

1. GRAFOS REGULARES Y ALEATORIOS

Como ya se comentó en la introducción de esta memoria, un objetivo inicial del proyecto era realizar un estudio de las redes de metro del mundo, en el cual se comprobaba experimentalmente si dichas redes eran o no redes small-world.

Una red small-world es una red que posee propiedades tanto de redes aleatorias como de redes regulares. Por tanto, es necesario saber qué es una red aleatoria y qué es una red regular para llegar a definir una red small-world. Además, ¿Por qué nos planteamos comprobar si son redes small world? ¿no se ajustan las redes reales al modelo que describe redes aleatorias? O, ¿no se ajustan al modelo que describe redes regulares?

1.1 Grafos regulares

Diremos que un grafo regular es aquel en el cual todos los vértices tienen el mismo grado o valencia. Un grafo con vértices de grado k se denomina k -regular. Un grafo completo es n -regular.

La longitud de camino característica de una red regular es proporcional al número de vértices de la red $L \sim \frac{n}{2k}$. El coeficiente de agrupación de una red regular esperamos que tenga un valor alto $C = \frac{3(k-1)}{4(k-2)}$ (definidos entre otros en [6,37]).

Por tanto, aunque es intuitivo ver que las redes reales no son redes regulares, podemos verlo matemáticamente también, viendo, por ejemplo, que los valores de L de las redes reales (tablas IV y V), no se parecen en nada a los valores de L de un grafo regular (calcular con las expresiones vistas). Sin embargo, las redes reales si poseen algunas características de los enrejados regulares. Si comparamos el coeficiente C , veremos cómo tienen valores similares.

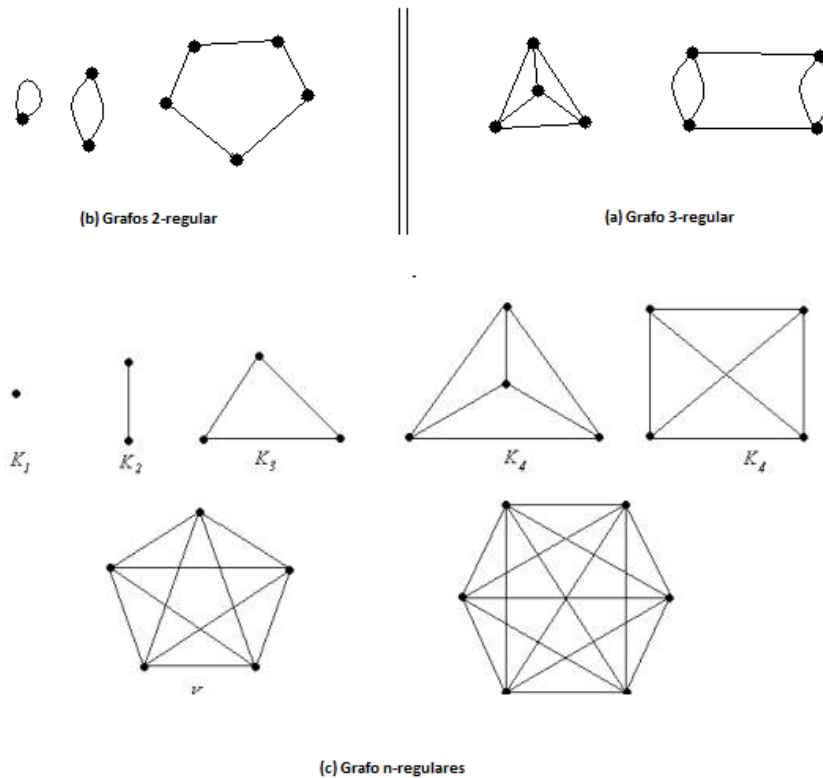


Figura 23

1.2 Grafos Aleatorios

Se dice que un grafo es aleatorio si la presencia y colocación de sus aristas siguen una distribución aleatoria. Por tanto, un grafo aleatorio no puede ser diseñado con ningún criterio concreto.

Los grafos aleatorios son muy útiles para modelar sistemas muy grandes (Ej.: ‘enjambres’ de vehículos aéreos no tripulados (UAV)).

En torno a este tipo de grafos giran importantes teorías, que comenzaron en torno a 1949 cuando Rapoport y sus colaboradores realizaron el primer intento de modelar un gran grafo aleatorio [57, 65]. Aproximadamente una década más tarde Paul Erdos y Alfred Renyi [22,23] estudiaron exhaustivamente estos grafos y llamaron ‘Teoría de grafos aleatorios’ a todas las investigaciones que seguían este eje.

Estudiaremos un modelo de creación de grafos aleatorios, el ‘modelo de Poisson’ o ‘modelo binomial de grafos aleatorios’, además de algunas propiedades que ya se han definido en los primeros apartados de esta memoria.

La explicación de este modelo facilitará la comprensión del razonamiento que se realizará posteriormente sobre cómo se crean las redes Small-World y las redes Scale-Free.

A. Modelo de Poisson

En el primer artículo publicado por Erdos y Renyi [22], se definía un grafo aleatorio con n nodos etiquetados conectados por m aristas, elegidas al azar de entre las $\frac{n(n-1)}{2}$ posibles. Existen, en total, $C_{\frac{n(n-1)}{2}}^n$ grafos con n nodos y m aristas. La realización de cualquiera de ellos es equiprobable a la del resto.

Una definición alternativa y equivalente de un grafo aleatorio podría ser aquella obtenida de un modelo binomial, en el cual uniremos cada par de n nodos con aristas con una probabilidad p .

En este caso, el número total de aristas es una variable aleatoria con una esperanza:

$$E[m] = p \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] \quad (53)$$

Por tanto, la probabilidad de existir de cada una de las aristas sigue una distribución de Bernoulli:

$$p^m (1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-m} \quad (54)$$

La probabilidad de que un vértice tenga grado k es

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (55)$$

Sin embargo, si incrementamos el número de nodos y aristas del grafo, llegará un momento en el que el valor medio de la distribución será constante. Cuando esto ocurre, la ley de distribución se hace independiente del número de los mismos, lo que nos lleva a sustituir la ley Binomial por una ley de distribución de Poisson:

$$p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cong \frac{z^k e^{-z}}{k!} \quad (56)$$

Donde z es el valor medio de grado $z=p(n-1)$. La igualdad se hace con los valores límites.

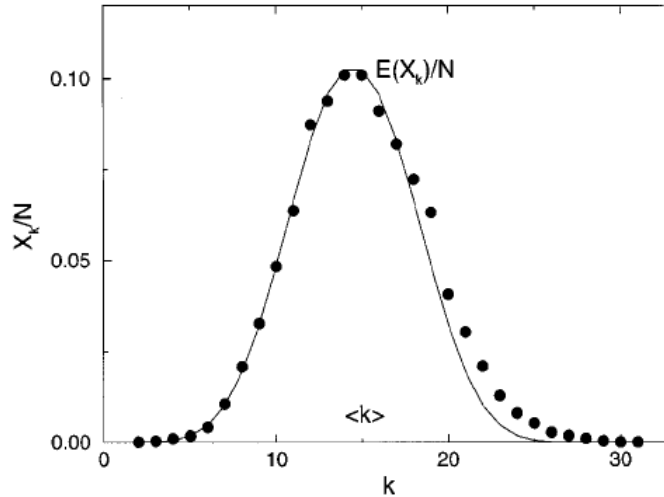


Figura 24: Distribución de probabilidad que resulta de simulaciones numéricas de un grafo aleatorio. Se ha creado un grafo aleatorio con $n = 10000$ nodos y una probabilidad de conexión $p = 0.0015$, y se ha calculado el número de nodos con grado k , X_k . Los resultados se comparan con el valor esperado de una distribución de Poisson (línea continua). Vemos como la desviación es pequeña.

Una de las primeras propiedades de los grafos aleatorios que fueron estudiadas tanto por Rapoport y Solomonoff como por Erdos y Renyi, es la formación de subgrafos. Un grafo G_1 formado por un conjunto P_1 de nodos y un conjunto E_1 de aristas es un subgrafo de $G=(V,E)$ si todos los nodos del conjunto P_1 están contenidos también en el conjunto V y todas las aristas de E_1 están contenidas también en E . Un subgrafo no tiene porque ser aislado.

De acuerdo con lo estudiado hasta ahora, un grafo aleatorio podía ser generado a partir de n nodos aislados conectados posteriormente por aristas con una probabilidad p . Si el valor de p es pequeño, cuando pongamos las aristas, el grafo tendrá muchos componentes de pequeño tamaño, teniendo esta magnitud, el tamaño, una distribución exponencial en las muestras con una media finita. Por el contrario, si el valor de p es grande, cuando las aristas sean colocadas, muchos vértices están unidos formando lo que llamaremos una “componente gigante” mientras que el resto de los vértices forman pequeños componentes, que al igual que en el primer estado, tienen un tamaño que sigue una distribución exponencial de media finita. Existe, por tanto, una etapa de transición o lo que es equivalente un valor de p crítico, dependiente de n , entre el primer estado denominado low- p y el segundo, denominado high- p . El estudio y demostración del valor de p en el cual se produce esta transición, además del tamaño esperado del

componente gigante, el número de componentes aislados generados, etc. no se realizará en esta memoria.

B. Propiedades de un grafo aleatorio

Las propiedades de los grafos aleatorios han sido profundamente estudiadas [15, 10.a, 11.a]. En este apartado tan solo se enuncian, para ver la diferencia entre las propiedades de un grafo aleatorio y las de una red real.

Así, se ha demostrado que todos los grafos con n nodos y una probabilidad de conexión p (modelo de Poisson), tienen un diámetro pequeño (como consecuencia del valor de p) que varía muy poco de

$$d = \frac{\ln(n)}{\ln(pn)} = \frac{\ln(n)}{\ln(\langle k \rangle)} \quad (57)$$

Importantes resultados que se desprenden de aquí son:

- Si $\langle k \rangle = pn < 1$, el grafo está compuesto por arboles aislados, y su diámetro es por tanto igual al de un árbol.
- Si $\langle k \rangle > 1$, tenemos una gigante agrupación. El diámetro del grafo es igual que el diámetro de la agrupación gigante si $\langle k \rangle \geq 3.5$ y es proporcional a la cantidad d antes mencionada.
- Si $\langle k \rangle \geq \ln(n)$, casi todo el grafo está conectado. El diámetro es más o menos la cantidad d antes mencionada.

La longitud de camino característica se escala con el número de nodos de la misma forma que el diámetro. Será proporcional a esta magnitud,

$$l_{rand} \sim \frac{\ln n}{\ln(\langle k \rangle)} \quad (58)$$

Este valor suele ser pequeño.

En las tablas IV y V, se muestra en resultados como la longitud de camino característica de redes reales es muy similar a la misma magnitud medida sobre grafos aleatorios del mismo número de nodos. En la figura 25, se puede ver gráficamente. Se han representado los valores de las redes reales, además de la relación mostrada en la ec.(58). Se aprecia el mismo resultado. Con lo cual, en una primera aproximación,

podríamos concluir que las redes reales poseen valores de longitud de camino característica pequeños, al igual que las redes aleatorias.

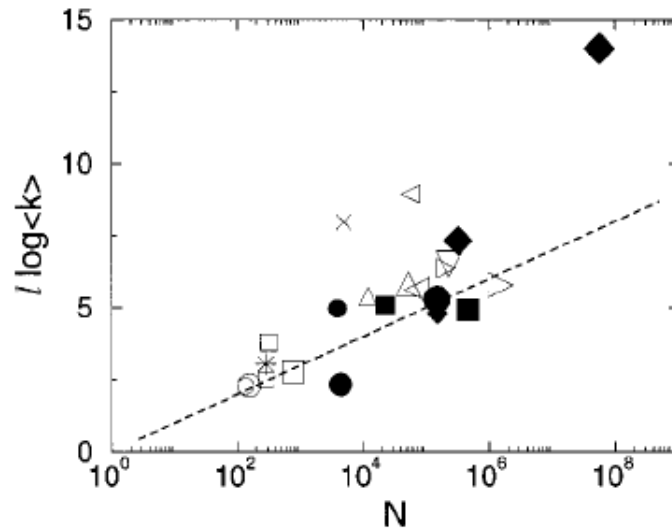


Figura 25: Comparación entre los caminos medios de redes reales y la predicción de la teoría de grafos aleatorios. Símbolos: ○ pequeño – Tabla IV.12, ○ grande – Tabla IV.13, ★ Tabla IV.17, □ pequeño – Tabla IV.10, □ mediano – Tabla IV.11, □ grande – Tabla V.13, ● pequeño – Tabla V.6, ● mediano – Tabla IV.2, × Tabla IV.16, △ pequeño – Tabla IV.7, ■ pequeño – Tabla IV.15, △ grande – Tabla IV.4, ◁ pequeño – Tabla IV.5, ◁ grande – Tabla IV.6, ● grande – Tabla V.6, ◆ pequeño – tabla IV.1, ▷ pequeño – Tabla IV.7, ▽ Tabla IV.3, ◆ mediano – Tabla V.1, ■ grande – Tabla IV.14, ▷ grande – Tabla IV.5, ◆ grande – Tabla V.3

Por otra parte, el coeficiente de agrupación de un grafo aleatorio es

$$C_{rand} = p = \frac{\langle k \rangle}{n} \quad (59)$$

Ha sido calculado considerando que la probabilidad de que dos nodos vecinos estén conectados es igual a la probabilidad de que dos nodos aleatoriamente seleccionados estén conectados.

De acuerdo con esta ecuación, si dibujamos $\frac{C_{rand}}{\langle k \rangle}$ como función de N para grafos aleatorios de distintos tamaños en un sistema coordinado con ejes logarítmicos todos los puntos deberán estar alineados formando una recta de pendiente -1 que pase por el origen del sistema. Sin embargo, si comparamos estos resultados teóricos con lo que ocurre en las redes reales (valores reflejados en las tablas IV y V), veremos como no obtenemos los resultados esperados. La fracción $\frac{C}{\langle k \rangle}$ no decrece con el inverso de n, es

más, parece independiente de n (Figura 26). Concluimos que, el coeficiente de agrupación de una red real no tiene porque ser similar al coeficiente de agrupación de una red aleatoria del mismo número de nodos.

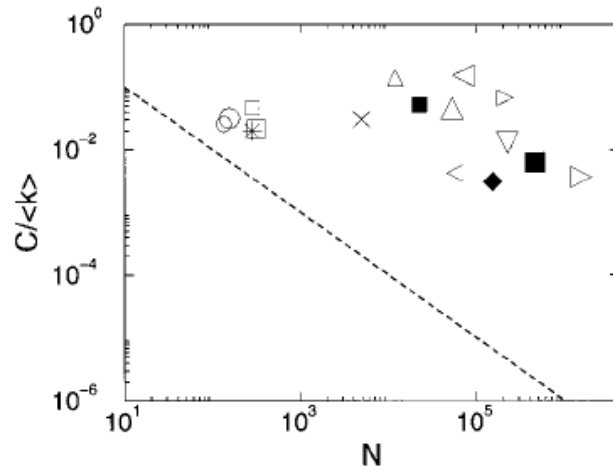


Figura 26: Comparación entre los coeficientes de agrupación de redes reales y grafos aleatorios. Los símbolos usados son los mismos que los usados en la Figura 25.