SISTEMAS DE COORDENADAS

En la vida diaria, nos encontramos con el problema de ordenar algunos objetos; de tal manera que es necesario agruparlos, identificarlos, seleccionarlos, estereotiparlos, etc., para tener una referencia sobre ellos. Así cuando se tenga la necesidad de buscarlos, su localización sea la inmediata posible. En matemáticas, ha sido útil crear sistemas de referencia que nos permiten distinguir los puntos que forman un eje o un plano con características únicas para cada uno de ellos.

A estos sistemas de referencia se les conocen como sistemas de coordenadas. Para nuestro estudio de Geometría Analítica sólo analizaremos los siguientes: sistema coordenado unidimensional y sistema coordenado bidimensional.

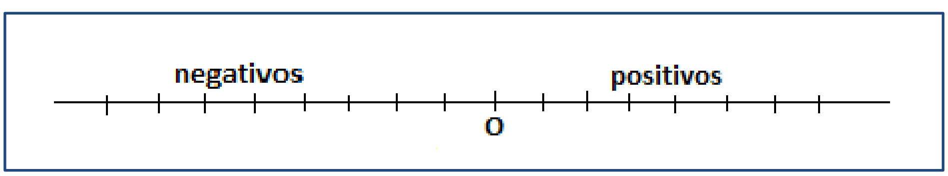
SISTEMA COORDENADO UNIDIMENSIONAL

En matemáticas se ha regulado utilizar una línea recta horizontal para representar a todos los números reales, colocando al cero en un punto arbitrario de la recta (origen), todos los números reales positivos a la derecha de ese punto y todos los números reales negativos a la izquierda de ese mismo.

De esta manera, es fácil notar cómo se establecía una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta y el conjunto de los números reales, es decir, que a cada punto de la recta le corresponde un número real y a cada número real le corresponde un punto de la recta.

Esta forma de ordenar a los números reales se le da el nombre de sistema coordenado unidimensional; en el cual se puede localizar ordenadamente cualquier número real, a través de un punto de la línea recta. Este sistema coordenado regularmente también se le conoce como eje real o recta numérica.

Tracemos una línea horizontal, marquemos el origen de algún punto de ella (**O**), elijamos un segmento como unidad de longitud y así obtenemos el **eje coordenado unidimensional:**

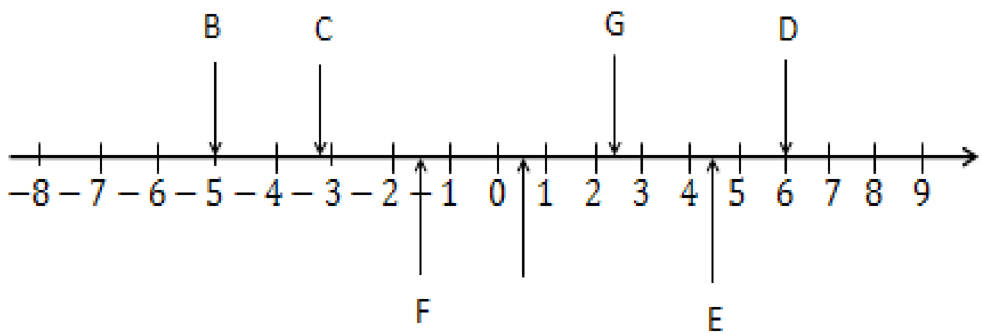


La notación utilizada para representar un punto en el eje real es mediante una letra mayúscula elegida al azar o bien mediante la expresión $P(x)$ que se lee: “el punto P de coordenada x”.

Ejercicio 1

Localice un eje coordenado de los siguientes puntos:

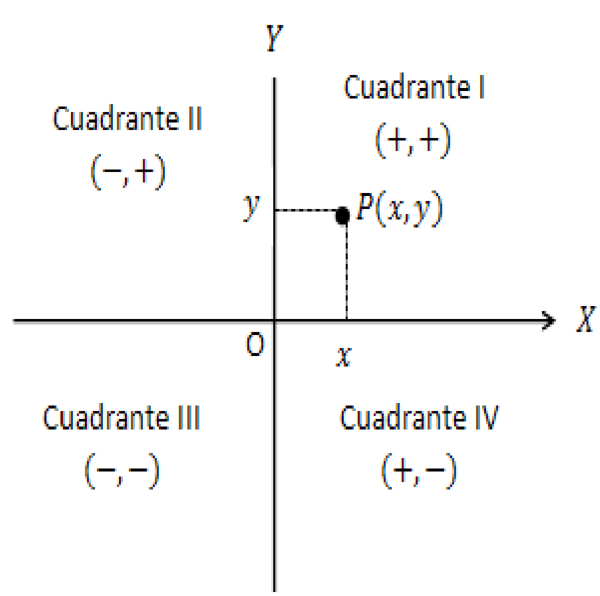
$A\left(\frac{1}{2}\right)$, $B(-5)$, $C(-\pi)$, $D(6)$, $E(\sqrt{20})$, $F\left(-\frac{3}{2}\right)$, $G\left(\frac{7}{3}\right)$.



SISTEMA COORDENADO BIDIMENSIONAL

El sistema coordenado rectangular, consta de dos rectas perpendiculares entre sí, llamados ejes de coordenadas. Por costumbre, esas rectas se trazan horizontal y verticalmente sobre un plano.

La recta horizontal se llama eje de las “X” o “abscisas” y la recta vertical eje de las “Y” u “ordenadas”; al punto de intersección de las rectas se le llama “origen” del plano(O). Los ejes de coordenadas o ejes coordenados dividen al plano en cuatro regiones llamadas “cuadrantes” numerados en el sentido contrario al de las agujas de un reloj, observa la figura:



En realidad los ejes coordenados representan dos ejes o rectas reales que se cruzan en sus orígenes (el cero de cada recta). Así todo punto P del plano queda determinado a través de un par de números reales llamadas coordenadas rectangulares del punto, se representan mediante la siguiente expresión: (x, y). Al número real "x" se le llama abscisa del punto y al número real "y" ordenada.

Por lo tanto un punto en el plano tendrá dos proyecciones, una sobre cada eje coordenado. Esto es, la abscisa "x" medida sobre el eje "X", a la derecha del origen del plano si es positiva y a la izquierda si es negativa; la ordenada "y" medida sobre el eje "Y", arriba del origen si es positiva y abajo si es negativa. Los signos de las coordenadas en los cuatro cuadrantes están indicados en la figura anterior.

Es evidente, que cada punto P del plano le corresponde uno y solamente un par de coordenadas (x, y). Recíprocamente, un par de coordenadas $(x. y)$ cualesquiera determinan uno y solamente un punto en el plano coordenado.

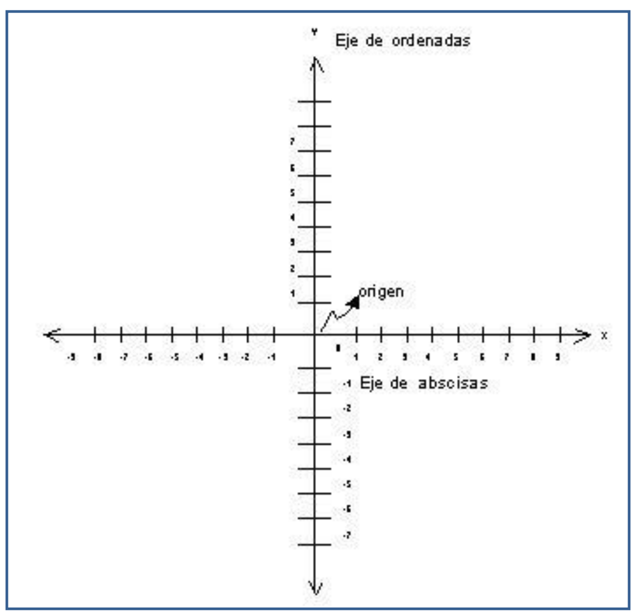
PAREJAS ORDENADAS DE NÚMEROS REALES

Es importante aclarar que para escribir las coordenadas rectangulares de un punto se debe respetar cierto orden; escribiendo siempre la abscisa en primer lugar y la ordenada en el segundo.

Por esta razón, las coordenadas de un punto en el plano reciben el nombren de *par ordenado* de números reales.

Es decir, el punto P de coordenadas $(5, -3)$ no es el mismo que el punto Q de coordenadas $(-3,5)$.

Debido a esto, podemos decir que un sistema coordenado bidimensional permite establecer una correspondencia entre pares ordenados de números reales y puntos del plano.



Así podemos dar la siguiente definición:

> Una pareja ordenada de números reales es una representación numérica que consta de dos elementos, no necesariamente distintos, escritos en un orden especifico. La notación (x, y) representa a la pareja ordenada cuyo primer elemento es x y cuyo segundo elemento es y.

Ejemplo: La pareja ordenada $(-5, -6)$ tiene como primer elemento al número -5 y como segundo elemento al número -6.

Algunas veces es necesario formar parejas ordenadas respetando ciertas relaciones entre sus elementos.

Por **ejemplo**, en las siguientes parejas ordenadas de números reales ¿qué relación guardan sus elementos?

$$(1,1),\ (2,4),\ (3,9),\ (4,16),\ (5,25),\ (6,36),\ \ldots$$

Es muy fácil observar que el segundo elemento de cada una de las parejas ordenadas es el cuadrado del primer elemento. Así la pareja $(25,5)$ no entraría en esa colección, puesto que no cumple con la condición observada.

Por último, diremos que *dos parejas ordenadas son iguales*, si sus primeros elementos son iguales y sus segundos elementos también lo son. Simbólicamente lo expresamos de la siguiente manera:

$$(a, b) = (c, d) \text{ si y solo si } a = c \text{ y } b = d$$

Ejemplos:

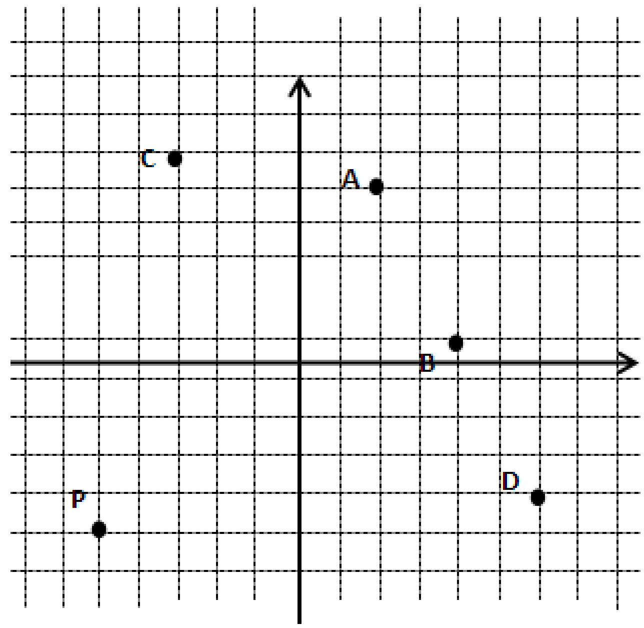
1. La pareja ordenada $(4,3)$ es distinta de la pareja ordenada $(3,4)$; ya que que tanto sus primeros elementos y sus segundos elementos no coinciden.

2. La pareja ordenada $\left(\sqrt{36}, \frac{12}{3}\right)$ es igual a la pareja ordenada $(6,4)$. ¿Por qué?

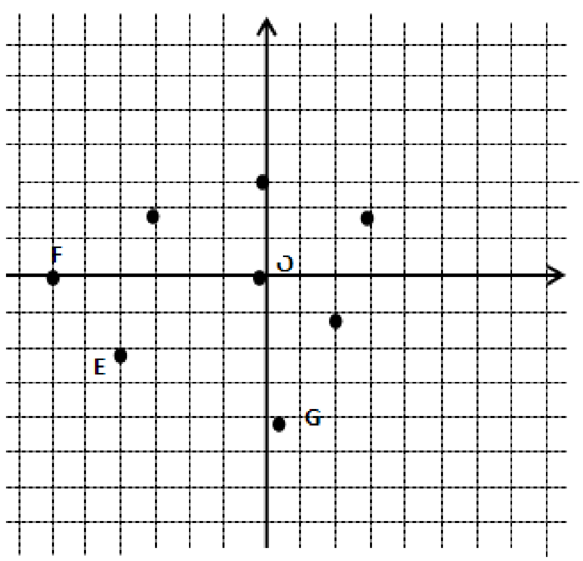
Recordando que en un sistema coordenado bidimensional se establece una correspondencia uno a uno entre pares ordenados de números reales y puntos del plano; localizaremos en éste al punto P de coordenadas $(-5,-6)$.
La notación que usaremos para representar un punto en el plano será eligiendo cualquier letra mayúscula y escribiendo junto a ella la pareja ordenada que represente. Para nuestro punto a localizar su notación es: $P(-5,-6)$ que se lee "El punto P de coordenadas -5, -6".

Procedimiento:

Para localizar el punto $P(-5,-6)$ se ubica primero sobre el eje X la abscisa del punto, en este caso se encuentra a cinco unidades a la izquierda del origen; después a partir de allí sobre una paralela al eje Y mediremos seis unidades hacia abajo del eje X, obteniendo así el punto dado, observa la figura:
Además se han trazado los puntos $A(2,3)$, $B(4,-1)$, $C(-3,4)$ y $D(6,-5)$; verifique que su ubicación sea la correcta.



Ejemplo 1. De acuerdo a lo explicado anteriormente, ahora escriba las parejas ordenadas de los puntos que se han trazado en el siguiente plano cartesiano.



Se recomienda al estudiante el empleo de papel milimetrado cuando requiera hacer un trazo de gran exactitud.

Solución: Los puntos en el plano tienen las siguientes parejas ordenadas: $O(0,0)$,$A(0,3)$, $B(3,2)$, $C(2,-1)$, $D(-3,2)$, $E(-4,-2)$,$F(-6,0)$ y $G\left(\frac{1}{2},-4\right)$.

Encuentra los valores de x y y para que se dé la igualdad entre las parejas ordenadas, toma como guía el ejemplo:

a) $(5x, 1-2y) = (x+4,9)$ $\Rightarrow$ $5x = x+4$ y $1-2y = 9$
Luego, $x = 1$ y $y = -4$

b) $(x, 8) = (-5, y)$

c) $(7x, 1-2y) = (14, y+7)$

d) $(x+1, 5) = (6, y-1)$

e) $(x, 13) = (-2, 2y-1)$

LUGARES GEOMÉTRICOS

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos del plano cartesiano que cumplen con cierta condición. La condición que deben cumplir un conjunto de puntos se indica por medio de una relación, la cual escribiremos mediante la siguiente notación:

$$\boldsymbol{R = \{(x,y) |\ E(x,y) = 0\}}$$

Que se lee:

"La relación R igual al conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) tales que satisfacen la condición $E(x,y) = 0$". Aquí la expresión $E(x,y) = 0$, representa alguna ecuación en dos variables o incluso, el signo de igualdad puede cambiarse por una desigualdad y representar una inecuación.

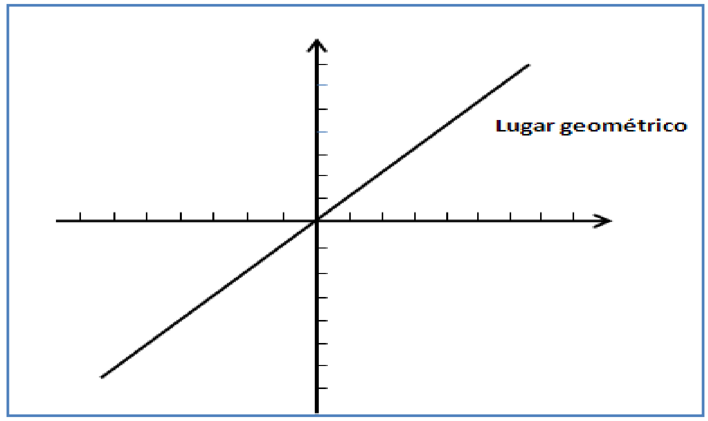
Ejemplo 1:

Escribe las siguientes relaciones mediante la notación dada anteriormente y traza en el plano el lugar geométrico que definan.

El lugar geométrico de los puntos del plano tales que cumplen con la condición:

$$\boldsymbol{E(x,y) = x - y = 0}$$

Solución:



La relación queda bien expresada mediante: $\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ o equivalentemente $\boldsymbol{R} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$.

Observe que la relación que deben de satisfacer las parejas ordenadas es que su primer elemento sea igual a su segundo elemento.

Así las parejas ordenadas que cumplen con esta relación son, por citar algunas: $(-3,-3)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$, $(4,4)$, $(6,6)$,$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ etc.; que son las que trazan a la diagonal que se observa en la figura.

Ejemplo 2:

Escribe las siguientes relaciones mediante la notación dada anteriormente y traza en el plano el lugar geométrico que definan.

El lugar geométrico de los puntos del plano tales que cumplen con la condición:

$$\mathbf{E(x,y) = y - x^2 = 0}$$

Solución: La relación se expresa mediante $R = \{(x,y) \mid y - x^2 = 0\}$

O bien $R = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

En este caso, la relación considera a todas aquellas parejas de números, donde el segundo elemento es igual al cuadrado del primer elemento.

Parejas tales como: $(-3,9)$, $(-2,4)$, $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{16}\right)$, $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,9)$, $(4,16)$, $(5,25)$ y muchas más cumplen con esta relación.

Gráficamente, este lugar geométrico esta dado mediante la curva: