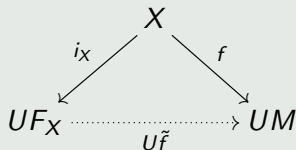


## Ejemplo

Sean  $R$  un anillo,  $X$  un conjunto,  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido. Sea  $F_X$  un  $R$ -módulo.

$F_X$  es un  $R$ -módulo libre  $\Leftrightarrow$  existe una función “inclusión”  
 $i_X : X \rightarrow UF_X$  tal que  $i_X$  es inicial en  $(X \downarrow U)$ .

Esto significa: para todo  $M \in \mathbf{R}\text{-Mod}$  y  $f : X \rightarrow UM$  función,  
 existe un único morfismo  $\tilde{f} : F_X \rightarrow M$  tal que:



es conmutativo.

Sabemos que para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ .

Sabemos que para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ .

### Preguntas

¿Determina  $F_X$  un *functor libre*  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ ?

Sabemos que para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ .

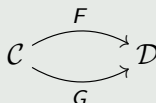
### Preguntas

¿Determina  $F_X$  un *functor libre*  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ ?

En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ ?

# Transformaciones naturales

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$    $\mathcal{D}$  funtores.

# Transformaciones naturales

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Una **transformación natural**  
 $\tau : F \Rightarrow G$  asigna a cada objeto  $A \in \mathcal{C}$

$A$



# Transformaciones naturales

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Una **transformación natural**  $\tau : F \Rightarrow G$  asigna a cada objeto  $A \in \mathcal{C}$  una flecha  $\tau_A : FA \rightarrow GA$ ,

$$A \quad FA \xrightarrow{\tau_A} GA$$

# Transformaciones naturales

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Una **transformación natural**

$\tau : F \Rightarrow G$  asigna a cada objeto  $A \in \mathcal{C}$  una flecha  $\tau_A : FA \rightarrow GA$ , tal que para toda  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} A & & FA \xrightarrow{\tau_A} GA \\ \downarrow f & & \\ B & & \end{array}$$

# Transformaciones naturales

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Una **transformación natural**

$\tau : F \Rightarrow G$  asigna a cada objeto  $A \in \mathcal{C}$  una flecha  $\tau_A : FA \rightarrow GA$ , tal que para toda  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} A & FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ B & FB & \xrightarrow{\tau_B} & GB \end{array}$$

es conmutativo.

# Transformaciones naturales

## Definición

Sean  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$  funtores. Una **transformación natural**

$\tau : F \Rightarrow G$  asigna a cada objeto  $A \in \mathcal{C}$  una flecha  $\tau_A : FA \rightarrow GA$ , tal que para toda  $f$ ,

$$\begin{array}{ccc} A & FA & \xrightarrow{\tau_A} & GA \\ f \downarrow & Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ B & FB & \xrightarrow{\tau_B} & GB \end{array}$$

es conmutativo.

$\tau$  es un **isomorfismo natural** si  $\tau_A$  es un isomorfismo para todo  $A$ : escribimos  $F \cong G$ .

# Conos

## Definición

Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama.

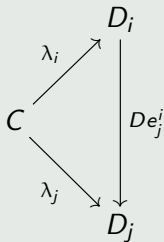
$$\begin{array}{c} D_i \\ \downarrow De_j^i \\ D_j \end{array}$$

# Conos

## Definición

Sea  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  un diagrama.

Un **cono** para  $D$  es  $(C, (\lambda_j)_{j \in J})$ , donde

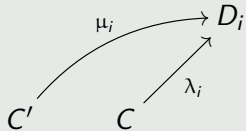


es conmutativo para toda  $e_j^i : i \rightarrow j$ .

# Morfismos de conos

## Definición

Sean  $(C, \lambda_j)$  y  $(C', \mu_j)$  dos conos para  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ .



## Morfismos de conos

### Definición

Sean  $(C, \lambda_j)$  y  $(C', \mu_j)$  dos conos para  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ . Un **morfismo de conos**  $f : (C', \mu_j) \rightarrow (C, \lambda_j)$  es  $f : C' \rightarrow C$  tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \mu_i \curvearrowright & \nearrow \\
 C' & \xrightarrow{f} & C \\
 & & \lambda_i \nearrow
 \end{array}$$

conmuta para todo  $i \in J$ .



## Morfismos de conos

### Definición

Sean  $(C, \lambda_j)$  y  $(C', \mu_j)$  dos conos para  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$ . Un **morfismo de conos**  $f : (C', \mu_j) \rightarrow (C, \lambda_j)$  es  $f : C' \rightarrow C$  tal que:

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \mu_i \nearrow & \nearrow \\
 C' & \xrightarrow{f} & C \\
 & & \lambda_i \nearrow
 \end{array}$$

conmuta para todo  $i \in J$ .

Así, los conos para  $D$  forman una categoría.

# Límites

## Definición

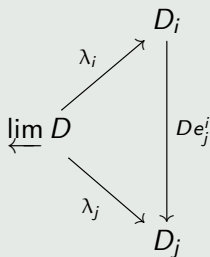
Un **límite** para el diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un objeto final en la categoría de conos para  $D$ .

# Límites

## Definición

Un **límite** para el diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un objeto final en la categoría de conos para  $D$ .

Es un cono  $(\varprojlim D, \lambda_j)$

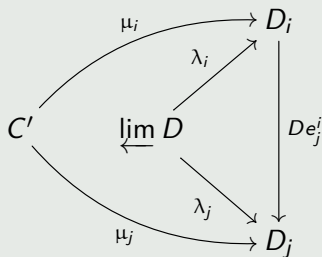


# Límites

## Definición

Un **límite** para el diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un objeto final en la categoría de conos para  $D$ .

Es un cono  $(\varprojlim D, \lambda_j)$  tal que si  $(C', \mu_j)$  es otro cono,

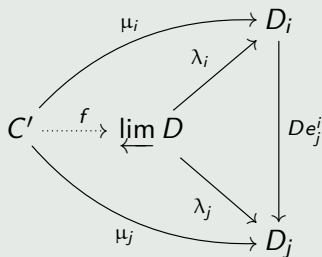


# Límites

## Definición

Un **límite** para el diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un objeto final en la categoría de conos para  $D$ .

Es un cono  $(\varprojlim D, \lambda_j)$  tal que si  $(C', \mu_j)$  es otro cono, existe una única flecha  $f : C' \rightarrow \varprojlim D$  tal que:



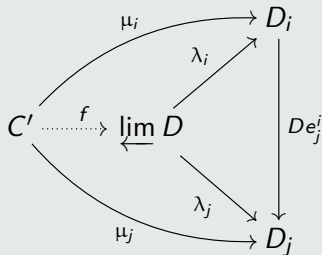
es conmutativo.

# Límites

## Definición

Un **límite** para el diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un objeto final en la categoría de conos para  $D$ .

Es un cono  $(\varprojlim D, \lambda_j)$  tal que si  $(C', \mu_j)$  es otro cono, existe una única flecha  $f : C' \rightarrow \varprojlim D$  tal que:



es conmutativo.

Es único a menos de un único isomorfismo en la categoría de conos.

# Productos

## Definición

Si  $J$  es una categoría pequeña y *discreta*, i.e. sus únicas flechas son identidades, el límite de un diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un **producto**.

$$\begin{array}{ccc}
 & & D_i \\
 & \nearrow^{f_i} & \uparrow \\
 X & \xrightarrow{\quad f \quad} & \prod_{j \in J} D_j \\
 & & \searrow_{p_i}
 \end{array}$$

## Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.



## Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.

## Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.
- En **Grp**, el producto directo de grupos con las proyecciones.

## Ejemplos

- En **Set**, el producto cartesiano con las proyecciones.
- En **R-Mod**, el producto directo de módulos con las proyecciones.
- En **Grp**, el producto directo de grupos con las proyecciones.
- En **Top**, el producto cartesiano con la topología producto, y las proyecciones.

# Igualadores

## Definición

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

# Igualadores

## Definición

$$E \xrightarrow{i} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \quad fi = gi$$

# Igualadores

## Definición

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & A \xrightleftharpoons[g]{f} B \\ & \nearrow i' & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{l} fi = gi \\ \\ fi' = gi' \end{array}$$

# Igualadores

## Definición

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{i} & A \xrightleftharpoons[g]{f} B \\ \theta \uparrow \cdots & \nearrow i' & \\ X & & \end{array} \quad \begin{array}{l} fi = gi \\ \\ fi' = gi' \end{array}$$

# Pullbacks

## Definición

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$



# Pullbacks

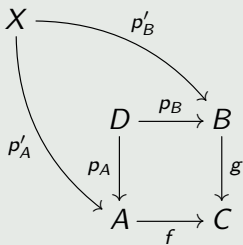
## Definición

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{p_B} & B \\ p_A \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

$$f p_A = g p_B$$

# Pullbacks

## Definición

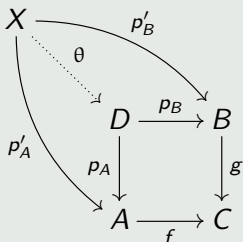


$$f p_A = g p_B$$

$$f p'_A = g p'_B$$

# Pullbacks

## Definición



$$f p_A = g p_B$$

$$f p'_A = g p'_B$$

# Colímites

## Definición

Si  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un diagrama,

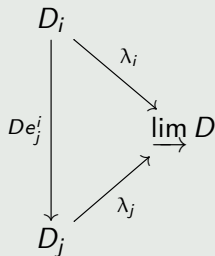
$$\begin{array}{c} D_i \\ \downarrow \\ D_j \end{array}$$

$De_j^i$

# Colímites

## Definición

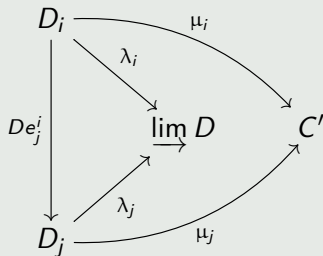
Si  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un diagrama, su **colímite** es  $(\varinjlim D, \lambda_i)$ .



# Colímites

## Definición

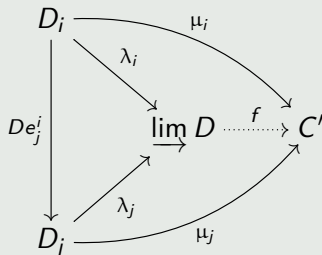
Si  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un diagrama, su **colímite** es  $(\varinjlim D, \lambda_i)$ .



# Colímites

## Definición

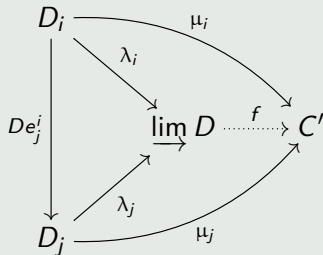
Si  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un diagrama, su **colímite** es  $(\varinjlim D, \lambda_i)$ .



# Colímites

## Definición

Si  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  es un diagrama, su **colímite** es  $(\varinjlim D, \lambda_i)$ .



También se define *coproducto*, *coigualador*, *pushout*.



# Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & \xrightarrow{f_i} & X \\ & \searrow \iota_j & \\ & \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} X \end{array}$$

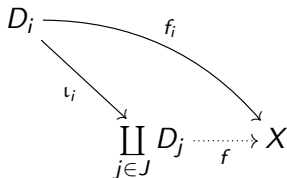
# Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

## Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.

# Coproductos



## Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.

# Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

## Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.
- En **Grp**, el producto libre de grupos.

# Coproductos

$$\begin{array}{ccc} D_i & & X \\ \downarrow \iota_j & \searrow f_i & \\ \coprod_{j \in J} D_j & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

## Ejemplos

- En **Set**, la unión disjunta con las inclusiones.
- En **R-Mod**, la suma directa con las inyecciones.
- En **Grp**, el producto libre de grupos.
- En **Top**, la unión disjunta con la topología final respecto de las inclusiones.

## Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp...**) el producto “coincide” con el producto en **Set**?

## Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp...**) el producto “coincide” con el producto en **Set**?

¿Cómo explicar que en **Top** tanto el producto como el coproducto “coinciden” con el de **Set**?

## Preguntas

¿Cómo explicar que en **R-Mod** (o en **Grp...**) el producto “coincide” con el producto en **Set**?

¿Cómo explicar que en **Top** tanto el producto como el coproducto “coinciden” con el de **Set**?

Precisemos el sentido de las preguntas.



## Preservación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **preserva límites** si para todo  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  con límite  $(\varprojlim D, \lambda_i)$  se tiene que  $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$ .

## Preservación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **preserva límites** si para todo  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  con límite  $(\varprojlim D, \lambda_i)$  se tiene que  $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$ . Análogamente con colímites.

## Preservación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **preserva límites** si para todo  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  con límite  $(\varprojlim D, \lambda_i)$  se tiene que  $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$ . Análogamente con colímites.

### Preguntas

¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  (o en  $\mathbf{Grp}\dots$ ) preserva límites?

## Preservación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **preserva límites** si para todo  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  con límite  $(\varprojlim D, \lambda_i)$  se tiene que  $(F \varprojlim D, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD : J \rightarrow \mathcal{D}$ . Análogamente con colímites.

### Preguntas

¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  (o en  $\mathbf{Grp}\dots$ ) preserva límites?

¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva tanto límites como colímites?

# (Co)completitud

## Definición

Una categoría  $\mathcal{C}$  es **completa** si todo diagrama en  $\mathcal{C}$  tiene límite.

# (Co)completitud

## Definición

Una categoría  $\mathcal{C}$  es **cocompleta** si todo diagrama en  $\mathcal{C}$  tiene colímite.

# (Co)completitud

## Definición

Una categoría  $\mathcal{C}$  es **cocompleta** si todo diagrama en  $\mathcal{C}$  tiene colímite.

## Ejemplos

**Set**, **R-Mod**, **Top** son completas y cocompletas.

## Creación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **crea límites** si:



## Creación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **crea límites** si: para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $FD$  tiene límite,

## Creación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **crea límites** si: para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $FD$  tiene límite,

- existe un único cono  $(C, \lambda_i)$  para  $D$  (a menos de isomorfismo) tal que  $(FC, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD$ ,

## Creación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **crea límites** si: para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $FD$  tiene límite,

- existe un único cono  $(C, \lambda_i)$  para  $D$  (a menos de isomorfismo) tal que  $(FC, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD$ ,
- $(C, \lambda_i)$  es el límite de  $D$ .

## Creación de límites

### Definición

Un functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  **crea límites** si: para cada diagrama  $D : J \rightarrow \mathcal{C}$  tal que  $FD$  tiene límite,

- existe un único cono  $(C, \lambda_i)$  para  $D$  (a menos de isomorfismo) tal que  $(FC, F\lambda_i)$  es el límite de  $FD$ ,
- $(C, \lambda_i)$  es el límite de  $D$ .


### Observación

Si  $\mathcal{D}$  es una categoría completa y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  crea límites, entonces  $\mathcal{C}$  es completa.

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones**
- 3 Teoremas de adjunción

# Adjunciones

## Definición

Sean  $\mathcal{C}$    $\mathcal{D}$  funtores.

# Adjunciones

## Definición

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un **par adjunto** si existe un isomorfismo natural  $\tau$ :

$$\begin{array}{ccc} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-) & \\ & \curvearrowright & \\ \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} & \cong \Downarrow \tau & \mathbf{Set} \\ & \curvearrowleft & \\ & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -) & \end{array}$$

# Adjunciones

## Definición

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un **par adjunto** si existe un isomorfismo natural  $\tau$ :

$$\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G-)} \\ \cong \Downarrow \tau \\ \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, -)} \end{array} \mathbf{Set}$$

Es decir: si hay biyecciones

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, GB) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, B)$$

naturales en  $A \in \mathcal{C}, B \in \mathcal{D}$ .



# Identities triangulares

## Teorema

Sean  $\mathcal{C}$   $\xrightarrow{F}$   $\mathcal{D}$   $\xleftarrow{G}$  funtores.

# Identidades triangulares

## Teorema

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un par adjunto si y sólo si

existen  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$  y  $\mathcal{D} \begin{array}{c} \xrightarrow{FG} \\ \Downarrow \epsilon \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{D}}} \end{array} \mathcal{D}$

# Identidades triangulares

## Teorema

Sean  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un par adjunto si y sólo si

existen  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{matrix} \mathcal{C}$  y  $\mathcal{D} \begin{matrix} \xrightarrow{FG} \\ \downarrow \epsilon \\ \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{D}}} \end{matrix} \mathcal{D}$  tales que

$$\begin{array}{ccc} FC & \xrightarrow{F(\eta_C)} & FGFC \\ & \searrow \text{id}_{FC} & \downarrow \epsilon_{FC} \\ & & FC \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} GD & \xrightarrow{\eta_{GD}} & GFGD \\ & \searrow \text{id}_{GD} & \downarrow G(\epsilon_D) \\ & & GD \end{array}$$

conmutan para todo  $C \in \mathcal{C}, D \in \mathcal{D}$ .

# Propiedad universal

## Teorema

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores.

# Propiedad universal

## Teorema

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un par adjunto si y sólo si

existe  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$  con  $\eta_C$  inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

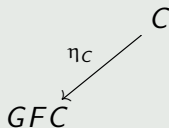
# Propiedad universal

## Teorema

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un par adjunto si y sólo si

existe  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{array} \mathcal{C}$  con  $\eta_C$  inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

Para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,



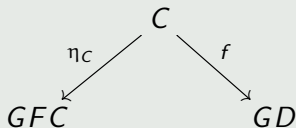
# Propiedad universal

## Teorema

Sean  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un par adjunto si y sólo si

existe  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \Downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{matrix} \mathcal{C}$  con  $\eta_C$  inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

Para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,  $D \in \mathcal{D}$  y  $f : C \rightarrow GD$ ,



# Propiedad universal

## Teorema

Sean  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$  funtores.  $(F, G)$  es un par adjunto si y sólo si

existe  $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}}} \\ \downarrow \eta \\ \xrightarrow{GF} \end{matrix} \mathcal{C}$  con  $\eta_C$  inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

Para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,  $D \in \mathcal{D}$  y  $f : C \rightarrow GD$ , existe una única  $g : FC \rightarrow D$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 \eta_C \swarrow & & \searrow f \\
 GFC & \cdots \cdots \cdots & GD \\
 & Gg \searrow & 
 \end{array}$$

conmuta.



# Unicidad

## Proposición

*Si  $(F, G)$  y  $(F, G')$  son pares adjuntos, entonces  $G \cong G'$ .*

# Unicidad

## Proposición

*Si  $(F, G)$  y  $(F, G')$  son pares adjuntos, entonces  $G \cong G'$ .*

*Si  $(F, G)$  y  $(F', G)$  son pares adjuntos, entonces  $F \cong F'$ .*

## Construcción puntual de adjuntos

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Si existe  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tal que  $\eta_C$  es inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $(F, G)$  es un par adjunto.

## Construcción puntual de adjuntos

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Si existe  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tal que  $\eta_C$  es inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $(F, G)$  es un par adjunto.

### Proposición

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor.

## Construcción puntual de adjuntos

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Si existe  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tal que  $\eta_C$  es inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $(F, G)$  es un par adjunto.

### Proposición

*Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Supongamos que existen  $\eta_C : C \rightarrow GF_C$  iniciales en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .*

## Construcción puntual de adjuntos

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Si existe  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tal que  $\eta_C$  es inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $(F, G)$  es un par adjunto.

### Proposición

*Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Supongamos que existen  $\eta_C : C \rightarrow GF_C$  iniciales en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .*

*Entonces existe un único functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $FC = F_C$  y  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  sea una transformación natural.*

## Construcción puntual de adjuntos

Sean  $\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$  funtores. Si existe  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  tal que  $\eta_C$  es inicial en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , entonces  $(F, G)$  es un par adjunto.

### Proposición

*Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Supongamos que existen  $\eta_C : C \rightarrow GF_C$  iniciales en  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ .*

*Entonces existe un único functor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  tal que  $FC = F_C$  y  $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$  sea una transformación natural.*

*$(F, G)$  es un par adjunto y  $\eta$  cumple la propiedad universal.*

## Ejemplo

Sea  $R$  un anillo,  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido.



## Ejemplo

Sea  $R$  un anillo,  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido.

Para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ ,

## Ejemplo

Sea  $R$  un anillo,  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido.

Para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ , es decir, existe un objeto inicial  $i_X : X \rightarrow UF_X$  en  $(X \downarrow U)$ .

## Ejemplo

Sea  $R$  un anillo,  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido.

Para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ , es decir, existe un objeto inicial  $i_X : X \rightarrow UF_X$  en  $(X \downarrow U)$ .

Por la construcción puntual, existe un único functor  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$  tal que  $FX = F_X$  para todo  $X$ , e  $i : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$  sea una transformación natural.

## Ejemplo

Sea  $R$  un anillo,  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido.

Para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ , es decir, existe un objeto inicial  $i_X : X \rightarrow UF_X$  en  $(X \downarrow U)$ .

Por la construcción puntual, existe un único functor  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$  tal que  $FX = F_X$  para todo  $X$ , e  $i : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$  sea una transformación natural.

$i$  satisface la propiedad universal para que  $(F, U)$  sea un par adjunto.

## Ejemplo

Sea  $R$  un anillo,  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  el functor de olvido.

Para todo conjunto  $X$  existe un  $R$ -módulo libre  $F_X$ , es decir, existe un objeto inicial  $i_X : X \rightarrow UF_X$  en  $(X \downarrow U)$ .

Por la construcción puntual, existe un único functor  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$  tal que  $FX = F_X$  para todo  $X$ , e  $i : \text{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$  sea una transformación natural.

$i$  satisface la propiedad universal para que  $(F, U)$  sea un par adjunto.

**Los módulos libres determinan un functor libre que es el adjunto a izquierda del functor de olvido.**

## Preguntas

- 1 ¿Determina  $F_X$  un *functor libre*  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ ?

## Preguntas

- 1 ¿Determina  $F_X$  un *functor libre*  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ ?

## Respuestas

- 1 Sí, queda automáticamente definido en las flechas.

## Preguntas

- 1 ¿Determina  $F_X$  un *functor libre*  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ ?
- 2 En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ ?

## Respuestas

- 1 Sí, queda automáticamente definido en las flechas.



## Preguntas

- 1 ¿Determina  $F_X$  un *functor libre*  $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{R-Mod}$ ?
- 2 En caso afirmativo, ¿qué relación tiene con  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$ ?

## Respuestas

- 1 Sí, queda automáticamente definido en las flechas.
- 2 Es su adjunto a izquierda.

## Teorema

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Si  $(F, G)$  es un par adjunto entonces:

## Teorema

Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Si  $(F, G)$  es un par adjunto entonces:

- $G$  preserva límites,
- $F$  preserva colímites.

## Teorema

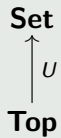
Sean  $\mathcal{C}$   $\begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array}$   $\mathcal{D}$  funtores. Si  $(F, G)$  es un par adjunto entonces:

- $G$  preserva límites,
- $F$  preserva colímites.

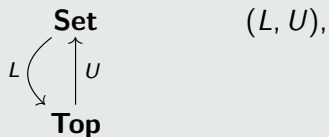
## Ejemplo

El funtor de olvido  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  no tiene un adjunto a derecha.

## Ejemplo



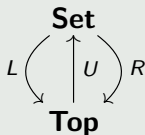
## Ejemplo



$L =$  topología discreta,

Verificar que  $\text{Hom}_{\text{Top}}(LA, X) \simeq \text{Hom}_{\text{Set}}(A, UX)$  naturalmente.

## Ejemplo



$(L, U)$ ,  $(U, R)$  son pares adjuntos.

$L$  = topología discreta,  $R$  = topología indiscreta.

Verificar que  $\text{Hom}_{\text{Set}}(UX, A) \simeq \text{Hom}_{\text{Top}}(X, RA)$  naturalmente.

## Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites?



## Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{R}\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites?

## Respuestas

- 1  $U$  tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.

## Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites?
- 2 ¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva tanto límites como colímites?

## Respuestas

- 1  $U$  tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.

## Preguntas

- 1 ¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{R-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites?
- 2 ¿Cómo explicar que el functor de olvido  $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva tanto límites como colímites?

## Respuestas

- 1  $U$  tiene un adjunto a izquierda, el functor libre.
- 2  $U$  tiene tanto un adjunto a izquierda (topología discreta) como un adjunto a derecha (topología indiscreta).

## Ejemplo

Sea  $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$ .

## Ejemplo

Sea  $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$ . El functor  $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites pero no tiene adjunto a izquierda.

## Ejemplo

Sea  $\mathcal{C} \neq \mathbf{0}$ . El functor  $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites pero no tiene adjunto a izquierda.

## Pregunta

¿Bajo qué hipótesis adicionales se cumple

$G$  preserva límites  $\Rightarrow G$  tiene un adjunto a izquierda?

- 1 Definiciones básicas de la teoría de categorías
- 2 Adjunciones
- 3 Teoremas de adjunción

# Teorema general del functor adjunto

## Definición

Un subconjunto  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es **débilmente inicial** si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .



# Teorema general del functor adjunto

## Definición

Un subconjunto  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es **débilmente inicial** si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .

## Teorema

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

# Teorema general del functor adjunto

## Definición

Un subconjunto  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es **débilmente inicial** si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .

## Teorema

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,

# Teorema general del functor adjunto

## Definición

Un subconjunto  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es **débilmente inicial** si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .

## Teorema

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,

# Teorema general del functor adjunto

## Definición

Un subconjunto  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es **débilmente inicial** si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .

## Teorema

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(C \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

# Teorema general del functor adjunto

## Definición

Un subconjunto  $\mathcal{I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es **débilmente inicial** si para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe  $I \in \mathcal{I}$  y una flecha  $I \rightarrow C$ .

## Teorema

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(C \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

entonces  $G$  es un adjunto a derecha.

# Lema del objeto inicial

## Lema

*Sea  $\mathcal{A}$  una categoría completa.  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial  $\mathcal{I}$ .*

## Lema del objeto inicial

### Lema

*Sea  $\mathcal{A}$  una categoría completa.  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial  $\mathcal{I}$ .*

### Idea de la demostración.

- Sea  $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$ : el conjunto  $\{P\}$  es débilmente inicial.

## Lema del objeto inicial

### Lema

*Sea  $\mathcal{A}$  una categoría completa.  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial  $\mathcal{I}$ .*

### Idea de la demostración.

- Sea  $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$ : el conjunto  $\{P\}$  es débilmente inicial.

- Consideramos el “igualador” del diagrama  $P \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} P$ .



## Lema del objeto inicial

### Lema

*Sea  $\mathcal{A}$  una categoría completa.  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial si y sólo si tiene un conjunto débilmente inicial  $\mathcal{I}$ .*

### Idea de la demostración.

- Sea  $P = \prod_{I \in \mathcal{I}} I$ : el conjunto  $\{P\}$  es débilmente inicial.
- Consideramos el “igualador” del diagrama  $P \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \vdots \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} P$ .
- El objeto igualador es inicial. □

## Lema

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa,*

## Lema

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa, entonces  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa para todo  $C \in \mathcal{C}$ .*

## Lema

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa, entonces  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa para todo  $C \in \mathcal{C}$ .*

## Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ ; definimos un functor  $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$ :

## Lema

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa, entonces  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

## Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ ; definimos un functor  $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$ :

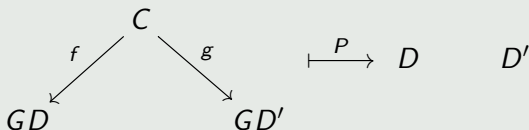
$$\begin{array}{ccc} & C & \\ & \swarrow f & \\ GD & & \end{array} \quad \xrightarrow{P} \quad D$$

## Lema

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa, entonces  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

## Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ ; definimos un functor  $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$ :



## Lema

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa, entonces  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

## Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ ; definimos un functor  $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 GD & \xrightarrow{Gh} & GD'
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{P} \quad
 D \xrightarrow{h} D'$$

## Lema

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites y  $\mathcal{D}$  es completa, entonces  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa para todo  $C \in \mathcal{C}$ .

## Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ ; definimos un functor  $P : (\mathcal{C} \downarrow G) \rightarrow \mathcal{D}$ :

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 GD & \xrightarrow{Gh} & GD'
 \end{array}
 \quad \xrightarrow{P} \quad
 D \xrightarrow{h} D'$$

Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites, entonces  $P$  crea límites. □



## Teorema (general del functor adjunto)

*Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:*

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

entonces  $G$  es un adjunto a derecha.

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(C \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

entonces  $G$  es un adjunto a derecha.

## Demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ .

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

entonces  $G$  es un adjunto a derecha.

## Demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ .

$(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa pues  $\mathcal{D}$  lo es y  $G$  preserva límites.

## Teorema (general del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $(\mathcal{C} \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

entonces  $G$  es un adjunto a derecha.

## Demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ .

$(\mathcal{C} \downarrow G)$  es completa pues  $\mathcal{D}$  lo es y  $G$  preserva límites.

Como  $(\mathcal{C} \downarrow G)$  admite un conjunto débilmente inicial y es completa, entonces admite un objeto inicial. □



## Condición del conjunto solución

La última condición significa:

## Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo  $C \in \mathcal{C}$ ,

$\mathcal{C}$

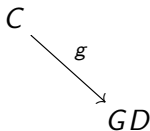
## Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo  $C \in \mathcal{C}$ , existe un conjunto  $\mathcal{F}$  de flechas  $C \rightarrow GD_i$

$\mathcal{C}$

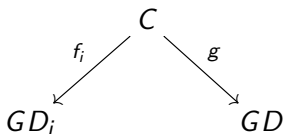
## Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo  $C \in \mathcal{C}$ , existe un conjunto  $\mathcal{F}$  de flechas  $C \rightarrow GD_i$ ; tal que para toda  $g : C \rightarrow GD$



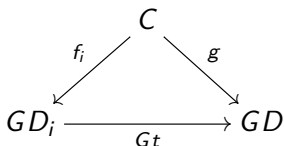
## Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo  $C \in \mathcal{C}$ , existe un conjunto  $\mathcal{F}$  de flechas  $C \rightarrow GD_i$  tal que para toda  $g : C \rightarrow GD$  existe una  $f_i : C \rightarrow GD_i$  en  $\mathcal{F}$



## Condición del conjunto solución

La última condición significa: para todo  $C \in \mathcal{C}$ , existe un conjunto  $\mathcal{F}$  de flechas  $C \rightarrow GD_i$  tal que para toda  $g : C \rightarrow GD$  existe una  $f_i : C \rightarrow GD_i$  en  $\mathcal{F}$  y una  $t : D_i \rightarrow D$  tal que



es conmutativo.

# Grupos libres

## Ejemplo

**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

# Grupos libres

## Ejemplo

**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,



# Grupos libres

## Ejemplo

**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $\{G_i\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal  $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$ .

# Grupos libres

## Ejemplo

**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $\{G_i\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal  $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$ .

# Grupos libres

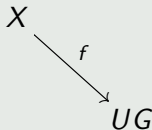
## Ejemplo

**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $\{G_i\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal  $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$ .

Sean  $G \in \mathbf{Grp}$  y  $f : X \rightarrow UG$  función.



# Grupos libres

## Ejemplo

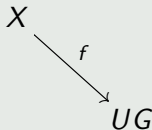
**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $\{G_i\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal  $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$ .

Sean  $G \in \mathbf{Grp}$  y  $f : X \rightarrow UG$  función. Sea

$$H = \langle \text{Im } f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$$



# Grupos libres

## Ejemplo

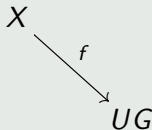
**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $\{G_i\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal  $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$ .

Sean  $G \in \mathbf{Grp}$  y  $f : X \rightarrow UG$  función. Sea

$H = \langle \text{Im } f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$  luego  $H \simeq G_i$  para algún  $i$ .



# Grupos libres

## Ejemplo

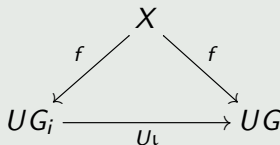
**Grp** es completa y  $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$  preserva límites.

Sea  $X \in \mathbf{Set}$ ,  $\{G_i\}_{i \in I}$  un conjunto completo de representantes de las clases de isomorfismo de grupos de cardinal  $\leq \max\{\aleph_0, |X|\}$ .

Sea  $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow UG_i\}_{i \in I}$ .

Sean  $G \in \mathbf{Grp}$  y  $f : X \rightarrow UG$  función. Sea

$H = \langle \text{Im } f \rangle = \{f(x_1)^{\pm 1} \cdots f(x_n)^{\pm 1} : x_i \in X, n \in \mathbb{N}\}$  luego  $H \simeq G_i$  para algún  $i$ .



## Teorema (especial del functor adjunto)

*Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:*

## Teorema (especial del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,



## Teorema (especial del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,

## Teorema (especial del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $\mathcal{D}$  admite un cogenerador,

## Teorema (especial del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $\mathcal{D}$  admite un cogenerador,
- $\mathcal{D}$  es bien potenciada,

## Teorema (especial del functor adjunto)

Sea  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Si:

- $G$  preserva límites,
- $\mathcal{D}$  es completa,
- $\mathcal{D}$  admite un cogenerador,
- $\mathcal{D}$  es bien potenciada,

entonces  $G$  es un adjunto a derecha.

# Cogeneradores

## Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un **conjunto cogenerador** si:

# Cogeneradores

## Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un **conjunto cogenerador** si: dadas  $f, g$  con  $f \neq g$ ,

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$$

# Cogeneradores

## Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un **conjunto cogenerador** si: dadas  $f, g$  con  $f \neq g$ , existe  $i \in I$  y  $h : B \rightarrow K_i$  tal que  $hf \neq hg$ .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} K_i$$

# Cogeneradores

## Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un **conjunto cogenerador** si: dadas  $f, g$  con  $f \neq g$ , existe  $i \in I$  y  $h : B \rightarrow K_i$  tal que  $hf \neq hg$ .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} K_i$$

$K \in \mathcal{C}$  es **cogenerador** si  $\{K\}$  es un conjunto cogenerador.



# Cogeneradores

## Definición

$\{K_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob}(\mathcal{C})$  es un **conjunto cogenerador** si: dadas  $f, g$  con  $f \neq g$ , existe  $i \in I$  y  $h : B \rightarrow K_i$  tal que  $hf \neq hg$ .

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \xrightarrow{h} K_i$$

$K \in \mathcal{C}$  es **cogenerador** si  $\{K\}$  es un conjunto cogenerador.

## Proposición

Sea  $\mathcal{C}$  completa.  $K \in \mathcal{C}$  es cogenerador  $\Leftrightarrow$  para todo  $X \in \mathcal{C}$  existe un monomorfismo  $X \hookrightarrow \prod K$ .

# Subobjetos

## Definición

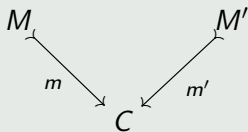
Sea  $C \in \mathcal{C}$ .

$C$

# Subobjetos

## Definición

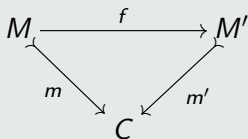
Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos,



# Subobjetos

## Definición

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos,

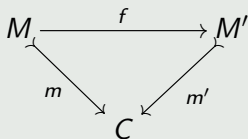


$m \leq m'$  si existe  $f$  tal que  $m'f = m$ .

# Subobjetos

## Definición

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos,



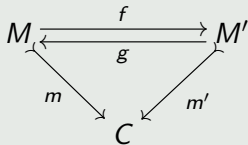
$m \leq m'$  si existe  $f$  tal que  $m'f = m$ .

Definimos  $m \sim m'$  si:  $m \leq m'$ ,

# Subobjetos

## Definición

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos,



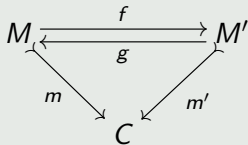
$m \leq m'$  si existe  $f$  tal que  $m'f = f$ .

Definimos  $m \sim m'$  si:  $m \leq m'$ ,  $m' \leq m$ .

# Subobjetos

## Definición

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos,



$m \leq m'$  si existe  $f$  tal que  $m'f = f$ .

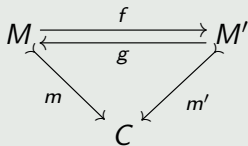
Definimos  $m \sim m'$  si:  $m \leq m'$ ,  $m' \leq m$ .

Un **subobjeto** de  $C$  es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia  $C$  bajo  $\sim$ .

# Subobjetos

## Definición

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $m : M \rightarrow C$  y  $m' : M' \rightarrow C$  son monomorfismos,



$m \leq m'$  si existe  $f$  tal que  $m'f = f$ .

Definimos  $m \sim m'$  si:  $m \leq m'$ ,  $m' \leq m$ .

Un **subobjeto** de  $C$  es una clase de equivalencia de monomorfismos hacia  $C$  bajo  $\sim$ .

$\mathcal{C}$  es **bien potenciada** si todo  $C$  admite un *conjunto* de subobjetos.



## Proposición

*Sea  $\mathcal{C}$  completa y bien potenciada. Para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un menor subobjeto de  $C$ .*

## Proposición

*Sea  $\mathcal{C}$  completa y bien potenciada. Para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un menor subobjeto de  $C$ .*

## Idea de la demostración.

Si  $\{ M_i \xrightarrow{m_i} C \}_{i \in I}$  es un conjunto completo de representantes de subobjetos de  $C$ ,

$$\begin{array}{ccc} & M_2 & \\ & \downarrow m_2 & \\ M_1 & \xrightarrow{m_1} & C \end{array}$$

## Proposición

Sea  $\mathcal{C}$  completa y bien potenciada. Para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un menor subobjeto de  $C$ .

## Idea de la demostración.

Si  $\{ M_i \xrightarrow{m_i} C \}_{i \in I}$  es un conjunto completo de representantes de subobjetos de  $C$ , tomamos su “pullback”.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow m_2 \\ M_1 & \xrightarrow{m_1} & C \end{array}$$

## Proposición

Sea  $\mathcal{C}$  completa y bien potenciada. Para todo  $C \in \mathcal{C}$  existe un menor subobjeto de  $C$ .

## Idea de la demostración.

Si  $\{ M_i \xrightarrow{m_i} C \}_{i \in I}$  es un conjunto completo de representantes de subobjetos de  $C$ , tomamos su "pullback".

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{p_2} & M_2 \\
 \downarrow p_1 & \searrow m & \downarrow m_2 \\
 M_1 & \xrightarrow{m_1} & C
 \end{array}$$



## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

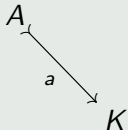
Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ .

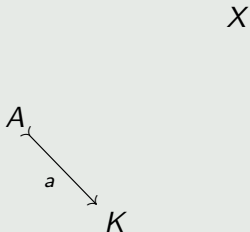


## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ .



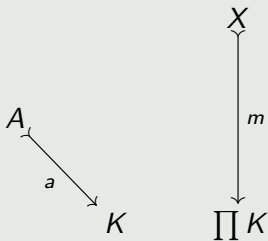


## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ .  
Existe  $m$  monomorfismo;

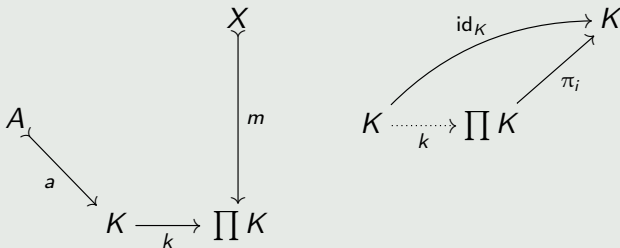


## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ . Existe  $m$  monomorfismo; existe  $k$ .

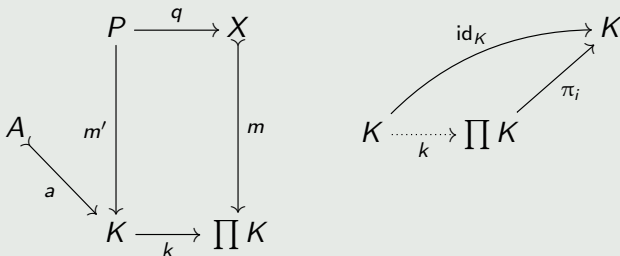


## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ . Existe  $m$  monomorfismo; existe  $k$ . Tomamos el pullback.

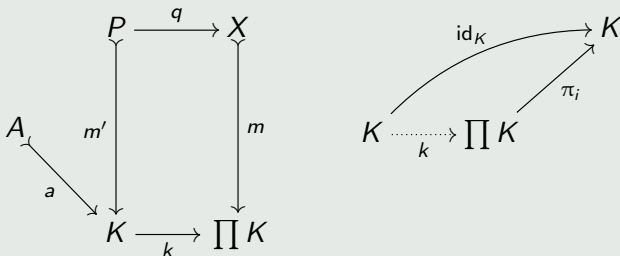


## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ . Existe  $m$  monomorfismo; existe  $k$ . Tomamos el pullback.  $m'$  es un monomorfismo.

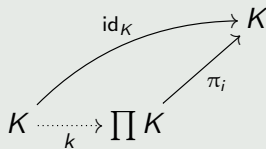
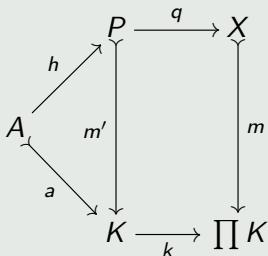


## Lema

Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ . Existe  $m$  monomorfismo; existe  $k$ . Tomamos el pullback.  $m'$  es un monomorfismo. Existe  $h$ .

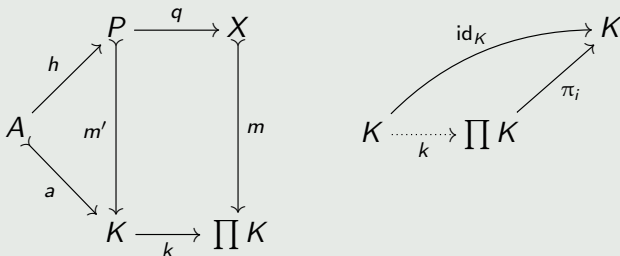


## Lema

*Si  $\mathcal{A}$  es completa, bien potenciada y admite un conjunto cogenerador entonces  $\mathcal{A}$  tiene un objeto inicial.*

Idea de la demostración (en el caso:  $K \in \mathcal{A}$  cogenerador).

Sea  $a$  un representante del menor subobjeto de  $K$ . Sea  $X \in \mathcal{A}$ . Existe  $m$  monomorfismo; existe  $k$ . Tomamos el pullback.  $m'$  es un monomorfismo. Existe  $h$ . Entonces  $qh : A \rightarrow X$ .



## Teorema especial del functor adjunto

### Teorema (especial del functor adjunto)

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites, con  $\mathcal{D}$  completa, bien potenciada y con un cogenerador  $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$  es un adjunto a derecha.*

## Teorema especial del functor adjunto

### Teorema (especial del functor adjunto)

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites, con  $\mathcal{D}$  completa, bien potenciada y con un cogenerador  $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$  es un adjunto a derecha.*

### Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Basta ver que  $(C \downarrow G)$  es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.



## Teorema especial del functor adjunto

### Teorema (especial del functor adjunto)

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites, con  $\mathcal{D}$  completa, bien potenciada y con un cogenerador  $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$  es un adjunto a derecha.*

### Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Basta ver que  $(C \downarrow G)$  es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- $\mathcal{D}$  completa,  $G$  preserva límites  $\Rightarrow (C \downarrow G)$  completa.

## Teorema especial del functor adjunto

### Teorema (especial del functor adjunto)

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites, con  $\mathcal{D}$  completa, bien potenciada y con un cogenerador  $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$  es un adjunto a derecha.*

### Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Basta ver que  $(C \downarrow G)$  es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- $\mathcal{D}$  completa,  $G$  preserva límites  $\Rightarrow (C \downarrow G)$  completa.
- Los subobjetos de  $f : C \rightarrow GB$  están representados por flechas  $f_0 : C \rightarrow GB_0$ , donde  $B_0 \rightarrow B$  representa un subobjeto.

## Teorema especial del functor adjunto

### Teorema (especial del functor adjunto)

*Si  $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  preserva límites, con  $\mathcal{D}$  completa, bien potenciada y con un cogenerador  $K \in \mathcal{C} \Rightarrow G$  es un adjunto a derecha.*

### Idea de la demostración.

Sea  $C \in \mathcal{C}$ . Basta ver que  $(C \downarrow G)$  es completa, bien potenciada y con un conjunto cogenerador.

- $\mathcal{D}$  completa,  $G$  preserva límites  $\Rightarrow (C \downarrow G)$  completa.
- Los subobjetos de  $f : C \rightarrow GB$  están representados por flechas  $f_0 : C \rightarrow GB_0$ , donde  $B_0 \rightarrow B$  representa un subobjeto.
- $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, GK)$  es un conjunto cogenerador de  $(C \downarrow G)$ . □

# Compactificación de Stone-Čech

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$ ;

# Compactificación de Stone-Čech

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$ ; veamos que  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  tiene un adjunto a izquierda  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

# Compactificación de Stone-Čech

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$ ; veamos que  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  tiene un adjunto a izquierda  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

Existe  $r$  si y sólo si para cada  $X \in \mathbf{Top}$

$X$

# Compactificación de Stone-Čech

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$ ; veamos que  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  tiene un adjunto a izquierda  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

Existe  $r$  si y sólo si para cada  $X \in \mathbf{Top}$  existe  $rX \in \mathbf{CompHaus}$  y  $\eta_X : X \rightarrow irX$

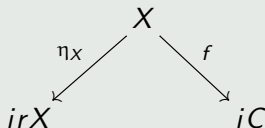
$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \swarrow \eta_X & \\ & & irX \end{array}$$

# Compactificación de Stone-Čech

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$ ; veamos que  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  tiene un adjunto a izquierda  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

Existe  $r$  si y sólo si para cada  $X \in \mathbf{Top}$  existe  $rX \in \mathbf{CompHaus}$  y  $\eta_X : X \rightarrow irX$  tal que para cada  $C \in \mathbf{CompHaus}$  y  $f : X \rightarrow iC$





# Compactificación de Stone-Čech

## Ejemplo

Sea  $\mathbf{CompHaus} \subset \mathbf{Top}$ ; veamos que  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  tiene un adjunto a izquierda  $r : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CompHaus}$ .

Existe  $r$  si y sólo si para cada  $X \in \mathbf{Top}$  existe  $rX \in \mathbf{CompHaus}$  y  $\eta_X : X \rightarrow irX$  tal que para cada  $C \in \mathbf{CompHaus}$  y  $f : X \rightarrow iC$  existe una única  $g : rX \rightarrow C$  tal que

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \eta_X \swarrow & & \searrow f \\
 irX & \cdots \cdots \cdots & iC \\
 & g &
 \end{array}$$

conmuta.

## Compactificación de Stone-Čech (2)

### Ejemplo

- **CompHaus** es completa e  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  preserva límites,

## Compactificación de Stone-Čech (2)

### Ejemplo

- **CompHaus** es completa e  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,

## Compactificación de Stone-Čech (2)

### Ejemplo

- **CompHaus** es completa e  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn  $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$  es un cogenerador:

## Compactificación de Stone-Čech (2)

### Ejemplo

- **CompHaus** es completa e  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn  $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$  es un cogenerador:

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$$

## Compactificación de Stone-Čech (2)

### Ejemplo

- **CompHaus** es completa e  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn  $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$  es un cogenerador:

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \longrightarrow [0, 1].$$

## Compactificación de Stone-Čech (2)

### Ejemplo

- **CompHaus** es completa e  $i : \mathbf{CompHaus} \rightarrow \mathbf{Top}$  preserva límites,
- **CompHaus** es bien potenciada,
- Lema de Urysohn  $\Rightarrow [0, 1] \in \mathbf{CompHaus}$  es un cogenerador:

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C \longrightarrow [0, 1].$$

Esto exhibe **CompHaus** como *subcategoría reflexiva* de **Top**.