Teoría de las equipolencias

Amoretti, Félix

1889

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS

TEORÍA

DE LAS

EQUIPOLENCIAS

TESIS

para optar al titulo de doctor en ciencias físico-matemáticas

POR

FELIX AMORÉTTI

BUENOS AIRES

Imprenta de M. Biedma, Bolivar 535

1889

UNIVERSIDAD NACIONAL DE BUENOS AIRES.

Rector.

Doctor LEOPOLDO BASAVILBASO.

Consejeros.

Doctor MAURICIO GONZALEZ CATAN.
» ANTONIO E. MALAVER.
Ingeniero LUIS A. HUERGO.
» LUIS SILVEYRA.
Doctor MANUEL OBARRIO.
Señor JUAN J. J. KYLE.
Doctor MANUEL ARAUZ.
» ALEJO B. GONZALEZ.
» PEDRO A. MATTOS.

Secretario.

Doctor NORBERTO PIÑERO.

Pro-Secretario.

Doctor EDUARDO L. BIDAU.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

Académicos honorarios.

Doctor	Bernardino Speluzzi.
Ingeniero	Francisco Lavalle.
"	Emilio Rosetti.

Académicos titulares.

Ingeniero	Guillermo White.
Doctor	Pedro N. Arata.
Ingeniero	Luis Silveyra.
"	Santiago Brian.
"	Manuel B. Bahia.
Doctor	Rafael Ruiz de los Llanos.
Ingeniero	Jorge Coquet.
Doctor	Carlos Berg.
Doctor	Valentin Balbin.
Señor	Juan J. J. Kyle.
Ingeniero	Luis A. Huergo.
Doctor	Roberto Wernicke.
Ingeniero	Eduardo Aguirre.
Señor	Juan Coquet.
Ingeniero	Juan Pirovano.

Decano.

Ingeniero Luis Silveyra.

Delegados al Consejo Superior.

Ingeniero	Luis A. Huergo.
Señor	Juan J. J. Kyle.

Tesorero.

Doctor Carlos Berg.

Secretario.

Ingeniero Félix Amorétti.

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS.

Catedráticos titulares.

Introducción al Algebra superior y Trigonometría rectilínea y esférica	Ingeniero	José I. Frogone.
Algebra superior y Geometría analítica	"	Carlos D. Duncan.
Química inorgánica	Doctor	Atanasio Quiroga.
Química analítica	"	Atanasio Quiroga.
Geometría proyectiva	Ingeniero	Juan F. Sarhy.
Geometría descriptiva	"	Lorenzo Amespil.
Cálculo infinitesimal	Doctor	Ildefonso P. Ramos Mejía.
Construcciones civiles	Ingeniero	Luis Silveyra.
Estática gráfica	Doctor	Valentín Balbín.
Mecánica racional	Ingeniero	Carlos M. Morales.
Mecánica aplicada	"	Eduardo Becher.
Resistencia de materiales	"	Jorge Duclout.
Física superior	"	Manuel B. Bahía.
Hidráulica	"	Luis Silveyra.
Topografía	"	Carlos Echagüe.
Geodesia	"	Juan Pirovano.
Construcción de máquinas	"	Otto Krause.
Construcción y explotación de ferrocarriles	"	Alberto Schneidewind.
Proyectos, planos y presupuestos.	"	Alberto Schneidewind.
Matemáticas superiores	Doctor	Valentín Balbín.
Arquitectura	Arquitectos	J. M Belgrano J. M Burgos
Mineralogía y Geología	Ingeniero	Eduardo Aguirre.
Química orgánica é Higiene	Señor	Juan J. J. Kyle.
Botánica y Zoología	Doctor	Carlos Berg.

Catedráticos sustitutos.

Construcciones civiles	Ingeniero	Santiago Brian.
Mécánica aplicada	"	Marcial R. Candioti.
Mineralogía y Geología	"	Ponciano L. Saubidet.
Hidráulica	"	Manuel S. Ocampo.
Química inorgánica	Doctor	Rafael R. de los Llanos.
Mecánica aplicada	Ingeniero	Alejandro M. Torres.
Geodésia	"	José Sarhy.

SEÑORES ACADÉMICOS;

SEÑORES CATEDRÁTICOS:

En cumplimiento de las prescripciones del plan de estudios de esta Facultad, vengo á presentaros la última prueba exigida para optar al honroso título de doctor en ciencias físico-matemáticas de la Universidad de Buenos Ayres.

El tema que he elejido para asunto de este trabajo es la *Teoría de las Equipolencias*, debida al ilustre geómetra italiano BELLAVITIS, á quien tanto deben los modernos conocimientos de la Matemática.

Excuso deciros que en este trabajo no encontrareís alguna de esas grandes ideas que por su novedad se imponen, sino, lisa y llanamente, una exposición de la mencionada Teoría y de sus aplicaciones más importantes, pues, mi objeto ha sido propender, en la medida de mis débiles fuerzas, á la vulgarización de esta doctrina, tanto más que pocos son los autores que hasta ahora se hayan ocupado del asunto.

Al exponer la *Teoría de las Equipolencias* no sólo las consideraré en sí mismas, si que tambien en sus más íntimas relaciones con el admirable *Cálculo de los Cuaterniones* de Sir GUILLERMO R. HAMILTON y con la *Teoría de las Cantidades Extensivas* (*Ausdehnungslehre*) del reputado geómetra alemán GRASSMANN. En una palabra, este trabajo comprenderá las ideas más modernas y sencillas, en una forma clara y didáctica, de estas importantes cuestiones que no han penetrado todavía en los libros ordinarios y que sólo se hallan en obras especiales y en artículos de revistas, fuera del alcance de los que sólo desean obtener una simple noción de ella.

Para dar cumplimiento á este propósito pasamos á exponer las consideraciones necesarias y los principios fundamentales de la Teoría, valiéndonos de los trabajos de BELLAVITIS (1) y de las obras de HOEÜL (2) y LAISANT (3) que hemos consultado para redactar este trabajo.

(1) Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (calcolo delle Equipollenze); Padova. 1835.
Saggio Sull'Algebra degli immaginarii; Venezia, 1852.
Sposizione del metodo delle Equipollenze; Modena, 1854.
Calcolo dei Quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle Equipollenze; Modena, 1858.
Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica; Venezia, 1860.
Determinazione numerica delle Radici immaginarie delle equazioni algebriche; Venezia, 1864.
Elementi di Geometria, di Trigonometria é di Geometria analitica, ec.; Padova, 1862.

(2) Sur le calcul des Equipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis;
Cours de Calcul Infinitésimal, tome deuxiéme, p. 93—112.

(3) Nouvelles annales de mathématiques—1873, etc.
Théorie et applications des Equipollences; Paris, 1887.

con la *Teoría de las Cantidades Extensivas* (*Ausdehnungslehre*) del reputado geómetra alemán GRASSMANN. En una palabra, este trabajo comprenderá las ideas más modernas y sencillas, en una forma clara y didáctica, de estas importantes cuestiones que no han penetrado todavía en los libros ordinarios y que sólo se hallan en obras especiales y en artículos de revistas, fuera del alcance de los que sólo desean obtener una simple noción de ella.

Para dar cumplimiento á este propósito pasamos á exponer las consideraciones necesarias y los principios fundamentales de la Teoría, valiéndonos de los trabajos de BELLAVITIS (1) y de las obras de HOEÜL (2) y LAISANT (3) que hemos consultado para redactar este trabajo.

(1) Saggio di applicazioni di un nuovo metodo di Geometria analitica (calcolo delle Equipollenze); Padova, 1835.
Saggio Sull'Algebra degli immaginarii; Venezia, 1852.
Sposizione del metodo delle Equipollenze; Modena, 1854.
Calcolo dei Quaternioni di W. R. Hamilton, e sua relazione col metodo delle Equipollenze; Modena, 1858.
Sposizione dei nuovi metodi di Geometria analitica; Venezia, 1860.
Determinazione numerica delle Radici immaginarie delle equazioni algebriche; Venezia, 1864.
Elementi di Geometria, di Trigonometria é di Geometria analitica, ec.; Padova, 1862.

(2) Sur le calcul des Equipollences, méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis;
Cours de Calcul Infinitésimal, tome deuxiéme, p. 93—112.

(3) Nouvelles annales de mathématiques—1873, etc.
Théorie et applications des Equipollences; Paris, 1887.

Sistemas de magnitudes

Los sistemas de magnitudes han seguido la misma marcha que los progresos de las ciencias matemáticos y para nuestro objeto merecen especial mención los siguientes, para poder apreciar en toda su sencillez y generalidad la *Teoría* de BELLAVITIS.

PRIMER SISTEMA.—Consideremos una magnitud a que tenga un caracter común cualquiera y supongamos que sea una *unidad* real. Si á esta magnitud agregamos otra que le sea igual tendremos un todo ó pluralidad, que podrá representarse por aa. Añadiendo á esta magnitud la primera unidad a, el resultado será aaa, y así sucesivamente tendríamos

$$a, \ aa, \ aaa, \ aaaa, \ldots .$$

en cuyo sistema cada magnitud proviene de la precedente por un mismo procedimiento para todas. Este sistema es el *natural* y está caracterizado:

1º Por ser indefinido en el sentido ascendente y por no poderse prolongar en sentido descendente más allá de a. 2º. Porque la unidad a es indivisible. 3º. Porque en la serie antes escrita no ocurren dos cantidades iguales. Y 4°. Porque cada cantidad es mayor que las que le preceden y menor que las que le siguen.

SEGUNDO SISTEMA.—Consideremos ahora una unidad facticia *m*, susceptible de ser dividida en un número cualquiera de partes iguales ó *sub-unidades*. Cuando estas son dos, tres, cuatro, etc., toman el nombre, como es sabido, de medios, tercios, cuartos, etc.; y entonces si formamos con cada una de estas sub-unidades, considerada como unidad principal, una serie análoga á la del sistema anterior, tendremos el siguiente cuadro de magnitudes dispuestas en filas horizontales y en columnas verticales de este modo:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\text{Modio de m}, & \begin{pmatrix}\text{medio de m}\\ \text{medio de m}\end{pmatrix}, & \begin{matrix}\text{medio de m}\\ \text{medio de m}\\ \text{medio de m}\end{matrix}, & \begin{matrix}\text{medio de m}\\ \text{medio de m}\\ \text{medio de m}\\ \text{medio de m}\end{matrix} & ,\ldots\ldots\text{etc.}\\
\text{Tercio de m} & \begin{matrix}\text{tercio de m}\\ \text{tercio de m}\end{matrix}, & \begin{pmatrix}\text{tercio de m}\\ \text{tercio de m}\\ \text{tercio de m}\end{pmatrix}, & \begin{matrix}\text{tercio de m}\\ \text{tercio de m}\\ \text{tercio de m}\\ \text{tercio de m}\end{matrix} & ,\ldots\ldots\text{etc.}\\
\text{Cuarto de m} & \begin{matrix}\text{cuarto de m}\\ \text{cuarto de m}\end{matrix}, & \begin{matrix}\text{cuarto de m}\\ \text{cuarto de m}\\ \text{cuarto de m}\end{matrix}, & \begin{pmatrix}\text{cuarto de m}\\ \text{cuarto de m}\\ \text{cuarto de m}\\ \text{cuarto de m}\end{pmatrix} & ,\ldots\ldots\text{etc.}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots(\quad).\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots
\end{array}\right.$$

El sistema de que tratamos está caracterizado: 1°. Por ser indefinido el número de filas y el de cantidades de cada fila, á partir de la primera. 2° Los términos de cada fila crecen y los de cada columna decrecen, á partir del primero. 3° Muchas magnitudes de este sistema son iguales. 4° Todas las magnitudes entreparéntesis son iguales á la unidad; las que preceden á estas en cada fila menores, y las que le siguen mayores que dicha unidad. Y 5°

Las magnitudes que contienen un número exacto de veces al conjunto de subunidades que hay en el paréntesis de su misma fila, pueden convertirse en las magnitudes del sistema anterior con sólo sustituir aquel conjunto ó aquella pluralidad por la unidad m.

Los dos sistemas mencionados forman lo que se llama sistema de *números racionales absolutos* y al cual pertenece nuestro sistema ordinario de numeración en el que sólo se considera la magnitud sin tener en cuenta la dirección. En una palabra, estos sistemas no tratan de la *cantidad dirigida* que es el sujeto inmediato de las *Equipolencias*, y también de los *Cuaterniones* de HAMILTON y de la *Teoría de las Cantidades Extensivas* de GRASSMANN.

TERCER SISTEMA. Supongamos que sobre una recta limitada en un sentido é indefinida por el otro, y á partir de su único extremo, se mueva un punto, y consideremos las magnitudes lineales ó distancias comprendidas entre dicho extremo y cada una de las sucesivas posiciones del punto. Todas estas distancias ó magnitudes constituirán un sistema, y si las determinamos tomando por unidad una cualquiera de ellas, obtendremos, además de las cantidades del sistema anterior, otras que no contendrán exactamente á su unidad, ni á ninguna de sus partes iguales. Estas últimas magnitudes son *inconmensurables*, los números que las representan son irracionales, y estos, en unión con los del sistema anterior, forman el sistema completo de *cantidades absolutas*. Este sistema está caracterizado porque no puede obtenerse de una manera general la representación exacta de las cantidades inconmensurables respecto de una unidad, á no ser que se adopte letras en lugar de números.

Lo que dijimos para los otros sistemas se aplica también á éste, es decir, este sistema no da la noción de la *cantidad dirigida*, ó, en otras palabras, la *magnitud* y la *dirección* en un solo concepto.

Cuarto sistema.—Consideremos un sistema de pesos materiales actuantes sobre uno de los platillos A de una balanza y admitamos que al principio no haya más pesos en los platillos que el peso propio de éstos y por lo tanto que los brazos de la balanza estén perfectamente horizontales. En seguida, imaginémonos un resorte dispuesto entre el eje y el brazo de manera tal que si ponemos un peso a en el platillo A, el fiel se incline á la derecha de la magnitud b y colocando los pesos $2a$, $3a$, $4a$,...tome aquel las inclinaciones $2b$, $3b$, $4b$,. . . .De este modo los ángulos descritos por el fiel á la derecha de la vertical, podrán servir para medir los pesos actuantes en el platillo. Haciendo que estos pesos se sucedan con arreglo al sistema natural, por ejemplo, á los pesos a, $2a$, $3a$, $4a$,...corresponderán las cantidades b $2b$, $3b$, $4b$..., y esta serie podrá recorrerse en sentido opuesto con sólo ir quitando pesos del platillo A. Pero una serie de cantidades decrecientes puede obtenerse, no sólo quitando pesos de A si que también poniendo pesos en el otro platillo B, y como en este caso, después de llegar á colocar justa en su fiel la balanza, podemos seguir colocando pesos en B, los nuevos ángulos que describa el fiel á la izquierda de la vertical son cantidades *opuestas* á las primeras y son las que en el Algebra ordinaria se denominan cantidades *negativas* con respecto á las primeras, que llevan el nombre de *positivas*. He ahí las primeras manifestaciones de la *cantidad dirigida ó vectores* que aparecen, en cierto modo, desde la introducción de los signos de afección + y —. Sucedió esto en el siglo XVII con motivo de los trabajos de GIRARD y DESCARTES y principalmente de los de este último, quien al aplicar en general la *ley del menos* ensanchó el Algebra como *ciencia de las ecuaciones*. Pero, como es notorio, estaba reservado al génio de MÖBIUS el hacer valedero el *principio de los signos* en los más diversos ramos de la Matemática.

QUINTO SISTEMA. Consideremos en un plano un punto fijo y otro móvil, que con arreglo á una ley cualquiera, recorre todos los ámbitos del plano.—Las distancias desde el punto fijo á las diversas posiciones del móvil originan un sistema de cantidades ó magnitudes, cuya idea es complexa, pues en cada una de ellas hay que tener en cuenta: su *cantidad* absoluta, su *dirección*, y dentro de esta dirección el *sentido* en que debe contarse. De aquí se infiere que á los números que determinan las dichas cantidades deben asociarse dos signos nuevos: uno que exprese la dirección y otro que exprese el sentido; y así como las cantidades se aprecian por una unidad conocida, las direcciones se determinarán también refiriéndolas á una dirección fija. Ahora bien, para hacer esto, aunque existen varias maneras de ejecutar la determinación, nos limitaremos á indicar la siguiente, porque cuadra perfectamente con el propósito de este trabajo:

Sea O (fig. 1) el punto fijo del plano y AB la dirección conocida; llamemos α á la unidad para medir cantidades en esta dirección, siendo positivas en el sentido OB y negativas en el opuesto OA. Consideremos otra dirección CD que hace el ángulo COB con la primera y designemos por β la unidad correspondiente sobre OC, en su doble afección cuantitativa y cualitativa. Sentado esto, la magnitud OM en cantidad, dirección y sentido determinado, se acostumbra á representar por la expresión

$$\overline{Oa}.\ \alpha + \overline{aM}.\beta,$$

que es el símbolo genérico de los números complejos de dos unidades, es decir, de las cantidades imaginarias del Álgebra que Cauchy y Gauss trataron conjuntamente después de los trabajos de Argand, Mourey y Warren, para extender el dominio del análisis fuera del reducido círculo de conocimientos que no expresaban directamente la *posición* ó *situación* (*situs*) y la *magnitud* (*magnitudo*), como Leibnitz quería hacer expresar al Álgebra de su tiempo.

Sexto sistema. Si suponemos que el punto móvil recorre todas las posiciones del espacio infinito, entonces el concepto de la cantidad ó magnitud (es decir, de la distancia del punto fijo á cada posición del móvil) es más complexo; porque á la *cantidad* absoluta hay que añadir la *orientación* de un cierto plano que pase por el punto fijo y la posición del móvil, su *dirección* dentro de este plano y su *sentido* dentro de esta dirección. Para llegar á esta completa determinación se fija un plano, cuya orientación se supone conocida, y en él una recta que represente la dirección de referencia, pasando uno y otra por el punto fijo; y hecho esto las diferentes direcciones se estiman haciendo pasar por ellas y por la recta de referencia planos cuya orientación se determina respecto de la del plano fijo. y como en estos planos se encuentra la recta de referencia, no tendremos más que repetir en ellos lo que dijimos para los sistemas de dos unidades. Podría hacerse la determinación de que tratamos por medio de tres ejes y así si designamos por α, β, γ las respectivas unidades sobre estos ejes y por a, b, c, tres números absolutos, las expresiones que determinan las cantidades de que hablamos son de la forma:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma,$$

que simboliza los números complejos de tres unidades que forman parte esencial de la Geometría analítica en el espacio. (*)

Este sistema es una generalización del anterior y nos presenta la cantidad expresada en valor y dirección. Elevándose en este orden de ideas se llega á los *números complejos con más de tres unidades* entre los cuales merece especial mención uno de magnitudes con cuatro unidades al que SIR HAMILTON dió el nombre de CUATERNIONES, caracterizados por contar entre sus unidades á la unidad abstracta y por que las otras tres unidades satisfacen á ciertas relaciones elegidas de manera á dar una idea clara y precisa de las cantidades denominadas imaginarias, que eran un símbolo sin afección concreta en el Álgebra.

El método de BELLAVITIS trata también de la cantidad dirigida y así al considerar una recta, ó vector, no determina por separado la magnitud, dirección y sentido de ésta tomando unidades distintas para cada una de estas determinaciones, sino que engloba todo ese conjunto en una sola noción; y se vale para ello del cálculo ordinario como veremos más adelante y no de algoritmos especiales que, aunque más fecundos y generales, no dejan de ser algún tanto complexos á primera vista, como su-

(*) Las teorías sobre los sistemas de magnitudes forman hoy una rama importante de la Matemática que los alemanes denominan *Allgemeine Arithmetik (Aritmética universal)*, habiendo producido obras como las de STOLZ, de mérito superior.

cede en el *Cálculo de los Cuaterniones* (*) de Hamilton, y en la *Teoría de las Cantidades Extensivas* de Grassmann.

(*) Traité elementaire des quaternions par P. G. Tait, traduit par G. Plarr, Paris, 1882.
Introduction à la méthode des quaternions par C. A. Laisant, Paris, 1881.
Elementos de Cálculo de los Cuaterniones por V. Balbín, Buenos Aires, 1887.

Ecuaciones geométricas

Ya dijimos que en las Equipolencias las magnitudes son cantidades dirigidas, es decir, son magnitudes representadas por notaciones que implican á la vez magnitud y dirección.

Así el segmento de origen A y extremo B es AB, y en esta notación AB están implicados al mismo tiempo la magnitud del segmento, su dirección y su sentido. Los segmentos que son rectas iguales, paralelas y dirigidas en el mismo sentido, se dice que son *geométricamente iguales*, *ó equipolentes*, y de aquí la denominación de *Equipolencias* que se da á esta Teoría. La expresión de la igualdad en magnitud, dirección y sentido de dos segmentos, por ejemplo, constituye lo que se llama *equipolencia*, *ó igualdad geométrica*. Por esto suele decirse también que la Teoría de las Equipolencias es la Teoría de las ecuaciones geométricas, y ambas denominaciones se hallan como sinónimas en los autores que hemos consultado.

Para designar la longitud de una recta AB independientemente de su dirección, se emplea la notación *gr.* AB, que se lee módulo AB. La equipolencia, es decir, la igualdad en magnitud, dirección y sentido se representa por el signo $=$, que recibe una significación más lata que la que le da el Álgebra ordinaria (*) sin oponerse á las concepciones de ésta.

Así $AB=CD$ es una equipolencia que indica que las dos rectas AB y CD (fig. 2) son iguales, paralelas y de mismo sentido; y la expresión $gr.\ AB = gr.\ MN$ da simplemente una igualdad algebraica entre las longitudes de dichas rectas independientemente de su dirección.

Por lo expuesto se ve que el signo *gr.* corresponde al signo T (tensor) del Cálculo de los Cuaterniones.

Si dos rectas AB y CD son paralelas, es decir, si tienen la misma dirección, cualesquiera que sean sus longitudes, se indica así $AB \parallel CD$, y se denomina *relación de paralelismo, ó de dirección*.—Si las dos rectas AB y CD tienen la misma dirección y sentido, y si la relación de sus longitudes $\dfrac{gr.\ AB}{gr.\ CD}=a$, se dice que AB es equipolente al producto a, CD, y se escri- $AB=a.\ CD$. Esto es precisamente idéntico á lo que se establece en el Cálculo de los Cuaterniones, pues si a es el tensor y β el vector unitario, el vector paralelo á éste es el múltiplo de β, es decir, $a\beta$.

En virtud de lo que acabamos de exponer, es evi-

(*) BELLAVITIS usó del signo $\underline{\Omega}$, en lugar del $=$, para expresaruna equipolencia.

dente que para expresar que un punto M está situado sobre la recta AB, se escribirá $AM=x.\ AB$, dando á x todos los valores positivos ó negativos, pues AM tiene la misma dirección que AB. Haciendo $x=\frac{1}{2}$, $=-1$ se tendrá respectivamente el punto medio de AB y el segmento opuesto BA.

Por lo general, en esta Teoría, se escriben las cantidades algebraicas en letra bastardilla común, y las rectas ó cantidades dirigidas en letra griega. Así la equipolencia antes escrita, se denotará por $\alpha = x\,\beta$, siendo $\alpha = AB$, $CD=\beta$. Estas convenciones están lejos de ser absolutas para todos los autores; por ejemplo, ni Laisant, ni Hoüel las siguen en sus obras citadas.

Consideremos ahora varias rectas AB, CD y EF (fig. 3) colocadas de una manera cualquiera en un plano. Construyamos la equipolencia $BH=CD$, es decir, tracemos la recta BH igual á CD, paralela y de mismo sentido que ella; y en seguida construyamos la equipolencia $HK=EF$. En lugar de las rectas AB, CD y EF tendremos sus equivalentes AB, BH y HK. Puesto esto; por definición dirémos que la *suma geométrica* de las rectas dadas es la recta AK que une el origen de la primera con el extremo de la última. En símbolos, se tendría:

$$AB+CD+EF=AB+BH+HK=AK$$

Es de advertir aquí que esta igualdad no significa que la longitud AK es igual á la suma de las longitudes de AB, BH y HK, pues en ningún caso *gr.* AK podrá ser mayor que la suma de las longitudes de las rectas dadas. Simplemente podemos decir que la igualdad significa: que la translación de un móvil de A hasta K siguiendo el camino AK, da el mismo resultado que la translación del móvil siguiendo el camino quebrado $ABHK$, desde A hasta K.

Lo que acabamos de decir es idéntico á la composición de las fuerzas en la Mecánica (la suma geométrica es la resultante), y se ve además que en esta Teoría como en la Estática gráfica, ó más general, como en el Cálculo de los Cuaterniones, *la suma consiste en un movimiento de translación.*

La suma es conmutativa. En toda equipolencia se puede agregar ó quitar una misma expresión geométrica sin alterarla, multiplicar ó dividir los dos miembros por un número cualquiera positivo ó negativo, y hacer pasar un término de un miembro al otro. En una palabra, se puede efectuar sobre las equipolencias todas las operaciones que se efectúan sobre las ecuaciones algebraicas, siempre que estas operaciones se refieran á sumas, restas y multiplicaciones por números reales. He aquí la razón de reemplazar el signo de BELLAVITIS $\underline{\underline{\Omega}}$ por el usado ordinariamente (=).

Las consideraciones precedentes muestran claramente que para tres puntos A, B y C se tiene siempre la equipolencia:

$$AB+BC=AC,$$

que da estas otras

$$BC=AC-AB,$$

$$AB+BC+CA=0, \text{ etc.}$$

Además, cualesquiera que sean los cuatro puntos A, B, C, D, se tiene:

$$AB-CD=DB-CA;$$

porque

$$AO-BO-CO+DO=DO-BO-CO+AO,$$

tomando un origen cualquiera O.

Una cuestión importante se nos presenta ahora y es hallar la condición para que tres puntos estén en línea recta, es decir, que sean *colineales*. Si M está sobre la recta AB, se tendrá $AM=x.AB$, siendo x un número real, según lo que dijimos antes. Esta equipolencia puede transformarse en ésta:

$$OM-OA=x\ (OB-OA),$$

que da

$$OM=(1-x)\ OA-x.\ OB\ldots\ldots\ldots (1)$$

Puesto que x es un número real cualquiera, tomemos en lugar de $1-x$, x, las dos cantidades u, v, que satisfacen á la condición $u+v=1$. Se tiene entonces

$$\left.\begin{matrix} OM=u\ OA+v\ OB \\ u+v=1, \end{matrix}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Se puede satisfacer á esta última condición haciendo

$$u = \frac{z}{z+t}, \quad v = \frac{t}{z+t},$$

y entonces

$$(z+t)\; OM = z.\, OA + t.\, OB \ldots\ldots (3)$$

Por último, por una simple transformación se deduce:

$$z.\; OA + t.\, OB - (z+t)\; OM = 0,$$

y como z, t, $-(z+t)$ son tres coeficientes cuya suma es nula, se puede escribir

$$\left.\begin{array}{l} p.\, OA + q.\, OB + r\, OM = 0 \\ p + q + r \qquad\quad = 0. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Una cualquiera de las equipolencias (1), (2), (3), y (4) resuelve la cuestión, y es de observarse que la (4) es idéntica á una relación del Cálculo de los Cuaterniones, pues si α, β, γ son tres vectores coplanares y coiniciales cuyos tensores son a, b, c, las condiciones para que sus extremos estén en línea recta (ó colineales) son:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ a + b + c = 0. \end{array}\right\}$$

Magnitudes angulares

Consideremos un punto fijo O sobre una recta OX (fig. 4) que supondremos horizontal, por ejemplo, y que haya sido descrita por un móvil en el sentido de O á X. Sea AB una recta cualquiera coplanar con OX, y tracemos por O la paralela OC á AB. La *inclinación* de AB, que se designa por la notación *inc.* AB, es dada por el ángulo COX. La OX es el *eje de las inclinaciones.*

Respecto al signo de las inclinaciones, se considera la *inc.* XOC como contada á partir de la dirección OX, y si al hacer el movimiento de rotación que debe llevar OX á ocupar la posición OC, se sigue *un movimiento contrario al de las agujas de un reloj, la inclinación es positiva, y negativa en el caso contrario.* Esta es la convención adoptada en los modernos tratados de Mecánica y equivale á decir que una inclinación (ó, lo que es lo mismo, una rotación) es positiva cuando se efectúa en el mismo sentido que el movimiento de la Tierra al rededor del Sol para un observador colocado en el hemisferio septentrional. HAMILTON, TAIT, LAISANT y otros siguen en sus obras esta convención.

El ángulo de las rectas AB y AE se mide por la diferencia de las inclinaciones de estas rectas, es decir,

$$ang.\ BAE = inc.\ AE - inc.\ AB.$$

En virtud de la convención de los signos $ang.\ XOB = -ang.\ BOX$, (fig. 5) y entonces

$$ang.\ XOB = ang.\ XOA + ang.\ AOB,$$

ó bien

$$ang.\ XOA + ang.\ AOB + ang.\ BOX = 0,$$

y estas expresiones muestran su analogía con las relaciones entre segmentos de la *Geometría Superior* (1) DE CHASLES, ó sea de la Geometría tan propiamente llamada *segmentaria*, que ha penetrado en el dominio del Cálculo gráfico y de la Estática gráfica, como puede verse en las obras de FAVARO y en la recientemente publicada por el profesor SAVIOTTI (2), aunque las notaciones sean diferentes.

(1) Traité de Geometrie Supérieure, Paris 1852.

(2) LA STATICA GRAFICA, *Lezioni dell'ingegnere* CARLO SAVIOTTI. Milano 1888. Esta es una obra de mérito superior.

Módulos é inclinaciones

Los principios fundamentales relativos á los módulos é inclinaciones son tres, á saber;

PRIMERO.—*Si los dos términos de una equipolencia binomia tienen inclinaciones diferentes, cada uno de ellos es nulo separadamente.*

Efectivamente; toda equipolencia binomia es de la forma

$$l.\ AB = m.\ CD,$$

y, por definición de la equipolencia, se tiene estas dos relaciones

$$l.\ gr.\ AB = m.\ gr.\ CD,$$
$$inc.\ AB = inc.\ CD.$$

Pero, por el supuesto de la proposición, esta última relación no se verifica; luego se deberá tener $l=0$, $m=0$, lo que da á la equipolencia binomia la forma idéntica $0=0$.

De aquí se infiere este corolario importante: *que toda recta de longitud nula tiene una inclinación indeterminada.* (*)

(*) En la exposición de estos principios de BELLAVITIS seguimos á LAISANT, en su obra citada, pues este autor es sumamente claro y didáctico, por lo que cuadra á nuestro propósito ya manifestado.

SEGUNDO.—*Si dos términos de una equipolencia trinómia tienen inclinaciones iguales, el tercer término considerado solo en uno de los miembros de la equipolencia tendrá la misma inclinación, y su longitud será igual á la suma de las longitudes de los dos primeros términos.*

Efectivamente; sea la equipolencia.

$$AB + BC = AC.$$

Si AB y BC tienen la misma inclinación, los tres puntos A, B y C se suceden sobre la recta AC y de aquí resulta la evidencia del principio enunciado.

TERCERO.—*Si en una equipolencia trinomia de la forma* $\alpha+\beta+\gamma=0$, *se tiene* inc. α + inc. γ = 2 inc. β, *en el supuesto que los tres términos de la equipolencia tengan inclinaciones desiguales, se verificará* gr. α = gr. γ.

Efectivamente; identifiquemos la equipolencia dada con ésta

$$BA + AC + CB = 0,$$

haciendo

$$\alpha = BA, \beta = AC, \gamma = CB.$$

Se tendrá entonces

$$inc.\ BA + inc.\ CB = 2\ inc.\ AC,$$

ó

$$inc.\ BA - inc.\ AC = inc.\ AC - inc.\ CB.$$

Sumando dos ángulos rectos á ambos miembros, se tiene

$$inc.\ AB - inc.\ AC = inc.\ CA - inc.\ CB$$

ó bien

$$ang.\ BAC = ang.\ BCA$$

Por lo que se ve que los dos ángulos A y C del triángulo BAC (fig. 6) son iguales; es pues, isósceles, y luego

$$gr\ BA = gr.\ CB$$

ó

$$gr.\ \alpha = gr.\ \gamma.$$

La proposición recíproca es cierta, como puede verse fácilmente, siguiendo los mismos razonamientos, y así podemos decir: *que si en la equipolencia trinomia* $\alpha+\beta+\gamma=0$, *se tiene* gr. α = gr. γ, *se verificará la relación* inc. α + inc. γ + 2 inc. β.

Los principios que acabamos de establecer tienen íntimas analogías con algunos del Cálculo de los Cuaterniones, como puede verse consultando la obra de los profesores KELLAND y TAIT (*), y para esto, quizás mejor, la obra de Cuaterniones que publicó LAISANT (**) para dar á conocer en Francia las ideas y los métodos de SIR HAMILTON.

(*) *Introduction to Quaternions*, London, 1882.
(**) Introduction à la methode des Quaternions, Paris, 1881.

Multiplicación y división de vectores

Es en la multiplicación y división de las cantidades dirigidas que la Teoría de las Equipolencias presenta verdadera diferencia con la noción que de dichas operaciones se tiene en el cálculo ordinario de las magnitudes. En las Equipolencias la multiplicación se define diciendo: que *el producto de dos rectas* OA *y* OB *es una recta* OC *cuya* LONGITUD *es igual al* PRODUCTO *de las longitudes de* OA *y* OB, *y cuya* INCLINACIÓN *es igual á la suma de las* INCLINACIONES *de* OA *y* OB. Esta definición concuerda con un teorema fundamental de los números complexos del Álgebra, pues se sabe que en estos el módulo del producto es igual al producto de los módulos de los factores y que el argumento ó anomalía del producto es la suma de las anomalías de los factores. Pero las concepciones de BELLAVITIS no se atienen á este estrecho círculo, como veremos más adelante.

De la definición anterior se deduce que la equipolencia $OA \, . \, OB = OC$ origina estas dos igualdades:

$$gr. \, OA \times gr. \, OB = gr. \, OC,$$

$$inc. \, OA + inc. \, OB = inc. \, OC.$$

Aquí se ve que el producto de las rectas depende del origen de las inclinaciones que se haya elegido. Si se toma por unidad la recta OU de longitud igual á la unidad y dirigida según el origen de las inclinaciones, por la definición de la multiplicación admitida en la Aritmética, se debe formar el producto OC por medio del multiplicando OA de la misma manera que el multiplicador OB está formado por medio de la unidad OU. Se ve, pues, que debemos tomar $\frac{gr.\,OB}{gr.\,OU} = gr.\,OB$, en seguida hacer girar la recta obtenida así del ángulo $\beta = \text{inc}\ OB$ en el sentido conveniente. Entonces, por analogía, para obtener el producto $OA.\ OB$, debemos modificar la longitud de OA con relación á $gr.\,OB$; lo que daría una recta de longitud $gr.\,OA \times gr.\,OB$ dirigida según OA, y luego hacer girar esta recta, del ángulo β. La inclinación, después de la rotación, es $\alpha + \beta$: se cae precisamente sobre la recta OC.

En el caso de varias rectas $OA, OB, OC, \ldots\ldots OK$, la longitud del producto será

$$gr.\,OA. \times gr.\,OB \times gr.\,OC \times \ldots\ldots\ldots \times gr.\,OK$$

y la inclinación correspondiente

$$inc.\,OA + inc.\,OB + inc.\,OC + \ldots\ldots\ldots + inc.\,OK;$$

lo que dice: *que la inclinación del producto es igual á la suma de las inclinaciones de los factores*. No debe dejarse de notar aquí la analogía que presentan las inclinaciones con los logaritmos.

En virtud de las nociones precedentes se ve que el producto de dos rectas es independiente del orden de los factores. La multiplicación es, pues, una operación conmutativa. No se verifica esto en el Cálculo de los Cuaterniones de HAMILTON, ni tampoco en la Teoría de las Cantidades Extensivas de GRASSMANN. En esto estriba la diferencia esencial que hay entre las Equipolencias y los dos sistemas nombrados.

RAZÓN GEOMÉTRICA

Tomando por definición del cociente $\frac{OA}{OB}=OC$ la propiedad $OB.\ OC=OA$, como en el Álgebra ordinaria, se deduce inmediatamente que la longitud del cociente es igual al cociente que se obtiene dividiendo la longitud del dividendo por la longitud del divisor, y que la inclinación del cociente es igual al resto que se obtiene quitando de la inclinación del dividendo la inclinación del divisor. La relación $\frac{OA}{OB}$ se denomina *razón geométrica*, y en ella está incluída la doble noción de longitud y de inclinación.

Sea ahora la equipolencia

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OC}{OD}.$$

De ella se saca

$$\frac{gr.\ OA}{gr.\ OB}=\frac{gr.\ OC}{gr.\ OD},$$

y además

$$ang.\ BOA=ang.\ DOC,$$

lo que muestra que los triángulos OAB y OCD (fig. 7) son semejantes, ó más bien, directamente semejantes, pues si la relación de semejanza es 1, son superponibles. Recíprocamente, si dos triángulos ABC y $A'B'C'$ son directamente semejantes, la semejanza se expresará por una cualquiera de las equipolencias $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$.

Lo que acabamos de decir es de suma importancia, como se puede ver en las obras de Bellavitis, por las aplicaciones á que se presta. Es uno de los principios fundamentales de la algorítmia de las Equipolencias.

CÁLCULO DE LAS RECTAS

De la exposición que venimos haciendo se deduce evidentemente el siguiente teorema, que es de gran transcendencia: *Se puede efectuar en las equipolencias relativas á las figuras planas todas las operaciones y transformaciones que se efectúan en las ecuaciones algebraicas.*

Mas, en las equipolencias, no aparece la noción de lo imaginario, como en el Álgebra ordinaria (*). Para aclarar esto, sea extraer la raíz n *ésima* de una recta, es decir, $OX = \sqrt[n]{OA}$.

(*) Laisant, en su obra citada, comentando á Bellavitis, dice al respecto:—«Hay, sin embargo, á favor del método de las Equipolencias una diferencia no verdadera sino aparente, y es que en ninguna parte de ellas se introduce la noción de lo imaginario.»

Por definición, se tiene:

$$OA=(OX)^{n}=OX.\,OX.\,\ldots\ldots OX,$$

es decir

$$gr.\ OA=(gr.\ OX)^{n},\ \text{ó}\ gr.\ OX=\sqrt[n]{gr.\ OA}.$$

En cuanto á las inclinaciones, sea *inc.* $OA=\alpha$, ó más general, $\alpha+k.\,360^{\circ}$; entonces

$$inc.\ OX=\frac{inc.\ OA}{n}=\frac{\alpha}{n}+\frac{k}{n}360^{\circ}.$$

Ahora bien; para tener todas las direcciones posibles de OX, es preciso dar á k una serie de n valores consecutivos enteros, por ejemplo, $0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$. Se tendrá así n direcciones inclinadas sucesivamente unas sobre otras del ángulo $\dfrac{360^{\circ}}{n}$, y como los n valores de OX tienen la misma longitud, todas las direcciones dichas formarán un haz de rayos, que serán las raíces de OA, y, como se ve, diferentes unas de otras, pero todas reales.

Hay una ley de reciprocidad entre las magnitudes del Álgebra ordinaria y sus correspondientes de esta Teoría. Para aclarar esto sea la identidad

$$\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}=\frac{b+c}{2}+\frac{d+a}{2}.$$

En el Álgebra, esta relación dice: «que si A, B, C, D son cuatro puntos colineales, y M, N, P, Q los puntos medios de los segmentos AB, BC, CD, DA; el medio del segmento MP es el mismo que el del segmento NQ.»

Puesto esto, reemplazando a, b, c, d por las rectas cualesquiera OA, OB, OC, OD tendremos la misma identidad, que se enunciará así: «Si M, N, P, Q son los puntos medios de los lados sucesivos de un cuadrilátero $ABCD$, las rectas MP, NQ se cortan mútuamente en partes iguales.» Este ejemplo que tomamos de LAISANT y muchos otros que se hallan esparcidos en las obras de BELLAVITIS, permiten formular el siguiente teorema general:

A toda identidad algebraica corresponde un teorema de Geometría plana, que se obtiene cambiando la igualdad en equipolencia.

Rotaciones

Llegamos á un punto importantísimo de esta *Teoría*, y es el que se refiere al signo de perpendicularidad. BELLAVITIS representó la magnitud de la unidad de longitud y de inclinación $+90^\circ$ por el signo $\surd$ (*ramun*); nosotros, siguiendo á LAISANT y á HOÜEL, lo representaremos por i, como en los números complejos del Álgebra ordinaria, pues ambos signos, lo mismo que los $\underline{\underline{\Omega}}$ é $=$, están sometidos á las mismas reglas de cálculo.

Puesto esto, sea OX (fig. 8) el origen de las inclinaciones, YY' perpendicular á OX, y OA, OB, OC y OD cuatro longitudes iguales. Se tiene pues,

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OC}=\frac{OA}{OD}=i$$

ó bién

$$\frac{OB.\,OC}{OA.\,OB}=i^2.$$

Pero $\dfrac{OB.\,OC}{OA.\,OB}=\dfrac{OC}{OA}=-1$, puesto que $OC=-OA$.

Luego $i^2=-1.$

Análogamente $i^3=-i$, $i^4=1$, etc.

Por consiguiente, *el símbolo i en el Cálculo de las Equipolencias está sometido á las mismas reglas que el símbolo $\sqrt{-1}$ en el Algebra ordinaria.*

Este teorema permite representar la rotación de una recta OM ó vector, porque multiplicando á OM por i tendremos la recta OM' igual á la primera, pero formando con ella un ángulo $MOM'=+90°$. En general, $OM \times i^n$ representa lo que se vuelve OM después de una rotación de n ángulos rectos en el sentido positivo; lo mismo, $OM \times (-i)^n$ representa lo que es OM después de una rotación de n ángulos rectos en el sentido negativo. Es claro que el símbolo i^p representará una recta de longitud igual á la unidad y cuya inclinación α es dada por el número p referido al ángulo recto como unidad. De lo que precede, fácil es ver que $(-i)^p = \left(\frac{1}{i}\right)^p = i^{-p}$, $i^p = i^{p+4} = i^{p+4k}$.

Consideremos ahora una recta OM (fig. 9) y sea MP perpendicular al origen de las inclinaciones. Se tiene

$$OM = OP + PM$$

Llamando x, y á las longitudes (tensores) de OP y PM, se tendrá para los vectores OP y PM,

$$OP = x, \quad PM = y\,i.$$

Por consiguiente, la recta OM puede expresarse por la fórmula

$$OM = x + yi,$$

que muestra la identidad entre las cantidades geométricas ó dirigidas y las imaginarias del Álgebra.

Lo que acabamos de exponer es lo mismo que se presenta en el Cálculo de Sir HAMILTON al decir que *un cuaternión es la suma de una escalar y una vectorial.* (*)

Puesto que la recta de longitud 1 y de inclinación α (medida por p) se representa por la expresión i^p, es evidente que la recta cualquiera OM, cuya longitud es r, podrá representarse por $OM = r.i^p$ Ahora, si en lugar de referir los arcos al cuadrante los referimos al arco de longitud igual al radio (es decir, tomamos el método circular ó *cercle trigonométrique* de los franceses, en la Trigonometría), es claro que las dos medidas p y α del mismo arco ó ángulo céntrico estarán en la relación $\frac{p}{\alpha} = \frac{2}{\pi}$. Luego $i^p = i^{\frac{2}{\pi} \cdot \alpha}$,

y haciendo $i^{\frac{2}{\pi}} = \varepsilon$, se tendrá

$$OM = r\,\varepsilon^{\alpha},$$

que es una relación importantísima que permite introducir en los cálculos los vectores bajo forma algebraica.

Haciendo $x = r\cos\alpha$, $y = r \operatorname{sen}\alpha$, se tiene

(*) Véase la obra antes citada del profesor P. G. Tait traducida por G. Plarr. Tomo 1°.

$$OM = r\,[\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha]$$

y, en virtud de la última relación,

$$\overset{\alpha}{\varepsilon} = \cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha,$$

que muestra que ε en esta *Teoría* no es otra cosa que la expresión e^i, que se encuentra en el Álgebra al establecer las conocidas fórmulas de EULERO referentes á las cantidades imaginarias.

Merece aquí observarse la íntima analogía que hay entre las fórmulas deducidas y las que da el Cálculo de los Cuaterniones. No es de extrañar esto, porque, como se desprende de lo que estamos tratando, las Equipolencias no son más que el Cálculo de HAMILTON limitado al plano, pero con principios distintos, pues en éste la multiplicación no es conmutativa y en aquellas sí: ésta es la diferencia esencial, como ya lo hemos indicado.

EQUIPOLENCIAS CONJUGADAS

BELLAVITIS da la denominación de *conjugada* de una recta ó de una figura, á la recta ó á la figura que se obtiene haciendo dar á la primera una semirevolución al rededor de una recta paralela á la que se ha tomado por origen de las inclinaciones. Así si OH es el origen de las inclinaciones, AH' paralela á OH y si se construye el ángulo $H'AB'$ igual á $H'AB$, la recta AB', lo mismo que otra que le sea equipolente, se llama *conjugada* de AB, y se escribe esto así:

$$AB' = conj.\ AB \quad \text{ó} \quad AB = conj.\ AB'$$

Por lo expuesto, es evidente que

$$gr.\ (conj.\ AB) = gr.\ AB.$$
$$inc.\ (conj.\ AB) = -inc.\ AB.$$

Son también evidentes, las siguientes proposiciones, cuyo enunciado basta para comprenderlas: (*)

1ª *La conjugada de la suma de dos rectas es equipolente á la suma de sus conjugadas.*

2ª *La conjugada del producto (ó del cociente) de dos rectas es equipolente al producto (ó al cociente) de sus conjugadas.*

En general, Bellavitis establece la proposición siguiente:

La conjugada de una función de varias rectas es equipolente á la misma función de las conjugadas de estas rectas.

Considerando ahora la recta $OM = x + y\,i$, se tendrá $conj.\ OM = x - y\,i$. Si $OM = ri^{p}$, se tiene $conj.\ OM = r\,i^{-p}$. Si $OM = r\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$, se tiene $conj.\ OM = r\,(\cos\alpha - i \operatorname{sen}\alpha)$.

En virtud de esto y del teorema precedente se puede decir que:

Para obtener la conjugada de una expresión cualquiera, basta cambiar los signos de todos los exponentes de i ó de ε *que entran en la expresión dada.*

Consideremos ahora una equipolencia y reemplacemos las rectas que figuran en ella por sus conju-

(*) No se ha llegado todavía á una concordancia absoluta en las notaciones. La conjugada la designa Laisant por *cj*, y Hoüel por *conj*.

gadas respectivas. Es claro que entonces todas las construcciones indicadas por la equipolencia dada deberán efectuarse sobre una figura simétrica con relación al origen de las inclinaciones, y, por lo tanto, se tendrá una equipolencia correspondiente, pues la segunda figura, que es igual á la primera, tendrá exactamente las mismas propiedades. Luego, *á toda equipolencia corresponde una equipolencia conjugada.*

Sean dos formas conjugadas, á saber, $x + y\,i$, $x - y\,i$. Multiplicándolas se tiene

$x^2 - y^2\,i^2$ y como $i^2 = -1$, resulta

$x^2 + y^2$, que muestra: que *el producto de dos expresiones conjugadas tiene una inclinación nula y un módulo (tensor) igual á la suma de los cuadrados de los módulos de las dos expresiones*, es decir, en símbolos, $AB.\ conj.\ AB = gr.\ [AB]^2$.

Tomando dos expresiones conjugadas de la forma $r\,\varepsilon^{\alpha}$, se demostraría por una simple división, que *el cociente de una expresión por su conjugada tiene por módulo la unidad y por inclinación el duplo de la inclinación del dividendo;* ó en símbolos,

$$gr.\left[\frac{AB}{conj.\ AB}\right] = 1,\quad inc.\left[\frac{AB}{conj.\ AB}\right] = 2\,inc.\ AB.$$

Ahora bien, valiéndonos de la figura 11, se ve que la suma geométrica de una recta y de su conjugada tiene una inclinación nula, y es igual al duplo de la proyección de la recta sobre el eje de inclinación nula, es decir,

$$AB + conj.\ AB = 2\,AG.$$

Lo mismo se hallaría que

$$AB - conj.\ AB = B'B = 2\ GB,$$

cuya inclinación es de 90°.

Estos sencillos teoremas son de uso frecuente en esta Teoría, como lo prueban las obras de BELLAVITIS y los trabajos citados de LAISANT, HOÜEL y otros.

Para terminar esta parte de nuestro trabajo consideremos la relación

$$\frac{OA}{OB} = \frac{conj.\ OA'}{conj.\ OB'},$$

y propongámonos interpretarla geométricamente.

A este propósito hagamos,

$$gr.\ OA = a,\ gr.\ OB = b,\ gr.\ OA' = a',\ gr.\ OB' = b',$$
$$inc.\ OA = \alpha,\ inc.\ OB = \beta,\ inc.\ OA' = \alpha',\ inc.\ OB' = \beta'.$$

Entonces la equipolencia puede escribirse así:

$$\frac{a\,\varepsilon^{\alpha}}{b\,\varepsilon^{\beta}} = \frac{a'\varepsilon^{-\alpha'}}{b'\varepsilon^{-\beta'}} \quad \text{ó} \quad \frac{a}{b}\,\varepsilon^{\alpha-\beta} = \frac{a'}{b'}\,\varepsilon^{\beta'-\alpha'}$$

De aquí resulta:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'},\quad \alpha - \beta = \beta' - \alpha'.$$

Por otra parte

$$\alpha - \beta = ang.\ BOA,\quad \beta' - \alpha' = ang.\ B'OA'.$$

Puesto esto, si comparamos los triángulos OAB y $A'OB'$, (fig. 12) vemos que tienen proporcionales sus lados homólogos OA, OA' y OB, OB' en cuanto á su valor lineal, y que los ángulos en O son iguales y de signos contrarios. Estos triángulos son, pues, semejantes, y, si la razón de semejenza es 1, son superponibles poniendo en uno de ellos lo de abajo arriba y viceversa. Estos triángulos se denominan *simétricamente semejantes.* La recíproca de la proposición indicada es cierta y tiene aplicaciones muy útiles y frecuentes.

Aplicaciones

Los principios que quedan expuestos permiten aplicar esta Teoría á diversas ramas de la Matemática. No siéndonos posible hacer una disquisición completa nos limitaremos á lo más importante, teniendo siempre en vista la variedad de las aplicaciones, para que sea fácil formarse una idea clara y precisa de las doctrinas del ilustre geómetra italiano.

TEOREMA.—*Las tres medianas de un triángulo concurren en un punto.*

Sea ABC el triángulo; (fig. 13) AA', BB', CC' las tres medianas que corresponden respectivamente á los vértices A, B, C. Haciendo $AB=\beta$, $AC=\gamma$, si G es el punto de intersección de las medianas AA' y BB' se tendrá

$$AG=x.\ AA'=x\frac{\beta+\gamma}{2},$$

$$BG=y\ BB'=y\left[\frac{\gamma}{2}-\beta\right].$$

Luego,

$$x\frac{\beta+\gamma}{2}=\beta+y\left[\frac{\gamma}{2}-\beta\right],$$

que da

$$\frac{x}{2}=1-y,\quad \frac{x}{2}=\frac{y}{2},\quad x=y=\frac{2}{3}.$$

La simetría del cálculo muestra que si se hubiese buscado el punto de intersección de AA' y CC', se tendría también $x=\frac{2}{3}$. Luego no hay más que un solo punto G. { LAISANT. }

A este punto G, que es el centro de gravedad ó baricentro del triángulo, se le da el nombre de *centroide* en la nueva Geometría del triángulo, como puede verse en la Geometría analítica del Dr. CASEY y otros autores modernos.

PROBLEMA. *Sean* A *y* B *dos puntos separados por un rio que se quiere atravesar por un puente perpendicular á las riberas; se pide la posición* XY *del puente, de manera que la suma algebraica de las longitudes* AX+XY+YB *sea mínima.*

Escribamos la equipolencia

$$AX+XY+YB=AB,$$

que conduce á ésta:

$$AX+YB=AB-XY.$$

Como la anchura XY del rio es conocida en magnitud y dirección, podemos pues construir la suma $AB-XY$, ó su equivalente $AB+YX$ que es AM en la figura 14, trazando $BM=YX$. Entonces, en la equipolencia

$$AX+YB=AM$$

se ve que la suma aritmética de las longitudes

$AX + YB$ será mínima cuando AX caiga sobre AM y por consiguiente, YB sea paralela á AM.

TEOREMA.—*Si por un punto cualquiera E en el interior de un paralelogramo* ABCD *se traza las paralelas* MN *y* TL *á los lados adyacentes, las tres diagonales* AC, TN, LM *concurren en un punto.*

Hagamos

$$AB = \beta, \quad AT = m\beta,$$
$$AD = \delta, \quad AM = n\delta.$$

Se tiene, por la figura 15,

$$AO = AT + TO,$$

ó bien

$$x\,AC = AT + y\,TN,$$

es decir,

$$x\,[\,\beta + \delta\,] = m\beta + y\,[\,\beta + n\,\delta - m\beta\,].$$

Por consiguiente

$$x = m + y\,[1 - m], \quad x = ny, \quad x = \frac{m\,n}{m + n - 1}.$$

La simetría de este valor con relación á m y n prueba que se hallaría la misma expresión buscando el punto de intersección de AC y LM: esto demuestra el teorema enunciado. (*)

PROBLEMA.—*Construir un triángulo* ABC *dadas las longitudes de dos lados* AB, AC *y la de la bisectriz* AE *del ángulo* A.

(*) No dejará de ser interesante la comparación de esta demostración de LAISANT con la que dan los profesores KELLAND y TAIT en su *Introduction to Quaternions.*

Hagamos

$$gr.\,AB=c,\quad gr.\,AC=b,$$
$$gr.\,AE=d,\quad A=2\alpha.$$

Tomemos el punto A (fig. 16) por origen de las rectas y AE por origen de las inclinaciones. Entonces

$AE=d,\quad AB=c\,\varepsilon^{\alpha},\quad AC=b\,\varepsilon^{-\alpha}.$

Establezcamos que los puntos B, E, C estén en línea recta, es decir, aplicando una relación ya dada,

$$AC=x.\,AB+(1-x)\,AE,$$

ó
$$b\,\varepsilon^{-\alpha}=c\,x\,\varepsilon^{\alpha}+(1-x)\,d.$$

La equipolencia conjugada de ésta es

$$b\,\varepsilon^{\alpha}=c\,x\,\varepsilon^{-\alpha}+(1-x)\,d.$$

De las equipolencias precedentes se saca fácilmente $x=-\dfrac{b}{c}\cdot$ Poniendo este valor en la primera se tendrá:

$$c\left(\varepsilon^{\alpha}+\varepsilon^{-\alpha}\right)=\frac{b+c}{b}\,d.$$

El primer miembro representa el duplo de la proyección de AB sobre la bisectriz, como es fácil probarlo. De aquí resulta la sencilla construcción que se halla en algunos libros de ejercicios de Geometría elemental.

Ecuación general *de las líneas*.—Si O es un punto fijo y OM es un vector que depende de una variable real por medio de la equipolencia

$$OM = \varphi(t),$$

todos los puntos M constituirán una línea.

La equipolencia escrita comprende los diversos sistemas de coordenadas. Así, si

$$OM = x + y i,$$

y x é y son funciones de t, se tendrá el sistema de coordenadas rectangulares.

Si $OM = r i^{v}$, r y v serán las coordenadas polares. Por lo demás, OM podrá ser representada de otra manera. Así, por ejemplo, la relación

$$OM = at + b i^{t}$$

expresa evidentemente la generación de una cicloide, y

$$OM = a i^{t} + b i^{2t}$$

la de una epicicloide.

Si M' es un punto de la curva infinitamente próximo de M y correspondiente al valor $t + dt$, la recta

$$MM' = OM' - OM = d\,OM$$

tendrá por dirección límite la de la tangente. Si se multiplica $d\,OM$ por un factor real p, la equipolencia

$$MT = p.\ d\,OM,$$

ó bien la

$$MT = p.\ \frac{d\,OM}{d\,t},$$

representará un punto cualquiera de la tangente, dando valores sucesivos reales á p.

La ecuación de la normal sería (*)

$$MN = i\,p.\ \frac{d\,OM}{d\,t}.$$

PROPIEDADES DEL CUADRILÁTERO.—Muchas propiedades del cuadrilátero pueden deducirse de la identidad algebraica

$$b(d-c)+d(c-b)+c(b-d)=0,$$

transformándola, en virtud de la reciprocidad ó dualidad de que hablamos en otro lugar, en la equipolencia

$$AB.\ CD+AD.\ BC+AC.\ DB=0,$$

cualquiera que sea el punto A.

Efectivamente; los tres términos deben ser respectivamente equipolentes á los tres lados de un triángulo; y si *inc.* $(AB.\ CD) =$ *inc.* $(AD.BC)$ este triángulo se reducirá á una recta, lo que da

$$gr.\ (AB.\ CD)+gr.\,(AD.\ BC)=gr.\ (A\,C.\ BD),$$

que expresa el conocido teorema de PTOLOMEO, á saber: que *en todo cuadrilátero inscripto, el producto de las diagonales es igual á la suma de los productos de los lados opuestos.*

Ahora bien; si *inc.* $(AB.\ CD)$—*inc.* $(AD.\ BC) = \pm 90°$, el triángulo en cuestión es rectángulo. Se deduce fácilmente de esto que la suma de los ángulos BAD y DCB es igual á $90°$ ó $270°$. Luego: *si la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero es*

* Merece consultarse sobre este punto la sencilla exposición de HOÜEL, en la obra citada, que venimos siguiendo.

igual á 1 ó 3 rectos, el cuadrado del producto de las diagonales es igual á la suma de los cuadrados de los productos de los lados opuestos.

No pondremos más aplicaciones, porque las dadas bastan para mostrar cómo se puede aplicar esta Teoría á las más variadas cuestiones de Geometría. En la Analítica y en la Cinemática es donde principalmente pueden ser útiles las Equipolencias, para demostrar de una manera fácil y sencilla muchas proposiciones fundamentales. Las obras de BELLAVITIS y de LAISANT, que hemos citado, abundan en estas cuestiones, lo que nos dispensa de ponerlas aquí, dado el caracter de esta disertación.

Las Equipolencias y las teorías de Moebius, Hamilton y Grassmann.

¿Cuál es la conexión que tiene ésta *Teoría* con el *Cálculo baricéntrico* de Moebius?

La respuesta es fácil:—las Equipolencias comprenden al Cálculo baricéntrico. Así el centro de gravedad G de los tres puntos A, B y C está dado por la relación

$$AG+BG+CG=0,$$

de donde, por las reglas de las Equipolencias, se deduce:

$$AG+AG-AB+AG-AC=0,$$

ó

$$3\,AG=AB+AC,$$

relación conocida.

Pero la parte de la Teoría de las Equipolencias que se refiere á los productos de rectas y que se aplica exclusivamente á las figuras trazadas en un mismo plano, pertenece por completo á Bellavitis. Así lo dice Hoüel y otros geómetras de nota.

En cuanto á las ventajas que esta teoría presenta, podemos enumerar las siguientes:

1ª La abundancia de teoremas que dimanan de un principio único, pues toda propiedad de puntos en línea recta da inmediatamente una propiedad de los puntos en un plano, pasando de las relaciones algebraicas á las Equipolencias.

2ª La facilidad con que se llega á la solución gráfica de los problemas, por un camino corto y sin muchas transformaciones.

3ª La teoría de las curvas conduce á ecuaciones de las más generales y sencillas, como que no está impedida por un sistema especial de coordenadas.

4ª Da un tipo real de las cantidades imaginarias por el que queda plenamente justificados los cálculos del Álgebra, de acuerdo con las ideas de CAUCHY. (*)

La *Teoría de las Equipolencias* ha sido equiparada al *Cálculo de los Cuaterniones* de *Sir* HAMILTON, pero, aunque reposan ambos sobre bases análogas, podemos decir que obedecen á otros principios algorítmicos, siendo el segundo una extensión más general y fecunda que la primera. Así en el Cálculo cuaterniónico la multiplicación no es conmutativa, es decir, se tiene $\alpha\beta = -\beta\alpha$; y las magnitudes se dividen en dos categorías, á saber, las *escalares*; que son las cantidades absolutas del Álgebra y las *vectoriales* que corresponden á la cantidad dirigida según tres ejes ortogonales (i, j, k,) ó llaves (*clefs*), como correspondería á la Teoría de los símbolos de CAUCHY. En

(*) HOÜEL, *Sur le Calcul des Equipollences*, Paris. 1869.

los Cuaterniones de *Sir* HAMILTON (*) se opera sobre símbolos (S, V, Φ, etc.) que, haciéndolos desaparecer por transformaciones, dan lugar á relaciones generales de las cantidades, en magnitud y dirección.

La Teoría de las Cantidades Extensivas de GRASSMANN se aproxima mucho al Cálculo de HAMILTON y no entraña comparación posible con la Teoría de las Equipolencias, en cuanto á la esencia y algoritmo. La Teoría del reputado matemático alemán ha sido poco estudiada como lo abserva el profesor HIDE, y hasta ahora no es posible asignarle el verdadero papel que representa en la Matemática. Las apreciaciones que hemos hecho sobre ella, en el curso de este trabajo, son las que nos ha sugerido la lectura de los artículos publicados en el *American Journal of Pure Mathematics*.

SEÑORES ACADÉMICOS:

SEÑORES CATEDRÁTICOS:

Doy por terminada esta disertación que someto á vuestra indulgente consideración. Más conocimientos y más juicio propio que los míos, merecían sin duda los trabajos de GIUSTO BELLAVITIS, á quien la historia de la Matemática contemporánea ha calificado de ilustre. He expuesto solamente su doctrina, y me consideraría muy satisfecho si este modesto tra-

(*) Decimos así porque el método de la cantidad dirigida de UNVERZAGT se denomina *Cuaterniones longimétricos*.

bajo despertara en otros, más competentes y preparados, el anhelo de comprender y de ensanchar tan hermosa producción del intelecto humano.

Mayo de 1889.

FÉLIX AMORÉTTI.

Pase á la Comisión examinadora, compuesta de los señores académicos Ingenieros White, Huergo y Doctor Balbín y del catedrático Doctor Ramos Mejía, para que se sirva informar sobre la admisibilidad de esta tesis; nombrándose Secretario *ad-hoc* al señor académico Ingeniero Bahía, de quien solicitará la Secretaría se sirva aceptar este cargo.

Mayo 15 de 1889.

LUIS SILVEYRA
Félix Amorétti
Secretario

A veinte de Mayo de mil ochocientos ochenta y nueve reunida, en mayoría, la Comisión examinadora para tomar en consideración la tesis para el doctorado en ciencias físico-matemáticas presentada por el Ingeniero Félix Amorétti titulada *Teoría de las Equipolencias,* resolvió informar á la Facultad que dicha tesis puede imprimirse porque llena las condiciones reglamentarias y señalar como preguntas accesorias los números pares de las presentadas á la Facultad en 6 de Mayo corriente por el profesor de Matemáticas superiores.

Valentín Balbín—Luis A. Huergo—Ild. P. Ramos Mejía—Manuel B. Bahía, Secretario ad-hoc.

Puede imprimirse.

SILVEYRA
Manuel B. Bahía.

PROPOSICIONES ACCESORIAS

1ª ACB es un segmento circular y AC una cuerda cualquiera; si se prolonga AC de una longitud CP tal que AC y CP estén en una relación dada, ¿cuál es el lugar geométrico de P?

2ª Hallar el lugar geométrico de un punto tal que la suma de los cuadrados de sus distancias á los vértices de un cuadrado dado sea constante.

3ª Si la longitud del eje de un cono oblícuo es igual al radio de la base, toda sección perpendicular al eje es una circunferencia.

4ª Demostrar que si p es un número primero, $x^p - x$ es divisible por p, y deducir de aquí el teorema de Fermat.

5ª. Un anillo uniformemente pesado se coloca al rededor de una superficie cónica: hasta qué punto bajará?

6ª Un prisma rectangular sólido reposa por una de sus caras sobre un plano inclinado, tan áspero que impide que haya resbalamiento, en el supuesto que la caída del sólido al rededor de una arista es imposible, ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio?

(Aprobadas por la Facultad en sesión del 6 de Mayo de 1889).

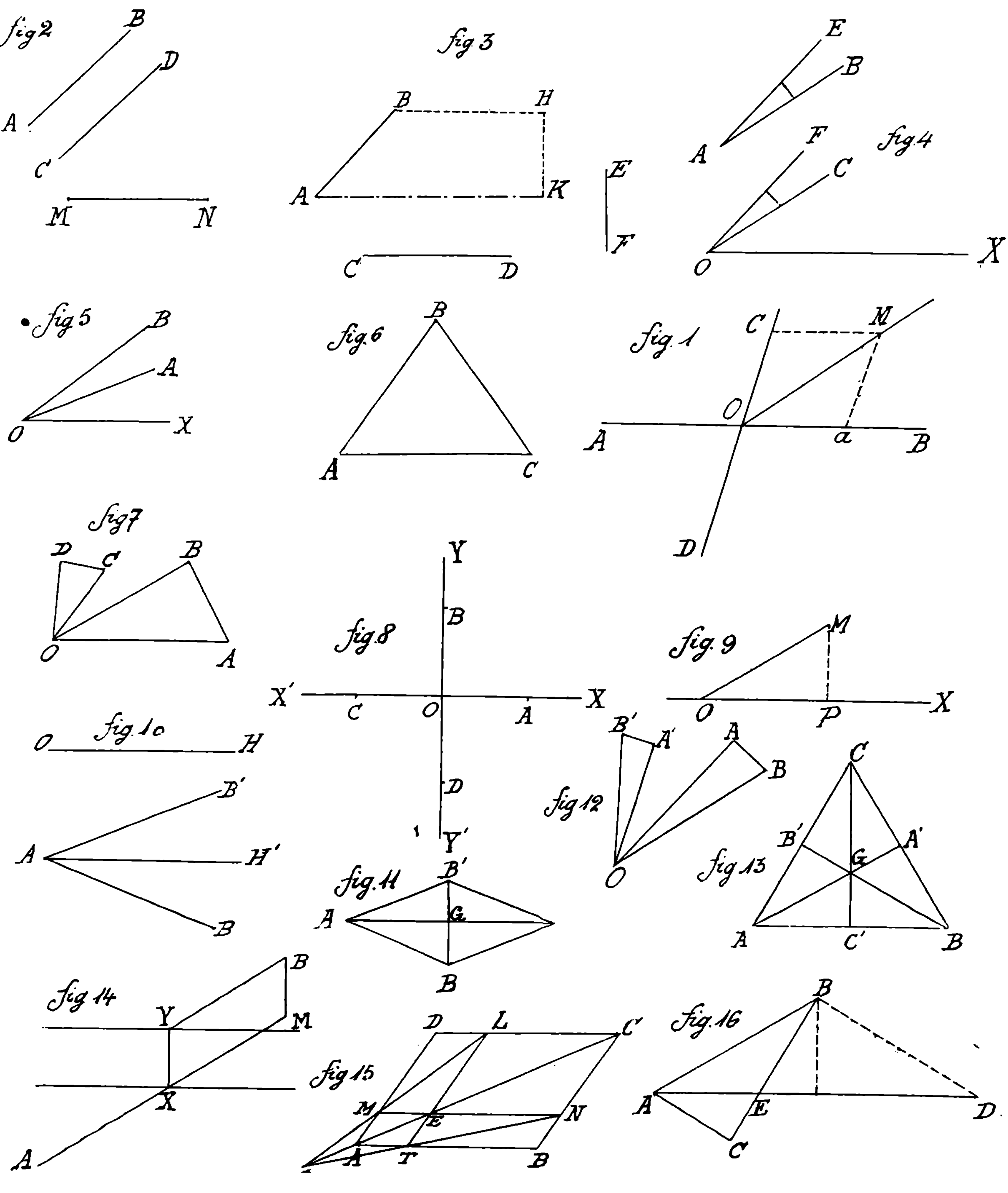
fig 2
A B C D M N
fig 3
A B H K C D
E F
A E B F C O X
fig 4
fig 5
O A B X
fig 6
A B C
fig 1
A B C D O M a
fig 7
O A B C D
fig 8
X' X Y Y' O A B C D
fig 9
O P M X
fig 10
O H A B' H' B
fig 11
A B B' G
fig 12
O A B A' B'
fig 13
A B C A' B' C' G
fig 14
A X Y B M
fig 15
A T B D L C M E N
fig 16
A B C D E