Una axiomatización del Cubrimiento universal de una variedad proyectiva compleja

Joaquín Maya Duque.

Mayo de 2010.

Dirigido por.
Andrés Villaveces Niño

Introducción

En este trabajo consideraremos el cubrimiento, o, espacio recubridor universal $\mathbb{U}$ de una variedad algebraica, con una condición sobre su grupo fundamental, definiremos un lenguaje $L(A)$ para describir propiedades de $\mathbb{U}$, también daremos una axiomatización por medio de una sentencia de $L_{\omega_1,\omega}$ y mostraremos que esta axiomatización cumple buenas propiedades, modelo-teóricamente hablando, tales como homogeneidad, estabilidad sobre modelos contables y finalmente una versión de $\aleph_1$-categoricidad, dos modelos de tamaño $\aleph_1$ que tienen un submodelo contable común son isomorfos, y el isomorfismo fija puntualmente el submodelo contable, otra forma de ver esta propiedad es que dado un modelo contable existe una única forma de subir hasta un modelo de cardinalidad $\aleph_1$.

En la primera parte de este trabajo daremos definiciones básicas de geometría algebraica necesarias para el resto del texto, en el segundo capítulo enunciaremos los teoremas principales y daremos una idea intuitiva de las demostraciones, el tercero está destinado a dar las herramientas necesarias para entender los teoremas y sus pruebas, y enunciaremos hechos de geometría algebraica por último en el cuarto capítulo haremos las pruebas de los teoremas del capítulo 2.

El trabajo esta basado en la tesis doctoral de Misha Gavrilovich y un artículo posterior a ésta,*Covers of abelian varieties as analytic Zariski structure*, los preliminares de geometría y topología están basados en los libros de *Shafarevich, Hartshorne, May, Ivorra.* Agradezco especialmente al apoyo brindado por el profesor Andrés Villaveces, también el apoyo del profesor Gabriel Padilla, ambos del departamento de matematicas de la Universidad Nacional, y también a ésta última por todas las enzeñansas brindadas.

1. Preliminares

1.1. Geometría algebraica

En esta sección se presentaran las definiciones de una variedad algebraica proyectiva, así como también del espacio recubridor universal, también definiremos la noción de grupo LERF y se darán ejemplos

Definición 1. *(Espacio proyectivo) Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado definimos el espacio proyectivo n-dimensional, $\mathbb{P}^n_K$, como el conjunto de $n+1$-tuplas no nulas partido por la siguiente relación de equivalencia:*

$$(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \sim (\lambda a_1, \dots, \lambda a_{n+1}) \ \lambda \in K, \ \lambda \neq 0$$

Cuando $n = 1$ o $n = 2$ llamamos a $\mathbb{P}^n_K$ la linea proyectiva y el plano proyectivo respectivamente, cuando no haya lugar a confusión sobre el cuerpo K simplemente notamos al espacio proyectivo como $\mathbb{P}^n$.
Dado $f \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ si f sólo tiene términos del mismo grado, m, llamamos a f polinomio homogéneo de grado m. Sea $f \in K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ de grado m entonces $f = f_0 + \cdots + f_m$ donde cada f_i es homogéneo de grado i además esta descomposición es única, por esto como K es infinito dado $P \in \mathbb{P}^n$ el hecho que $f(P) = 0$ no depende de la elección del representante de P pues

$$f(\lambda P) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i f_i(a) = 0 \text{ para todo } \lambda \neq 0$$

Lo que sólo es posible si cada f_i es nulo.

Definición 2. *Dado I ideal de $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$ definimos el conjunto de ceros de I como*

$$V(I) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0 \forall f \in I\}$$

Un conjunto $X \subset \mathbb{P}^n$ es algebraico si $X = V(I)$ para algún I ideal de $K[x_1, \dots, x_{n+1}]$

Si tenemos en cuenta que los anillos de polinomios sobre un cuerpo son noetherianos, un conjunto algebraico es el conjunto de ceros de un número finito de polinomios, o también de un número finito de polinomios homogéneos.

Proposición 1. *El conjunto vacio, y el espacio proyectivo son algebraicos, además union finita de algebraicos es algebraico e intersección arbitraria de algebraicos es algebraico.*

Prueba: El conjunto vacio se puede ver como los ceros del polinomio $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = 1$, el espacio como los ceros del polinomio nulo.
Sean X, Y algebraicos entonces $X = V(I)$ y $Y = V(J)$ veamos que $X \cup Y = V(I \cap J)$ si $P \in X \cup Y$ sea $f \in I \cap J$ es claro que $f(P) = 0$ luego $P \in V(I \cap J)$, ahora si $P \in V(I \cap J)$ y $P \notin X$ existe un $g \in I$ tal que $g(P) \neq 0$ luego $g(P)h(P) = 0$ para todo $h \in J$ y así $P \in Y$.
Sean $(I_j)_{j \in J}$ una familia de ideales veamos que $\bigcap_{j \in J} V(I_j) = V(\sum_{j \in J} I_j)$, dado P en la intersección de los $V(I_j)$ si consideramos un elemento $f \in V(\sum_{j \in J} I_j)$ éste es suma finita de elementos de algunos I_j luego $f(P) = 0$ por lo que $P \in V(\sum_{j \in J} I_j)$, la otra inclusión es obvia. $\square$

Corolario 1. *El conjunto de los complementos de los algebraicos es una topología sobre $\mathbb{P}^n$, esta topología es llamada la topología de Zariski.*

Definición 3. *Un conjunto algebraico $F \subset \mathbb{P}^n$ es irreducible si no existen F_1, F_2 tales que $F = F_1 \cup F_2$ con $F_i \neq F$. Un conjunto algebraico irreducible se llama una variedad algebraica proyectiva.*

Proposición 2. *Un conjunto algebraico V es irreducible si y sólo si su ideal asociado $I(V) = \{f \in K[x_1, \ldots, x_{n+1}] \mid f(P) = 0 \ \forall P \in V\}$ es primo.*

Ahora veamos que al espacio proyectivo complejo de dimensión n lo podemos ver como una variedad analítica.
Consideremos el el espacio proyectivo complejo de dimensión n, $\mathbb{P}^n$ definimos $A_i = \{P \in \mathbb{P}^n \mid x_i \neq 0\}$ estos conjuntos son un cubrimiento de $\mathbb{P}^n$ y cada A_i se puede identificar con $\mathbb{C}^n$ mediante la aplicación

$$p_i : A_i \to \mathbb{C}^n : (a_1, \ldots, a_{i-1}, 1, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1}) \to (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{n+1})$$

Ahora consideremos $i \neq j$ (para simplicidad en los cálculos $i = 1$ y $j = n+1$) tenemos entonces

$$U_1 = p_1[A_1 \cap A_{n+1}] = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_n \neq 0\}$$

$$U_{n+1} = p_{n+1}[A_1 \cap A_{n+1}] = \{z \in \mathbb{C}^n \mid z_1 \neq 0\}$$

la aplicación

$$\phi = p_{n+1} \circ p_1^{-1} : U_1 \to U_{n+1}$$

dada por $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (\frac{1}{z_n}, \ldots, \frac{z_{n-1}}{z_n})$ es conforme entre U_1 yU_{n+1}, luego existe una topología en $\mathbb{P}^n$ que hace a los A_i abiertos y a las p_i homeomorfismos, esta topología la llamaremos la topología compleja en $\mathbb{P}^n$. Ahora pasemos a definir el espacio recubridor universal de un espacio topológico.

Definición 4. *Un mapa $p : E \to B$ es un cubrimiento (o espacio recubridor) si es sobre y cada punto $b \in B$ tiene una vecindad abierta V tal que $p^{-1}(V)$ es una unión disyunta de abiertos de E con cada componente homeomorfa a V. Llamamos E el espacio total, B el espacio base, y $F_b = p^{-1}(b)$ una fibra del cubrimiento p.*

A continuación daremos unos ejemplos de cubrimientos.

1. Cualquier homeomorfismo entre espacios topológicos es un cubrimiento.
2. $p : \mathbb{R} \to S^1 \;\; p(t) = (cos(t), sin(t))$ es un cubrimiento.
3. $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} = \mathbb{C}^*$ es un cubrimiento.

Llamamos a E espacio recubridor universal o cubrimiento universal si E es simplemente conexo. En los ejemplos anteriores los ejemplos 2 y 3 son espacios recubridores universales, también lo es el siguiente ejemplo.
El espacio proyectivo complejo 1-dimensional $\mathbb{CP}^1$ (éste es homeomorfo a la esfera de Riemann) es el espacio recubridor universal de si mismo.
El espacio recubridor universal existe si B es conexo, localmente conexo por caminos y semi localmente simplemente conexo. Veamos el espacio recubridor universal desde otro punto de vista.

Para un espacio Hausdorff, B con las propiedades de conexidad dadas arriba y con un punto $b \in B$, el espacio recubridor universal (U, u_0) de (B, b) es el espacio de todos los caminos con punto inicial b, es decir funciones continuas $\gamma : [0, 1] \to B$, $\gamma(0) = b$ bajo homotopia fijando puntos finales, equipado con el homeomorfismo recubridor $p : U \to B$, $p(\gamma) = \gamma(1)$.
Dos caminos γ_1, γ_2 son (end-point homotopic) si existe una homotopía $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \to B$ tal que $\Gamma(0, t) = \gamma_0(t)$, $\Gamma(1, t) = \gamma_1(t)$, $\Gamma(t, 0) = \gamma(0)$, $\Gamma(t, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. El grupoide fundamental $\pi_1(B)$ es el conjunto de caminos bajo (end point homotopy), con la operación parcial de concatenación. La concatenación $\gamma_0\gamma_1$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(0)$ es un camino el cual primero recorre γ_0 y luego recorre γ_1. El grupo fundamental $\pi_1(B, b)p^{-1}(b)$ es el grupo de todos los bucles $\gamma \in \pi(B)$, $\gamma(0) = \gamma(1) = b$.
Una transformación de deck de U es un homeomorfismo $\tau : U \to U$ que conmuta con p, es decir $p \circ \tau = p$. Las transformaciones de deck de U forman un grupo $\Gamma = \pi(U)$ llamado el grupo de transformaciones de deck, éste se identifica con el grupo fundamental$\pi_1(B, b)$. El mapa recubridor p es un

homeomorfismo local, una estructura de espacio analítico en B induce una estructura de espacio analítico en U. Por último hay una correspondencia entre subgrupos normales $H \triangleleft \Gamma$ y espacios recubridores $B^H := U/H \to B$. El mapa $U \to B^H$ es un cubrimiento universal, y su grupo de deck es H, a su vez el mapa $B^H \to B$ es un cubrimiento y su grupo de deck es Γ/H

Definición 5. *Un grupo G es subgrupo separable, o extendido localmente residualmente finito (abreviado LERF por sus iniciales en inglés locally extended residually finite) si para cada subgrupo $H < G$ y todo elemento $g \notin H$ existe un subgrupo normal de índice finito K tal que $H < K$ y $g \notin K$.*

Ejemplos de grupos con esta propiedad son entre otros los grupos finitos, grupos libres, grupos finitamente generados, y los grupos fundamentales de las 3-variedades.

2. Enunciado de los teoremas

En esta sección enunciaremos los teoremas principales, y daremos una idea de cómo vamos a hacer las demostraciones de estos, además daremos unos ejemplos para los cuales éstos aplican.

Teorema 1. *Sea A una variedad algebraica proyectiva suave LERF y T la teoría asociada a su espacio recubridor.Entonces todos los modelos son modelo-homogéneos y la clase de modelos de la teoría resulta sintácticamente estable libre de cuantificadores sobre submodelos contables*

Teorema 2. *Sea A una variedad algebraica proyectiva suave LERF y T la teoría asociada a su espacio recubridor. Entonces cada par de modelos $U_1 \models T$ y $U_2 \models T$ de cardinalidad $\aleph_1$, tales que existe un submodelo contable $U_0 \models T$ son isomorfos,y, aún más el isomorfismo es la identidad en U_0.*

El teorema 2 nos dice que dado un modelo contable sólo hay una forma de subir a un modelo de cardinalidad $\aleph_1$.
La idea de la prueba de este teorema es mostrar que todo isomorfismo parcial con dominio $U_0 \cup \{a_1, \dots, a_n\}$ se puede extender a cualquier punto de U_1, con esto tomando uniones sobre modelos contables tenemos el resultado.

Para probar el teorema 1 introduciremos los conceptos de Θ definibles, Θ construibles y Θ-genéricos. La importancia de estos conceptos radica en que el concepto de homogeneidad va a resultar ser equivalente con el hecho que proyección de Θ-construible es Θ-construible, hecho que probaremos en el capítulo 3.

Algunos ejemplos de cubrimientos universales son:

- $p : \mathbb{R} \to S^1 \quad p(t) = (cos(t), sin(t))$
- $exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} = \mathbb{C}^*$
- $A(\mathbb{C}) = E$ una curva elíptica, el espacio recubridor universal es $\mathbb{C}$ y $p = \rho$ *la función de Weierstrass*

Los resultados que aquí exponemos aplican en particular para los casos 2 y 3.

3. Herramientas

Definiremos una topología para el espacio recubridor universal, la topología co-étale, esta topología es análoga a la topología de Zariski en el piso, $A(\mathbb{C})$, por ejemplo esta topología hace que el espacio topológico sea Noetheriano, toda cadena descendente se estabiliza, propiedad que tiene la topología de Zariski ya que el $\mathbb{C}$ es un campo y por tanto es noetheriano. Daremos 2 diferentes definiciones equivalentes

Definición 6. *1. $X \subset \mathbb{U}^n$ es cerrado en la topología co-étale si se tiene alguna de las siguientes dos condiciones.*
1.1 X es una componente analítica irreducible de un cerrado analítico invariante bajo la acción del grupo fundamental.
1.2 X es cerrado analítico y sus componentes irreducibles analíticas satisfacen 1.1.

Un subconjunto cerrado analítico de $\mathbb{U}^n$ es desenmadejado si toda componente conexa es irreducible.

2. $X \subset \mathbb{U}^n$ es co-étale cerrado si satisface alguna de las siguientes condiciones. 2.1 X es una componente conexa de un conjunto desenmadejado invariante bajo la acción de algún $H \triangleleft_{fin} \Gamma$.
2.2 X es un cerrado analítico y cada una de sus componentes analíticas satisfacen 2.1
2.3 X es intersección contable de conjuntos que satisfacen 2.1.

A continuación daremos algunos hechos de geometría algebraica.

Hecho 1. *(Lema de descomposición) Sea A una variedad LERF.*
Entonces todo cerrado analítico Γ-invariante tiene una descomposición como unión finita de subconjuntos desenmadejados invariantes bajo la acción de un $H \triangleleft_{fin} \Gamma$. Es decir todo cerrado anaítico invariante bajo la acción del grupo fundamental se descompone de la siguiente forma

$$W' = HZ_1' \cup \ldots \cup HZ_k'$$

donde $H \triangleleft_{fin} \Gamma$. y los Z_i' son cerrados analíticos irreducibles y para cada $\tau \in H$ se tiene o bien $\tau Z_i' = Z_i'$ o bien $\tau Z_i' \cap Z_i' = \phi$.

Esta descomposición también existe para carrados analíticos invariantes bajo la acción de un $G \lhd_{fin} \Gamma$.

Otro hecho bastante importante es el teorema generalizado de Riemann que nos dice que dada una variedad normal algebraica y dado un cubrimiento de ésta, entonces podemos ver ese espacio recubridor como una variedad algebraica y el cubrimiento como morfismo algebraico.

Hecho 2. *(Teorema generalizado de la existencia de Riemann) Sea A una variedad algebraica normal sobre $\mathbb{C}$. Si $q : T \to A$ es un cubrimiento finito de espacios topológicos, entonces T admite estructura de variedad algebraica tal que q se vuelve un morfismo algebraico, es decir existe una variedad algebraica B sobre $\mathbb{C}$, un morfismo algebraico q y un homeomorfismo $\phi : T \to B$, tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{q} & A \\ \phi\downarrow & & id\downarrow \\ B & \xrightarrow{q} & A \end{array}$$

3.1. Θ-definibles y Θ-genéricos

Aquí definiremos los puntos Θ-genéricos los cuales nos permitirán definir, en el lenguaje dado en la próxima sección, conjuntos cerrados irreducibles.

Definición 7. *Un subconjunto co-étale cerrado $W' \subset \mathbb{U}$ Γ-invariante es definible sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\Theta \subset \mathbb{C}$ ssi $p(W') \subset A(\mathbb{C})$ es una subvariedad definida sobre Θ.*

Un cerrado (co)-étale es definible sobre un subcuerpo $\Theta \subset \mathbb{C}$ si es una unión contable de componentes irreducibles de subconjuntos co-étale cerrados π-invariantes definidos sobre Θ

Definición 8. *Para un conjunto $V \subset \mathbb{U}^n$ definimos $Cl_\Theta V$ como la intersección de todos los conjuntos cerrados Θ-definibles que contienen a V.*

$$Cl_\Theta V = \bigcap_{V \subset W, W \Theta definible} W$$

Un punto $v \in V$ lo llamamos Θ-genérico si $V = Cl_\Theta(v)$, es decir el cerrado Θ-definible más pequeño que contiene a v es V.

Proposición 3. *1. $Cl_\Theta V$ es Θ-definible.*

2. $Cl_\Theta V = \bigcup_{v \in V} Cl_\Theta v = \bigcup_{S \subset^{fin} V} Cl_\Theta S$ (Carácter finito)

Prueba:

1. Por el lema de descomposición podemos tomar V irreducible y los W irreducibles, luego la intersección se vuelve una intersección finita y es claro que intersección finita de Θ-definibles es Θ-defibinle.

2. Si V es irreducible entonces $V = CL_\Theta(v)$ v Θ- genérico de V si no $V = V_1 \cup \ldots \cup V_n$ y tenemos que $\cup_{v \in V} Cl(v) = Cl(V_1) \cup \ldots \cup Cl(V_n)$ como $V \subset \cup_{v \in V} Cl(v)$ tenemos que $Cl(V) \subset \cup_{v \in V} Cl(v)$ y como cada v está en V tenemos $Cl(V) = \cup_{v \in V} Cl(v) = Cl(V_1) \cup \ldots \cup Cl(V_n)$.

□

Proposición 4. *Si un conjunto $W' \subset \mathbb{U}$ es definible sobre $\bar{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ entonces es $L(A)$-definible con parametros de $p^{-1}(A(\mathbb{Q}))$*

Prueba: $p(W') = W$ variedad definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, una componente irreducible de la preimagen de W es una componente irreducible de la variedad

$$\bigcup_{\sigma \in Gal(\overline{\mathbb{Q}}/k)} \sigma(W)$$

esta unión es finita ya que W está definido sobre un subcuerpo de grado finito de $\overline{\mathbb{Q}}$ luego como $\sim_W$ está en el lenguaje pondemos definir a W' con $x \sim_W a_1 \wedge \ldots \wedge x \sim_W a_n$ para algunos a_i. $\square$

Las siguientes dos proposiciones nos van a resultar útiles a la hora de buscar puntos genéricos en la prueba final.

Proposición 5. *Para todo subgrupo de índice finito, H, si $W^{'}$ es co-étale cerrado irreducible, entonces $w^{'} \in W'$ es un punto Θ-genérico si y sólo si $w = p_H(w)^{'} \in W = p_H(W^{'})$ es un punto Θ-genérico en W.*

prueba: $w' \in W'$ no es Θ-genérico si y sólo si existe un irreducible Θ-definido, V' tal que $w' \in V' \subsetneq W'$ por la irreducibilidad de los dos conjuntos se tiene $p_H(V') \neq p_H(W')$. $\square$

Proposición 6. *Una componente conexa de un fibra Θ-genérica de un conjunto co-étale cerrado irreducible definido sobre Θ tiene un punto Θ-genérico*

3.2. Lenguaje para $\mathbb{U}$

A continuación introduciremos el lenguaje $L(A)$ del espacio recubridor universal U, el cuál principalmente nos va a permitir definir los co-étale cerrados, y componentes irreducibles, también podremos definir conjuntos definibles, en el sentido de la sección anterior.

Definición 9. *Consideramos el espacio recubridor universal $p : U \to A$ como una estructura en el lenguaje $L(A)$ que consta de los siguientes símbolos.*

1. *Para cada Z subvariedad cerrada de A definida sobre un campo numérico k el símbolo $\sim_{Z,A}$.*

2. *Para cada subgrupo normal $H \triangleleft_{fin} \Gamma$ de índice finito el símbolo $\sim_H$*

Los símbolos tienen la siguiente interpretación.

1. $x' \sim_{Z,A} y' \Leftrightarrow x', y' \in U^n$ viven en la misma componente analítica irreducible del conjunto cerrado analítico $p^{-1}(Z(\mathbb{C})) \subset U^n$.

2. $x' \sim_H y' \Leftrightarrow \exists \tau \in \pi(U)^n : \tau x' = y', \tau \in H$.

Podemos también considerar los siguientes símbolos:
$x' \sim^c_{Z,A^H} y'$ ssi x', y' viven en la misma componente conexa de la preimagen $p_H^{-1}(Z_i(\mathbb{C}),\ Z_i \subset A^H(\mathbb{C})^n$ una componente irreducible de la variedad algebraica $p_H^{-1}(Z(\mathbb{C}) \subset A^H(\mathbb{C})^n$.

Proposición 7. *Dado un subgrupo normal de índice finito H tenemos.*

1. *La relación*

$$Aff_H(x, y, z, t) = \exists \gamma \in H : \gamma x = y \wedge \gamma z = t$$

es definible.

2. *Conjuntos cerrados H-invariantes son $L(A)$ definibles con parámetros.*

3. *Una componente conexa de una fibra genérica de un conjunto cerrado irreducible $L(A)$-definible es $L(A)$-definible.*

4. *Cualquier étale-cerrado irreducible es una componente conexa de una fibra de un conjunto $L(A)$-definible.*

5. *Un cerrado irreducible es $L(A)$-definible.*

Prueba: Para probar 1. nótese que

$$p^{-1}(\Delta(\mathbb{C})) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{(x; \gamma x) \mid x \in \mathbb{U}\}$$

donde $\Delta(\mathbb{C}) = \{(x; x) \mid x \in A\}$ es una subvariedad algebraica cerrada definida sobre K, las componentes conexas son las clases de equivalencia de la relación $\sim_\Delta$, $\{(x; \gamma x) \mid x \in \mathbb{U}\}$, $\gamma \in \Gamma$, y por tanto definibles con parámetros. tenemos que $\mathrm{Aff}_\pi(x, y, s, t)$ si y sólo si $(x, y) \sim_\delta (s, t)$ si y sólo si están en la misma componente conexa de $p^{-1}(\Delta(\mathbb{C})) \subset \mathbb{U} \times \mathbb{U}$.

Para probar 2. consideremos dos casos.
Caso 1: $\overline{\mathbb{Q}}$-caso $Z \subset A$ subvariedad irreducible cerrada definida sobre $\overline{\mathbb{Q}}$, Z es una componente irreducible de

$$Z_K = \bigcup_{\sigma : K_Z \hookrightarrow \mathbb{C}} \sigma(Z)$$

donde K_Z es el cuerpo de definición de Z, gracias a la relación $\sim_{Z_K, A}$ con parámetros.
para un cerrado co-étale irreducible Z' notando que Z' es una componente irreducible de $p^{-1}(Z) = p^{-1}p(Z')$ y utilizando el argumento anterior obtenemos que todo co-étale cerrado irreducible es definible.
Caso 2: caso $\overline{\mathbb{Q}}(t_1, \ldots, t_n)$ este es un poco más complicado y la prueba se puede encontrar en [2].
Los otros resultan inmediatos a partir de el caso 2. y su prueba.

$\square$

3.3. Ejemplos

Veamos unos ejemplos de definibilidad.
Sea $\Delta = \{(x, x) \mid x \in A\}$ $p^{-1}(\Delta) = \{(x, \gamma x) \mid x \in U \gamma \in \pi\}$ las componentes

conexas de $p^{-1}(\Delta)$ son de la forma $\Delta_\gamma = \{(x, \gamma x) \mid x \in U\}$ para $\gamma \in \pi(U)$ así tenemos

$$(x, y) \sim_\Delta (z, t) \Leftrightarrow \exists \gamma \in \pi(x = \gamma y \wedge z = \gamma t)$$

si fijamos un punto $x_0 \in U$ la fórmula $(x_0, x_0) \sim_\Delta (z, t)$ define $\Delta' = \{(x', x') \mid x' \in U\}$.
Y si fijamos un punto $z_0 \in U$ la fórmula $(z_0, t) \sim_\Delta (z_0, t)$ define la fibra $p^{-1}(p(z_0))$.

3.4. Θ-construibles y modelo-homogeneidad

Los conceptos desarrollados en está sección son de vital importancia para las pruebas de los teoremas ya que nos permitirán ver la homogeneidad y el conteo de tipos desde el punto de vista geométrico y topológico por medio de proyección de algunos conjuntos y de irreducibles

Definición 10. *W es un conjunto Θ-construible si.*
1. ClW es definida sobre Θ.
2. W contiene todos los puntos Θ-genéricos de compontentes irreducibles de ClW

Hecho 3. *(Lema de Chevalley) Para la topología co-étale se tiene.*

1. *Proyección de un cerrado irreducible es cerrado irreducible.*
2. *Proyección de cerrado invariante bajo la acción de un grupo de índice finito es cerrado.*
3. *Proyección de un irreducible construible contiene todos los genéricos de la proyección*
4. *Proyección de un abierto irreducible en su clausura contiene un subconjunto abierto de la clausura de la proyección.*

Un conjunto irreducible construible es un conjunto construible cuya clausura es irreducible. Ahora veremos una relación entre los Θ-construibles y el conjunto de realizaciones de un tipo sintáctico libre de cuantificadores.

Proposición 8. *La proyección de un Θ-construible es Θ-construible*

Prueba: Consideremos W irreducible y sea g punto genérico de $Cl(prW)$ queremos ver que $g \in prW$, como W es construible y g es genérico, tenemos que existe g' tal que (g, g') es genérico de $Cl(W)$ como W es construible $(g, g') \in W$ de donde $g \in prW$. □

Definición 11. *Decimos que $\mathbb{U}$ es homogéneo para conjuntos cerrados irreducibles sobre Θ o homogéneo para tipos sintácticos libres de cuantificadores sobre Θ, o modelo homogéneo, si alguna de las siguientes condiciones se cumple*

1. *La proyeccion de un irreducible Θ-construible es Θ-construible*

2. *Para cualquier par de tuplas* $a, b \in \mathbb{U}^n$ *y todo* $c \in \mathbb{U}^m$ *si* $qftp(a/\Theta) = qftp(b/\Theta)$ *entonces existe* $d \in \mathbb{U}^m$ *tal que* $qftp(ac/\Theta) = qftp(bd/\Theta)$

Corolario 2. *El modelo* $\mathbb{U}$ *es modelo homogéneo.*

Prueba: Se sigue inmediato de la definición y la proposición anterior. □

3.5. Axiomatización

En esta sección damos la axiomatización de $\mathbb{U}$ como espacio recubridor universal, la cual es estable sobre modelos y todos sus modelos son homogéneos.

3.5.1. Axiomas básicos

Estos axiomas describen los cocientes $U/\sim_H$ para $H \triangleleft_{fin} \Gamma$, y algunas propiedades de $U \to U/\sim_H$.
Axioma 1. Todas las afirmaciones de primer orden válidas en $\mathbb{U}$ y expresables en términos de relaciones L_A-interpretables y

$$x' \sim_{Z,A^G} y' := \exists x'' \exists y'' (x'' \sim_Z y'' \wedge x'' \sim_G x' \wedge y'' \sim_G y') \;, G \triangleleft_{fin} \Gamma$$

y $\sim_G$, $G \triangleleft_{fin} \Gamma$.
Estos axiomas describen U/G como variedad algebraica.

3.5.2. Axiomas de la propiedad de levantamiento de caminos

Axioma 2.1 (Propiedad de levantamiento de caminos para W). *Para todo* L_A*-predicado* $\sim_W$ *y todo* $G \triangleleft_{fin} \Gamma$ *suficientemente pequeño, tenemos el axioma*

$$x' \sim_{W,A^G} y' \Rightarrow \exists y'' (y'' \sim_G y' \wedge x' \sim_W y'')$$

También tenemos un axioma más fuerte para fibras de W, usamos que la relación «estar en la misma componente conexa de una fibra de una variedad» es algebraica y por eso la correspondiente relación G-invariante es L_A-definible.

Axioma 2.2(Propiedad de levantamiento para fibras). *Para todo* $G \triangleleft_{fin} \Gamma$ *suficientemente pequeño, tenemos el axioma*

$$(x'_0, x'_1) \sim^c_{W_G,A^G} (y'_0, y'_1) \Rightarrow \exists y''_1 [y'_0 \sim_G x'_0 \wedge y''_1 \sim_G y'_1 \wedge (x'_0, x'_1) \sim W(x'_0, y''_1)$$

en una notación un poco diferente.

$$x' \sim^c_{W_g,A^G} y' \Rightarrow \exists y''(y'' \sim_G y' \wedge prx' = pry'' \wedge x' \sim_W y'')$$

Axioma 2.3(Grupo fundamental es residualmente finito).

$$\forall x' \forall y'(x' = y' \Leftrightarrow \bigwedge_{H \triangleleft_{fin} \Gamma} x' \sim_H y')$$

Este axioma dice que dos elemntos de $\mathbb{U}$ son iguales si son equivalentes para todo subrupo normal finito $H \triangleleft_{fin} \Gamma$. Este axioma es una sentencia de $L_{\omega_1,\omega}$ ya que por la propiedad LERF de Γ la conjunción es contable.

El próximo axioma refuerza al anterior, nos dice que si un elemento B es $\sim_H$-equivalente a un elemento del grupo generado por $a_0, a_1, \ldots, a_n$, entonces él está en el grupo; en terminos de caminos tenemos para bucles $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ y un bucle γ, si para cualquier $H \triangleleft_{fin} \Gamma$ tenemos que γ es $\sim_H$-equivalente a alguna concatenación de los γ_i, entonces el realmente es una concatenación de esos caminos.

Axioma2.4 *Para todo $N \in \mathbb{N}$ tenemos el siguiente axioma.*

$$\forall b \forall a_1 \ldots \forall a_N$$

$$\bigwedge_{H \triangleleft_{fin} \Gamma} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \exists h_1 \ldots h_n \left(b \sim_H a_n \wedge h_1 = a_1 \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigvee_{1 \leq j < N} (h_i, h_{i+1}) \sim_\Delta (a_j, a_{j+1}) \right)$$

$$\Rightarrow \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \exists h_1 \ldots h_n \left(b = h_n \wedge h_1 = a_1 \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \bigvee_{1 \leq j < N} (h_i, h_{i+1}) \sim_\Delta (a_j, a_{j+1}) \right)$$

El próximo axioma muestra que grupos fundamentales de variedades son finitamente generados.

Axioma 2.5(Grupos $\pi(W_g)$ son finitamente generados). *Para cada símbolo $\sim_W$ y cada $H \subset \Gamma$ suficientemente pequeño tenemos el axioma.*

$$\bigvee_{N \in \mathbb{N}} \exists a_1 \ldots \exists a_N \forall b.$$

$$\bigwedge_{1\leq i\neq j\leq N}(a_i \sim_W a_j \wedge a_i \sim_H a_j \wedge pra_i = pra_j) \wedge \left(\bigwedge_{i=1}^{N}(b \sim_W a_i \wedge prb = pra_i) \Rightarrow\right.$$

$$\left.\bigvee_{n\in\mathbb{N}} \exists h_1 \ldots h_n \left(b = h_n \wedge h_1 = a_1 \wedge \bigwedge_{j=1}^{N}\bigvee_{j=1}^{N-1}(h_i, h_i+1) \sim_\Delta (a_j, a_{j+1}) \wedge prh_i = prh_{i+1}\right)\right)$$

Ya que hemos definido la teoría miramos un poco los modelos de ésta.

Introducimos la siguiente notación, definimos la siguiente relación para cada subvariedad cerrada de $\mathbb{A}(K)$

$$x \sim y \Leftrightarrow p_H(x) \sim_{W,H} p_H(y) \text{ para todo } H \triangleleft_{fin} \pi$$

Una componente irreducible de la relación $\sim_W$ es un conjunto maximal de puntos en U relacionados dos a dos por $\sim_W$. Un subconjunto de U es un cerrado básico si es unión de componentes irreducibles de finitas relaciones $\sim_{W_i}$. Un cerrado irreducible es una componente irreducible de una relación $\sim_W$ para algún W. Llamaremos un subconjunto de U co-étale cerrado si es la intersección de cerrados básicos. Esto define un análogo a la topología co-étale de $\mathbb{U}$

4. Prueba de los teoremas

Teorema 1. *Sea A una variedad algebraica proyectiva suave la cual el LERF y T la teoría asociada a su espacio recubridor.Entonces todos los modelos son modelo-homogéneos y la clase de modelos de la teoría resulta libre de cuantificadores sintácticamente estable sobre submodelos contables*

Prueba:

- Modelo homogeneidad: sea g' genérico de la proyección, entonces existe g'' tal que (g', g'') es genérico, como W' es construible $(g', g'') \in W'$ de donde g' está en la proyección.
- Estabilidad: dado $U \prec U'$ tenemos que $U = U'(\Theta) = \{u \in U' \mid p(u) \in A(\Theta)\}$. Dado $v' \in U'$ consideramos el menor cerrado Θ-definible que contiene a v', $Cl_\Theta(v')$, éste es irreducible y además es una componente conexa de algún $V \subset A^H$ para algún $H \lhd_{fin} \Gamma$ Θ-definible, entonces existe $v'_\Theta \in U$ genérico, luego $Cl_\Theta(v')$ está determinado por v'_Θ y de esto se obtiene el resultado.

□

Teorema 2. *Sea A una variedad algebraica proyectiva suave LERF y T la teoría asociada a su espacio recubridor. Entonces Cada par de modelos $U_1 \models T$ y $U_2 \models T$ de cardinalidad $\aleph_1$, tales que existe un submodelo contable $U_0 \models T$ son isomorfos,y, aún más el isomorfismo es la identidad en U_0.*

Prueba. Probaremos que dado f isomorfismo parcial $f : U_1 \to U_2$ tal que $f|_{U_0} = id_{U_0}$ $f(a) = b$, $a \in U_1^n$ y $f : U_0 \cup a_0, \ldots, a_n \to U_0 \cup b_1, \ldots, b_n$, f puede ser extendido a cualquier $c \in u_1$, con esto tomando submodelos contables extendemos el isomorfismo a los modelos de cardinalidad $\aleph_1$.

Tomamos $V_1 = CL_{U_0}(a)$, $W_1 = CL_{U_0}(a, c)$, $V_2 = CL_{U_0}(f(a))$ como los cerrados irreducibles más pequeños que contienen a $a, (a, c), f(a)$ respectivamente. Éstos cerrados irreducibles son definibles luego como f es un iso parcial, se tiene que V_1 y V_2 son definidos por la misma fórmula.

Tomemos $H \lhd_{fin} \pi$ tales que V_i, W_i son componentes conexas de $p_H^{-1} p_H(V_1) p_H^{-1} p_H(V_2)$, $p_H^{-1} p_H(W_1), p_H^{-1} p_H(W_2)$ respectivamente, escojamos puntos $v_1, w_1 \in U_0$ tales que $v_1 \in V_1, V_2$ y $w_1 \in W_1, W_2$ por la definición de W_2 tenemos que $W_2 \subset U_2^{n+1}$ y $prp_H W_2 = p_H(V_2)$ también $prw_1 \in V_2$.

Sea $c' \in U_2$ tal que $(p_H(b), p_H(c')) \in p_H(W_2)$ sea un punto U_0-genérico de $p_H(W_2)$(cerrado más pequeño U_0-definible es $p_H(W_2)$).

Por propiedad de levantamiento de W_2 existe $(b', c'') \in W_2$ genérico de W_2

tal que $p_H(b') = p_H(b) \wedge p_H(c'') = p_H(c')$ luego $b' \in prW_2 \subset V_2$ y b' es punto genérico de V_2.
Como prW_2 es cerrado definible sobre U_0 tenemos que $V_2 \subset prW_2$, en particular existe $d \in U_2$ tal que $(b, d) \in W_2$ es un punto genérico de W_2 tomamos $f(c) = d$. Por la construcción los puntos $(a, c) \in U_1$ y $(b, d) \in U_2$ están en los mismos cerrados U_0-definibles ,y, como toda relación básica define un cerrado U_0-definible, tenemos que f es un isomorfismo parcial, como se quería. $\square$

Referencias

[1] Misha Gavrilovich. Model Theory of the Universal Covering Spaces of Complex Algebraic Varieties. PhD thesis, Oxford University, 2005.

[2] Misha Gavrilovich. Covers of Abelian varieties as analytic Zariski structure. http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0905/0905.1377v1.pdf

[3] J. Peter May.A Concise course in algebraic topology. http://www.math.uchicago.edu/ may/CONCISE/ConciseRevised.pdf

[4] Robin Hartshorne. Algebraic geometry. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[5] Igor Shafarevich. Basic algebraic geometry. Springer-Verlag, segunda edición.

[6] Carlos Ivorra, Geometría algebraica. http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geomalg.pdf