Gabarito Nível Beta - Fase Individual

Questão 1. Considere a equação (em x)

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d}=\sqrt{2x+a+b+c-d}.$$

Determine condições necessárias e suficientes sobre a, b, c, d para que a equação acima tenha solução real e resolva a equação.

Solução: Observemos que os radicandos devem todos ser positivos, ou seja, assumimos que

1. $x+i \geq 0$, para $i=a,b,c,d$.
2. $2x+a+b+c-d \geq 0$.

Observe que

$$2x+a+b+c-d=(x+a)+(x+b)+(x+c)-(x+d)$$

e

$$(x+a)+(x+b)+(x+c)-(x+d)=(x+a)+(x+b)+(x+c)+(x-d)-2x$$

Fazemos a mudança de variáveis

$$A=\sqrt{x+a}, B=\sqrt{x+b}, C=\sqrt{x+c}, D=\sqrt{x+d},$$

e obtemos, na equação original

$$A+B+C+D=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D^2}.$$

Elevando ambos os termos ao quadrado e assumindo $A^2+B^2+C^2-D^2=2x+a+b+c-d \geq 0$, temos

$$A^2+B^2+C^2+D^2+2(AB+AC+AD+BC+BD+CD)=A^2+B^2+C^2-D^2$$

e, após cancelar os termos A^2, B^2, C^2 de ambos os lados da equação obtemos

$$2(AB+AC+AD+BC+BD+CD)+D^2=-D^2,$$

donde decorre que

$$AB + AC + AD + BC + BD + CD = -D^2,$$

Como temos $A, B, C, D \geq 0$, a equação acima só tem solução se tivermos cada um dos termos iguais a zero, donde decorre que devemos ter

$$D = AB = AC = AD = BC = BD = BC = 0.$$

Mas $D = \sqrt{x+d} = 0$ se e somente se $x = -d$ e fazendo esta substituição obtemos que

$$AB = \sqrt{a-d}\sqrt{b-d} = 0 \iff a = d \text{ ou } b = d.$$
$$AC = \sqrt{a-d}\sqrt{c-d} = 0 \iff a = d \text{ ou } c = d.$$
$$BC = \sqrt{b-d}\sqrt{c-d} = 0 \iff b = d \text{ ou } c = d.$$

Concluímos que $a = b = d$ ou $a = c = d$ ou $b = c = d$. Neste caso, para que a equação original faça sentido, precisamos de uma restrição adicional:

$$a = c = d \leq b \text{ para existir a raiz } \sqrt{x+b} = \sqrt{b-d}$$
$$b = c = d \leq a \text{ para existir a raiz } \sqrt{x+a} = \sqrt{a-d}$$
$$a = b = d \leq c \text{ para existir a raiz } \sqrt{x+c} = \sqrt{c-d}$$

ou então devemos ter $a = b = c = d$. Em qualquer destes casos a solução é única: $x = -d$

Solução Alternativa: Vamos definir duas funções f, g da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} + \sqrt{x+c} + \sqrt{x+d} \\
g(x) &= \sqrt{2x+a+b+c-d}
\end{aligned}$$

definidas ambas em um conjunto $D \subset \mathbb{R}$ que é o máximo domínio em que ambas fazem sentido. Primeiramente, note que

$$\begin{aligned}
g(x) = \sqrt{2x+a+b+c-d} &= \sqrt{(x+a)+(x+b)+(x+c)-(x+d)} && (1)\\
&\leq \sqrt{(x+a)+(x+b)+(x+c)+(x+d)+\cancel{(x+d)}-\cancel{(x+d)}} && (2)\\
&\leq \sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}+\sqrt{x+c}+\sqrt{x+d} = f(x) && (3)
\end{aligned}$$

sendo que na segunda linha usamos que $x+d \geq 0$ e $\sqrt{\cdot}$ é uma função crescente e na última linha usamos a relação $\sqrt{X+Y} \leq \sqrt{X} + \sqrt{Y}$.

Além disso, note que ambas as funções são crescentes e f cresce mais rapidamente que g, logo usando que $g \leq f$, caso exista $x_0 \in \mathbb{R}$ satisfazendo $f(x_0) = g(x_0)$ então $x_0 = \min D$, em particular, a solução é única caso exista. Além disso, caso aconteça essa igualdade, as desigualdades de (1) são igualdades e temos pela primeira desigualdade, obtemos que

$$\sqrt{(x_0+a)+(x_0+b)+(x_0+c)-(x_0+d)} = \sqrt{(x_0+a)+(x_0+b)+(x_0+c)+(x_0+d)}$$

logo $-(x_0+d) = x_0+d \Rightarrow x_0 = -d$. Nesse caso, temos que $-d = \min D \Rightarrow d = -\min D$. Mas perceba que

$$\begin{aligned}
D &= \{x \in \mathbb{R} : x+a \geq 0, x+b \geq 0, x+c \geq 0, x+d \geq 0, 2x+a+b+c-d \geq 0\} \\
&= [-a, \infty) \cap [-b, \infty) \cap [-c, \infty) \cap [-d, \infty) \cap [(d-a-b-c)/2, \infty) \\
&= [M, \infty) \qquad \text{onde } M = \max\{-a, -b, -c, -d, (d-a-b-c)/2\}
\end{aligned}$$

assim $\min D = M = -d = \max\{-a, -b, -c, -d, (d-a-b-c)/2\}$, portanto temos que $-d \geq -a$, ou $d \leq a$ e analogamente concluímos que que $d \leq a, b, c$.

Por fim, note que se $x_0 = -d$ é a raiz, então por (1), temos que

$$\sqrt{a+b+c-3d} = \sqrt{a-d} + \sqrt{b-d} + \sqrt{c-d}$$

elevando ao quadrado obtemos que

$$\cancel{a+b+c-3d} = 2\sqrt{a-d}\sqrt{b-d} + 2(\sqrt{a-d}+\sqrt{b-d})\sqrt{c-d} + \cancel{a+b+c-3d}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{a-d}\sqrt{b-d}}_{\geq 0} + \underbrace{\sqrt{c-d}(\sqrt{a-d}+\sqrt{b-d})}_{\geq 0} = 0$$

portanto, temos que $\sqrt{a-d}\sqrt{b-d} = 0$ e $\sqrt{c-d}(\sqrt{a-d}+\sqrt{b-d}) = 0$. Da primeira condição $\sqrt{a-d}\sqrt{b-d} = 0$, obtemos que $\sqrt{a-d} = 0$ ou $\sqrt{b-d} = 0$, isto é, $a = d$ ou $b = d$. Da segunda condição $\sqrt{c-d}(\sqrt{a-d}+\sqrt{b-d}) = 0$, obtemos que $c = d$ ou $a = b = d$ (pois se a soma dos dois termos entre parênteses for nula, implica na nulidade dos dois termos, pois são positivos). Resumindo esse parágrafo, temos quatro possibilidades

$$\begin{aligned} a = c = d \leq b \\ b = c = d \leq a \\ a = b = d \leq c \\ a = b = c = d \end{aligned}$$

Logo, se existe uma solução para a equação $f(x) = g(x)$, então $d = \min\{a, b, c\}$ e na sequência a, b, c, pelo menos dois termos são iguais a d. Nesse caso, a raiz é única e igual a $-d$. Vamos mostrar que essa condição é suficiente, ou seja, se d é o menor dos valores a, b, c, d e pelo menos três deles é d, então a equação $f(x) = g(x)$ admite uma raiz real. Sem perda de generalidade $b = c = d \leq a$ e temos que

$$f(x) = \sqrt{2x+a+d} \qquad g(x) = \sqrt{x+a} + 3\sqrt{x+d}$$

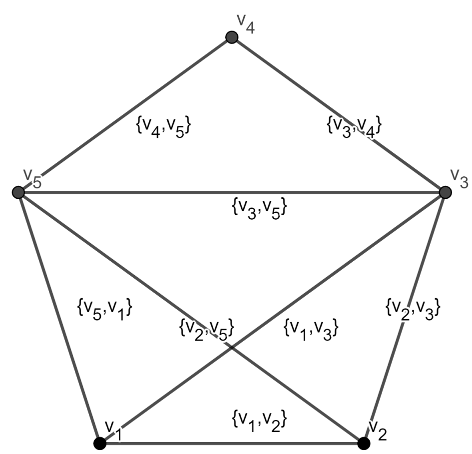
dessa maneira é imediato verificar que $x = -d$ é uma raiz para $f(x) = g(x)$, pois ambos os casos serão iguais a $a - d$ e como por hipótese $a - d \geq 0$, temos, de fato, uma raiz real.

Questão 2. Um **grafo finito** (não orientado) G é uma estrutura que consiste de um conjunto finito de **vértices** $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e um conjunto A de **arestas**, onde cada aresta é um par (não ordenado) $\{v_i, v_j\}$ de vértices. Por simplicidade, vamos assumir que $v_i \neq v_j$ (ou seja, cada aresta é formada por dois vértices distintos). Dada uma aresta $a = \{v_i, v_j\}$, dizemos que a aresta *a conecta* os vértices v_i e v_j. Dizemos que os vértices v_i e v_j são *adjacentes* se $\{v_i, v_j\}$ for uma aresta, ou seja, se $\{v_i, v_j\} \in A$. Denotamos o grafo por $G = (V, A)$.

A informação sobre um grafo pode ser condensada no que chamamos de *matriz de adjacência* M do grafo: $M = (m_{ij})$ é uma matriz quadrada $n \times n$ (onde n é o número de vértices), tal que a entrada m_{ij} é definida por

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{v_i, v_j\} \in A \\ 0, & \text{se } \{v_i, v_j\} \notin A \end{cases} .$$

Vamos considerar, a título de exemplo, o grafo ilustrado a seguir, com 5 vértices e 8 arestas.



Sua matriz de adjacência é

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Um **caminho de comprimento** r em um grafo é uma sequência ordenada de vértices $[v_{i_0}, v_{i_1}, \cdots, v_{i_r}]$, onde $i_0, \ldots, i_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ e v_{i_j} e $v_{i_{j+1}}$ são adjacentes para todo $j = 0, 1, 2, \ldots, r-1$, ou seja, para todo j temos que $\{v_{i_j}, v_{i_{j+1}}\}$ é aresta do grafo.

Seja $M^k = \underbrace{M \times M \times \cdots \times M}_{k \text{ vezes}}$ e denote a entrada (i,j) de M^k por $m_{i,j}^{(k)}$.

a) Mostre que $m_{i,j}^{(k)}$ é o número de caminhos de comprimento igual a k ligando os vértices v_i e v_j.

b) Um **triângulo** no grafo G é um conjunto de três vértices, dois a dois adjacentes. Mostre que

$$\frac{1}{6}\left(m_{1,1}^{(3)} + m_{2,2}^{(3)} + \cdots + m_{n,n}^{(3)}\right)$$

é o número de triângulos existentes no grafo.

Solução: Antes de começarmos a resolver o problema, lembramos que estamos usando a seguinte notação para a entrada das matrizes M e M^k: $M = (m_{ij})$ e $M^k = \left(m_{i,j}^{(k)}\right)$.

a) Pela definição do produto de matrizes temos que

$$m_{i,j}^{(2)} = \sum_{\mu=1}^{n} m_{i\mu} m_{\mu j}\,.$$

Observamos que existe um caminho de comprimento 2 ligando os vértices v_i com v_j se, e somente se, existe um vértice v_μ tal $\{v_i, v_\mu\}$ e $\{v_\mu, v_j\}$ sejam arestas do grafo, ou seja, para algum número natural $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ vale que $m_{i\mu} = m_{\mu j} = 1$, o que é equivalente à existência de μ tal que $m_{i\mu} m_{\mu j} = 1$. Considerando que $m_{\mu\mu} = 0$ e $m_{i\mu} = m_{\mu i}$, temos que a quantidade

$$m_{i,j}^{(2)} = \sum_{\mu=1}^{n} m_{i\mu} m_{\mu j}$$

é exatamente a quantidade de caminhos possíveis de comprimento 2 ligando v_i com v_j pois cada termo da soma contribui uma unidade se, e somente se, $m_{i\mu} m_{\mu j} = 1$, que é quando $[v_i, v_\mu, v_j] = [v_j, v_\mu, v_i]$ é caminho.

A demonstração do caso geral é feita por indução sobre k. A base de indução $k = 2$ é o que mostramos acima. Seja $M^{k-1} = (m_{i,j}^{(k-1)})$ e assuma como hipótese de indução que $m_{i,j}^{(k-1)}$ é o número de caminhos de comprimento $k-1$ ligando os vértices v_i e v_j. Seja $M^k = (m_{i,j}^{(k)})$. Como $M^k = M^{k-1}M$, temos que

$$m_{i,j}^{(k)} = \sum_{\mu=1}^{n} m_{i,\mu}^{(k-1)} m_{\mu j}\,.$$

Dado um caminho de comprimento k ligando v_i a v_j, se considerarmos v_μ o último vértice do caminho antes de v_j, temos um caminho de comprimento $k-1$ ligando v_i a v_μ, e existem $m_{i,\mu}^{(k-1)}$ desses caminhos pela hipótese de indução. Vamos variar μ: para cada μ, temos que $[v_i, \ldots, v_\mu, v_j]$ vai ser caminho de comprimento k se, e somente se, $m_{\mu j} = 1$ e $m_{i,\mu}^{(k-1)} \neq 0$, e assim a quantidade

$$m_{i,j}^{(k)} = \sum_{\mu=1}^{n} m_{i,\mu}^{(k-1)} m_{\mu j}$$

nos dá exatamente o número de caminhos de comprimento k entre os vértices v_i e v_j.

b) Perceba que um triângulo é um caminho fechado de comprimento 3, onde *desconsideramos a ordem* em que os vértices são percorridos. Se assumirmos que $\{v_i, v_j, v_l, v_i\}$ é um triângulo, podemos considerar as três possibilidades para o vértice inicial e as duas direções que podemos percorrer a partir de cada vértice, de modo que existem exatamente seis caminhos fechados que definem esse triângulo, a saber:

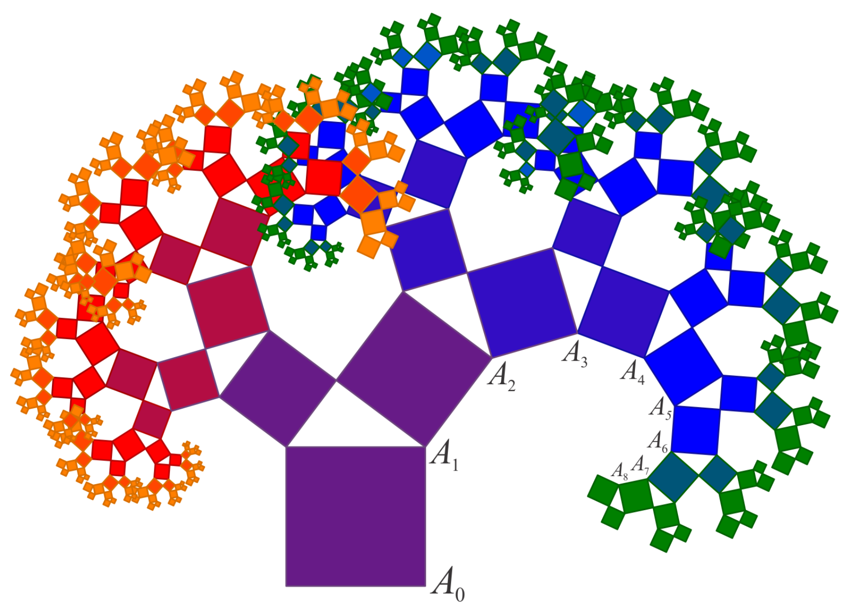
$$\begin{array}{ll} [v_i, v_j, v_l, v_i] & [v_j, v_l, v_i, v_j] \\ [v_l, v_i, v_j, v_l] & [v_i, v_l, v_j, v_i] \\ [v_j, v_i, v_l, v_j] & [v_l, v_j, v_i, v_l] \end{array}.$$

Assim a quantidade de triângulos é a quantidade de caminhos fechados de comprimento 3 dividido por seis.

Vamos calcular a quantidade de caminhos fechados de comprimento três. Tal como fizemos no item anterior, fixado um vértice v_i, a quantidade de caminhos fechados com extremo em v_i é $m_{i,i}^{(3)}$, assim a quantidade total de caminhos fechados de comprimento três é obtida quando variamos v_i, ou seja, a quantidade é $m_{1,1}^{(3)} + \cdots + m_{n,n}^{(3)}$, e obtemos a fórmula desejada.

Questão 3. A *árvore pitagórica* é um fractal formado por quadrados. Em tal árvore, um "tronco" quadrado dá origem a dois "galhos" também quadrados, que formam com o primeiro um triângulo retângulo. Por sua vez, cada um desses galhos (da 2^a geração) dá origem a outros dois quadrados (da 3^a geração) com os quais forma um triângulo retângulo com os mesmos ângulos internos do triângulo original. Esse processo é repetido recursivamente, produzindo uma imagem semelhante a uma árvore.

A figura a seguir mostra as primeiras 9 gerações de quadrados de uma árvore pitagórica na qual as arestas dos quadrados adjacentes a cada triângulo são proporcionais a 5, 3 e 4.



a) Supondo que o quadrado da base da figura acima tenha aresta de 1 cm, determine a soma das áreas de todos os quadrados criados desde a 1^a geração (a do "tronco") até a n-ésima geração do fractal.

b) Supondo que o vértice A_0 da aresta inferior do "tronco" da figura acima tenha coordenadas $(1, 0)$, determine as coordenadas dos vértices A_1, A_2 e A_3.

c) Supondo que o vértice A_0 da aresta inferior do "tronco" da figura acima tenha coordenadas $(1, 0)$, determine as coordenadas do vértice A_n pertencente ao n-ésimo quadrado do ramo destacado na parte direita da árvore mostrada na figura.

Solução do item (a)

Definamos S_k como a soma das áreas de todos os quadrados da k-ésima geração da árvore pitagórica. Na primeira geração, temos um quadrado com aresta de 1 cm, de modo que $S_1 = 1 \cdot 1 = 1$ cm^2.

O enunciado indica que as arestas dos quadrados adjacentes a cada triângulo da árvore tem medidas proporcionais a 5, 3 e 4. Como a aresta do quadrado da 1^a geração mede 1 cm, concluímos que um dos quadrados da 2^a geração tem aresta de 0,6 cm e o outro quadrado tem aresta de 0,8 cm. Sendo assim, obtemos

$$S_2 = 0,6^2 + 0,8^2 = 0,36 + 0,64 = 1 \text{ cm}^2.$$

Observe que esse valor é igual a S_1. Entretanto, isso não é uma coincidência, sendo resultado da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo de lados que medem 1, 0,6 e 0,8 cm.

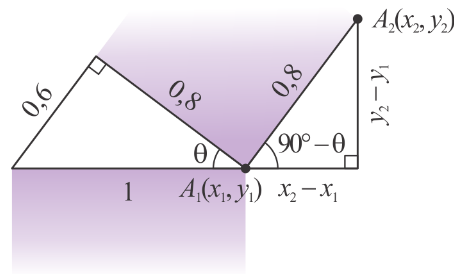
De uma forma geral, suponha que um dos quadrados da geração k tenha aresta de medida a. Esse quadrado dá origem a dois quadrados da geração $k+1$, cujas arestas medem, digamos, b e c. Considerando o fato de o triângulo formado entre esses três quadrados ser retângulo, temos $a^2 = b^2 + c^2$, de modo que a soma das áreas dos dois quadrados “filhos” (da geração $k+1$) é igual í área do quadrado “pai” (da geração k). Aplicando essa ideia a todos os quadrados da geração k, notamos que a soma das áreas dos quadrados da geração $k+1$ é igual í soma das áreas dos quadrados da geração k.

Sendo assim, como $S_1 = 1$ cm^2, concluímos que $S_k = 1$ cm^2, de modo que a soma das áreas dos quadrados das primeiras n gerações é igual a $n \cdot 1 = n$ cm^2.

Solução do item (b)

Segundo o enunciado, o ponto A_0 tem coordenadas $(1, 0)$. Como a aresta do quadrado da base da árvore mede 1, concluímos que A_1 tem coordenadas $(1, 1)$.

Para obter as coordenadas de $A_2(x_2, y_2)$, usaremos a figura a seguir, que mostra o quadrado da base da árvore e quadrado do ramo direito da segunda geração.



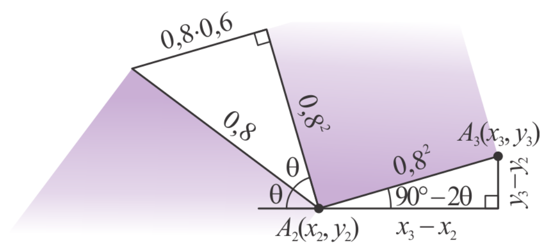
Observando a figura e lembrando que $sen(\alpha) = cos(\beta)$ se $\alpha + \beta = 90°$, obtemos

$$sen(\theta) = cos(90° - \theta) = 0,6/1 = 0,6;$$
$$cos(\theta) = sen(90° - \theta) = 0,8/1 = 0,8.$$

Assim, concluímos que as coordenadas de A_2 são

$$x_2 = x_1 + 0,8\, cos(90° - \theta) = x_1 + 0,8\, sen(\theta) = 1 + 0,8 \cdot 0,6 = 1,48;$$
$$y_2 = y_1 + 0,8\, sen(90° - \theta) = x_1 + 0,8\, cos(\theta) = 1 + 0,8 \cdot 0,8 = 1,64.$$

Essa estratégia pode ser repetida para a obtenção de $A_3(x_3, y_3)$, bastando, para isso, que atualizemos as medidas dos ângulos e dos lados dos triângulos retângulos, como mostrado na figura a seguir.



Note, na figura, que o quadrado com vértice A_3 tem aresta igual ao produto da aresta do quadrado da geração anterior por 0,8, o que equivale a $0,8^2 = 0,64$. Observe também que, em tal quadrado, o ângulo que a aresta í esquerda de A_2 faz com a horizontal equivale a $= 2 \cdot \theta$, já que fizemos uma rotação de θ para obter o quadrado da 2^a geração e uma nova rotação com o mesmo ângulo para obter o quadrado da 3^a geração. A partir da figura, deduzimos que

$$x_3 = x_2 + 0,8^2\, cos(90^\circ - 2\theta) = x_2 + 0,8^2\, sen(2\theta);$$
$$y_3 = y_2 + 0,8^2\, sen(90^\circ - 2\theta) = y_2 + 0,8^2\, cos(2\theta).$$

Substituindo os valores de x_2 e y_2 nessas equações, e lembrando que $sen(2\theta) = 2\, sen(\theta) cos(\theta)$ e $cos(2\theta) = cos^2(\theta) - sen^2(\theta)$, obtemos as coordenadas de A_3, que são

$$x_3 = 1,48 + 0,8^2 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 2,0944;$$
$$y_3 = 1,64 + 0,8^2 \cdot (0,8^2 - 0,6^2) = 1,8192.$$

Solução do item (c)

Considerando a sequência de quadrados Q_n, com vértices A_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, notamos que Q_n tem aresta com medida igual a 0,8 vezes a aresta de Q_{n-1} e que, com relação a esse último quadrado, Q_n sofreu uma rotação de θ no sentido horário.

Dessa forma, o processo apresentado no item (b) pode ser estendido í obtenção das coordenadas dos demais pontos da sequência $A_1, A_2, \ldots, A_n$. De uma forma geral, escrevemos

$$x_n = x_{n-1} + 0,8^{n-1}\, cos(90^\circ - (n-1)\theta) = x_{n-1} + 0,8^{n-1}\, sen((n-1)\theta);$$
$$y_n = y_{n-1} + 0,8^{n-1}\, sen(90^\circ - (n-1)\theta) = y_{n-1} + 0,8^{n-1}\, cos((n-1)\theta).$$

Para obter fórmulas não recursivas de x_n e y_n, ou seja, para obter fórmulas que não sejam escritas em função de x_n e y_n, tomamos as somas a seguir, para $n = 1, 2, \ldots$.

$$x_n = x_0 + \sum_{k=1}^{n} 0,8^{k-1}\, sen((k-1)\theta) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} 0,8^k\, sen(k\theta);$$
$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} 0,8^{k-1}\, cos((k-1)\theta) = \sum_{k=0}^{n-1} 0,8^k\, cos(k\theta).$$

Nota: Embora as fórmulas acima já sejam consideradas suficientes como resposta desse item, o leitor ainda pode reescrevê-las considerando algumas expressões explícitas de $sen(k\theta)$ e de $cos(k\theta)$, tais como

$$sen(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} = \frac{(cos(\theta) + i\,sen(\theta))^k - (cos(\theta) - i\,sen(\theta))^k}{2i} \quad \text{e}$$
$$cos(k\theta) = \frac{e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}}{2} = \frac{(cos(\theta) + i\,sen(\theta))^k + (cos(\theta) - i\,sen(\theta))^k}{2},$$

ou mesmo

$$sen(k\theta) = \sum_{j=0}^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j+1} sen^{2j+1}(\theta)\, cos^{k-2j-1}(\theta) \quad \text{e}$$
$$cos(k\theta) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j} sen^{2j}(\theta)\, cos^{k-2j}(\theta).$$

Também é possível aplicar técnicas de simplificação às expressões de x_n e y_n, o que nos permite obter

$$x_n = 1 + \frac{0,8\,sen(\theta) - 0,8^n(0,8\,sen(\theta - n\theta) + sen(n\theta))}{1 + 0,8^2 - 1,6\,cos(\theta)};$$
$$y_n = \frac{1 - 0,8\,cos(\theta) + 0,8^n(0,8\,cos(\theta - n\theta) - cos(n\theta))}{1 + 0,8^2 - 1,6\,cos(\theta)}.$$

Naturalmente, podemos obter expressões ainda mais simples considerando que $sen(\theta) = 0,6$ e $cos(\theta) = 0,8$.