



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA

INTRODUCCION Y CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Jorge Angeles Álvarez  
Profesor de Ingeniería Mecánica  
División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería, U.N.A.M.

MARZO, 1984.

## 1.1 Introducción

En terminos generales, el método del elemento finito (MEF) es un medio para obtener una aproximación a la solución de un problema que requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, provisto de ciertas condiciones que definen completamente el problema y, de ahí, su solución. En el más sencillo de los casos, la ecuación diferencial es ordinaria y lineal, pero puede contener derivadas de orden arbitrario y condiciones de frontera dadas, que involucren combinaciones arbitrarias de la función buscada y sus derivadas. Si se denota como  $y$  la función buscada, que constituye la solución al problema en cuestión, y como  $x$ , la variable independiente, este problema adopta la forma: "Resolver la ecuación diferencial ordinaria

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(i)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1.1)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} g_1(y_{10}, y_{11}, \dots, y_{1n}) &= 0 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$g_n(y_{n0}, y_{n1}, \dots, y_{nn}) = 0''$$

donde  $y_{ij}$  es el valor que adquiere la derivada de orden  $j$  de  $y$  con respecto a  $x$ , en la  $i^{\text{a}}$  ecuación del conjunto (1.2). Al introducir un cambio de variables se puede transformar la ec (1.1) en un sistema de  $n$  ecuaciones de primer orden. En efecto, sean

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y_i(x) &= y^{(i-1)}(x) \\ \cdot & \\ \cdot & \\ y_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned} \quad (1.3)$$

La ec (1.1) toma entonces la forma

$$y_1'(x) = y_2(x)$$

$$y_2'(x) = y_3(x)$$

⋮

⋮

$$y_{n-1}'(x) = y_n(x)$$

$$f(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_n') = 0$$

(1.4)

En general, las variables  $y_i$  tienen un significado físico inmediato, por lo que permiten visualizar mejor el problema.

Ejemplo 1.1.1 Análisis estático de una viga en voladizo (Fig 1)

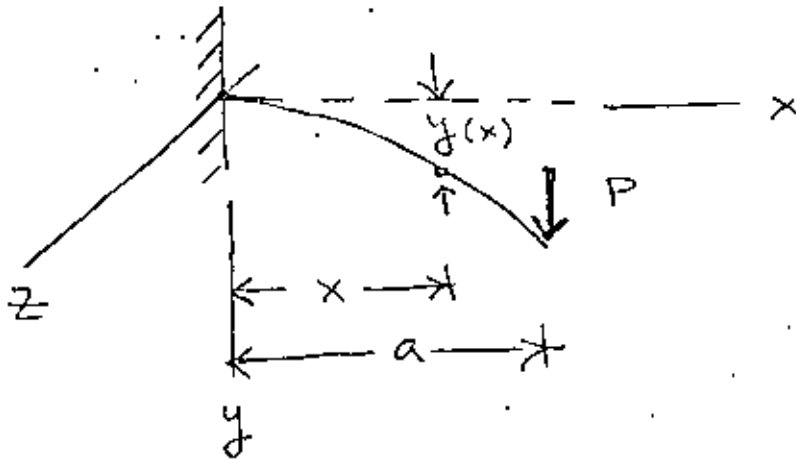


Fig 1 Viga en voladizo

La deflexión  $y(x)$  se obtiene integrando la ecuación [1]:

$$EI y''(x) = M(x) \quad (1.5)$$

donde  $E$  es el módulo elástico del material de la viga,  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje  $Z$  (constante) y  $M(x)$  es el momento flexionante en el punto

de abscisa  $x$ . Este es igual a

$$M(x) = P(a-x) \quad (1.6)$$

Sustituyendo la ec (1.6) en la ec (1.5) se tiene

$$y''(x) - \frac{P}{EI} (a-x) = 0 \quad (1.7)$$

que es una ecuación diferencial ordinaria de 2<sup>o</sup> orden, de la forma (1.1).

Defínase

$$y'(x) = p(x) \quad (1.8)$$

como la pendiente de la curva  $y = y(x)$  en el punto  $x$ ; así, la ec (1.7) se transforma en el sistema

$$y'(x) = p(x) \quad (1.9 a)$$

$$p'(x) = \frac{P}{EI} (a-x) \quad (1.9 b)$$

que es un sistema de 2 ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de la forma (1.4). Para integrar este sistema se requiere, desde luego, contar con 2 constantes de integración, que se obtienen de las condiciones de frontera

$$y(0) = 0, \quad p(0) = 0 \quad (1.10)$$

Intégrese la ec (1.9 b) con la segunda condición de frontera (1.10). Se obtiene

$$p(x) = \frac{P}{EI} \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \quad (1.11)$$

$$p(0) = C_1 = 0 \quad (1.12)$$

Por lo tanto,

$$p(x) = \frac{P}{EI} \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) \quad (1.13)$$

Sustitúyase la ec (1.13) en la ec (1.9 a). Se obtiene

$$y'(x) = \frac{P}{EI} \left( ax - \frac{x^2}{2} \right) \quad (1.14)$$

Intégrese la ec (1.14) con la primera condición de frontera (1.10). Se obtiene

$$y(x) = \frac{P}{EI} \left( a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_2 \quad (1.15)$$

$$y(0) = C_2 = 0 \quad (1.16)$$

Por lo tanto,

$$y(x) = \frac{P}{EI} \left( a \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \quad \text{Solución} \quad (1.17)$$

El problema anterior se escogió muy simple a propósito. Sin embargo, es representativo de una clase más amplia de problemas que surgen del análisis estático de ganchos, columnas, etc. Se puede complicar si se incluyen otras variables espaciales, como en el caso del análisis estático de placas y cascarones, o bien si se le introduce la variable tiempo, como es el caso del análisis dinámico de vigas, placas y cascarones.

En problemas de mayor complejidad no es posible obtener la solución por simple integración de funciones sencillas, como en el Ejemplo 1.1.1. En efecto, las ecuaciones de equilibrio de una placa circular de radio  $a$  empotrada, sujeta a una carga transversal  $q$

(Fig 2) son [ 2 ] :

$$\Delta \Delta w = \frac{q}{D} \quad (1.18)$$

sujeta a las condiciones de frontera

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad \text{en } r = a \quad (1.19)$$

donde  $\Delta$  es el operador laplaciano definido en coordenadas cilíndricas como

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (1.20)$$

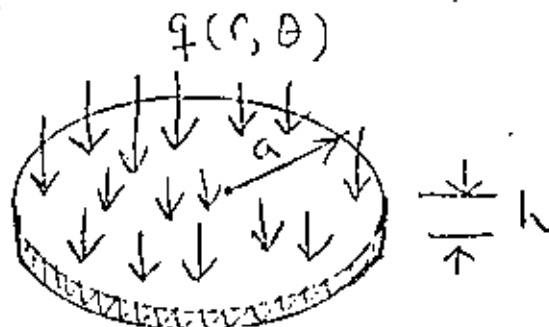
por lo que

$$\Delta \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (1.21)$$

$q = q(r, \theta)$  es la carga que actúa sobre la placa y  $D$  es la rigidez a la flexión de la placa, definida como [ 2, p. 20 ]:

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (1.22)$$

En la ec (1.22),  $E$  es el módulo elástico del material,  $h$  es el espesor de la placa y  $\nu$  es el módulo de Poisson [ 3 ] del material.



El problema representado por la ec (1.18) y las condiciones de frontera (1.19) es mucho más complicado de resolver que el del Ejemplo 1.1.1, como salta a la vista. Sin embargo, ambos problemas se refieren al análisis estático de un elemento estructural de comportamiento lineal (sus ecuaciones diferenciales correspondientes son lineales, es decir, tanto la función buscada como sus derivadas aparecen en esa ecuación elevadas a la primera potencia), sujeto a una carga dada, con condiciones de apoyo bien definidas (condiciones de frontera).

Nótese que los modelos matemáticos (ecuaciones diferenciales y condiciones de frontera) del Ejemplo 1.1.1. y de la Fig 2 involucran una ecuación diferencial, que en el primer caso es ordinaria y en segundo, parcial. En situaciones más complejas, en vez de una ecuación pueden tenerse varias y, además, acopladas. Un conjunto de ecuaciones se dice que es acoplado cuando en cada una de las ecuaciones aparece no una sola incógnita, sino varias. El hecho de haber obtenido ecuaciones diferenciales (espaciales) en los modelos matemáticos anteriores se debe a que se trata del análisis de elementos estructurales que son continuos. Por contraposición, un sistema que contenga elementos concentrados da lugar a modelos matemáticos provistos de ecuaciones algebraicas, esto es, que son de la forma

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1.23}$$

En general, el sistema de ecuaciones algebraicas (1.23) es no lineal : pero con frecuencia los sistemas físicos analizados

presentan un comportamiento lineal y, en este caso, dan lugar a modelos matemáticos del tipo lineal. Un modelo matemático de esta naturaleza contiene un sistema de ecuaciones algebraicas lineales del tipo

$$\begin{array}{rcl}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & \dots & a_{1n}x_n = b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & \dots & a_{2n}x_n = b_2 \\
 \vdots & & \vdots \\
 a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & \dots & a_{nn}x_n = b_n
 \end{array} \quad (1.24)$$

En forma compacta el sistema (1.23) se puede escribir como

$$\underset{\sim}{f}(x) = \underset{\sim}{0} \quad (1.25)$$

donde

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

son vectores de dimensión  $n$ , o sea de  $n$  componentes. Por su parte, el sistema (1.24) se puede escribir en forma compacta como

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \quad (1.27)$$



donde

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

son una matriz de  $n \times n$  y dos vectores de dimensión  $n$ .

En la mayor parte de este curso se tratará con sistemas lineales por lo que, en general, se llegará a modelos lineales de la forma (1.27).

A continuación se presenta el análisis de un sistema de parámetros concentrados, cuyo análisis estático da lugar a un modelo de la forma de la ec (1.27), donde la matriz  $\tilde{A}$  y los vectores involucrados adquieren un significado físico palpable.

Considérese ahora el sistema compuesto por los tres resortes concentrados de rigideces  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$ , cuyos extremos se encuentran fijos (Fig 3). Este puede constituir un modelo muy simplificado de un tramo de una tubería sujeta a cargas axiales que pueden ser producidas por cambios en la temperatura del fluido que transporte. El extremo fijo puede representar un anclaje de la tubería. Si se dispone de instrumentos que midan los desplazamientos en los nodos, se pueden calcular las cargas que actúan en éstos, suponiendo que se conozcan los valores de la rigidez de los resortes.

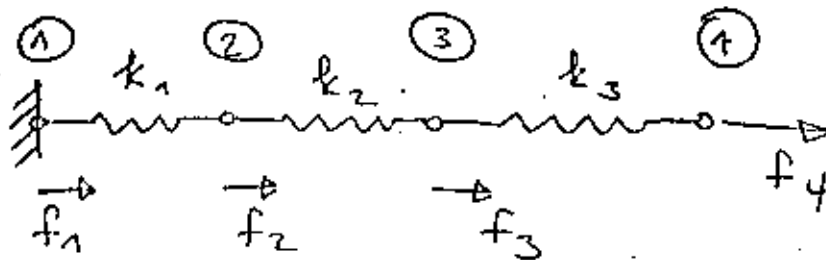


Fig 3 Sistema elástico de doble grado de libertad

El análisis estático del sistema de la Fig 3 se realizará considerando que cada resorte es lineal, esto es, que su comportamiento obedece a la siguiente ecuación constitutiva

$$F = k \Delta u$$

donde  $F$  es la fuerza que actúa en cada uno de sus extremos, como lo indica la Fig 4, mientras que  $k$  es su rigidez (constante) y  $\Delta u$ , el incremento en su desplazamiento desde una configuración en la que la fuerza en sus extremos es nula y que, por esto, recibe el nombre de configuración "descargada".

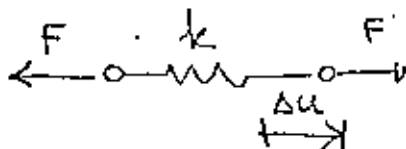


Fig 4 Resorte lineal

En un sistema como el de la Fig 3 se supone que las cargas actúan únicamente en los nodos. Más aún, la carga externa que actúa en el nodo  $i$  se representará por  $f_i$ , y estará en equilibrio con la carga interna  $F_i$  que actúa en el resorte  $i$  y con la  $F'_i$ , que actúa en el resorte  $i+1$ , como se muestra en la Fig 5

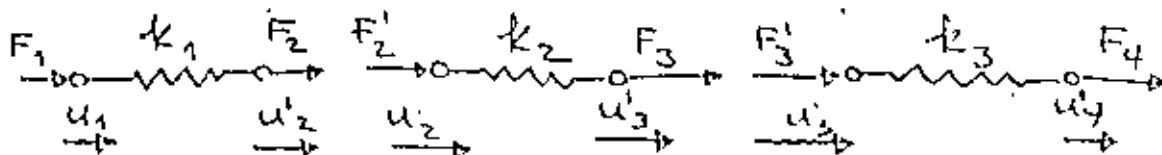


Fig 5 Cargas internas en el sistema elástico de la Fig 3

Además, llámese  $u_i$  al desplazamiento del nodo  $i$  asociado al resorte  $i$ , mientras que  $u'_i$  al del nodo  $i$  asociado al resorte  $i+1$ . Por compatibilidad, es claro que

$$u'_i = u_i \quad (1.29)$$

Por equilibrio en cada nodo se tiene

$$f_1 = F_1, \quad f_2 = F_2 + F'_1, \quad f_3 = F_3 + F'_2, \quad f_4 = F_4 \quad (1.30)$$

Un resorte típico, entonces, está sujeto al estado de cargas de la Fig 6 .

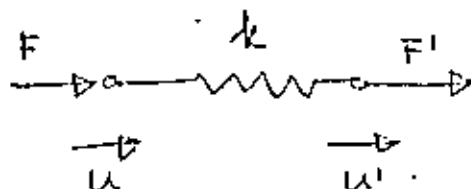


Fig 6 Estado de carga en un resorte lineal

En la Fig 6 se supone que cuando  $u = u' = 0$ , el resorte se encuentra descargado.

Si se supone que el estado de carga es equivalente a la superposición de dos estados, cada uno de ellos en equilibrio, se tiene la disposición de la Fig 7

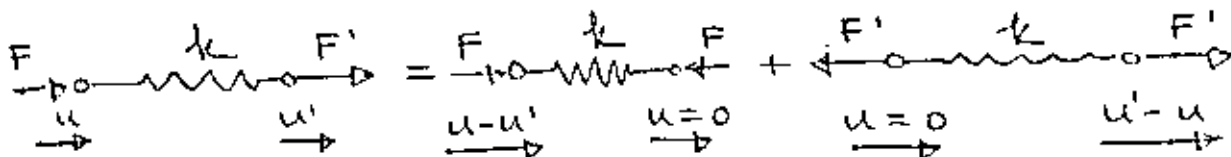


Fig 7 Estado de carga equivalente al de la Fig 6

Para el primer estado de carga del miembro derecho de la ecuación de la Fig 7 se tiene

$$F = k(u - u') \quad (1.31)$$

mientras que para el segundo

$$F' = k(u' - u) \quad (1.32)$$

Las ecs (1.31) y (1.32) se pueden poner en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} F \\ F' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

que es una relación de la forma

$$\underset{\sim}{F} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \quad (1.34)$$

donde  $\underset{\sim}{F}$  y  $\underset{\sim}{u}$  son los vectores de fuerza y de desplazamiento, respectivamente, mientras que  $\underset{\sim}{K}$  es la matriz de rigidez de cada resorte. Esta también se llama matriz elemental de rigidez para distinguirla de la matriz global de rigidez, que aún está por definirse. Nótese que  $\underset{\sim}{K}$  es una matriz simétrica, esto es, que su elemento (1, 2) es igual a su elemento (2, 1). Además, es positiva semidefinida. En la sección de Álgebra de Matrices se estudia con más detalle este último concepto; pero aquí baste con decir que una matriz es positiva semidefinida si la forma cuadrática

$$\phi = \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \quad (1.35)$$

asociada a ella nunca es negativa, lo cual es el caso de la matriz  $\underset{\sim}{K}$  de la ec (1.33). En efecto, desarróllese la forma (1.35). Se tiene

$$\underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} = [u, u'] \begin{bmatrix} k(u - u') \\ -k(u - u') \end{bmatrix} = k(u - u')^2 \quad (1.36)$$

que, como se ve de inmediato, nunca es negativa, pues  $k > 0$ . La forma cuadrática (1.35) es en realidad el doble de la energía elástica de deformación del resorte o energía potencial elástica. Esta energía, en vista de la expresión (1.36), se ha considerado como nula en el estado descargado, o sea, cuando  $u = u' = 0$ . Nótese, sin embargo, que también se anula esa energía cuando  $u = u'$ , lo cual corresponde a un desplazamiento de cuerpo rígido del resorte, que claramente, no produce incremento alguno en la energía elástica de deformación del resorte. Fuera de estos casos de energía elástica nula, se observa que ésta es siempre positiva, lo cual establece una correspondencia entre el carácter positivo semidefinido de  $\underline{K}$  y el carácter físico de la energía elástica de deformación.

Si se representa la energía elástica de deformación del resorte por  $V$ , se tiene que

$$V = \frac{1}{2} \underline{u}^T \underline{K} \underline{u} \quad (1.37)$$

que es una expresión semejante a

$$V = \frac{1}{2} k u^2 \quad (1.38)$$

como en el caso de un resorte con un extremo fijo, que sufre un desplazamiento  $u$  a partir de su estado descargado. De la ec (1.38) se obtiene

$$\frac{dV}{du} = k u \quad (1.39)$$

Por analogía, para el caso de la ec (1.37) se tiene

$$\frac{dV}{d\underline{u}} = \underline{K} \underline{u} \quad (1.40)$$

que es un vector de dimensión 2. De hecho, es el gradiente de la

energía  $V$  con respecto a  $u$ . En la sección de Operaciones con Matrices se estudia con más detalle el concepto de gradiente, o sea, de derivada con respecto a un vector. De la ec (1.39) se tiene en seguida que

$$\frac{d^2 V}{d u^2} = k \quad (1.41)$$

esto es, la rigidez del resorte es la segunda derivada de la energía potencial elástica con respecto al desplazamiento medido desde el estado descargado. Por analogía, se tiene de la ec (1.40),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = K \quad (1.42)$$

esto es, la matriz de rigidez se puede obtener como la matriz Hessiana o sea, de segundas derivadas, de la energía potencial elástica con respecto al desplazamiento medido desde el estado descargado. En realidad, como se verá a continuación, es más fácil obtener esa matriz calculándola como la matriz de segundas derivadas de la energía potencial elástica.

Ejemplo 1.1.2 Análisis estático de un sistema elástico de doble grado de libertad.

Dado un conjunto de desplazamientos  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  y  $u_4$ , medidos en los modos (1) a (4) correspondientes, del sistema elástico de la Fig 3, determinar las cargas que actúan en esos nodos.

De las expresiones (1.33) para las fuerzas que actúan en los extremos de cada resorte, y de las ecs (1.30), se tiene

$$\begin{aligned} f_1 &= k_1(u_1 - u_2) \\ f_2 &= k_1(-u_1 + u_2) + k_2(u_2 - u_3) = -k_1 u_1 + (k_1 + k_2)u_2 - k_2 u_3 \\ f_3 &= k_2(-u_2 + u_3) + k_3(u_3 - u_4) = -k_2 u_2 + (k_2 + k_3)u_3 - k_3 u_4 \\ f_4 &= k_3(-u_3 + u_4) \end{aligned} \quad (1.43)$$

Escribiendo las ecs (1.43) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \quad (1.44)$$

que es una relación de la forma

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \quad (1.45)$$

entre la fuerza externa  $\underset{\sim}{f}$  que actúa en cada modo y el desplazamiento del nodo. En esa relación,

$$\underset{\sim}{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{K} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

donde  $\underset{\sim}{K}$  es la matriz global de rigidez. Nótese que esta matriz es simétrica, al igual que la matriz de rigidez de cada resorte. Puede demostrarse, además, que es igualmente positiva semi-definida. La energía potencial elástica del sistema es, por su parte

$$V = \frac{1}{2} \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{u} \quad (1.47)$$

De la ec (1.44), nótese que, si  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ , esto es, si los resortes sufren un desplazamiento de cuerpo rígido,  $\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{0}$  y, consecuentemente,  $V = 0$ , lo cual es acorde con el hecho de que el sistema es insensible a movimientos de cuerpo rígido, esto es, este

tipo de movimientos no induce sobre él incremento alguno en su energía potencial elástica. Por otra parte, de la ec (1.44) se observa además, que la matriz global de rigidez resulta de una superposición de las matrices elementales de rigidez. Finalmente, esta matriz es "bandeada", esto es, sus elementos no nulos se encuentran alojados sobre una "banda" de ancho 3 centrada en su diagonal.

Para efectuar el análisis del sistema de la Fig 3 debe incluirse la condición de frontera  $u_1 = 0$ . Si se introduce ésta en las expresiones (1.43) se llega a

$$\begin{aligned} f_1 &= -k_1 u_2 \\ f_2 &= (k_1 + k_2)u_2 - k_2 u_3 \\ f_3 &= -k_2 u_2 + (k_2 + k_3)u_3 \\ f_4 &= k_3(-u_3 + u_4) \end{aligned} \quad (1.48)$$

con lo que se obtiene el valor deseado de las cargas en los nodos.

Por otra parte, la ec (1.44) se pudo haber obtenido imponiendo una condición de minimalidad sobre un funcional. Un funcional no es sino un número real definido sobre un espacio vectorial. En otras palabras, es una función escalar de variable vectorial. Sea

$$U(\underline{u}) = V - \underline{f}^T \underline{u} \quad (1.49)$$

un funcional que depende del vector de desplazamiento  $\underline{u}$ , cuyo valor no es sino la diferencia entre la energía potencial elástica del sistema,  $V$ , y el trabajo desarrollado por las cargas,  $\underline{f}$ . Este funcional alcanza un mínimo en los valores de  $\underline{u}$  para los cuales se tiene un valor estacionario de  $U$ . Del cálculo de funciones de varias variables se sabe que  $U$  alcanza un valor estacionario en los puntos en los que su gradiente con respecto a  $\underline{u}$  se anula, esto es,



donde

$$\frac{\partial U}{\partial \underline{u}} = \frac{\partial V}{\partial \underline{u}} - \frac{\partial}{\partial \underline{u}} \underline{f}^T \underline{u} = \underline{0} \quad (1.50)$$

Pero

$$\frac{\partial V}{\partial \underline{u}} = \underline{K} \underline{u} \quad (1.51)$$

de la ec (1.40). Además, como  $\underline{f}$  no depende explícitamente de  $\underline{u}$ ,

$$\frac{\partial}{\partial \underline{u}} \underline{f}^T \underline{u} = \underline{f} \quad (1.52)$$

como se muestra en la Sección de Operaciones con Matrices.

Sustituyendo (1.51) y (1.52) en (1.50), se obtiene la ec (1.45) o bien, la (1.44), como se deseaba demostrar. El resultado anterior constituye lo que se llama un "Principio de mínimo" en Mecánica. En realidad, la condición (1.50) es necesaria y suficiente para que  $U$  alcance un valor estacionario, que puede ser máximo, mínimo o punto silla. Para que el punto estacionario en cuestión sea mínimo es suficiente que la matriz Hessiana de  $U$  con respecto a  $\underline{u}$  sea positiva semidefinida ; pero, de (1.50),

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \underline{u}^2} = \underline{K} \quad (1.53)$$

que es efectivamente positiva semidefinida. Sin embargo, en esta parte no se presenta la demostración de la positividad semidefinida de cualquier matriz de rigidez. Baste con decir que ésta proviene del hecho de que la forma cuadrática (1.47) asociada a  $K$  representa un incremento en la energía potencial elástica del sistema elástico

en cuestión, desde su posición descargada, el cual no puede ser negativo, independientemente de los valores de los desplazamientos de los nodos, medidos desde esa configuración descargada.

Hasta aquí se han introducido ideas generales asociadas a sistemas físicos compuestos ya sea de elementos de parámetros distribuidos (vigas, placas, cascarones, fluidos), cuyos modelos dan lugar a sistemas de ecuaciones diferenciales, o bien de elementos con parámetros concentrados (resortes, por ejemplo), cuyos modelos dan lugar a ecuaciones algebraicas. Sin embargo, todavía no se ha hablado en concreto del MEF. De hecho, es este método el que establece esta relación, pues permite formular problemas asociados a sistemas continuos o de parámetros distribuidos en forma discreta, esto es, como si se tratara de sistemas con parámetros concentrados. Esto lo consigue el MEF mediante un proceso de discretización, que consiste en hacer depender la solución al problema original continuo de un conjunto discreto de valores. Mediante este proceso se obtiene una aproximación a la solución al problema original, y no un valor exacto de ella. Para ilustrar las ideas anteriores, considérese el mismo problema de determinar las cargas sobre el tramo de tubería de la Fig 3 ; pero ahora supóngase que cada sección  $i$  (porción entre nodos) se trata como una barra continua (y no como un resorte concentrado) de longitud  $a_i$ , de sección de área  $A_i$  y de módulo de elasticidad  $E_i$ . Esta consideración puede ser una aproximación a una barra (tubería) de diámetro variable, ya sea continuamente o "por saltos", de material heterogéneo, esto es, de un material cuyas propiedades no fueran constantes. Se tendría entonces el sistema de la Fig 8

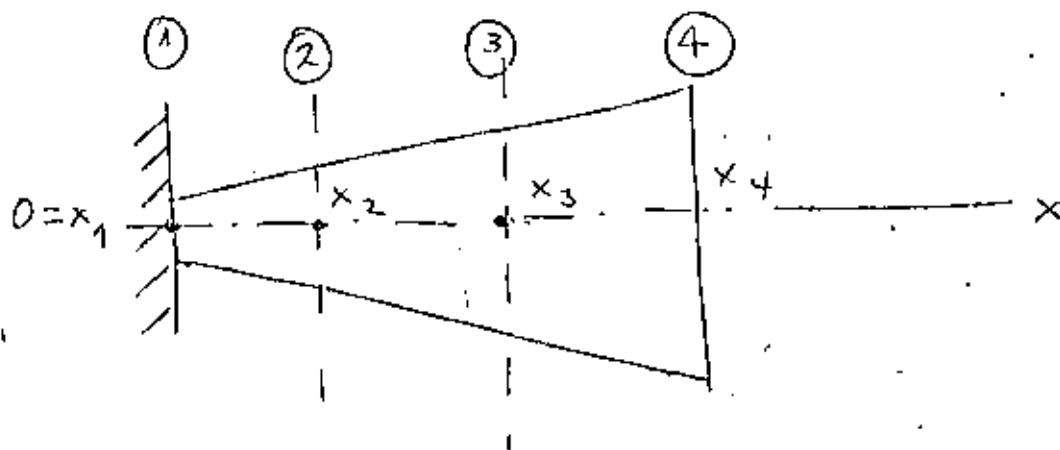


Fig 8 Sistema elástico continuo

Para el análisis de este sistema considérese que cada tramo, entre el nodo  $i$  y el  $i + 1$ , se puede tratar como una barra de sección de área constante  $A_i$ , de longitud  $a_i$  y de módulo elástico constante  $E_i$ . Más aún, considérese que el desplazamiento a lo largo de esta barra elemental tiene una distribución lineal, esto es, es de la forma

$$u(x) = a_{0i} + a_{1i}(x - x_i), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \quad (1.54)$$

Llamando  $u_i$  al desplazamiento en el nodo  $i$ , la expresión (1.54) debe cumplir con las condiciones de frontera

$$u(x_i) = u_i, \quad u(x_{i+1}) = u_{i+1} \quad (1.55)$$

por lo que se obtiene, como valores de  $a_{0i}$  y de  $a_{1i}$ ,

$$a_{0i} = u_i, \quad a_{1i} = \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} \quad (1.56)$$

donde

$$\Delta x_i \equiv x_{i+1} - x_i, \quad \Delta u_i \equiv u_{i+1} - u_i \quad (1.57)$$

Entonces,  $u(x)$  en  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  se puede escribir como un producto escalar (Ver la Sección Algebra de matrices) de dos vectores, en la forma

$$u(x) = \left[ 1 - \frac{x - x_i}{\Delta x_i}, \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (1.58)$$

La expresión anterior se puede simplificar si se introduce la notación

$$\xi_i \equiv x - x_i$$

La ec (1.58) se transforma, entonces, en

$$u(x) = \left[ 1 - \frac{x - x_i}{\Delta x_i}, \frac{x - x_i}{\Delta x_i} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

La deformación en un punto  $x$  de la barra,  $\epsilon$ , que es la derivada de  $u$  con respecto a  $x$  [1, p.37], se puede obtener derivando con respecto a  $x$  la expresión (1.54) :

$$\epsilon \equiv u'(x) = a_{1i} = \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \left[ -\frac{1}{\Delta x_i}, \frac{1}{\Delta x_i} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

El esfuerzo queda expresado, entonces, como [1, p. 69]

$$\sigma = E_i \epsilon = E_i \left[ -\frac{1}{\Delta x_i}, \frac{1}{\Delta x_i} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

La energía potencial elástica  $V_i$  almacenada en el tramo comprendido entre los nodos  $i$  e  $i+1$  es, entonces [1, p. 92]:

$$V_i = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sigma \epsilon A_i dx = \frac{1}{2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} E_i \epsilon^2 A_i dx \quad (1.62)$$

Pero, de las ecs (1.60) y (1.61), en  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ ,

$$\sigma \epsilon = E_i \left( -\frac{u_i}{\Delta x_i} + \frac{u_{i+1}}{\Delta x_i} \right)^2$$

que es independiente de  $x$ , al igual que  $E_i$  y  $A_i$ , por lo que se pueden sacar de la integral, y la expresión para  $V_i$  se reduce a

$$\begin{aligned} V_i &= \frac{1}{2} E_i A_i \left( -\frac{u_i}{\Delta x_i} + \frac{u_{i+1}}{\Delta x_i} \right)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \\ &= \frac{1}{2} E_i A_i \left( -\frac{u_i}{\Delta x_i} + \frac{u_{i+1}}{\Delta x_i} \right)^2 \Delta x_i \quad (1.63) \end{aligned}$$

La energía potencial elástica total del sistema es, entonces, simplificando  $V_i$ ,

$$V = \frac{1}{2} \sum_1^3 V_i = \frac{1}{2} \sum_1^3 \frac{E_i A_i}{\Delta x_i} (-u_i + u_{i+1})^2 \quad (1.64)$$

Llamando

$$k_i = \frac{E_i A_i}{\Delta x_i} \quad (1.65)$$

y desarrollando la expresión (1.64), se tiene.

$$\begin{aligned} 2V &= k_1 (u_2 - u_1)^2 + k_2 (u_3 - u_2)^2 + k_3 (u_4 - u_3)^2 = \\ &= k_1 u_1^2 - 2k_1 u_1 u_2 + (k_1 + k_2) u_2^2 - 2k_2 u_2 u_3 + (k_2 + k_3) u_3^2 \\ &\quad - 2k_3 u_3 u_4 + k_3 u_4^2 \end{aligned} \quad (1.66)$$

La matriz de rigidez de cada elemento, es decir, de cada tramo comprendido entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$  se obtiene como

$$k_i = \frac{\partial^2 V_i}{\partial \tilde{u}_i^2} \quad (1.67)$$

donde  $\tilde{u}_i$  es el vector  $[u_i, u_{i+1}]^T$ . Así, de (1.63),

$$\frac{\partial V_i}{\partial \tilde{u}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V_i}{\partial u_i} \\ \frac{\partial V_i}{\partial u_{i+1}} \end{bmatrix} = k_i \begin{bmatrix} -(-u_i + u_{i+1}) \\ (-u_i + u_{i+1}) \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

por lo que

$$\tilde{k}_i = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \tilde{u}_i^2} = \begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

y la matriz de rigidez global  $\tilde{K}$  se obtiene como

$$\tilde{K} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{u}^2}$$

donde  $\tilde{u} = [u_1, u_2, u_3, u_4]^T$ . Tomando la primera derivada,

$$\frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} = \begin{bmatrix} \partial v / \partial u_1 \\ \partial v / \partial u_2 \\ \partial v / \partial u_3 \\ \partial v / \partial u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 (u_1 - u_2) \\ -k_1 u_1 + (k_1 + k_2) u_2 - k_2 u_3 \\ -k_2 u_2 + (k_2 + k_3) u_3 - k_3 u_4 \\ k_3 (-u_3 + u_4) \end{bmatrix}$$

Tomando las derivadas con respecto a  $\tilde{u}$  de la expresión anterior se tiene

$$\tilde{K} = \frac{\partial^2 v}{\partial \tilde{u}^2} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \quad (1.70)$$

Se observa de la expresión (1.69) que la matriz elemental de rigidez del sistema continuo es idéntica a la del sistema discreto, (1.33). Asimismo, de la expresión (1.70) se observa que la matriz

global de rigidez del sistema continuo es idéntica a la del sistema discreto, (1.46). Por otra parte, el comportamiento estático del sistema continuo de la Fig 7 está gobernado por una ecuación diferencial ordinaria provista de condiciones de frontera dadas. Esta se obtiene a continuación. Sea  $u = u(x)$  el campo (continuo) de desplazamiento. La deformación unitaria, o gradiente de desplazamiento  $\xi(x)$ , se obtiene como  $\xi(x) = u'(x)$ . De la "Ley de Hooke" se obtiene el esfuerzo como  $\sigma(x) = E(x) \xi(x) = E(x) u'(x)$ . Por equilibrio estático,  $\sigma(x)$  debe ser igual a la carga aplicada en el punto  $x$ ,  $q(x)$ , dividida entre el área de la sección en el punto  $x$ ,  $A(x)$ , esto es :

$$E(x) u'(x) = \frac{q(x)}{A(x)} \quad (1.71)$$

o bien

$$u'(x) = \frac{q(x)}{E(x) A(x)} \quad (1.72)$$

con la condición de frontera  $u(0) = 0$ . La obtención de  $u(x)$  para el problema formulado en la forma de la ec (1.72) requiere la integración de una función, mientras que, con el método del elemento finito, requiere la solución de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{f}} \quad (1.73)$$

donde, si se supone  $\underline{\underline{f}}$  conocida,  $\underline{\underline{u}}$  se puede calcular por simple inversión de la matriz  $\underline{\underline{K}}$ , esto es, como

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \underline{\underline{f}} \quad (1.74)$$

En la Sección de Métodos Numéricos se verá que en realidad nunca es necesario invertir la matriz  $\underline{\underline{K}}$  tal como aparece en (1.74).

Por otra parte, de la expresión (1.70) se puede observar que la matriz  $K$  es singular, pues si  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ ,  $f$  resulta ser nula. Para que  $K$  tenga una inversa debe introducirse en el problema la condición de frontera  $u_1 = 0$ .

En suma, el MEF permite llevar la solución de un problema que, en principio requiere la integración de un sistema de ecuaciones diferenciales, a la forma de un problema algebraico, esto es, de un problema que requiere la solución de un sistema de ecuaciones algebraicas. Este sistema, en general, puede ser no lineal. Sin embargo, en una gran clase de problemas el sistema es lineal. El interés por llevar un problema continuo a una forma algebraica estriba en que los sistemas algebraicos, especialmente los lineales, de la forma (1.73), están plenamente estudiados desde el siglo pasado. Más aún, con el advenimiento de las computadoras electrónicas de los años cincuenta, se desarrollaron métodos muy eficaces para resolver estos sistemas, como se verá en la Sección de Métodos Numéricos.



## 1.2 GENERALIDADES SOBRE MATRICES

Una matriz es una tabla rectangular de números o de símbolos dispuestos en renglones y en columnas. Frecuentemente se le representa limitándola con corchetes. A continuación se representa una matriz de  $m$  renglones y  $n$  columnas :

$$\underset{(m \times n)}{\overset{A}{\sim}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mj} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Es necesario señalar que siempre se menciona el número de renglones ( $m$ ) primero. Por consiguiente,  $\underset{\sim}{A}$  es una matriz ( $m \times n$ ).

En los siguientes párrafos se hará frecuente mención de matrices o vectores renglón o columna. Suponiendo que  $m = 1$ , se tiene

una matriz renglón o un vector renglón

$$\underset{\sim}{A} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{1j} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{1n}]$$

Sin embargo, si se supone que  $n = 1$ , se obtiene

una matriz columna o un vector columna

$$\tilde{A} = [a_{11} \quad a_{21} \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{j1} \quad \cdot \quad \cdot \quad a_{m1}]^T = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{j1} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Existen matrices especiales que es necesario mencionar.

Matriz diagonal

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & a_{22} & 0 & 0 \\ & & a_{33} & 0 \\ \text{simétrica} & & & a_{44} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j$$

Otra notación sería

$$\tilde{A} = \text{diag} (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44})$$

Matriz identidad

Dicha matriz es un caso especial del de arriba. En el caso de una matrix  $3 \times 3$ , por ejemplo, se tiene

$$\tilde{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sim} & & 1 \end{bmatrix} = \text{diag} (1, 1, 1)$$

Matriz bandeda

Se aplica la denominación "matriz bandeda" cuando todos elementos de una matriz que no son iguales a 0 están colocados alrededor de la diagonal principal. Por ejemplo :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n, n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular

Se dice de una matriz que es triangular superior (S) o inferior (I) cuando la totalidad de sus elementos situados ya sea arriba o abajo de la diagonal principal es igual a cero.

$$\begin{matrix} \text{I} \\ (n \times n) \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz simétrica

En una matriz simétrica,  $a_{ij}$  es siempre igual a  $a_{ji}$ . En mecánica estructural lineal por ejemplo, todas las matrices de rigidez son simétricas.

Matriz transpuesta

Se obtiene una matriz transpuesta cuando se cambian renglones por columnas, como por ejemplo

$$\underset{(2 \times 3)}{\tilde{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Así, la matriz transpuesta de  $\tilde{A}$ , es

$$\underset{(3 \times 2)}{\tilde{A}^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Además,

$$\underset{\sim}{(\tilde{A}^T)^T} = \underset{\sim}{A}$$

y, en el caso de matrices simétricas,

$$\underset{\sim}{A^T} = \underset{\sim}{A}$$

Subdivisión de matrices

Las matrices muy grandes de, por ejemplo, 5 000 x 5 000 que contienen 25 millones de elementos, tienen necesariamente que subdividirse en matrices más pequeñas, como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \vdots & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \vdots & a_{23} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \vdots & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_{11} & \underset{\sim}{A}_{12} \\ \underset{\sim}{A}_{21} & \underset{\sim}{A}_{22} \end{bmatrix}$$

donde

$$\underset{(2 \times 2)}{A_{11}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \underset{(2 \times 1)}{A_{12}} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1 \times 2)}{A_{21}} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \underset{(1 \times 1)}{A_{22}} = \begin{bmatrix} a_{35} \end{bmatrix}$$

### Operaciones con matrices

En el cálculo, es posible procesar matrices de la misma manera en que se procesan normalmente los datos numéricos. Se indican más abajo las definiciones necesarias.

#### Igualdad de matrices

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{B}$$

significa que, para toda  $i$  y toda  $j$ ,  $a_{ij} = b_{ij}$ .

#### Adición y sustracción

Si

$$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{C}$$

entonces

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Por consiguiente, en el caso de sustracción, se obtiene

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}.$$

Multiplicación de matrices

Si se debe multiplicar una matriz por un factor  $c$ , cada elemento debe multiplicarse por  $c$ , por ejemplo

$$[cA] = [ca_{ij}]$$

Cuando se multiplican dos matrices es condición sine qua non que sus dimensiones sean compatibles. Si, por ejemplo, la matriz  $\underline{A}$  de  $m \times n$  debe multiplicarse por la matriz  $\underline{B}$  de  $p \times q$ , es necesario que  $n = p$ , esto es, el número de renglones  $n$  contenido en  $\underline{A}$  debe ser igual al número de columnas  $p$  contenidas en  $\underline{B}$ . Así,

$$\begin{matrix} \underline{A} & \underline{B} & = & \underline{C} \\ (m \times n) & (p \times q) & & (m \times q) \end{matrix}$$

y

$$c_{ij} = a_{ir} b_{rj} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, q \\ r = 1, 2, \dots, n = p \end{matrix}$$

Otro ejemplo sería

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \end{bmatrix}$$

### Valores característicos

Dada una matriz cuadrada  $\underline{A}$  de  $n \times n$  y un vector  $\underline{u}$  de dimensión  $n$  sobre el que opera  $\underline{A}$ , el producto

$$\underline{v} = \underline{A} \underline{u}$$

es un vector también de dimensión  $n$ . En general,  $\underline{v}$  es muy diferente de  $\underline{u}$ . Si, por ejemplo,  $\underline{v}$  resulta nulo para valores particulares de  $\underline{u} \neq \underline{0}$ , se dice que  $\underline{v}$  es un vector del espacio nulo de  $\underline{A}$ . Por ejemplo, sea

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un vector del espacio nulo de  $\underline{A}$  es, claramente,

$$\underline{u} = [x, 0]^T = x[1, 0]^T$$

Se observa que si se multiplica el vector  $\underline{w} = [1, 0]^T$  por el escalar  $x$ , se obtiene una infinidad de vectores del espacio nulo de  $\underline{A}$ , uno para cada valor que pueda adquirir  $x$ . Sin embargo,  $\underline{w}$  es el único vector de magnitud unitaria que pertenece al espacio nulo de  $\underline{A}$ . Por esto se puede decir que  $\underline{w}$  es una base normal de este espacio. En general, el espacio nulo de una matriz de  $n \times n$  tiene una base compuesta por  $m \leq n$  vectores. Si estos vectores se seleccionan de magnitud unitaria y mutuamente ortogonales, se dice que la base es ortonormal. Las matrices no singulares tienen un espacio nulo de dimensión cero, esto es, no existe ningún vector no nulo que sea transformado por ellas en  $\underline{0}$ .

Por otra parte, puede darse el caso que el vector  $\underline{v} = \underline{A} \underline{u}$  sea linealmente dependiente con  $\underline{u}$ , esto es, que uno resulte de multiplicar

el otro por una constante. En esta discusión se deja fuera el vector  $\underline{u} = \underline{0}$ . En estas condiciones, se tiene

$$\underline{A} \underline{u} = \lambda \underline{u} \quad (*)$$

donde  $\lambda$  es un escalar, en general, complejo. Nótese que la ecuación anterior se puede escribir en la forma

$$(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{u} = \underline{0}$$

donde  $\underline{I}$  es la matriz identidad de  $n \times n$ . Para que  $\underline{u} \neq \underline{0}$  satisfaga la ecuación anterior, debe pertenecer al espacio nulo de  $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ . Ahora bien, para que  $\underline{A} - \lambda \underline{I}$  tenga un espacio nulo no vacío, esto es, para que existan vectores  $\underline{u} \neq \underline{0}$  tales que  $(\underline{A} - \lambda \underline{I}) \underline{u} = \underline{0}$ ,  $\underline{A} - \lambda \underline{I}$  debe ser singular. Para que sea singular, su determinante debe anularse, esto es, debe tenerse

$$\det (\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$$

Pero el determinante en cuestión, esto es, el miembro izquierdo de la ecuación anterior, es un polinomio de orden  $n$  en  $\lambda$ , si  $\underline{A}$  es de  $n \times n$ . Llamando  $P_n(\lambda)$  a este polinomio, la ecuación anterior es

$$P_n(\lambda) = 0$$

Si  $\underline{A}$  es una matriz de elementos reales,  $P_n(\lambda)$  es un polinomio de coeficientes reales y, por el Teorema Fundamental del Algebra [4], posee  $n$  raíces complejas, de las cuales algunas pueden aparecer repetidas. Las  $n$  raíces del polinomio  $P_n(\lambda)$ , llamado polinomio característico de  $\underline{A}$ , reciben el nombre de valores característicos de  $\underline{A}$ . Si cada valor característico de  $\underline{A}$  se sustituye en la ec (\*), se obtiene un conjunto de vectores  $\underline{u}_i$  correspondientes que se llaman vectores característicos de  $\underline{A}$ . Nótese que si se conoce un vector característico  $\underline{e}_i$ , esto es, si

$$\underline{A} \underline{e}_i = \lambda_i \underline{e}_i$$



entonces el producto de éste por un escalar (en general, complejo) es otro vector característico de  $\underline{A}$ , lo cual puede comprobarse por sustitución del nuevo vector en la ecuación anterior. Entonces, a cada valor característico  $\lambda_i$  de  $\underline{A}$  corresponde una infinidad de vectores característicos. Sin embargo, no todos éstos interesan, sino sólo aquéllos que son linealmente independientes. Un conjunto de vectores  $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \}$  es linealmente independiente si la combinación lineal

$$\underline{v} = c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_m \underline{v}_m$$

se anula si, y sólo si, todos y cada uno de los escalares  $c_i$  se anulan. De lo contrario, el conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo 1.2.1. Sea la matriz

$$\underline{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Su polinomio característico es

$$P_3(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 1)$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\pi/3}$$

donde  $i$  es la unidad imaginaria  $i = \sqrt{-1}$ .

El Ejemplo 1.2.1 mostró que la matriz en cuestión tiene dos valores característicos complejos que, como consecuencia del Teorema Fundamental del Algebra, son conjugados. Si la matriz aludida

es simétrica, se puede demostrar [ 5 ] que sus valores característicos son reales y sus vectores característicos son mutuamente ortogonales. En consecuencia, una matriz simétrica de  $n \times n$  siempre puede expresarse con respecto a una base (esto es, un conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes), que resulta ser su conjunto de vectores característicos, en la que adquiere la forma diagonal.

Ejemplo 1.2.2. Sea la matriz

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es simétrica y por lo tanto tiene valores característicos reales y vectores característicos ortogonales. En efecto, su polinomio característico es

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) &= \det(\tilde{A} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= -\lambda(3 - \lambda) - 4 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

cuyas raíces son

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$$

Denótense sus vectores característicos correspondientes por

$$\tilde{e}_1 = \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix}, \quad \tilde{e}_2 = \begin{bmatrix} e_{12} \\ e_{22} \end{bmatrix}$$

Estos se calculan de las relaciones

$$(\tilde{A} - \lambda_i I)\tilde{e}_i = \underline{0}$$

De ahí

$$(\underline{\Lambda} - \underline{\tilde{\lambda}}_1 \underline{I}) \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo que

$$e_{11} + 2e_{21} = 0$$

y

$$e_{21} = -\frac{1}{2} e_{11}$$

Imponiendo la condición

$$e_{11}^2 + e_{21}^2 = 1$$

se tiene

$$e_{11}^2 + \frac{1}{4} e_{11}^2 = 1 \Rightarrow e_{11} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow e_{21} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Análogamente se obtiene

$$e_{12} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad e_{22} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

El problema de valores característicos reviste particular importancia en Mecánica. En efecto, la determinación de las frecuencias y los modos naturales de vibración de sistemas mecánicos (Ver, p. . ej. [ 6 ]). La determinación de tales modos y frecuencias para sistemas mecánicos de parámetros distribuidos, mediante el MEF conduce a un problema de valores característicos, como se verá posteriormente en este curso.

Formas cuadráticas

El escalar definido por la expresión

$$\underset{\sim}{f} = \underset{\sim}{u}^T \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{u}$$

donde  $\underset{\sim}{A}$  es una matriz de  $n \times n$  y  $\underset{\sim}{u}$ , un vector de dimensión  $n$ , recibe el nombre de forma cuadrática. Esta forma es equivalente a la forma escalar  $au^2$ . De esta última expresión se puede concluir una propiedad interesante de la forma cuadrática  $f$  antes definida. Nótese que, si  $a$  y  $u$  son reales,  $au^2$  es una expresión cuyo signo depende enteramente de  $a$ , y no de  $u$ . Análogamente, el signo de la forma cuadrática  $f$  depende enteramente de  $\underset{\sim}{A}$  y no de  $\underset{\sim}{u}$ , si ambos tienen elementos reales (o bien, si, aunque  $\underset{\sim}{A}$  tenga elementos complejos, es idéntica a la matriz obtenida de transponerla y luego tomar el conjugado de cada uno de sus elementos).

Se dice que  $\underset{\sim}{A}$  es

- positiva definida, si  $f > 0, \forall \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$  (D 1)
- positiva semidefinida, si  $f \geq 0, \forall \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$  (D 2)
- negativa definida, si  $f < 0, \forall \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$  (D 3)
- negativa semidefinida, si  $f \leq 0, \forall \underset{\sim}{u} \neq \underset{\sim}{0}$  (D 4)

De otra forma,  $\underset{\sim}{A}$  es de signo indefinido. Las matrices positivas definidas y semidefinidas juegan un papel importante en la Mecánica, pues están asociadas o bien a cantidades intrínsecamente positivas, como la energía cinética de un vehículo en movimiento, o bien a cantidades intrínsecamente no negativas, como la energía potencial almacenada en la suspensión de un vehículo, medida desde su estado descargado.

Nótese que las definiciones (D 1) a (D 4) no proporcionan un medio práctico para determinar si una matriz es positiva definida, por ejemplo, pues según ellas, sería necesario probar el signo de  $f$  para todos y cada uno de los valores posibles de  $u \neq 0$ . Sin embargo, la caracterización del signo de una matriz se puede conseguir a través de sus valores característicos, según lo siguiente :

Una matriz  $\tilde{A}$  es

- positiva definida, si todos sus valores característicos son positivos,
- positiva semidefinida, si ninguno de sus valores característicos es negativo
- negativa definida, si todos sus valores característicos son negativos
- negativa semidefinida, si ninguno de sus valores característicos es positivo.

Derivadas de funciones de varias variables

Dada la función  $g = g(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , escrita en forma compacta como  $g = g(\underline{u})$ , se dice que  $g$  es una función escalar de variable vectorial. El gradiente de  $g$ , representado por  $\nabla g$  o por  $\partial g / \partial \underline{u}$ , es el vector de dimensión  $n$  definido por

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \underline{u}} = \begin{bmatrix} \partial g / \partial u_1 \\ \partial g / \partial u_2 \\ \vdots \\ \partial g / \partial u_n \end{bmatrix}$$

Sea el conjunto de funciones

$$h_1 = h_1(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$h_2 = h_2(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

.

.

.

$$h_m = h_m(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

Esto se representa en forma compacta como  $\underline{h} = \underline{h}(\underline{u})$ , donde, obviamente,  $\underline{h}$  y  $\underline{u}$  son vectores de dimensiones  $m$  y  $n$ , respectivamente. Se dice, entonces, que  $\underline{h}$  es una función vectorial de argumento vectorial. El gradiente de  $\underline{h}$ , representado por  $\nabla \underline{h}$  o  $\partial \underline{h} / \partial \underline{u}$ , es la matriz de  $m \times n$  definida por

$$\nabla \underline{h} = \frac{\partial \underline{h}}{\partial \underline{u}} = \begin{bmatrix} h_1 / u_1 & h_1 / u_2 & \dots & h_1 / u_n \\ h_2 / u_1 & h_2 / u_2 & \dots & h_2 / u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_m / u_1 & h_m / u_2 & \dots & h_m / u_n \end{bmatrix}$$

Si resulta que

$$\tilde{h} = \nabla g$$

entonces  $\tilde{h}$  es de dimensión  $m = n$ , donde  $n$  es la dimensión de  $u$ . Entonces,  $\nabla \tilde{h} = \nabla \nabla g$ , es la matriz Hessiana de  $g$  y es de  $n \times n$ .

Volviendo a la función  $g = g(u)$ , ésta alcanza un valor estacionario en un "punto"  $u_0$  en el que su gradiente se anula. Este valor puede ser un extremo local o un punto silla. Es un extremo local si la matriz Hessiana de  $g$ ,  $\nabla \nabla g$ , es de signo semidefinido. De hecho, es un máximo local si  $\nabla \nabla g$  es negativa semidefinida, mientras que es un mínimo local si  $\nabla \nabla g$  es positiva semidefinida. Si esa matriz Hessiana es de signo indefinido, el punto estacionario en cuestión es un punto silla. El resultado anterior no es más que el resultado ampliamente conocido del cálculo elemental, que se ilustra en la Fig 1.2.1

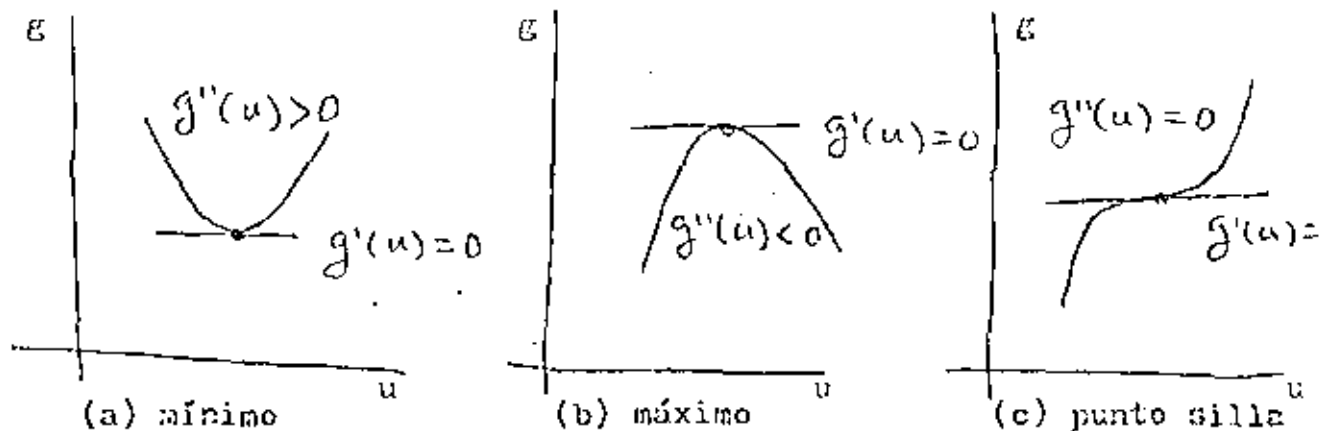


Fig 1.2.1 Puntos estacionarios de una función escalar de argumento escalar.

1.3 MÉTODOS NUMÉRICOS

A continuación se presenta un esbozo de los métodos numéricos aplicables al problema

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{b}} \quad (1.3.1)$$

donde  $\underline{\underline{A}}$  es de  $n \times n$ . Otro problema frecuente en cálculos de elemento finito es el de valores característicos

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{u}} = \lambda \underline{\underline{u}} \quad (1.3.2)$$

Sin embargo, dadas las limitaciones de tiempo de este curso, el segundo problema no será tratado.

Para resolver el problema (1.3.1) existen dos amplias clases de métodos :

- métodos directos
- métodos iterativos.

Estas dos clases de métodos resuelven el sistema (1.3.1), esto es, calculan el valor que deben tener todos los componentes de  $\underline{\underline{u}}$ , para valores dados de  $\underline{\underline{A}}$  y de  $\underline{\underline{b}}$ , de manera tal que se satisfagan todas las ecuaciones del sistema (1.3.1). Los métodos directos resuelven el problema en cuestión mediante una secuencia de operaciones bien definidas que se aplican una sola vez. Los métodos iterativos resuelven este mismo problema aplicando un ciclo de operaciones reiteradamente, hasta aproximar la solución de manera satisfactoria. Cada ciclo recibe el nombre de iteración.

En este punto es necesario hacer la siguiente observación : en teoría es posible resolver el sistema 1.3.1 mediante un tercer método, llamado "regla de Cramer", en la forma

$$u_i = \frac{\det \underline{\underline{A}}_i}{\det \underline{\underline{A}}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.3.3)$$



En la expresión anterior,  $\tilde{A}_i$  es la matriz que se obtiene sustituyendo la  $i^{\text{a}}$  columna de  $\tilde{A}$  por el vector  $\underline{b}$ . Este método requiere, entonces, el cálculo de  $n + 1$  determinantes. En seguida se determina el número de multiplicaciones requerido para calcular un determinante de  $n \times n$  y, de ahí, el tiempo de ejecución requerido por la "regla de Cramér". En una computadora digital de alta velocidad una multiplicación consume un tiempo del orden de  $10^{-4}$  segundos, mientras que una suma o una resta, un tiempo de un orden mucho menor; por esta razón, en lo que sigue se considera como "operación", una multiplicación, quedando las sumas y restas sin contabilizarse.

Existen varias formas de calcular un determinante. Aquí se empleará la conocida como expansión por cofactores. Dada una matriz  $\tilde{A}$  de  $n \times n$ , cuyo elemento  $(i, j)$  se representa por  $a_{ij}$ , el cofactor de  $a_{ij}$  es el producto de  $(-1)^{i+j}$  por el determinante de la matriz de  $(n-1) \times (n-1)$ , obtenida al eliminar de  $\tilde{A}^T$  el  $i^{\text{o}}$  renglón y la  $j^{\text{a}}$  columna. Llámese  $c_{ij}$  al cofactor de  $a_{ij}$ . Se tiene, entonces,

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \dots + a_{1n}c_{1n} = \\ &= a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \dots + a_{nj}c_{nj} \end{aligned}$$

El cálculo del determinante de una matriz de  $2 \times 2$  se realiza, desde luego, sencillamente como

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

que requiere 2 operaciones.

Ahora, para una matriz de  $3 \times 3$ , expandiendo su determinante por cofactores de su primer renglón, se tiene

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13}$$

que requiere 3 operaciones. Cada cofactor  $c_{1i}$ , que es un determinante de  $2 \times 2$ , requiere a su vez 2 operaciones, como se acaba de ver, por lo que el cálculo de este determinante requiere  $3 \times 2$  operaciones. No es difícil demostrar, siguiendo este camino, que el cálculo de un determinante de  $n \times n$  requiere  $n!$  operaciones. En suma, la solución del sistema (1.3.1) mediante la "regla de Cramer" requiere  $n!(n+1) = (n+1)!$  operaciones. Suponiendo que el sistema en cuestión contuviera 25 ecuaciones con 25 incógnitas, su solución mediante este método requeriría  $26!$  operaciones, que es un número muy grande, del orden de  $10^{27}$ . Si cada operación requiere  $10^{-4}$  segundos, el total de operaciones requiere, entonces, un tiempo de ejecución de  $10^{23}$  segundos. Para tener una idea de la magnitud de este tiempo, baste decir que, si se admite que el universo tiene una vida de  $10^{17}$  segundos [7], el tiempo requerido para resolver el sistema (1.3.1) con 25 incógnitas utilizando una computadora rápida, es ; un millón de veces la vida del universo! Sobra decir que, hasta el momento, ningún ser humano ha resuelto jamás un sistema lineal de 25 ecuaciones con 25 incógnitas utilizando la regla de Cramer. Sin embargo, tratándose de resolver problemas elásticos mediante el MEF, es común llegar a sistemas de ecuaciones de la forma (1.3.1) con mil incógnitas. En lo que sigue se presentan métodos numéricos prácticos utilizados en la solución de tales sistemas.

El método directo empleado actualmente para resolver sistemas como el (1.3.1) es el de eliminación de Gauss. Este método es equivalente al método llamado LU por los angloparlantes (L, de "lower", que quiere decir inferior ; U, de "upper", que quiere decir superior). Este método se ilustra con un ejemplo de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 &= b_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 &= b_2 \\ a_{31}u_1 + a_{32}u_2 + a_{33}u_3 &= b_3 \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Divídase ambos miembros de la segunda ecuación entre  $a_{21}$  y multiplíqueseles por  $a_{11}$ . Procédase, en seguida, con la 3a. ecuación en forma semejante, excepto que, en vez de dividírseles entre  $a_{21}$ , divídaseles entre  $a_{31}$ . Se tiene, entonces

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{11}\frac{a_{22}}{a_{21}}u_2 + a_{11}\frac{a_{23}}{a_{21}}u_3 &= a_{11}\frac{b_2}{a_{21}} \\ a_{11}u_1 + a_{11}\frac{a_{32}}{a_{31}}u_2 + a_{11}\frac{a_{33}}{a_{31}}u_3 &= a_{11}\frac{b_3}{a_{31}} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

A continuación, réstese la 1a. ecuación de (1.3.4) de cada una de las ees (1.3.5). Se tiene

$$\begin{aligned} \left(a_{11}\frac{a_{22}}{a_{21}} - a_{12}\right)u_2 + \left(a_{11}\frac{a_{23}}{a_{21}} - a_{13}\right)u_3 &= a_{11}\frac{b_2}{a_{21}} - b_1 \\ \left(a_{11}\frac{a_{32}}{a_{31}} - a_{12}\right)u_2 + \left(a_{11}\frac{a_{33}}{a_{31}} - a_{13}\right)u_3 &= a_{11}\frac{b_3}{a_{31}} - b_2 \end{aligned}$$

Por sencillez, escríbase el sistema anterior en la forma

$$\begin{aligned} a'_{22}u_2 + a'_{23}u_3 &= b'_2 \\ a'_{32}u_2 + a'_{33}u_3 &= b'_3 \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Ahora procédase como con el sistema (1.3.4), esto es, divídase la 2a. ecuación de (1.3.6) entre  $a'_{32}$  y multiplíquese por  $a'_{22}$ . Se tiene

$$a'_{22}u_2 + a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}}u_3 = a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} \quad (1.3.7)$$

Réstese a continuación la 1a. ecuación de (1.3.6) de la última ecuación, obteniéndose

$$\left(a'_{22}\frac{a'_{33}}{a'_{32}} - a'_{23}\right)u_3 = a'_{22}\frac{b'_3}{a'_{32}} - b'_2$$

que se puede escribir en forma simplificada como

$$a''_{33}u_3 = b''_3$$

de donde

$$u_3 = \frac{b''_3}{a''_{33}}$$

es el valor de la 3a. incógnita. La segunda se obtiene sustituyendo este valor en la ec (1.3.7), que contiene ahora una sola incógnita,  $u_2$ . Esta se obtiene despejándola en la forma

$$u_2 = \frac{1}{a'_{22}} \left( a'_{22} \frac{b'_3}{a'_{32}} - a'_{22} \frac{a'_{33}}{a'_{32}} u_3 \right)$$

Finalmente, sustitúyanse los valores obtenidos de  $u_2$  y  $u_3$  en la ecuación de (1.3.4). Se obtiene  $u_1$  como

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}u_2 - a_{13}u_3)$$

quedando así totalmente resuelto el problema.

El esquema anterior es básicamente el método de eliminación de Gauss. Sin embargo, aplicado tal y como se presentó, puede causar dificultades si alguno de los dividendos es cero, o un número muy pequeño. Para eliminar esta posibilidad, se escogen como dividendos los números más grandes de cada columna de la matriz  $A$ , lo cual equivale a reordenarlas. Este proceso es conocido como pivoteo parcial, para distinguirlo del pivoteo total, que consiste en buscar el número más grande no sólo en cada columna, sino también en cada renglón. Si en el proceso resulta que el número más grande es cero, o un número tan pequeño que la máquina lo tome como cero, el método no se puede aplicar, lo cual indica no otra cosa sino que el sistema es singular, esto es, que  $\det A = 0$ . En este caso es imposible resolver el sistema, independientemente del método empleado.

Este método se realiza en computadora utilizando el concepto de descomposición LU, que se basa en el Teorema de Descomposición que establece que toda matriz  $\underline{A}$  de  $n \times n$  se puede factorizar en el producto de una matriz triangular inferior  $\underline{L}$  y una triangular superior  $\underline{U}$ . La matriz  $\underline{L}$  contiene unos en su diagonal y ceros arriba de ella, mientras que la  $\underline{U}$  contiene en su diagonal los valores singulares de  $\underline{A}$ , que son las raíces positivas de los valores característicos (positivos todos ellos) de la matriz  $\underline{A} \underline{A}^T$  y ceros abajo de su diagonal.  $\underline{L}$  y  $\underline{U}$  son, entonces, matrices de la forma

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \cdot \underline{U} = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdot & \cdot & u_{1n} \\ & 2 & & & 2n \\ & & \cdot & & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & n \end{bmatrix}$$

El Teorema de Descomposición en cuestión establece, entonces, que

$$\underline{A} = \underline{L} \underline{U}$$

El sistema (1.3.1) de esta manera adopta la forma

$$\underline{L} \underline{U} \underline{u} = \underline{b} \quad (1.3.8)$$

Llámesse

$$\underline{U} \underline{u} = \underline{v} \quad (1.3.9)$$

Sustituyendo este valor en la ec (1.3.8) se tiene

$$\underline{L} \underline{v} = \underline{b} \quad (1.3.9)$$

que, en forma de componentes, adopta la forma

$$\begin{aligned}
 & v_1 = b_1 \\
 & l_{21}v_1 + v_2 = b_2 \\
 & \vdots \\
 & l_{n1}v_1 + l_{n2}v_2 + \dots + v_n = b_n
 \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

de donde la primera incógnita,  $v_1$ , ya está despejada en la primera ecuación. La segunda incógnita se despeja de la 2a. ecuación, en donde se ha sustituido previamente el valor calculado de  $v_1$ . Procediendo en forma semejante con el resto de las ecuaciones de (1.3.10) se obtienen todos los componentes del vector  $\underline{v}$  de (1.3.9). Sustituyendo ahora este vector, ya conocido, en la ec (1.3.9) se tiene el sistema

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 u_1 + u_{12}u_2 + \dots + u_{1n}u_n &= v_1 \\
 \sigma_2 u_2 + \dots + \sigma u_{2n}u_n &= v_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 \sigma_{n-1} u_{n-1} + u_{n-1,n}u_n &= v_{n-1} \\
 \sigma_n u_n &= v_n
 \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

De la última ecuación de (1.3.11) se tiene

$$u_n = \frac{v_n}{\sigma_n}$$

Sustituyendo este valor en la penúltima ecuación de (1.3.11) se tiene

$$u_{n-1} = \frac{1}{\sigma_{n-1}} (\sigma_{n-1} - u_{n-1,n}u_n)$$

Procediendo en este orden regresivo con las restantes  $n - 2$  ecuaciones se calculan todos los componentes de  $\underline{u}$ , con lo que queda resuelto el problema.

Este método ha sido realizado en diversos subprogramas de computadora. Los más eficientes son los llamados DECOMP y SOLVE [8]. DECOMP produce la descomposición LU de  $\underline{A}$ , mientras que SOLVE, la solución regresiva de los sistemas triangulares (1.3.10) y (1.3.11).

Una ventaja de estos programas es que, una vez descompuesta la matriz  $\underline{A}$ , se puede resolver una serie de sistemas de la forma

$$\underline{A} \underline{u}_1 = \underline{b}_1, \underline{A} \underline{u}_2 = \underline{b}_2, \dots, \underline{A} \underline{u}_m = \underline{b}_m \quad (1.3.12)$$

sin tener que volver a descomponer  $\underline{A}$ , cuya descomposición no depende del miembro derecho de las ees (1.3.12). Todo lo que tiene que hacerse es aplicar  $m$  veces la subrutina SOLVE, la que consume la menor parte del tiempo total. La mayor parte del tiempo se utiliza en la descomposición de  $\underline{A}$ . Este método requiere un número de operaciones del orden de  $n^3$ . Así, para resolver el sistema anteriormente presentado de 25 ecuaciones, con este método se requiere ejecutar  $25^3 = 15\,625$  operaciones, lo cual consume en una computadora rápida algo así como 1.6 segundos, que es una cantidad sustancialmente por abajo de la anterior.

El problema de resolver  $m$  sistemas de ecuaciones de la forma (1.3.12) en relación con el MEF se presenta en aplicaciones de diseño de ingeniería cuando se desea conocer la distribución del esfuerzo en una misma estructura o en una misma máquina sujeta a diferentes condiciones de carga que se puedan presentar en operación.

Volviendo a las aplicaciones del MEF, la matriz  $\underline{A}$  viene a ser la matriz global de rigidez que, como ya se vio, tiene propiedades particulares como simetría y positividad definida. Para este tipo de

matrices, el método de Gauss, o LU, se simplifica sustancialmente. La versión simplificada recibe el nombre de método de Cholesky. Ya que la matriz de rigidez es positiva definida, se puede descomponer en la forma

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{G}^T \underset{\sim}{G}$$

donde  $\underset{\sim}{G}$  es una matriz triangular superior. Por otra parte, la estructura bandeda de esta matriz aporta ventajas adicionales que redundan en una solución más económica. En efecto, el tiempo de solución de una matriz bandeda de ancho de banda  $d$ , es del orden de  $n^2 d$ . Como normalmente el ancho de banda de una matriz es algunos órdenes de magnitud inferior a su número de renglones y columnas, esto es,  $d \ll n$ , la economía de ejecución es evidente. Así, por ejemplo, una matriz de rigidez típica de 5 000 x 5 000 puede tener un ancho de banda de 100. Si se utilizara el método de descomposición LU directamente, se realizarían algo así como  $6.25 \times 10^{11}$  operaciones, muchas de ellas inútiles, pues involucrarían multiplicaciones por cero. Explotando la naturaleza bandeda de la matriz, el número de operaciones requerido sería del orden de  $2.5 \times 10^8$ , es decir, 3 órdenes de magnitud inferior al anterior. Más aún, el orden de numeración de los nodos de una malla de elemento finito afecta enormemente el ancho de banda,  $d$ , de la matriz de rigidez. Existe, entonces, un orden de numeración (que no es único) óptimo que proporciona un ancho de banda mínimo. En el mercado se pueden obtener diferentes preprocesadoras que se encargan de proporcionar el ancho de banda mínimo, como el programa BANN, desarrollado en la Universidad de Manchester.

Por su parte, los métodos iterativos se basan en el esquema siguiente : descomóngase la matriz  $\underset{\sim}{A}$  en la forma

$$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{E} - \underset{\sim}{F} \quad (1.3.13)$$

donde  $\underset{\sim}{D}$  es diagonal, mientras que  $\underset{\sim}{E}$  y  $\underset{\sim}{F}$  son matrices estrictamente triangular inferior y superior, respectivamente, esto es, tienen ceros



en su diagonal. De esta manera, el sistema (1.3.1) se puede escribir como

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}} = (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{F}}) \underline{\underline{u}} + \underline{\underline{b}} \quad (1.3.14)$$

Dado un valor inicial arbitrario  $\underline{\underline{u}}^0$ , genérese la secuencia

$$\underline{\underline{D}} \underline{\underline{u}}^{k+1} = (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{F}}) \underline{\underline{u}}^k + \underline{\underline{b}} \quad (1.3.15)$$

o bien

$$\underline{\underline{u}}^{k+1} = \underline{\underline{D}}^{-1} (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{F}}) \underline{\underline{u}}^k + \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{b}} \quad (1.3.16)$$

donde  $\underline{\underline{D}}$  es invertible si  $\underline{\underline{A}}$  lo es. El esquema iterativo (1.3.16) constituye el método de Jacobi, llamándose  $\underline{\underline{D}}^{-1} (\underline{\underline{E}} + \underline{\underline{F}})$  matriz de Jacobi. Este esquema tiene la desventaja de que requiere almacenar el valor anterior de  $\underline{\underline{u}}^k$  y el actual  $\underline{\underline{u}}^{k+1}$ . Lo lógico sería utilizar, para el cálculo de la  $i^{\text{a}}$  componente de  $\underline{\underline{u}}^{k+1}$ ,  $u_i^{k+1}$ , todos los valores actualizados de las componentes anteriores:  $u_1^{k+1}$ ,  $u_2^{k+1}$ , ...,  $u_{i-1}^{k+1}$ , destruyendo las componentes viejas  $u_1^k$ ,  $u_2^k$ , ...,  $u_{i-1}^k$ . De esta suerte, el esquema iterativo (1.3.16) se sustituye por

$$\underline{\underline{u}}^{k+1} = (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} \underline{\underline{F}} \underline{\underline{u}}^k + (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} \underline{\underline{b}} \quad (1.3.17)$$

El esquema iterativo (1.3.17) recibió el nombre de método de Gauss-Seidel, mientras que la matriz  $(\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} \underline{\underline{F}}$ , el de matriz de Gauss-Seidel. Este método posee, además, la ventaja de que con él se aproxima la solución más rápidamente, esto es, converge más rápidamente a la solución. Escríbase los esquemas (1.3.16) y (1.3.17) en la forma

$$\underline{\underline{u}}^{k+1} = \underline{\underline{J}} \underline{\underline{u}}^k + \underline{\underline{D}}^{-1} \underline{\underline{b}} \quad (1.3.18)$$

y

$$\underline{\underline{u}}^{k+1} = \underline{\underline{G}} \underline{\underline{u}}^k + (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}})^{-1} \underline{\underline{b}} \quad (1.3.19)$$

Ahora se determina la evolución del error para cada esquema. Para el de Jacobi, si  $u^*$  es la solución, entonces satisface (1.3.18) con  $\tilde{u}^{k+1} = \tilde{u}^k = \tilde{u}^*$ , esto es

$$\tilde{u}^* = \tilde{J} \tilde{u}^* + \tilde{D}^{-1} \tilde{b} \quad (1.3.20)$$

Llámesse  $\tilde{e}^k$  al error  $\tilde{u}^k - u^*$  en la  $k$  a. iteración. Restando (1.3.20) de (1.3.18) se tiene

$$\tilde{e}^{k+1} = \tilde{J} \tilde{e}^k \quad (1.3.21)$$

Del hecho que

$$\begin{aligned} \tilde{e}^1 &= \tilde{J} \tilde{e}^0 \\ \tilde{e}^2 &= \tilde{J} \tilde{e}^1 = \tilde{J}^2 \tilde{e}^0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

se concluye que \*\*

$$\tilde{e}^k = \tilde{J}^k \tilde{e}^0 \quad (1.3.22)$$

cuya evolución sólo depende de  $\tilde{J}$ . Se dice que  $\tilde{J}$  es convergente si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{J}^k = \tilde{0}$ . Así, para  $\tilde{J}$  convergente,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{e}^k = \tilde{0}$ . Se observa que

$\tilde{J}$  es convergente cuando se va haciendo más y más pequeña a medida que se le eleva a potencias más altas. Así como un número real de valor absoluto menor que 1 se va haciendo cada vez más pequeño a medida que se le eleva a potencias más altas, una matriz es

---

\*\* En  $\tilde{e}^k$ ,  $k$  es superíndice, mientras que  $\tilde{J}^k$ , exponente

convergente si los valores absolutos de todos sus valores característicos son estrictamente menores que 1. Al máximo valor absoluto de los valores característicos de una matriz  $A$  se le llama "radio espectral" y se representa por  $\rho$ . Así

$$\rho(\tilde{A}) = \max_i \{ |\lambda_i| \} \quad (1.3.23)$$

Entonces, el esquema iterativo de Jacobi converge si

$$\rho(\tilde{J}) < 1 \quad (1.3.24)$$

Análogamente, el error del esquema iterativo de Gauss-Seidel (1.3.19) adopta la forma

$$\tilde{e}^{k+1} = \tilde{G}^k \tilde{e}^0 \quad (1.3.25)$$

por lo que este esquema converge si

$$\rho(\tilde{G}) < 1 \quad (1.3.26)$$

Es claro que mientras menor sea el radio espectral de un esquema iterativo su rapidez de convergencia será mayor. Una forma de lograr un radio espectral menor es modificando el esquema iterativo de Gauss-Seidel, introduciendo un factor de sobrerrelajación,  $\omega$ , mayor que 1. Se obtiene, entonces, el método iterativo de sobrerrelajación sucesiva, cuyo esquema es el siguiente :

$$(\tilde{D} - \omega\tilde{E})\tilde{u}^{k+1} = \left[ (1 - \omega)\tilde{D} + \omega\tilde{F} \right] \tilde{u}^k + \omega\tilde{b} \quad (1.3.27)$$

o bien

$$\tilde{u}^{k+1} = (\tilde{I} - \omega\tilde{L})^{-1} \left[ (1 - \omega)\tilde{I} + \omega\tilde{U} \right] \tilde{u}^k + \omega (\tilde{I} - \omega\tilde{U})^{-1} \tilde{D}^{-1} \tilde{b} \quad (1.3.28)$$

donde

$$\tilde{L} \equiv \tilde{D}^{-1} \tilde{E}, \quad \tilde{U} \equiv \tilde{D}^{-1} \tilde{F}$$

La rapidez de convergencia del esquema (1.3.28) depende, entonces, sólo del factor de sobrerrelajación  $\omega$ . Para cada problema particular existe un valor óptimo de sobrerrelajación que maximiza esa rapidez. Sin embargo, no existe en general, un método para hallar ese factor y normalmente tiene que determinarse experimentando con varios valores.

En toda la discusión anterior se ha considerado que tanto  $\tilde{A}$  como  $\tilde{b}$  se conocen a la perfección. Sin embargo, en la práctica esto no sucede. En efecto, si  $\tilde{A}$  o  $\tilde{b}$  proceden de mediciones, éstas introducen siempre "ruido", esto es, imprecisiones debidas a la imposibilidad de calibrar perfectamente los instrumentos de medición, o bien a errores de apreciación de parte de quienes toman las lecturas. En cálculos relacionados con el MEF, tanto la matriz  $\tilde{A}$  como el vector  $\tilde{b}$  se calculan dentro de la máquina, lo cual introduce errores llamados "de redondeo", esto es, debidos a que cualquier computadora no dispone más que de un conjunto finito de números, que se llaman "de punto flotante". Operaciones entre números de punto flotante, en general, no producen otro número de punto flotante, por lo que el resultado deberá aproximarse a uno de los dos números de punto flotante más próximos al resultado real. Algunas máquinas aproximan por defecto y otras, por exceso; pero no necesariamente al número de punto flotante más próximo. En seguida se presenta una discusión somera de los errores de redondeo presentes al resolver el problema (1.3.1).

Antes de continuar con la presente discusión se introduce el concepto de norma de vectores y de matrices.

La norma de un vector  $\underline{y}$  de dimensión  $n$  es una generalización del concepto de magnitud. En efecto, la magnitud de un vector da una idea sobre el tamaño de sus componentes considerados globalmente. Esta se define como

$$\|\underline{y}\| = (v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2)^{1/2} \quad (1.3.29)$$

Se observa que esta magnitud nunca es negativa y se anula si, y sólo si  $\underline{y} = \underline{0}$ , esto es, si todos y cada uno de los números  $v_i$  se anulan. Por otro lado, si cada componente  $v_i$  se multiplica por el mismo escalar  $c$ , se tiene

$$\|c \cdot \underline{y}\| = |c| \|\underline{y}\| \quad (1.3.30)$$

y, finalmente, para todo par de vectores  $\underline{y}$  y  $\underline{w}$ ,

$$\|\underline{y} + \underline{w}\| \leq \|\underline{y}\| + \|\underline{w}\| \quad (1.3.31)$$

que no es otra cosa que una condición de existencia del triángulo de lados  $\underline{y}$ ,  $\underline{w}$  y  $\underline{y} + \underline{w}$ . Por esto, la última relación, (1.3.31), se llama "desigualdad del triángulo". Generalizando el concepto anterior se tendrá : una norma para un espacio vectorial es un número real que, si  $\underline{y}$ ,  $\underline{w}$  son vectores del espacio,

i) La norma es positiva definida, esto es

$$\|\underline{y}\| > 0$$

y se anula si y sólo si  $\underline{y}$  se anula igualmente.

ii) Es linealmente homogénea ; esto es

$$\|c \cdot \underline{y}\| = |c| \|\underline{y}\|$$

iii) Satisface la desigualdad del triángulo, esto es

$$\|\underline{y} + \underline{w}\| \leq \|\underline{y}\| + \|\underline{w}\|$$

Nótese que en la definición anterior no se ha impuesto forma alguna para calcular la norma, como es el caso en la definición (1.3.29). Así, cualquier número real asociado a cada vector del espacio en consideración, que satisfaga las propiedades i) a iii) anteriores es una norma. Ejemplos de normas son los siguientes :

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \max_i \{ |v_i| \} \quad (1.3.32 \text{ a})$$

$$\| \underset{\sim}{v} \| = \sum_i |v_i| \quad (1.3.32 \text{ b})$$

De éstas dos, la primera es la más fácil y económica de calcular, y por eso se emplea mucho en análisis numérico para cálculo de errores.

Por otra parte, ya que la definición anterior de norma no se limita a vectores definidos como arreglos unidimensionales, se puede aplicar a matrices. Una norma de un espacio de matrices, entonces, es una medida del tamaño de las componentes de cada matriz del espacio, consideradas globalmente, de manera que mientras más pequeña sea la norma de una matriz, más próxima estará de la matriz nula. Ejemplos de normas de matrices son

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \sqrt{\text{Tr} \underset{\sim}{A} \underset{\sim}{A}^T} \quad (1.3.33 \text{ a})$$

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \max_j \sum_i |a_{ij}| \quad (1.3.33 \text{ b})$$

$$\| \underset{\sim}{A} \| = \max_{i,j} |a_{ij}| \quad (1.3.33 \text{ c})$$

Un concepto primordial en el análisis de error de redondeo en cálculos con matrices es el de condición de una matriz. Dada una matriz  $\underset{\sim}{A}$  de  $n \times n$ , invertible, su condición se define como

$$\text{cond}(\underset{\sim}{A}) = \| \underset{\sim}{A} \| \| \underset{\sim}{A}^{-1} \| \quad (1.3.34)$$

Se observa de inmediato que la condición es un número adimensional, y se demostrará que es una medida de la amplificación del error de redondeo. Así, un número de condición bajo está próximo a 1, aunque nunca es inferior a la unidad, mientras que uno alto puede ser del orden de 1 000 o mayor aún. Mientras más alta sea la condición de una matriz, más imprecisos serán los resultados de las operaciones en que interviene esta matriz.

Supóngase que se conoce  $\tilde{A}$  a la perfección; pero que  $\tilde{b}$  está contaminado con un error de redondeo  $\delta \tilde{b}$ . Así, la ec (1.3.1) es, en realidad

$$\tilde{A}(\tilde{u} + \delta \tilde{u}) = \tilde{b} + \delta \tilde{b} \quad (1.3.35)$$

donde  $\delta \tilde{u}$  es el error de redondeo producido por  $\delta \tilde{b}$ . Interesará calcular el error de redondeo en el cálculo de  $\tilde{u}$ , en términos del de  $\tilde{b}$ , esto es, interesa calcular el cociente  $\|\delta \tilde{u}\| / \|\tilde{u}\|$  en términos de  $\|\delta \tilde{b}\| / \|\tilde{b}\|$ . Ya que la ec (1.3.1) se satisface teóricamente, restándole de la ec (1.3.35) se tiene

$$\tilde{A} \tilde{u} = \tilde{b}$$

o bien

$$\tilde{u} = \tilde{A}^{-1} \tilde{b} \quad (1.3.36)$$

De una propiedad de las normas se tiene

$$\|\tilde{A}^{-1} \delta \tilde{b}\| \leq \|\tilde{A}^{-1}\| \|\delta \tilde{b}\| \quad (1.3.37)$$

que aquí no se demostrará. Baste con decir que esta desigualdad está asociada al producto interno de vectores. En efecto, si  $\tilde{v}$  y  $\tilde{w}$  son dos vectores del mismo espacio (para el cual previamente se ha definido

un producto interno como  $\underline{v} \cdot \underline{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$ ,

$$|\underline{v} \cdot \underline{w}| = \|\underline{v}\| \|\underline{w}\| |\cos(\underline{v}, \underline{w})|$$

donde  $\cos(\underline{v}, \underline{w})$  es el coseno del ángulo que forman los vectores  $\underline{v}$  y  $\underline{w}$ . Del hecho de que  $|\cos(\underline{v}, \underline{w})| \leq 1$ , la igualdad anterior se transforma en la desigualdad

$$\|\underline{v} \cdot \underline{w}\| \leq \|\underline{v}\| \|\underline{w}\|$$

que es una desigualdad conocida como de Schwarz.

Volviendo al sistema (1.3.1), ya que

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{b}$$

se tiene

$$\|\underline{b}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{u}\| \tag{1.3.38}$$

Aplicando la desigualdad (1.3.37) a la ec (1.3.36), se tiene

$$\|\underline{S} \underline{u}\| \leq \|\underline{A}^{-1}\| \|\underline{S} \underline{b}\| \tag{1.3.39}$$

Multiplicando miembro a miembro las desigualdades (1.3.38) y (1.3.39), se tiene

$$\|\underline{S} \underline{u}\| \|\underline{b}\| \leq \|\underline{A}\| \|\underline{A}^{-1}\| \|\underline{u}\| \|\underline{S} \underline{b}\|$$

Si  $\underline{b} \neq \underline{0}$ , se pueden dividir ambos miembros de la última desigualdad entre  $\|\underline{u}\| \|\underline{b}\|$ , con lo que se obtiene

$$\frac{\|\underline{S} \underline{u}\|}{\|\underline{u}\|} \leq \|\underline{A}\| \|\underline{A}^{-1}\| \frac{\|\underline{S} \underline{b}\|}{\|\underline{S} \underline{b}\|} = \text{cond}(\underline{A}) \frac{\|\underline{S} \underline{b}\|}{\|\underline{b}\|} \tag{1.3.40}$$



con lo que se demuestra que la condición de una matriz es el factor de amplificación del error de redondeo.

Un resultado semejante se habría obtenido si se hubiera supuesto imprecisión en  $\underline{A}$ , en lugar de  $\underline{b}$ ; pero en aras de la brevedad, este análisis ya no se continúa.

Por la importancia que tiene la condición de una matriz, la mayor parte de los programas de elemento finito proporcionan una estimación de este número, ya que un cálculo exacto sería demasiado costoso; pero también, innecesario. En aplicaciones del MEF a problemas en medios elásticos planos se genera una malla de elementos. Si la malla es triangular, se tendrán elementos de las formas de la Fig 1.3.1.

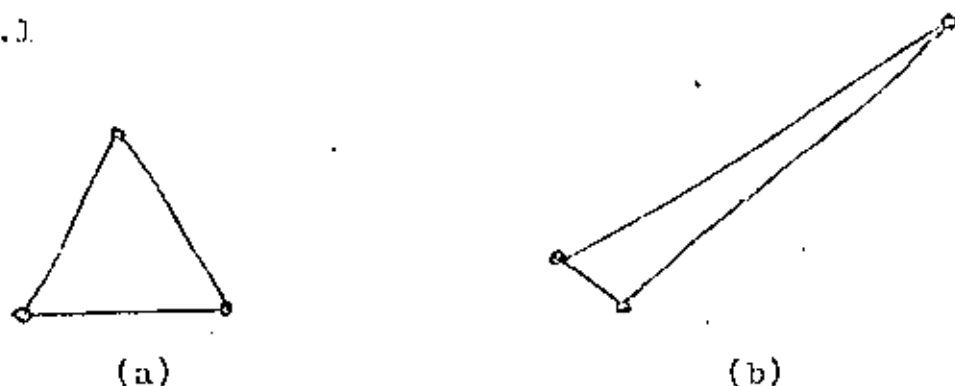


Fig 1.3.1 Elementos finitos

El elemento de la Fig 1.3.1 (a) es casi equilátero, mientras que el de la Fig 1.3.1 (b) es "muy escaleno", esto es, sus lados son de longitudes muy desiguales. Una malla con elementos equiláteros produce una matriz de rigidez de condición baja, mientras que una con elementos muy desbalanceados, como el de la Fig 1.3.1 (b), produce una matriz de rigidez de condición muy alta. Existen preprocesadores que balancean una malla desbalanceada.

## Referencias :

1. Byars E.F. y Snyder R.D., Mecánica de Cuerpos Eiformables, Tercera Edición, Representaciones y Servicios de Ingeniería, S.A., C. de México, 1978, pp. 274-284
2. Timoshenko S. y Woinowsky-Krieger S., Teoría de Placas y Láminas, Ediciones Urmo, Bilbao, 1970, p. 310
3. Byars E.F. y Snyder R.D., op. cit., pp. 73 y 74
4. Herstein I.N., Algebra Moderna, Editorial Trillas, C. de México, 1974, pp. 210-218
5. Mostow G.D. y Sampson J.H., Algebra Lineal, Mc Graw-Hill de México, S A de C V, 1972
6. Angeles J., "Modelo dinámico de una suspensión para vehículos de transporte masivo", INGENIERÍA, Vol. L, No. 2, 1980, pp. 48-51
7. Gamow G., One, Two, Three ... Infinity, Bantam Books, Inc., Nueva York, 1967, p. 14
8. Forsythe G.E., Malcolm M.A. y Moler C.B., Computer Methods for Mathematical Computations, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1977



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA**

**DE LOS CONCEPTOS DE ELASTICIDAD**

**Dr. Porfirio Ballesteros**

**MARZO, 1984.**

-Introducción.- La naturaleza de las fuerzas que actúan dentro de un cuerpo para equilibrar el efecto de las fuerzas de cuerpo y externas o de superficie, es una de las partes principales del estudio de la mecánica de sólidos. Se aplicará el método de secciones para aislar un elemento diferencial y definir el concepto de esfuerzo.

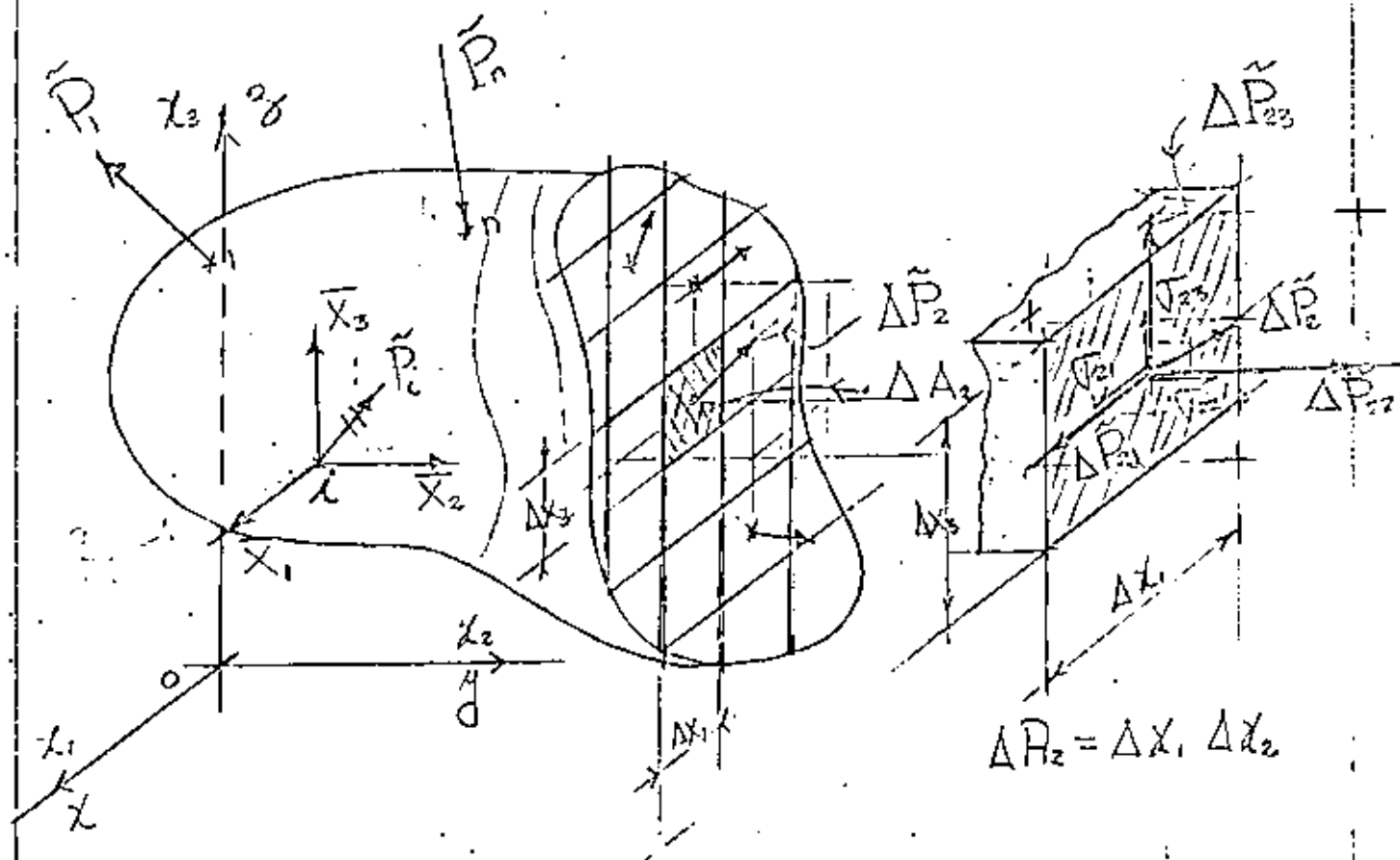


Fig.1 Cuerpo. seccionado paralelo al plano  $x_1, x_3$

1.-Definición de esfuerzo.

En general, las fuerzas internas actuando sobre las áreas infinitesimales  $\Delta x_i \Delta x_j$  del corte, son de

magnitudes y direcciones variables. Fuerzas de naturaleza vectorial y mantienen el equilibrio. En mecánica de sólidos es particularmente significativo determinar la intensidad y dirección en distintos puntos a través del corte. En general varían de punto a punto en intensidad y dirección. Es usual resolver sus intensidades perpendicular y paralelas a la sección en consideración. En particular el corte de la Fig. 1 es perpendicular al eje  $X_1$ ,  $\vec{\Delta P}_2$  es la fuerza resultante que actúa sobre  $\Delta A_2 = \Delta X_1 \Delta X_2$ , cuyas componentes son:  $[\Delta \vec{P}_{21}, \Delta \vec{P}_{22}, \Delta \vec{P}_{23}]$ , el primer subíndice significa que el plano en que actúan es perpendicular al eje  $X_2$  y el segundo respecto al eje que son paralelos. Puesto que las componentes de fuerza por unidad de área, son correctas solo en el punto, la definición matemática de esfuerzo es\*

$$\sigma_{21} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{21}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{22} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{22}}{\Delta A_2}, \quad \sigma_{23} = \lim_{\Delta A_2 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{23}}{\Delta A_2}$$

similarmente los esfuerzos actuando en un plano perpendicular a  $X_1$  son

$$\sigma_{11} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{11}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{12} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{12}}{\Delta A_1}, \quad \sigma_{13} = \lim_{\Delta A_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{13}}{\Delta A_1}$$

y los esfuerzos actuando sobre un plano perpendicular a  $X_3$  son

$$\sigma_{31} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{31}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{32} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{32}}{\Delta A_3}, \quad \sigma_{33} = \lim_{\Delta A_3 \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{P}_{33}}{\Delta A_3}$$

\* Cuando  $\Delta A_i \rightarrow 0$ , existen preguntas desde el punto de vista atómico en definir esfuerzo en esta forma. Sin embargo, un modo homogéneo para materia molecular no homogénea trabaja bien en problemas de Ingeniería.

Se observa que las definiciones de esfuerzo normal y cortante representan la intensidad de una fuerza sobre una area, y sus unidades son de  $[\frac{F}{L^2}]$ ; en el sistema métrico  $\text{kg/cm}^2$  o  $\text{ton/cm}^2$  y en el ingles  $\text{lbs/pul}^2$  o  $\text{Kips/pul}^2$ .

Debe notarse que los esfuerzos multiplicados por las areas sobre las cuales actúan nos dan fuerzas, y es la suma de estas fuerzas, y es la suma de estas fuerzas sobre cualquier corte imaginario lo que conserva el equilibrio de un cuerpo.

### 3. Tensor de esfuerzos.

Si, además del diagrama de cuerpo libre de la Fig. 1 se hacen pasar tres pares de planos paralelos y separados por distancias infinitesimales, un cubo de dimensiones infinitesimales será aislado del cuerpo con el origen del sistema local coordinado en el punto de coordenadas  $x_i (x_1, x_2, x_3)$ . Tal cubo se muestra en la Fig. 3.1

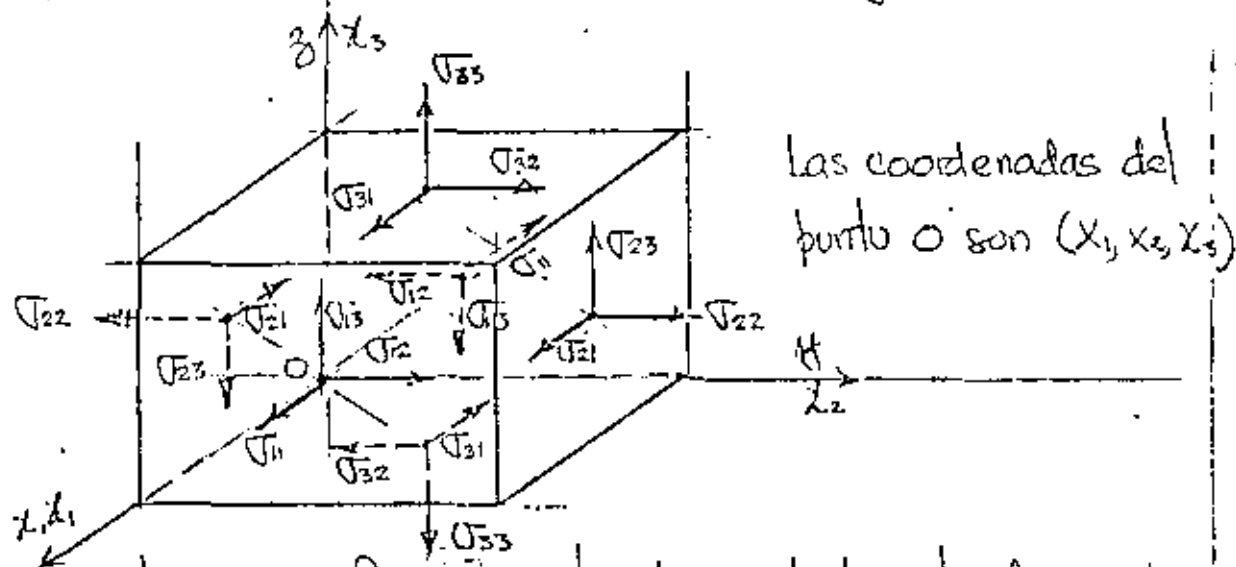


Fig. 3.1 Estado de esfuerzos actuando en el elemento  $dx_i$ . El sentido indicado es convencionalmente el positivo.

Examinando la Fig. 3.1, se observa que hay tres esfuerzos normales  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ , y seis esfuerzos cortantes  $\sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ . El arreglo matricial

$$\sigma \equiv [\sigma_{ij}] \equiv [\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

es la representación del tensor de esfuerzos. Es un tensor de segundo orden referido al espacio Euclídiano tridimensional. Un vector es un tensor de primer orden y un escalar es un tensor de cero orden

#### 4.- Fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie

En el mismo elemento diferencial consideremos el vector de fuerzas de cuerpo por unidad de volumen  $\{X_i\}^T = [X_1, X_2, X_3]$ , y en consideraciones no polares el vector de momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{m_i\}^T = [m_1, m_2, m_3]$  actuando en el centroide del elemento diferencial como se indica en la Fig. 4.1

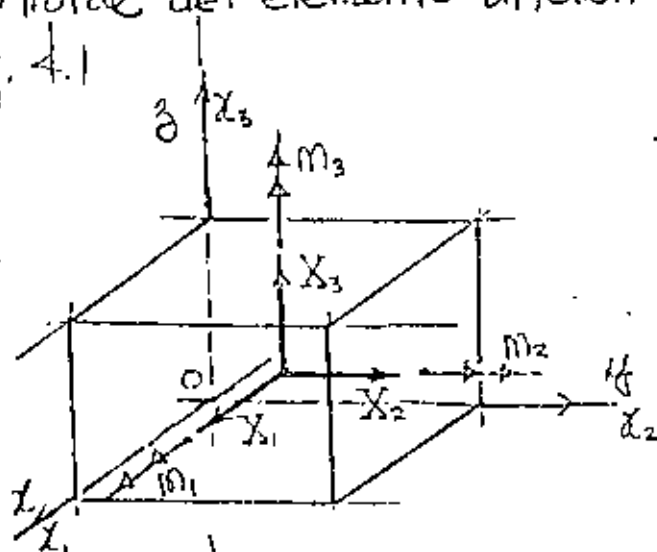


Fig. 4.1 Fuerzas y momentos de cuerpo por unidad de volumen  $\{X_i\}$  y  $\{m_i\}$  actuando en el centro de gravedad de  $dx_i$ .

en donde  $X_i = \rho (f_i - a_i)$  (4.1)

donde  $\rho$  es la densidad o masa específica,  $f_i$  es la fuerza por unidad de masa en la dirección  $x_i$  y  $a_i$  es la aceleración del elemento  $dx_i$  en la dirección de  $x_i$

Las fuerzas de superficie actúan en la frontera del cuerpo y las tres componentes de  $\bar{P}_i$  Fig. 1.1 las designaremos por  $\{\bar{X}_i\}^T = [\bar{X}_1 \bar{X}_2 \bar{X}_3]$ ; sus unidades son fuerza por unidad de área  $\left[\frac{F}{L^2}\right]$ ,  $\text{kg/cm}^2$  en el sistema métrico;  $\text{lbs/pul}^2$  en el inglés, y en el internacional  $\text{Newtons/cm}^2$ . Las unidades de las fuerzas de cuerpo serán  $\left[\frac{F}{L^3}\right]$ . Las fuerzas de superficie deben satisfacer las condiciones en la frontera [Fig. 5.1] que para el punto  $i$  [Fig. 1.1] son.

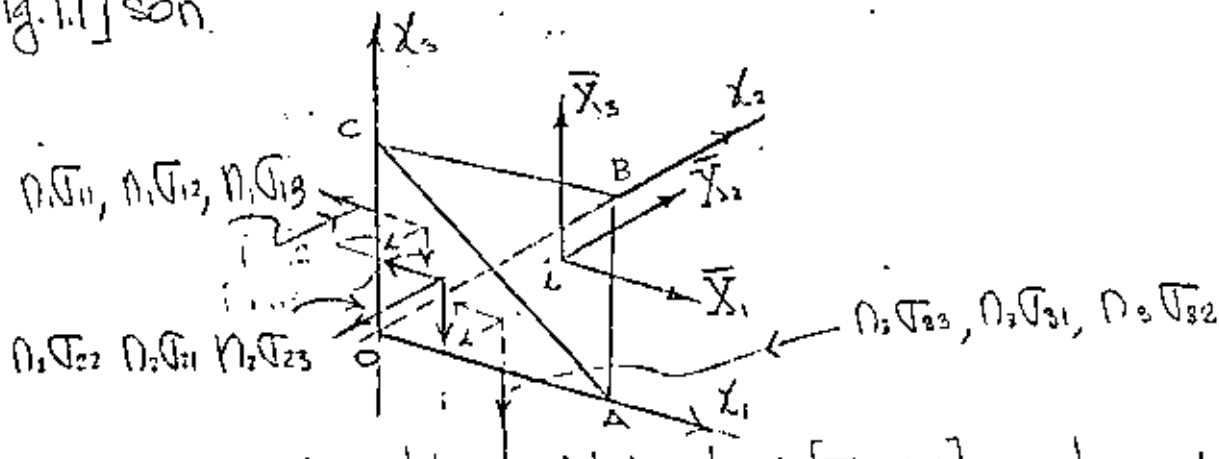


Fig. 5.1 Equilibrio del punto  $i$  [Fig. 1.1] en la superficie.

Si  $ABC = \text{unidad}$ ,  $OBC = \cos \alpha = n_1$ ,  $OAC = \cos \beta = n_2$ , y  $OAB = \cos \gamma = n_3$ , donde  $\{n_i\}^T = [n_1 \ n_2 \ n_3]$  son los cosenos directores de la normal al plano  $ABC$ , y del equilibrio de  $OABC$  se obtiene

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{o} \quad [\sigma_{ij}]^T \{n_i\} = \{\bar{X}_i\} \quad (4.1)$$



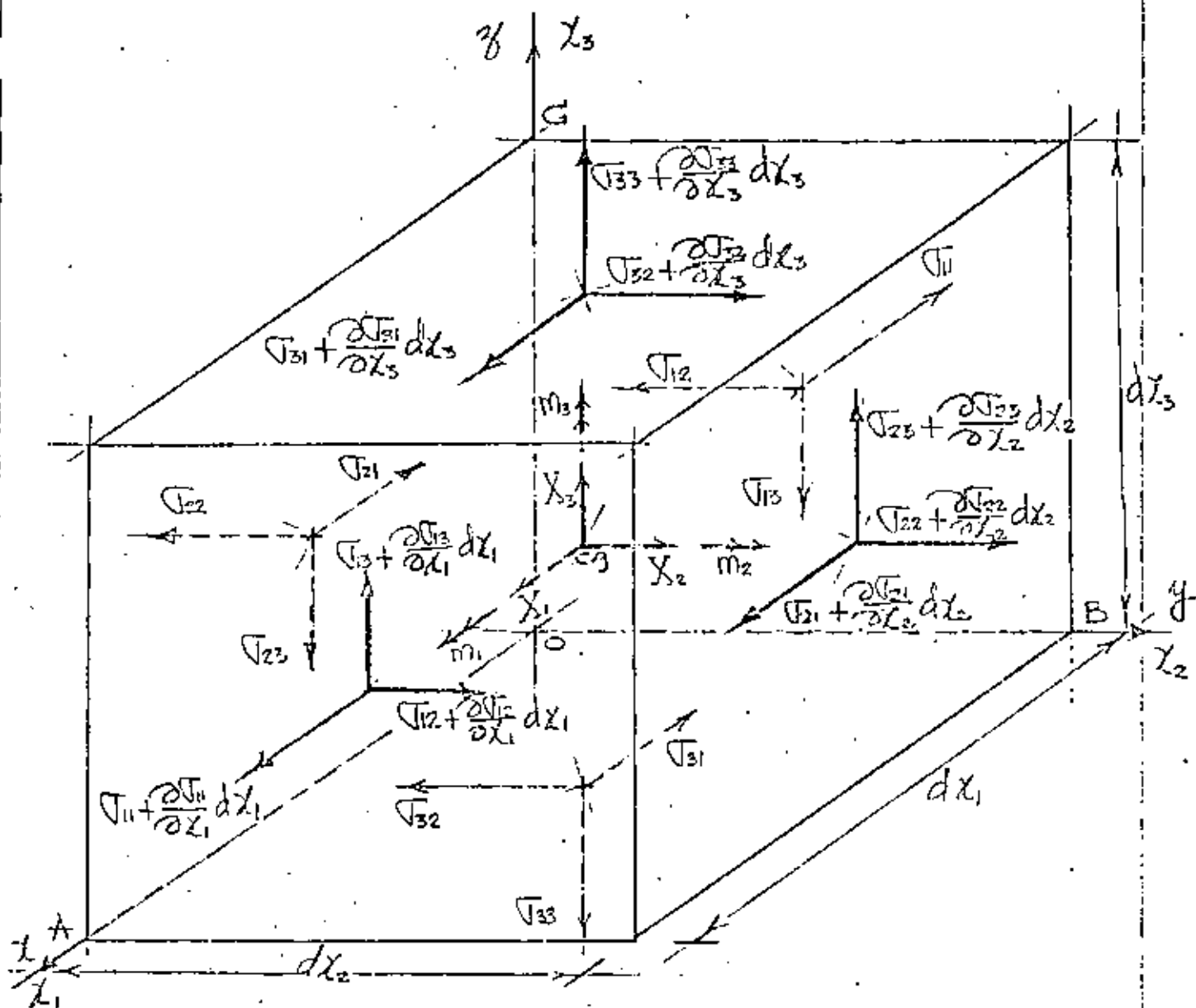


Fig. 5.1. Equilibrio de esfuerzos  $\{\sigma\}$ , fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  y momentos de cuerpo  $\{m\}$ , en el elemento  $dx_i$ .

(4.1) es la representación matricial de las condiciones de equilibrio del punto  $i$  en la frontera  $x_i$ .

5.- Equilibrio del elemento  $dx_i$ .

Las seis ecuaciones de equilibrio del elemento de la Fig. 5.1 son

$$\sum F_{x_1} = \sum F_{x_2} = \sum F_{x_3} = \sum M_{x_1} = \sum M_{x_2} = \sum M_{x_3} = 0 \quad (5.1)$$

de  $\sum F_{x_i} = 0$ , en el límite cuando  $dx_i \rightarrow 0$  se obtiene

$$\left(\tau_{11} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \tau_{11} dx_2 dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 - \tau_{21} dx_1 dx_3 + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 - \tau_{31} dx_1 dx_2 + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

Similarmente de  $\sum F_{x_2} = 0$ ,

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + X_1 = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \quad (5.2)$$

de  $\sum F_{x_3} = 0$ ,

$$\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0$$

De  $\sum M_{x_1} = 0$ , en el límite cuando  $dx_i \rightarrow 0$ , y considerando el eje de momentos paralelo a  $ox_1$  y a través del centroide del elemento  $dx_i$ , y despreciando los diferenciales de segundo orden  $dx_i^2$ , se obtiene bajo la convención de signos de la Fig. 5.1 lo siguiente

$$\left(\tau_{23} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{23} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} - \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} + m_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

efectuando operaciones algebraicas se obtiene

$$\tau_{23} - \tau_{32} + m_1 = 0$$

Similarmente de  $\sum M_{x_2} = 0$ ,  $\tau_{31} - \tau_{13} + m_2 = 0$  (5.3)

y de  $\sum M_{x_3} = 0$ ,  $\tau_{12} - \tau_{21} + m_3 = 0$

Las ecuaciones (5.2) y (5.3) son las seis ecuaciones de equilibrio en coordenadas rectangulares y en su forma polar, generalmente los momentos de cuerpo  $m_i = 0$

Expresando (5.2) matricialmente se tiene

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} [\sigma_{ij}] + \{X_i\} = 0 \quad (5.5)$$

Con notación índice (5.2) se representa

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (5.6)$$

en donde  $\sigma_{ij,j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ . Y las ecuaciones (5.3)

$$\sigma_{ij} - \sigma_{ji} + m_k = 0 \quad (5.7)$$

## 6. Diferentes notaciones del tensor de esfuerzos.

A continuación gráficamente mostraremos las diferentes notaciones que han sido utilizadas para representar las componentes del tensor de esfuerzos.

### 6.1 Cauchy inicialmente.

$$\begin{bmatrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{bmatrix}$$

( $m_k=0$ )

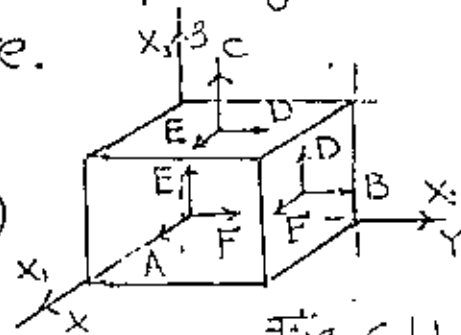


Fig. 6.1.1

### 6.2 Kelvin.

$$\begin{bmatrix} P & V & T \\ V & Q & S \\ T & S & R \end{bmatrix}$$

( $m_k=0$ )

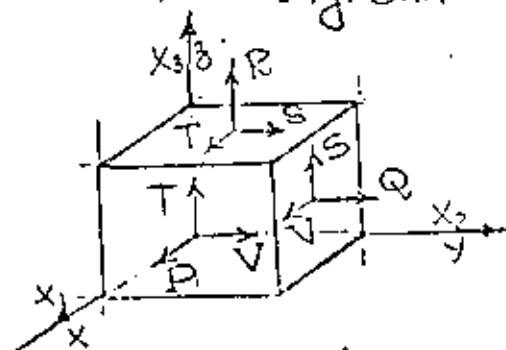


Fig. 6.1.2

6.2 Cauchy posteriormente, Saint-Venant ó Maxwell, introducen por primera vez la notación cartesiana, y

$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

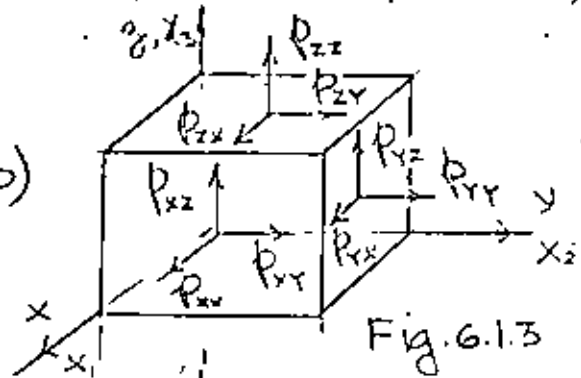


Fig. 6.1.3

condiciones polares.

6.3 Newman, Kirchhof y Love.

$$\begin{bmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

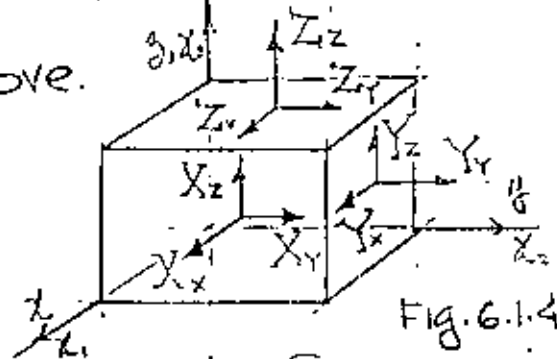


Fig. 6.1.4

6.4 K. Pearson.

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_x & \bar{x}_y & \bar{x}_z \\ \bar{y}_x & \bar{y}_y & \bar{y}_z \\ \bar{z}_x & \bar{z}_y & \bar{z}_z \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

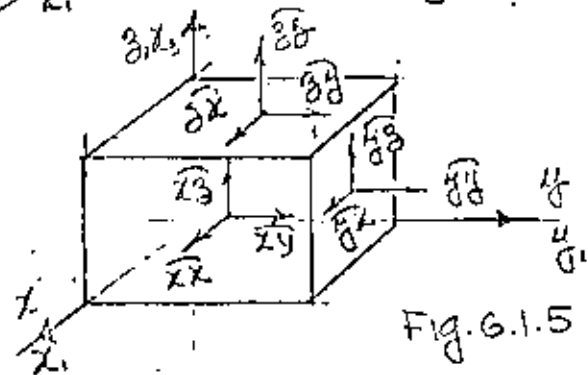


Fig. 6.1.5

6.5 S. Timoshenko y T. Von Kármán introducen la notación de Ingeniería, simplificando la notación cartesiana utilizando solo un subíndice en los esfuerzos normales denominándolos por  $\sigma$ , y los tangenciales por  $\tau$ .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

( $m_k \neq 0$ )

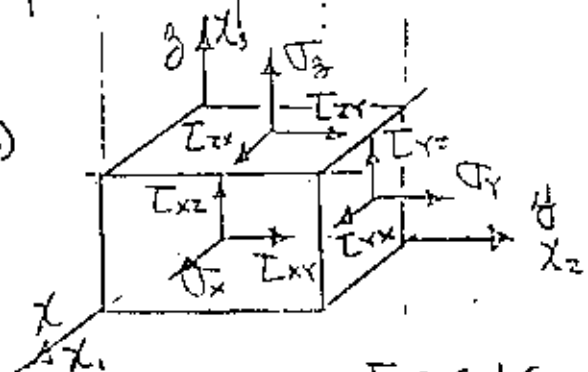


Fig. 6.1.6

6.6 Green, Ierna y autores Rusos introducen la notación índice similar a la utilizada previamente

$$[\sigma_{ij}] = [\tau_{ij}]$$

6.7 Gleibsch, G. Truesdell y A.C. Eringen, también utilizan la notación índice representando el tensor de esfuerzos

$$[\tau_{ij}]$$

6.8 D.C. Leigh; y L. Malvern, también utilizan notación índice representando el tensor de esfuerzos como

$$[\tau_{ij}]$$

Es importante observar que en la derivación de las ecuaciones de equilibrio (5.6) y (5.7) las propiedades mecánicas del material no han sido usadas. Lo cual significa que son aplicables a materiales elásticos, plásticos, o viscoelásticos. También es muy importante observar que no hay suficientes ecuaciones de equilibrio para determinar las incógnitas esfuerzo, el problema es estáticamente indeterminado.

## 7. Desplazamiento, deformación.

El análisis de la deformación de un sólido es de importancia paralela al análisis de esfuerzos. Requiere la definición precisa de deformación, la cual significa la intensidad del desplazamiento. Un cuerpo sólido sujeto a un cambio de temperatura o a cargas externas.

Por ejemplo, si una muestra es sujeta a una fuerza  $P$  como se muestra en la Fig. 7.1, un cambio de longitud ocurre entre los dos puntos de calibración A y B. Si  $l_0$  es la longitud inicial y  $l$  la longitud observada bajo la carga  $P$ , y el alargamiento  $\Delta l = l - l_0$ . El

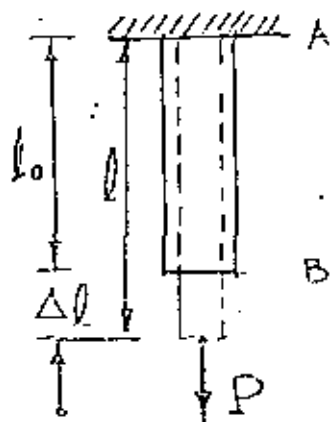


Fig. 7.1 Muestra a tensión.

alargamiento por unidad de longitud  $\epsilon$  (epsilon) es

$$\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (7.1)$$

el cual es llamado deformación lineal. Es una cantidad adimensional, pero generalmente se mide o se refiere en  $\frac{\text{cm}}{\text{cm}}$  o  $\frac{\text{pulg}}{\text{pulg}}$ . Algunas veces se expresa en por ciento. La cantidad  $\epsilon$  es generalmente muy pequeño. En la mayoría de las aplicaciones de ingeniería tiene un orden máximo de magnitud de 0.001. Cuando las deformaciones son grandes, por ejemplo, en formado de metales, se introduce el la deformación natural que implica una  $l_0$  variable, dada por

$$\bar{\epsilon} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon) \quad (7.2)$$

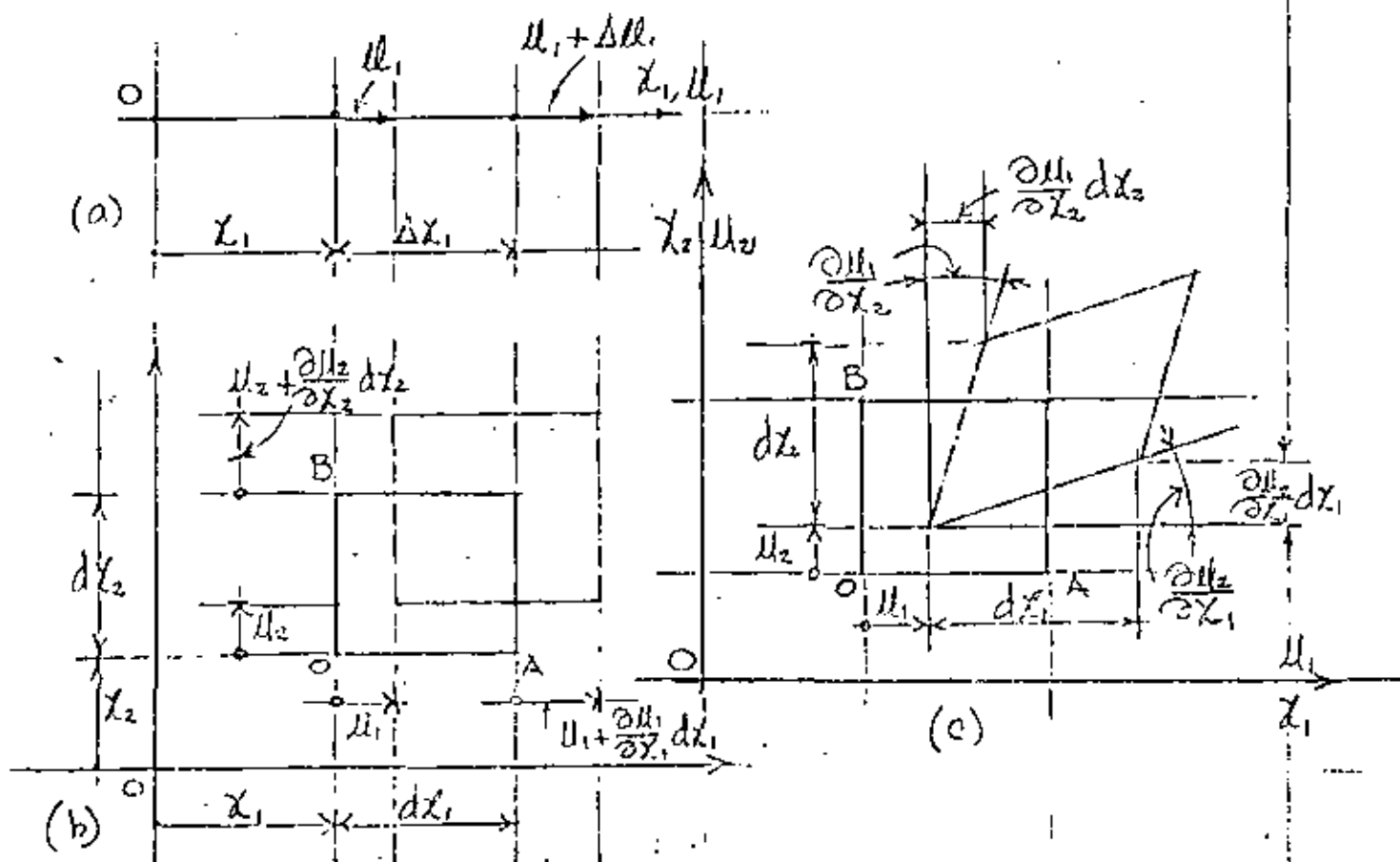


Fig. 7.2 Elementos deformados en posiciones inicial y final

Sea  $\mathbf{u}_i$  el vector de desplazamientos  $\{u_i\}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3]$  en las direcciones  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  respectivamente; en base a los desplazamientos mostrados en la Fig. 7.2a, la definición de deformación lineal es

$$\epsilon_{11} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{u_1 + \Delta u_1 - u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \equiv u_{1,1} \quad (7.2)$$

Similarmente

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \equiv u_{2,2}, \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \equiv u_{3,3} \quad (7.3)$$

el signo positivo significa alargamientos. El elemento también experimenta deformaciones de corte como

se muestra en la Fig. 7.2c el ángulo recto AOB es reducido por la cantidad  $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ . Por lo tanto, para pequeños cambios del ángulo, la definición de deformación de cortante asociada con el plano  $x_1, x_2$  es

$$\begin{aligned} \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \equiv \mu_{12} + \mu_{21}, \text{ análogamente con} \\ \text{los otros planos, } \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \equiv \mu_{23} + \mu_{32} \\ \gamma_{31} = \gamma_{13} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \equiv \mu_{31} + \mu_{13} \end{aligned} \quad (7.4)$$

en el caso que las deformaciones no sean pequeñas, se muestra fácilmente que

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_3}{\partial x_2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_3}$$

$$\gamma_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_3}$$

En las ecuaciones (7.5) aplicables a deformaciones grandes ya se observa la no linealidad en geometría. (7.4) es un caso particular de (7.5) cuando los términos de segundo grado son despreciables respecto a los de primer grado. o sea pequeñas deformaciones. (7.5) en



notación compacta queda

$$\epsilon_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2 + u_{3,1}^2)$$

$$\epsilon_{22} = u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{1,2}^2 + u_{2,2}^2 + u_{3,2}^2)$$

$$\epsilon_{33} = u_{3,3} + \frac{1}{2}(u_{1,3}^2 + u_{2,3}^2 + u_{3,3}^2) \quad (7.6)$$

$$\gamma_{12} = \gamma_{21} = u_{1,2} + u_{2,1} + u_{1,1}u_{1,2} + u_{2,1}u_{2,2} + u_{3,1}u_{3,2}$$

$$\gamma_{23} = \gamma_{32} = u_{2,3} + u_{3,2} + u_{1,2}u_{1,3} + u_{2,2}u_{2,3} + u_{3,2}u_{3,3}$$

$$\gamma_{31} = \gamma_{13} = u_{3,1} + u_{1,3} + u_{1,1}u_{1,3} + u_{2,1}u_{2,3} + u_{3,1}u_{3,3}$$

Examinando las ecuaciones de deformación-desplazamiento para pequeñas deformaciones (7.2), (7.3) y (7.4), se observa que son seis ecuaciones que dependen solamente de tres desplazamientos  $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ . Por lo tanto las ecuaciones no pueden ser independientes. Por lo tanto, seis ecuaciones independientes pueden desarrollarse relacionando a  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{22}$ ,  $\epsilon_{33}$ ,  $\gamma_{12}$ ,  $\gamma_{23}$  y  $\gamma_{31}$ , ecuaciones conocidas como ecuaciones de compatibilidad.

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (7.7)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} ; 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right)$$

substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (7.7) se verifican las ecuaciones de compatibilidad de pequeñas deformaciones.

Similarmente a las componentes del Tensor de esfuerzos en las notaciones índice, cartesiana y de ingeniería, se representan las componentes del tensor de deformaciones como

$$[e_{ij}] = \underline{\underline{e}} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

(índice)                      (cartesiana)                      (ingeniería)

en (7.8) fue necesario modificar las relaciones de deformación por cortante con el objeto de someter al tensor  $\underline{\underline{e}}$  enteramente obedecer ciertas leyes de transformación, por lo que  $e_{ij} = \frac{1}{2}\gamma_{ij}$  para toda  $i \neq j$ . Análogamente al tensor de esfuerzos  $[e_{ij}]$  puede diagonalizarse quedando

$$\begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

8. Ley de Hooke en un estado uniaxial de esfuerzos,

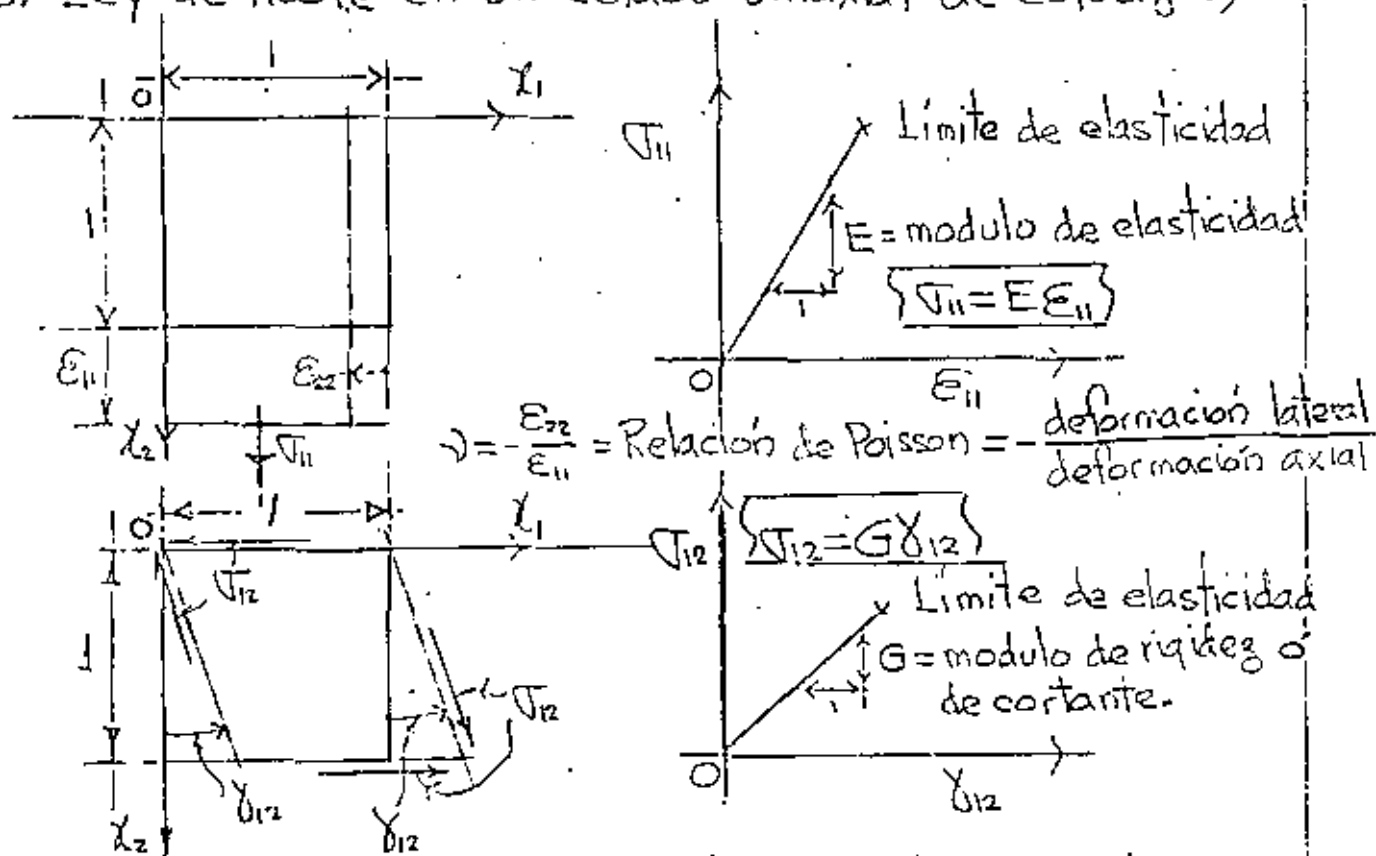


Fig. 8.1 Ley de Hooke en tensión uniaxial  $\sigma_{11}$  y corte puro  $\sigma_{12}$ .

puesto que el sistema es elástico lineal rige el principio de superposición de causas y efectos, por lo tanto en la Fig. 8.2 se considera un estado triaxial llegando a él en tres etapas de carga, etapa 1: actuando  $\sigma_{11}$ , etapa 2: actuando  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$  y etapa 3: actuando  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  y  $\sigma_{33}$ . Se llega a las siguientes ecuaciones constitutivas

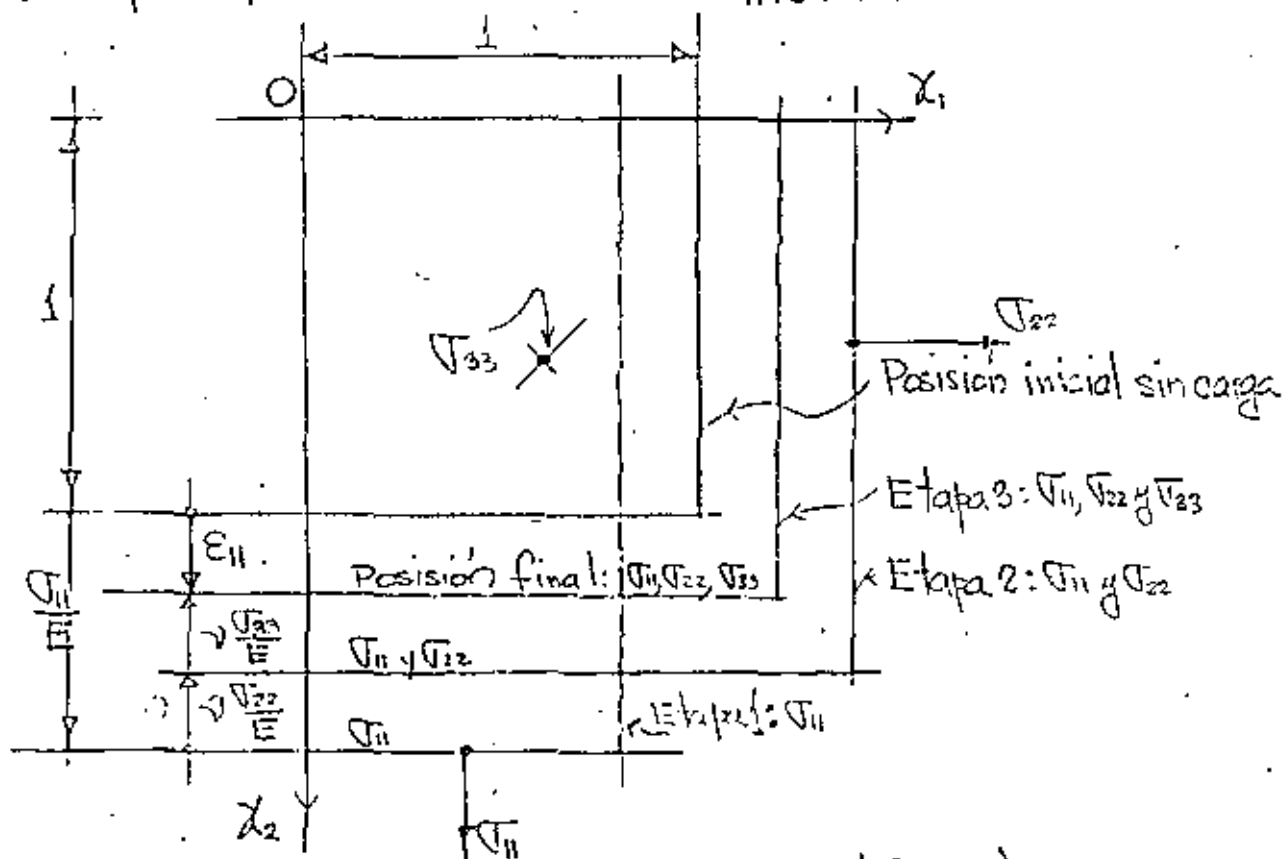


Fig. 8.2 Ley de Hooke en condiciones triaxiales

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{22} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} + \frac{1}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} \sigma_{33}$$

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} \sigma_{22} + \frac{1}{E} \sigma_{33}$$

$$\gamma_{12} =$$

$$\frac{1}{G} \tau_{12}$$

$$\gamma_{23} =$$

$$\frac{1}{G} \tau_{23}$$

$$\gamma_{31} =$$

$$\frac{1}{G} \tau_{31}$$

(8.1)

(8.1) representa la ley de Hooke en condiciones triaxiales ó más correctamente las ecuaciones constitutivas para un sólido elástico homogéneo e isotrópico. Las constantes  $E$ ,  $G$  y  $\nu$  son experimentales y están relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.2)$$

Substituyendo (8.2) en (8.1) y expresando el resultado matricialmente se obtiene (considerando  $\epsilon_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{2}$  para  $i \neq j$ )

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

$$\{\epsilon\} = [C]\{\sigma\} \quad (8.4)$$

despejando  $\{\sigma\}$  de (8.4) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} \quad (8.5)$$

$$\text{o sea } \{\sigma\} = [C]^{-1}\{\epsilon\} \quad (8.6)$$

Se observa en las ecuaciones anteriores que solo interviene  $E$  y  $\nu$ .

En un medio elástico lineal anisotrópico en las ecuaciones (8.3), aceptando el principio de superposición se expresan

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} \quad (8.7)$$

Las ecuaciones constitutivas (8.7) tienen 36 constantes. Sin embargo a través de consideraciones energéticas\* se demuestra que el número de constantes es 21 y que  $C_{ij} = C_{ji}$  para  $i \neq j$ , son simétricas respecto a la diagonal principal de (8.7). Todas las constantes  $C_{ij}$  deben determinarse experimentalmente. Se supone el material homogéneo, Ejemplos de estos materiales son: concreto, concreto reforzado, madera, plástico reforzado con filamentos, fierro fundido, etc. Cuando se tienen tres direcciones ortogonales anisotrópicas el material se dice que es ortotrópico, y para estos materiales el número de constantes se reduce solo a nueve constantes independientes.

Haciendo  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  y considerando (8.2) las

\* Sokolnikoff, I.S., "Mathematical Theory of Elasticity", McGraw-Hill, 1956, p. 61.

ecuaciones constitutivas (8.3) con notación índice se escriben\*

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2G \epsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (8.8)$$

donde,  $\delta_{ij} = 1$  para  $i=j$ , y  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ , y  $\epsilon_{kk} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = e$ . Desarrollando (8.8) se tiene

$$\begin{aligned} \text{para } i=1, j=1, \quad \sigma_{11} &= \lambda e + 2G \epsilon_{11} = \lambda e + 2G \epsilon_x = \sigma_x \\ i=2, j=2, \quad \sigma_{22} &= \lambda e + 2G \epsilon_{22} = \lambda e + 2G \epsilon_y = \sigma_y \\ i=3, j=3, \quad \sigma_{33} &= \lambda e + 2G \epsilon_{33} = \lambda e + 2G \epsilon_z = \sigma_z \\ i=1, j=2, \quad \sigma_{12} &= 2G \epsilon_{12} = 2G \epsilon_{xy} = G \gamma_{xy} = \tau_{xy} \\ i=2, j=3, \quad \sigma_{23} &= 2G \epsilon_{23} = 2G \epsilon_{yz} = G \gamma_{yz} = \tau_{yz} \\ i=3, j=1, \quad \sigma_{31} &= 2G \epsilon_{31} = 2G \epsilon_{zx} = G \gamma_{zx} = \tau_{zx} \end{aligned} \quad (8.9)$$

Si en el sólido existe un incremento de temperatura  $\Delta T$ , siendo  $\alpha$  el coeficiente de expansión térmica, las ecuaciones (8.3) quedan

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8.10)$$

\* Graen, A. E., and W. Zerna: "Theoretical Elasticity", Oxford University Press, Fair Lawn, N. J., 1970.

9. Elasticidad bidimensional.

Utilizando la notación de Timoshenko y Von Karman ó la notación de ingeniería las ecuaciones de equilibrio en un elemento  $dx dy$  se reducen a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

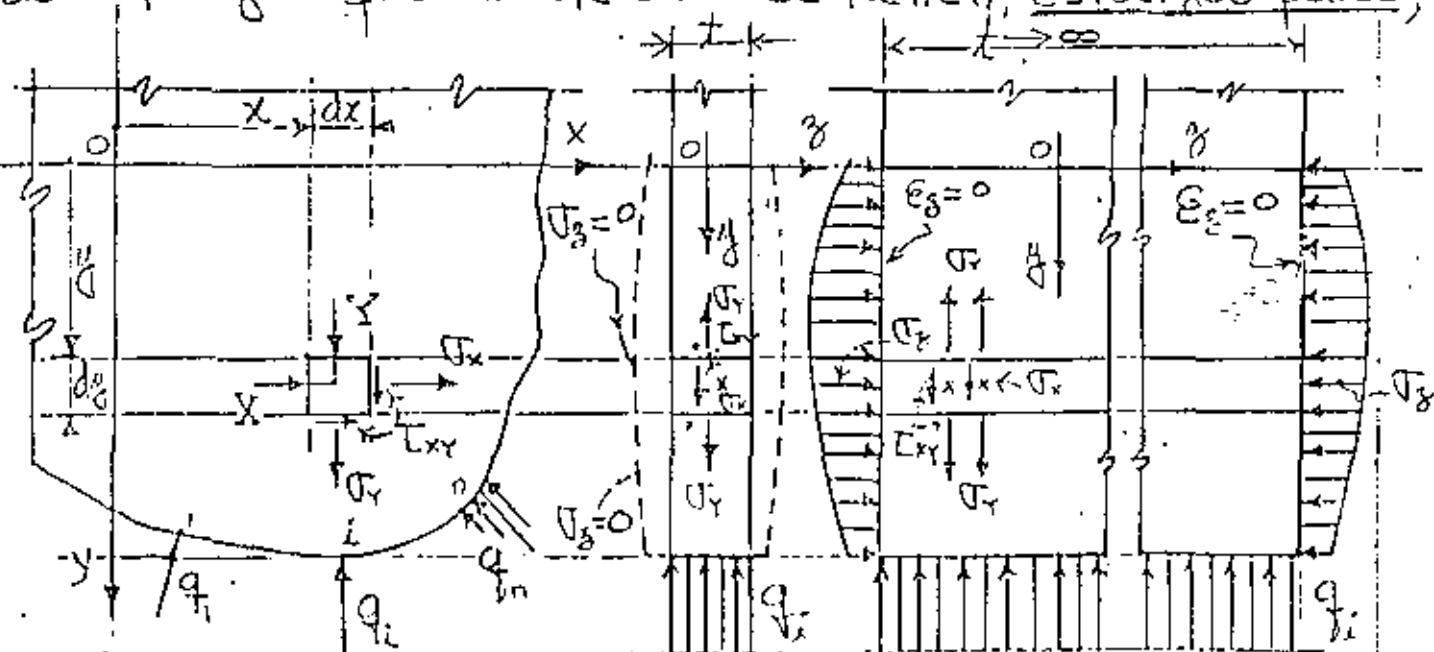
(9.1) matricialmente queda

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = 0 \tag{9.2}$$

Y las ecuaciones de compatibilidad (7.7) se reducen a

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{9.3}$$

En la Fig. 6.1 se muestran los dos estados o condiciones de esfuerzos que en este caso se tienen, esfuerzos planos;



a) Esfuerzos planos y de superficie  $\{X, Y\}$

b) Esfuerzos Planos

c) Deformación Plana

$$\sigma_z = 0, \epsilon_z \neq 0$$

$$\sigma_z \neq 0, \epsilon_z = 0$$

Fig. 6.1. Estados o condiciones de esfuerzos bidimensionales.

caso de una placa de espesor finito  $t$ , sin problemas de pandeo que se deforma bajo la acción de  $\{X\}$  y  $\{q\}$  según la línea punteada indicada en la Fig. 6.1 b, las ecuaciones (8.3), bajo la condición de  $\nabla_{33} = \nabla_3 = 0$  se reducen a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.4)$$

$\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  son el promedio sobre el espesor pequeño  $t$  y son independientes de  $y$ . Las componentes  $\gamma_{yz}$  y  $\gamma_{zx}$  se anulan en las superficies, mientras que la componente  $\epsilon_z$  es dada por

$$\epsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1-\nu}(\epsilon_x + \epsilon_y) \quad (9.5)$$

Problemas de cuerpos largos en la dirección longitudinal y cuya geometría y cargas no varían en  $y$  se consideran problemas de deformación plana en la Fig. 6.2 se muestran como ejemplos un muro de presa, y una zapata corrida larga,

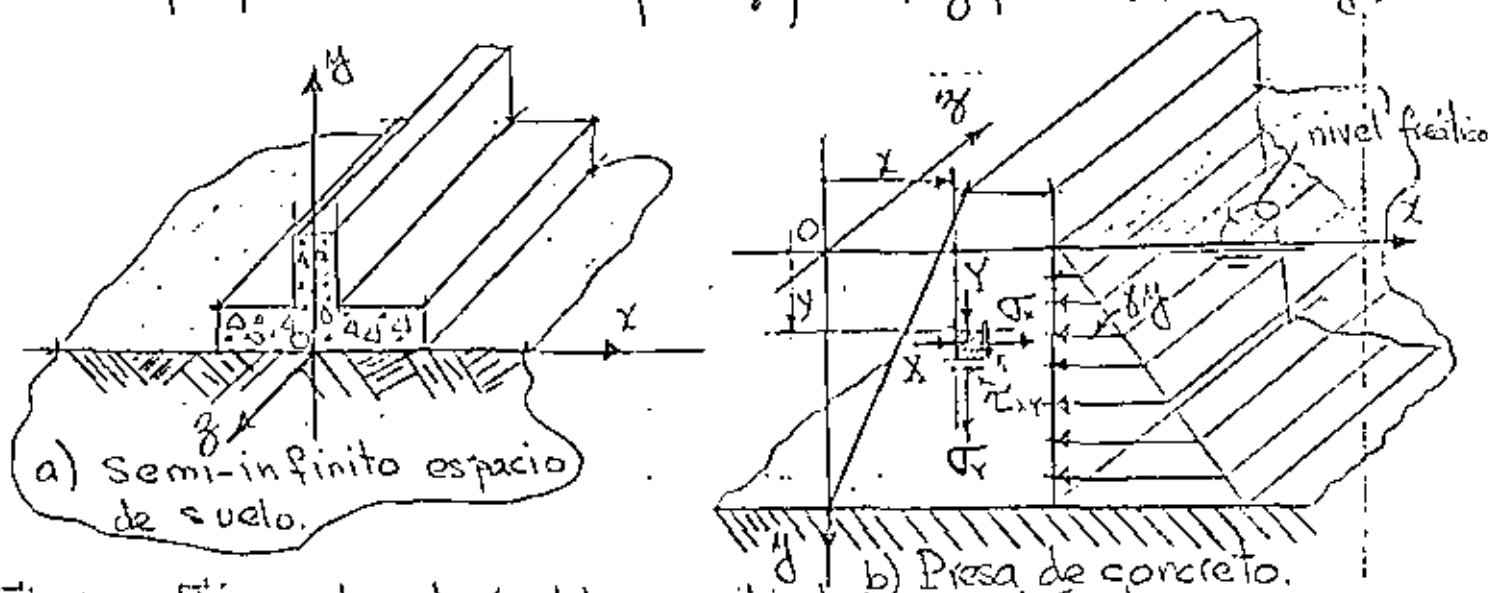


Fig. 6.2. Ejemplos de problemas de deformación plana.



en estos casos el desplazamiento  $u_z \equiv W = 0$  por lo tanto  $\epsilon_{zz} \equiv \epsilon_z = 0$ ,  $\gamma_{rz} = 2\epsilon_{rz} = 0$ , y  $\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = 0$ . Las ecuaciones (8.3) se reducen a

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9.6)$$

y el esfuerzo  $\sigma_z$  se expresa en términos de  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  como

$$\sigma_z = -\nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (9.7)$$

Muchos problemas de ingeniería involucran sólidos de revolución (sólidos axisimétricos) sujetos a carga de revolución o axialmente simétrica, por ejemplo un cilindro circular bajo presión externa uniforme, zapata circular en una masa de suelo semi-infinita como se muestran en la Fig. 6.3

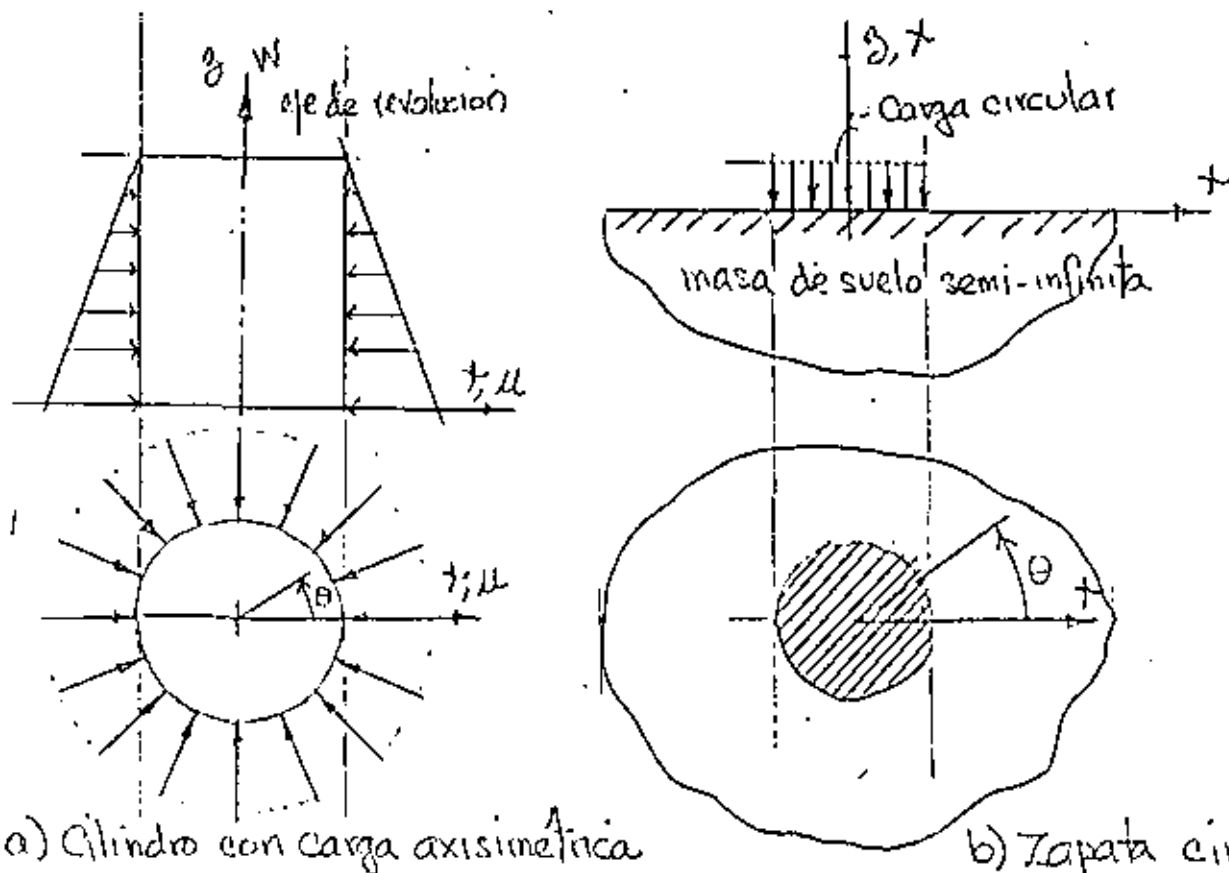


Fig. 6.3 Problemas axisimétricos.

Debido al eje axisimétrico respecto a geometría y cargas, las componentes del esfuerzo son independiente del ángulo  $\theta$ ; por lo tanto todas las derivadas respecto a  $\theta$  se anulan y las componentes  $\nu$ ,  $\gamma_{r\theta}$ ,  $\gamma_{\theta z}$ ,  $\tau_{r\theta}$ , y  $\tau_{\theta z}$  son cero. Las componentes de esfuerzo diferente de cero son  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  y  $\tau_{rz}$ . Las relaciones de formación desplazamiento son, para las deformaciones diferente de cero

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \quad (9.8)$$

y la relación constitutiva es

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 \\ & & 1-\nu & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (9.9)$$

(simétrica)

despejando de (9.4)  $\{\epsilon\}$ , substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de (9.1) a

$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$  se obtiene

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\nu) \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \quad (9.10)$$

La ecuación (9.10) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de esfuerzos planos  $\sigma_z = 0$ , de ellas se obtiene  $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]$ .

Similarmente despejando  $\{\epsilon\}$  de (9.6) y substituyéndolo en la ecuación de compatibilidad (9.3), y eliminando por medio de las ecuaciones de equilibrio (9.1) a  $\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$  se

obtiene.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{1}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (9.11)$$

La ecuación (9.11) junto con las de equilibrio (9.1) son suficientes para la solución del problema de deformación plana ( $\epsilon_z = 0$ ), con fuerzas de cuerpo diferentes de cero, de ellas se obtiene  $\{\sigma\}^T = [\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy}]$ .

Cuando las fuerzas de cuerpo  $X$  es solo función de  $y$ ; constante o cero, y cuando la fuerza de cuerpo  $Y$  es solo función de  $x$ , constante o cero, las ecuaciones (9.10) y (9.11) para esfuerzos y deformación plana respectivamente, se reducen a una sola que es

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (9.12)$$

Es importante observar que en este caso, en las ecuaciones de equilibrio (9.1), y la de compatibilidad (9.12), modificada por las ecuaciones constitutivas, no intervienen las constantes elásticas del sólido  $E$  y  $\nu$ . Conclusión de fundamental importancia para el uso de modelos transparentes en Fotoelasticidad. También se concluye en este caso que en ambos estados; de esfuerzos y deformación plana los esfuerzos  $\{\sigma\}$  son iguales, solamente las deformaciones  $\{\epsilon\}$  y los desplazamientos  $\{u\}$  son diferentes. E...

Para la solución del problema anterior cuando  $\{X\} = 0$  Airy, G. B. (Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept., 1862) introduce

una función  $\phi(x, y)$ , llamada función de esfuerzos, en forma tal que

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

(9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1) cuando las fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  son cero, y substituyéndolas en (9.12) se obtiene

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (9.14)$$

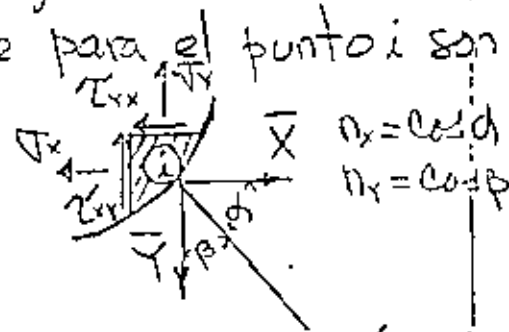
desarrollando el operador bi-laplaciano se obtiene

$$\nabla^4 \phi = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} = 0 \quad (9.15)$$

La ecuación (9.14) se llama bi-armónica o bi-laplaciana y la forma (9.15) gradiente cuarto de  $\phi$ .

Por lo demostrado anteriormente el problema de solución de esfuerzos en medios elásticos lineales homogéneos e isotrópicos bidimensionales se reduce a una solución de (9.15) que satisfaga las condiciones en la frontera bidimensional que para el punto  $i$  son

$$\begin{aligned} \bar{X}_i &= \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \bar{Y}_i &= \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \end{aligned}$$



matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{Bmatrix} \quad (9.10)$$

Del Teorema de la unicidad\* la solución mencionada es única.

\* Timoshenko, S. and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity", McGraw Hill, 1966.

Si las fuerzas de cuerpo existen, generalmente es posible relacionarlas mediante una función potencial  $V(x, y)$  en forma tal que

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (9.11)$$

substituyendo (9.11) en las ecuaciones de equilibrio (9.1) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y - V) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0$$

en este caso la función de esfuerzos es

$$\sigma_x - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y - V = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (9.13)$$

por supuesto (9.13) satisface las ecuaciones de equilibrio (9.1), y substituyéndola en la ecuación (9.10) la reduce a

$$\nabla^4 \phi = -(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -(1+\nu) \nabla^2 V \quad (9.14)$$

(9.14) nos resuelve el problema de esfuerzos planos con fuerzas de cuerpo relacionadas por (9.11).

Substituyéndola (9.13) en (9.11) se obtiene

$$\nabla^4 \phi = -\frac{1}{1+\nu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 V \quad (9.15)$$

10. Ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos  $\{u\}^T = [u_1, u_2, u_3] = [u, v, w]$ .

Uno de los métodos de solución en problemas de elasticidad lineal, homogénea e isotrópica consiste

en eliminar las componentes de esfuerzos  $\{\sigma\}$  de las ecuaciones de equilibrio (5.2) expresando las ecuaciones constitutivas (8.5) en términos de los desplazamientos (7.2), (7.3) y (7.4). Por lo tanto substituyendo (7.2), (7.3) y (7.4) en (8.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\sigma_x &\equiv \sigma_{11} = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &\equiv \sigma_{22} = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &\equiv \sigma_{33} = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \\ \tau_{xy} &\equiv \tau_{12} = G \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} &\equiv \tau_{23} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &\equiv \tau_{31} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (10.1)$$

$$\text{donde } e = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \equiv \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (10.2)$$

Substituyendo (10.1) en las ecuaciones de equilibrio (5.2) se obtiene

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.3)$$

donde en este caso el operador diferencial  $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . En (10.3) cuando las fuerzas de cuerpo  $\{X\}$  son cero (10.3) queda

$$(\lambda + G) \begin{Bmatrix} \frac{\partial e}{\partial x} \\ \frac{\partial e}{\partial y} \\ \frac{\partial e}{\partial z} \end{Bmatrix} + G \nabla^2 \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = 0 \quad (10.4)$$

En las ecuaciones (10.4), diferenciando la primera respecto a  $x$ , la segunda respecto a  $y$ , y la tercera respecto a  $z$ , y después sumándolas se obtiene

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e = 0 \quad (10.5)$$

(10.5) significa que la expansión volumétrica unitaria  $e = e_x + e_y + e_z$  satisface la ecuación diferencial

$$\nabla^2 e = \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (10.6)$$

En la ecuación (10.3) las fuerzas de cuerpo son

$$\begin{aligned} X &= \rho(f_x - a_x) \\ Y &= \rho(f_y - a_y) \\ Z &= \rho(f_z - a_z) \end{aligned} \quad (10.7)$$

donde  $f_x, f_y$  y  $f_z$  son las fuerzas por unidad de masa,  $a_x, a_y$  y  $a_z$  las componentes de la aceleración, y  $\rho$  es la densidad ó masa específica. Si en las ecuaciones (10.3) la primera la multiplicamos por el vector unitario  $\bar{i}$ , la segunda por el vector unitario  $\bar{j}$ , y la tercera por el vector unitario  $\bar{k}$ , y las sumamos entre sí se obtiene la expresión vectorial de las ecuaciones (10.3) como

$$(\lambda + G)\text{grad div } \bar{s} + G\nabla^2 \bar{s} + \rho(\bar{f} - \bar{a}) = 0 \quad (10.8)$$

en donde

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}a_x + \bar{j}a_y + \bar{k}a_z \\ \bar{f} &= \bar{i}f_x + \bar{j}f_y + \bar{k}f_z \\ \bar{s} &= \bar{i}u + \bar{j}v + \bar{k}w \\ \text{div } \bar{s} &= e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ \text{grad div } \bar{s} &= \bar{i}\frac{\partial e}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial e}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial e}{\partial z} \end{aligned} \quad (10.9)$$

En la Fig. 2 se tiene lo siguiente  
 $o'n$  es normal al plano ABC, formando  
 ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  con respecto a los ejes  
 coordenados  $x_1$ ,  $x_2$ , y  $x_3$  respectivamente, la  
 distancia  $oo'$  es igual a  $r$  las coordenadas  
 de  $o'$  son  $x_1, x_2, x_3$  por lo tanto

$$n_1 = \cos \alpha = \frac{x_1}{r}, \quad n_2 = \cos \beta = \frac{x_2}{r}, \quad n_3 = \cos \gamma = \frac{x_3}{r} \quad (e)$$

donde  $\{n_i\} = [n_1 \ n_2 \ n_3]^T$  es el vector columna  
 de cosenos directores de la normal al plano ABC  
 ( $o'n$  y  $oo'$ ). Si el área ABC es considerada  
 como la unidad, las proyecciones

$$\begin{aligned} n_1 &= \text{área OBC} \\ n_2 &= \text{área OAC} \\ n_3 &= \text{área OAB} \end{aligned} \quad (e)$$

$\bar{s}$  = Esfuerzo resultante actuando sobre plano ABC  
 $\{\tilde{x}_i\} = [\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \ \tilde{x}_3]^T$ ; proyecciones de  $\bar{s}$  sobre  $x_i$ .

$\tilde{T}_n$  = Proyección de  $\bar{s}$  sobre la normal al plano ABC

$\tilde{T}_n$  = Proyección de  $\bar{s}$  sobre el plano ABC.

Del equilibrio del elemento OABC se obtiene



$$X_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2 + \sigma_{31} n_3$$

$$X_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{32} n_3 \quad (3)$$

$$X_3 = \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + \sigma_{33} n_3$$

expresando (3) matricialmente se obtiene

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Si no existen momentos de cuerpo,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  para  $i \neq j$  y  $[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}]^T$  por lo que (4) puede escribirse

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\text{ó } \{X_i\} = [\sigma_{ij}] \{n_j\} \quad (6)$$

El esfuerzo normal al plano ABC es

$$\sigma_n = X_1 n_1 + X_2 n_2 + X_3 n_3 \quad (7)$$

$$\text{ó } \sigma_n = \{X_i\}^T \{n_i\} \quad (8)$$

Substituyendo (5) en (7) se obtiene

$$\sigma_n = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2(\sigma_{12} n_1 n_2 + \sigma_{23} n_2 n_3 + \sigma_{31} n_3 n_1)$$

ó matricialmente de (6) y (8)

$$\sigma_n = \{n_i\}^T [\sigma_{ij}] \{n_j\} \quad (10)$$

$$S^2 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \quad (11)$$

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = S^2 \quad (12)$$

Es fuerza principal. Esfuerzo principal es un valor particular del es esfuerzo normal tal que  $\tau_n = 0$  por lo tanto

$$X_1 = \sigma_n n_1 \quad (13)$$

$$X_2 = \sigma_n n_2$$

$$X_3 = \sigma_n n_3$$

De (5) y (13) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n n_1 \\ \sigma_n n_2 \\ \sigma_n n_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

De donde

$$\begin{bmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0 \quad (15)$$

puesto que  $\{n_i\} \neq 0$ , entonces el determinante

$$\begin{vmatrix} (\sigma_n - \sigma_{11}) & -\sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ -\sigma_{21} & (\sigma_n - \sigma_{22}) & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{31} & -\sigma_{32} & (\sigma_n - \sigma_{33}) \end{vmatrix} = 0 \quad (16)$$

De (16) se obtiene

$$\begin{aligned} \sigma_1^3 - (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\sigma_1^2 + (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2)\sigma_1 \\ - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Las tres raíces de la ecuación (17) nos determinan

los valores de los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  cuyos coeficientes nos representan los invariantes de esfuerzos, dependen de  $\sigma_{ij}$  independientemente del sistema de ejes coordenadas

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \quad (18)$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

donde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  son los invariantes de esfuerzos, otras expresiones de invariantes pueden formarse de (18) por ejemplo

$$2I_1^2 - 6I_2 = (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)$$

(19) se usa en la expresión de la energía de deformación, su uso se discutirá posteriormente

Después de diagonalizar el tensor de esfuerzos  $[N_{ij}]$ , el elemento de la Fig. 2 se muestra en la Fig. 3, y las ecuaciones de equilibrio (5) quedan:

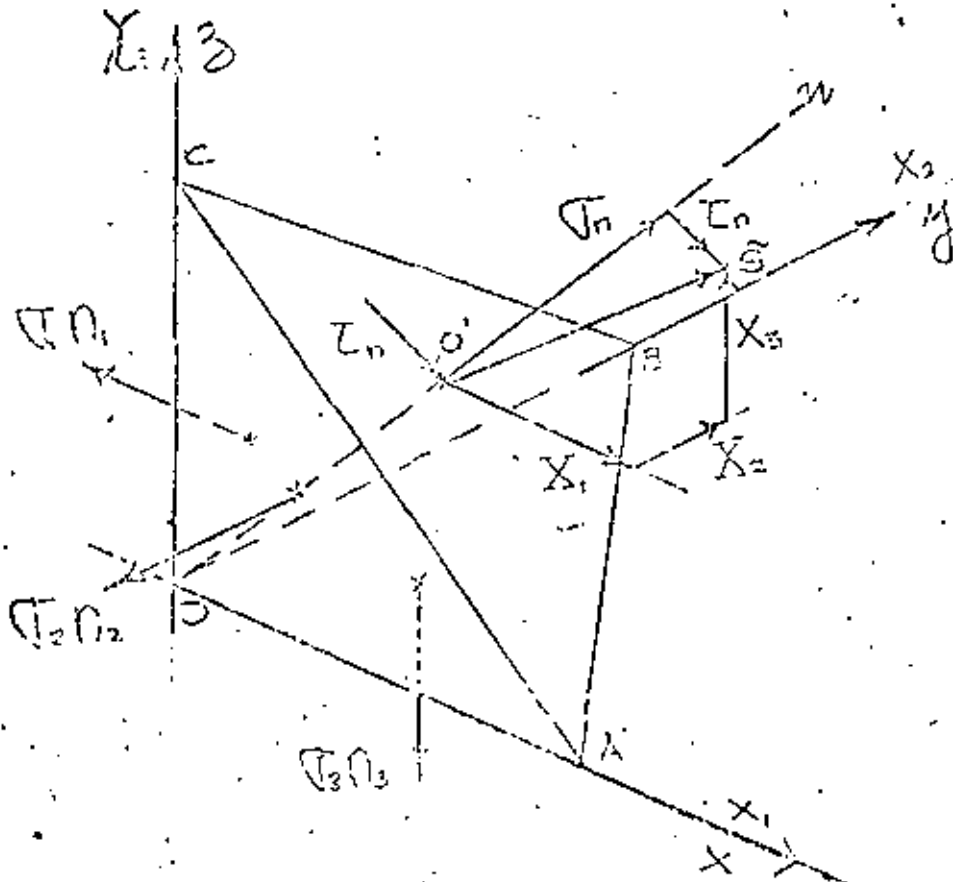


Fig. 3 Componentes del tensor de esfuerzos diagonalizado

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

En (20) las componentes  $\{X_i\}$ ,  $\{n_i\}$ ,  $\tilde{\sigma}_i$ ,  $\tilde{\tau}_{ij}$ ,  $\bar{\tau}_{ij}$  son diferentes a las (5) que se muestran en Fig. 2. De geometría se conoce que

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (21)$$

Substituyendo (20) en (21) se obtiene<sup>34</sup> la ecuación

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2} + \frac{\sigma_3^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad (22)$$

la cual representa una superficie elipsoidal en el espacio de esfuerzos  $\sigma_i$ , algunos autores lo denominan elipsoide de Lamé, en la Fig. 4 se muestra su perspectiva isométrica. Para el conjunto

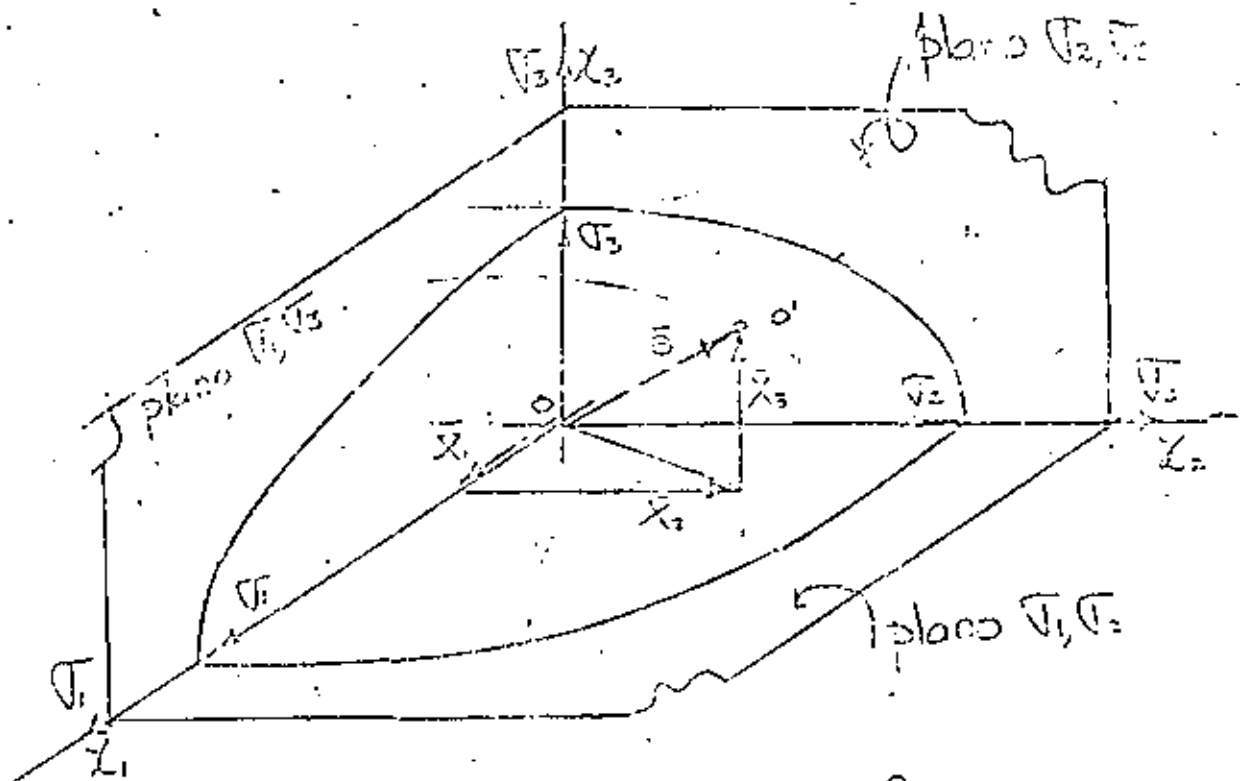


Fig. 4 Elipsoide de Lamé referido al espacio de esfuerzos  $\sigma_i$ , (un octaedro).

de planos con ejes directores  $\{X_i\}$  a  $\tau_{ij}$  de 0 Fig. 2, le corresponde el conjunto de componentes  $\{X_{ij}\}$  los cuales junto con los esfuerzos principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$  forman la superficie elipsoidal de la Fig. 4.

De (20), si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ , la superficie es esférica.  
 si  $\sigma_1 \neq 0$ ,  $\sigma_2 \neq 0$  y  $\sigma_3 = 0$  la superficie es cilíndrica de sección elíptica con eje contenido en el eje  $\sigma_3$ . Si  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\sigma_3 = 0$  la superficie es cilíndrica de sección circular con eje contenido en el eje  $\sigma_3$ . Si  $\sigma_1 \neq 0$  y  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  la superficie son dos planos paralelos al plano  $\sigma_2, \sigma_3$ .  
 a continuación se indican los casos particulares mencionados

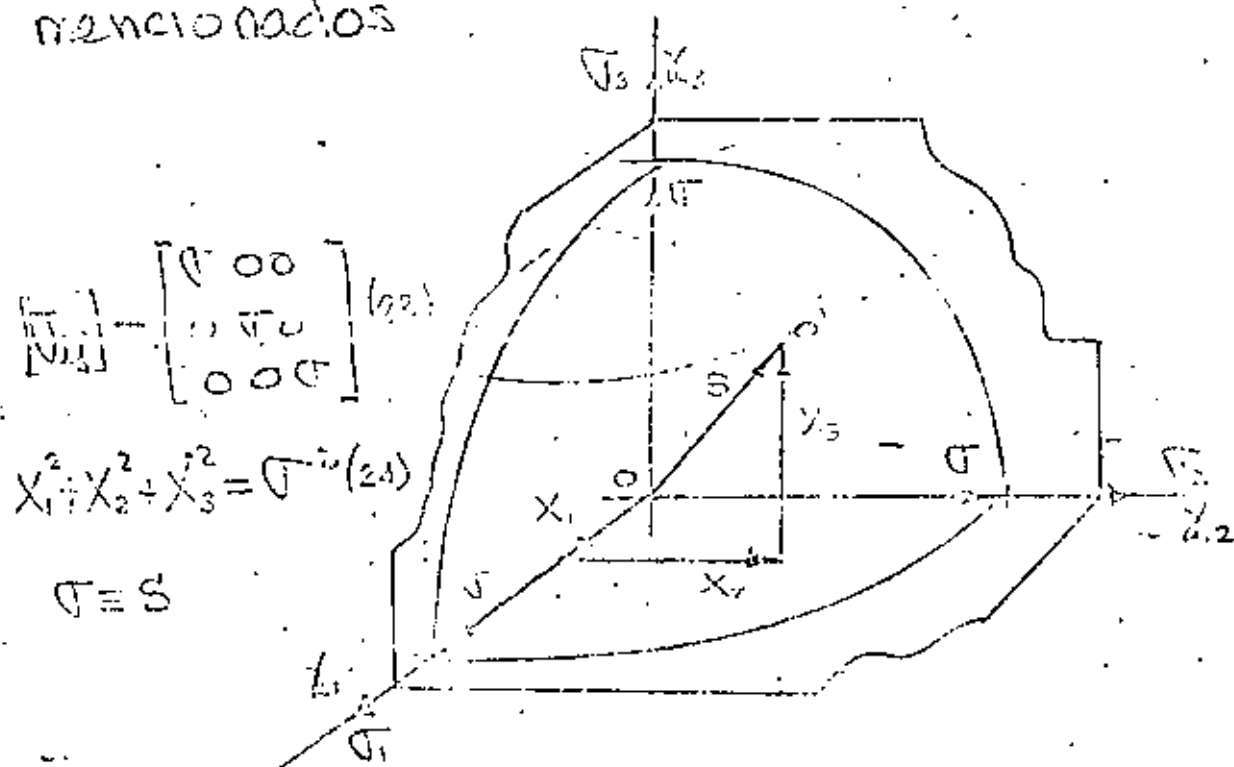


Fig. 5 Superficie esférica, equivalente a una Tensión o compresión uniforme o hidrostática.

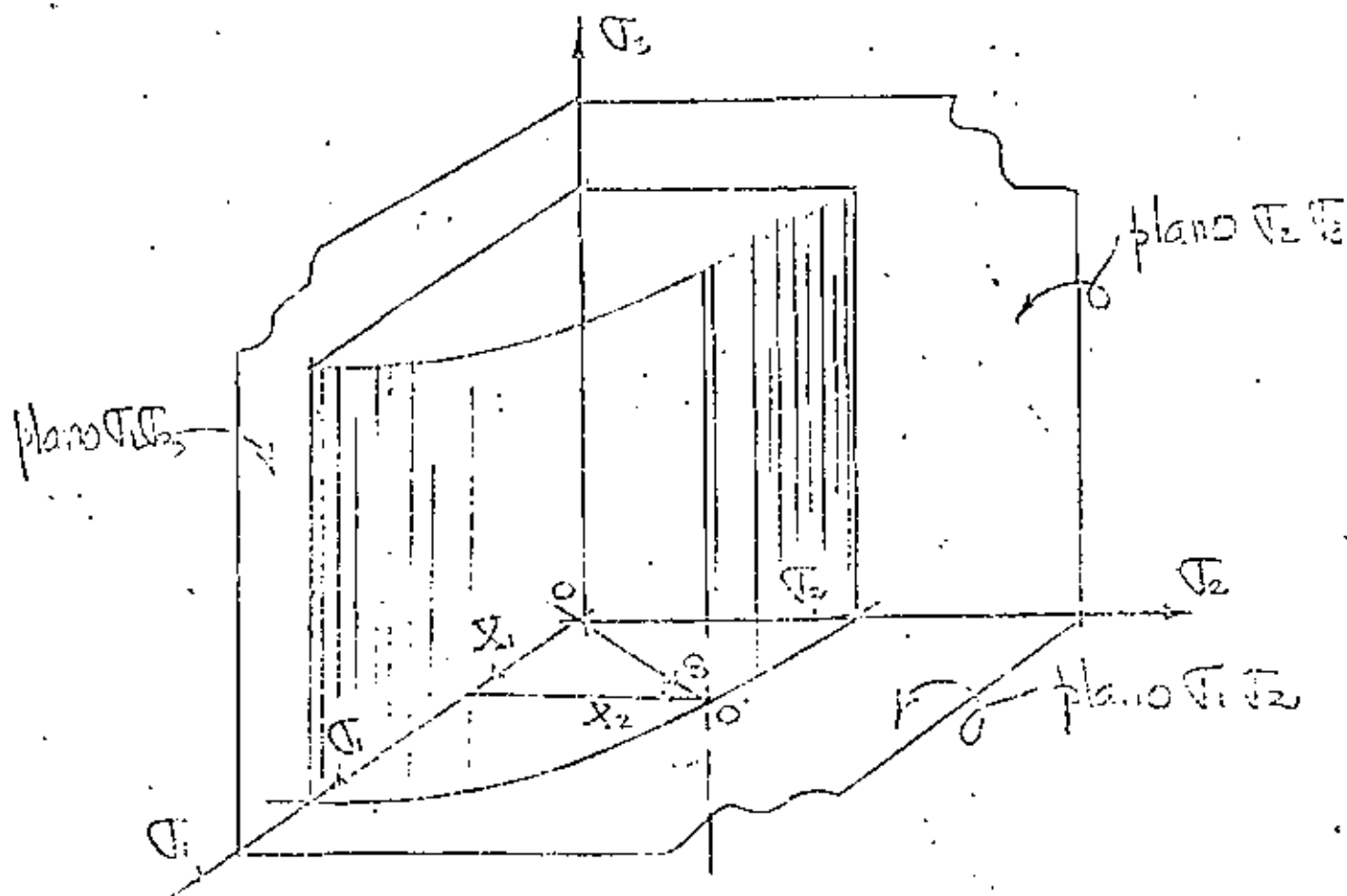


Fig. 6 Superficie cilíndrica de sección elíptica directrices paralelas al eje  $O\sigma_3$ .

Componentes del tensor de esfuerzos:  $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  (65)

Ecuación de la superficie:  $\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{\sigma_2^2} = 1$  (66)

Como caso particular de (65) si  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  se tiene un cilindro con componentes del tensor de esfuerzos

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

y ecuación de la superficie

$$x_1^2 + x_2^2 = \sigma^2 \quad (68)$$

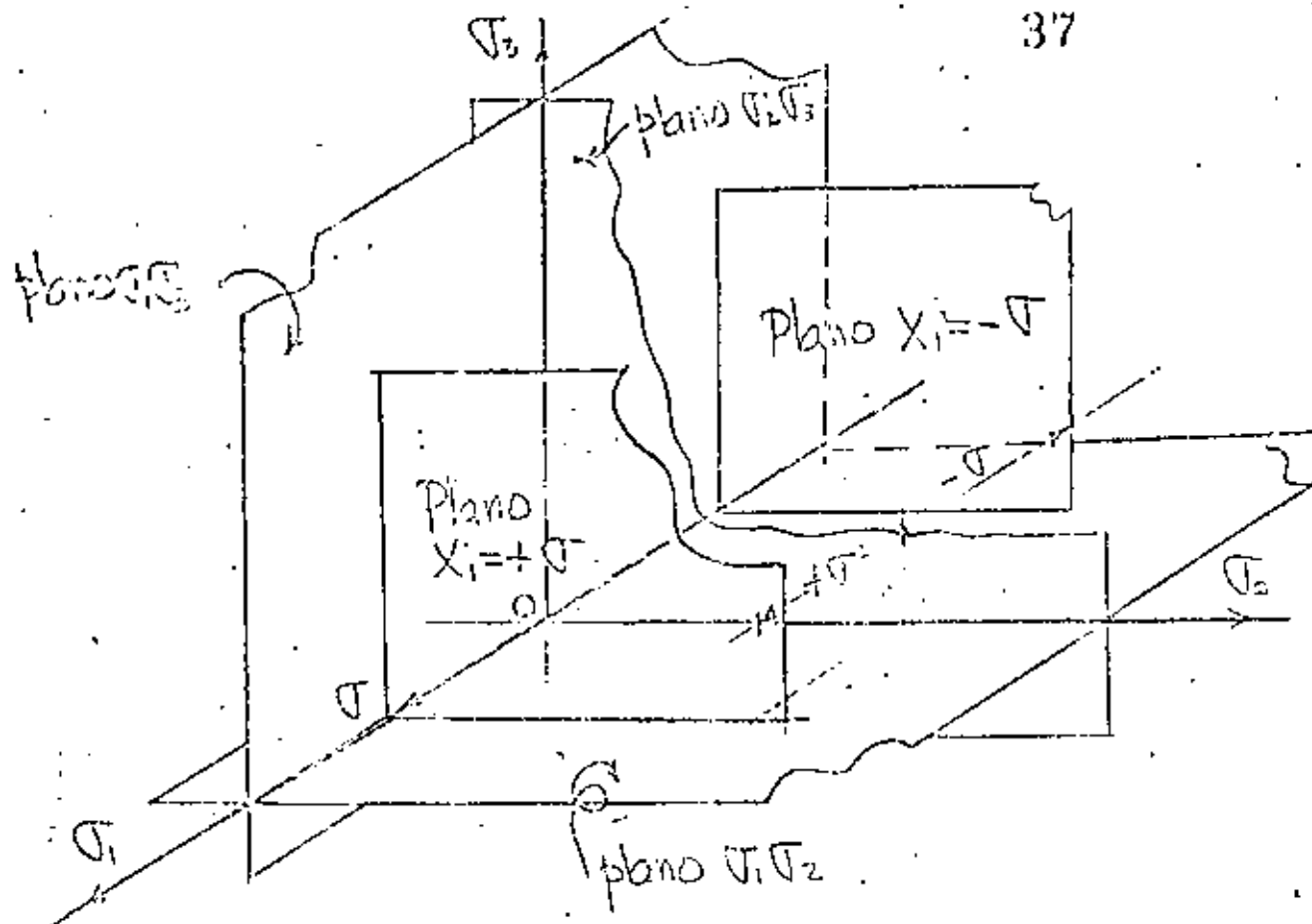


Fig. 6. Superficies planas paralelas al plano  $\sigma_1\sigma_2$

Componentes del tensor de esfuerzos:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Ecuación de la Superficie:

$$X_1 = \pm \sigma \quad (50)$$



La ecuación (21) en el espacio de cosenos directores nos representa una esfera de radio unitario como se muestra en la Fig. 7

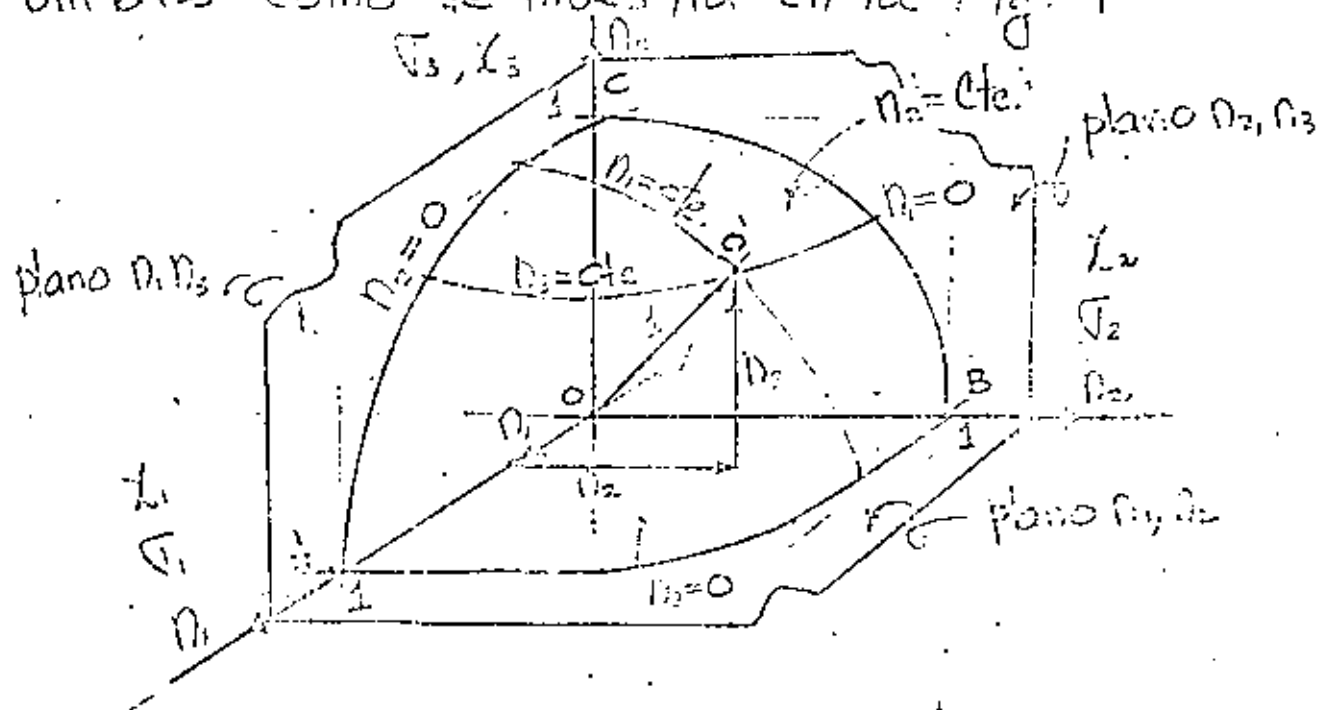


Fig. 7 Espacio de cosenos directores. un octaedro de la esfera de Mohr.

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \overline{OO'} = 1$$

De la Fig. 3 se observa que substituyendo (25) en (7) se obtiene

$$\overline{T}_n = \overline{T}_1 N_1^2 + \overline{T}_2 N_2^2 + \overline{T}_3 N_3^2 \quad (31)$$

Substituyendo (29) y (31) en (11) y (12) se obtiene

$$\overline{T}_n^2 = \overline{T}_1^2 N_1^2 + \overline{T}_2^2 N_2^2 + \overline{T}_3^2 N_3^2 - (\overline{T}_1 N_1^2 + \overline{T}_2 N_2^2 + \overline{T}_3 N_3^2)^2 \quad (32)$$

de las ecuaciones (31), (32) y (31) se obtiene el siguiente sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas no lineal en  $N_1$ ,  $N_2$  y  $N_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \frac{1}{\sigma_1} & \frac{1}{\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \tau_n \\ \tau_n^2 \end{Bmatrix} \quad (33)$$

de (33) se obtiene

$$n_1^2 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \quad (34)$$

$$n_2^2 = \frac{(\sigma_3 - \sigma_n)(\sigma_1 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_3 + \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \quad (35)$$

$$n_3^2 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_n)(\sigma_2 - \sigma_n) + \tau_n^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\tau_2 - \sigma_3)} \quad (36)$$

De la Fig. 7 considerando  $n_1 =$  constante de la ecuación (34) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) = (\sigma_2 - \sigma_n)(\sigma_3 - \sigma_n) + \tau_n^2 \quad (37)$$

efectuando operaciones algebraicas en (37) se obtiene

$$n_1^2 (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left( \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 = \left[ \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau_n^2 = \text{Constante}$$

de donde:  $x^2 = \left[ \sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right]^2 + \tau_n^2 = (x - a)^2 + \frac{y^2}{r^2}$  que

es la ecuación de un círculo a una distancia  $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

del origen por lo tanto el radio  $r_1$  que haciendo centro en  $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$  localiza el punto de coordenadas  $\sigma_n \tau_n$  en el diagrama de Mohr es



2. Esfuerzos cortantes máximos, esfuerzo esférico, esfuerzo octaedral

Sean  $x_1, x_2, x_3$  las direcciones principales (Fig. 3) y  $n_1, n_2, n_3$  los cosenos directores de cierto plano ABC, se tiene que

$$\tau_n^2 = s^2 - \sigma_n^2 \quad (41)$$

$$s^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (42)$$

$$\sigma_n^2 = (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)^2 \quad (43)$$

substituyendo (43) y (42) en (41) se obtiene

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3)^2 \quad (44)$$

Para determinar las direcciones máximas de corte de  $n_3^2 = 1 - n_1^2 - n_2^2$  se elimina  $n_3$  de (44) y se determina

$$\frac{\partial}{\partial n_1} (\tau_n^2) = 0; \quad n_1 [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0 \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_2} (\tau_n^2) = 0; \quad n_2 [(\sigma_1 - \sigma_3)n_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)n_2^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0 \quad (46)$$

las soluciones de (45) y (46) que hacen  $\tau_n$  máximo.

$$\begin{array}{lll} \text{Si } n_2 = 0 & n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \text{" } n_1 = 0 & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_3 = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{y similarmente} \\ \text{" } n_3 = 0 & n_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} & n_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \end{array}$$

se repiten los cálculos en (44) se elimina  $n_1$  y después  $n_2$ . Conviene observar que en (45) y (46)

no hay soluciones de  $n_1$  y  $n_2$  que sean ambos diferentes de cero, porque las expresiones dentro del paréntesis no pueden anularse.

	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_1$	$n_2$	$n_3$
$n_1$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n_2$	0	$\pm 1$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$
$n_3$	$\pm 1$	0	0	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	$\pm \sqrt{\frac{1}{2}}$	0

Est. Principales

Cortantes  
máximos

Tabla 1

direcciones

$T_n = 0$

Repetiendo los cálculos en (44), eliminando  $n_1$  y determinando  $n_2$  y  $n_3$  tal que  $T_n$  sea máximo y después  $n_2$  y determinando  $n_1$  y  $n_3$  tal que  $T_n$  sea máximo se obtienen los valores

$$(T_{\max})_1 = T_1 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \quad (47)$$

$$(T_{\max})_2 = T_2 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3)$$

$$(T_{\max})_3 = T_3 = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

de (47) y (48). Se puede expresar  $T_n$  en la siguiente forma

$$T_n^2 = 4(n_1^2 n_2^2 T_3^2 + n_2^2 n_3^2 T_1^2 + n_1^2 n_3^2 T_2^2) \quad (49)$$

Las 3 primeras columnas de la Tabla 1 dan las direcciones de los planos coordenados de las direcciones principales para ellos  $T_n = 0$  y (49) es un mínimo, las tres columnas restantes dan planos a través de un eje principal bisectando los otros dos direcciones de esfuerzos principales, substituyendo los valores de Tabla 1 en (49)

se obtienen los valores de los esfuerzos cortantes máximos (4.7), los lados del octaedro mostrado en la Fig. 9 son las direcciones principales de corte, y las direcciones  $\chi_1, \chi_2$  y  $\chi_3$  son las direcciones

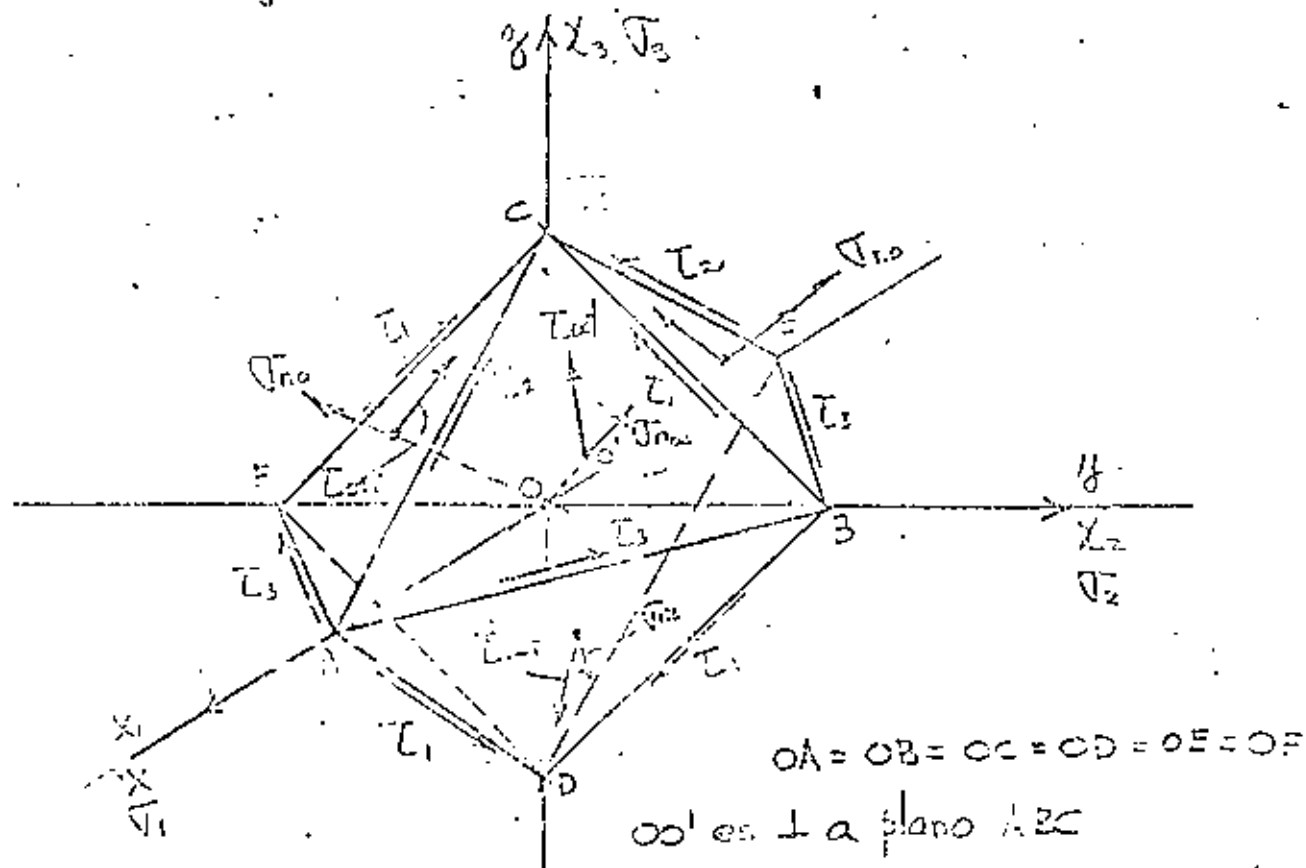


Fig. 9 octaedro regular cuyos lados son las direcciones de esfuerzo cortante máximos. Principales  $\sigma_1, \sigma_2$  y  $\sigma_3$ , la normal al tetraedro OABC tiene cosenos directores  $n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ( $\alpha = \beta = \gamma = 54.74^\circ$ ) de (51) el esfuerzo normal es igual a

$$\sigma_{n_0} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.8)$$

3) se denomina esfuerzo medio, esférico o hidrostático, el esfuerzo de corte correspondiente de (4.8) es

$$\tau_{\text{con}}^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (4.9)$$

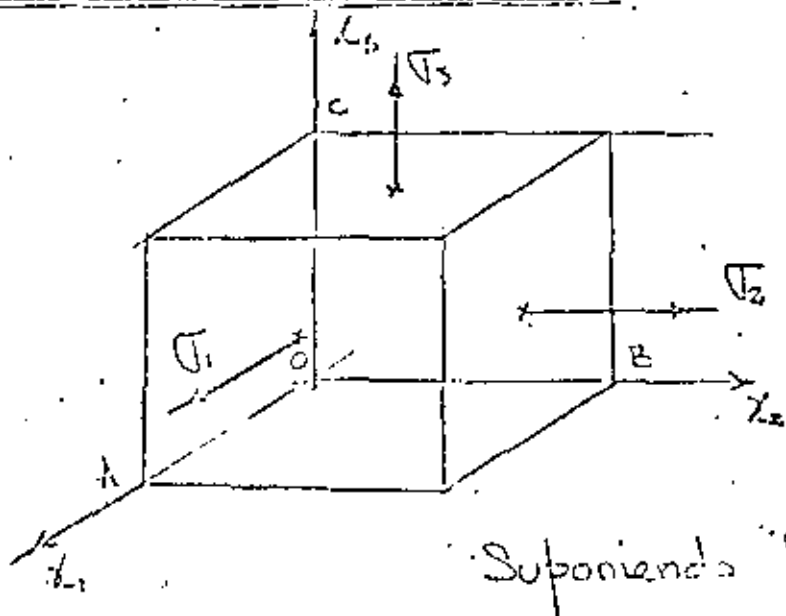
$$\tau_{\text{cort}} = \frac{1}{3} \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (49)$$

de (48) y (49) se obtiene

$$\tau_{\text{cort}} = \sqrt{\frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma_n)^2 + (\sigma_2 - \sigma_n)^2 + (\sigma_3 - \sigma_n)^2]} \quad (50)$$

al esfuerzo de corte dado por (49) y (50) es llamado esfuerzo octaedral de corte, porque la cara donde actúa es la cara ABC del cubo regular de la Fig. 9 que tiene vértices en los ejes coordenados, se usa frecuentemente en Teoría de Plasticidad

TEORIAS DE FALLA



Suponiendo  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

Fig. 10

En la Fig. 1, después de diagonalizar las componentes del tensor de esfuerzos, se tiene

$$[\bar{\sigma}_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

se trata de obtener la superficie  $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$  en la cual el medio entra a falla plástica, a continuación se presenta el diagrama idealizado esfuerzo deformación en condiciones uniaxiales

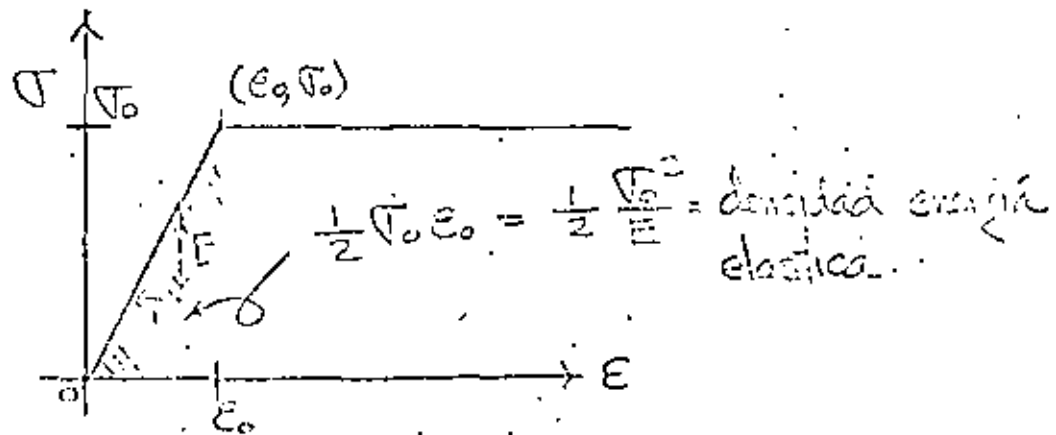


Fig. 11





espacio de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  es

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_0) - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = 0 \quad (53)$$

en (53) suponiendo  $\sigma_3 = 0$  y para  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  (esfuerzos planos) se obtiene para  $\nu = 0.3$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 - \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 - \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 - 0.3} \sigma_0 = 1.43 \sigma_0 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\text{Si } \sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma_0$$

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= (1 + \nu)\sigma \\ \sigma &= \frac{1}{1 + \nu} \sigma_0 = \frac{1}{1 + 0.3} \sigma_0 = 0.77 \sigma_0 \end{aligned} \quad (55)$$

Llevando los valores (54) y (55) al plano  $\sigma_1, \sigma_2$  del espacio de esfuerzos se obtiene las rectas de falla de la Fig. 13

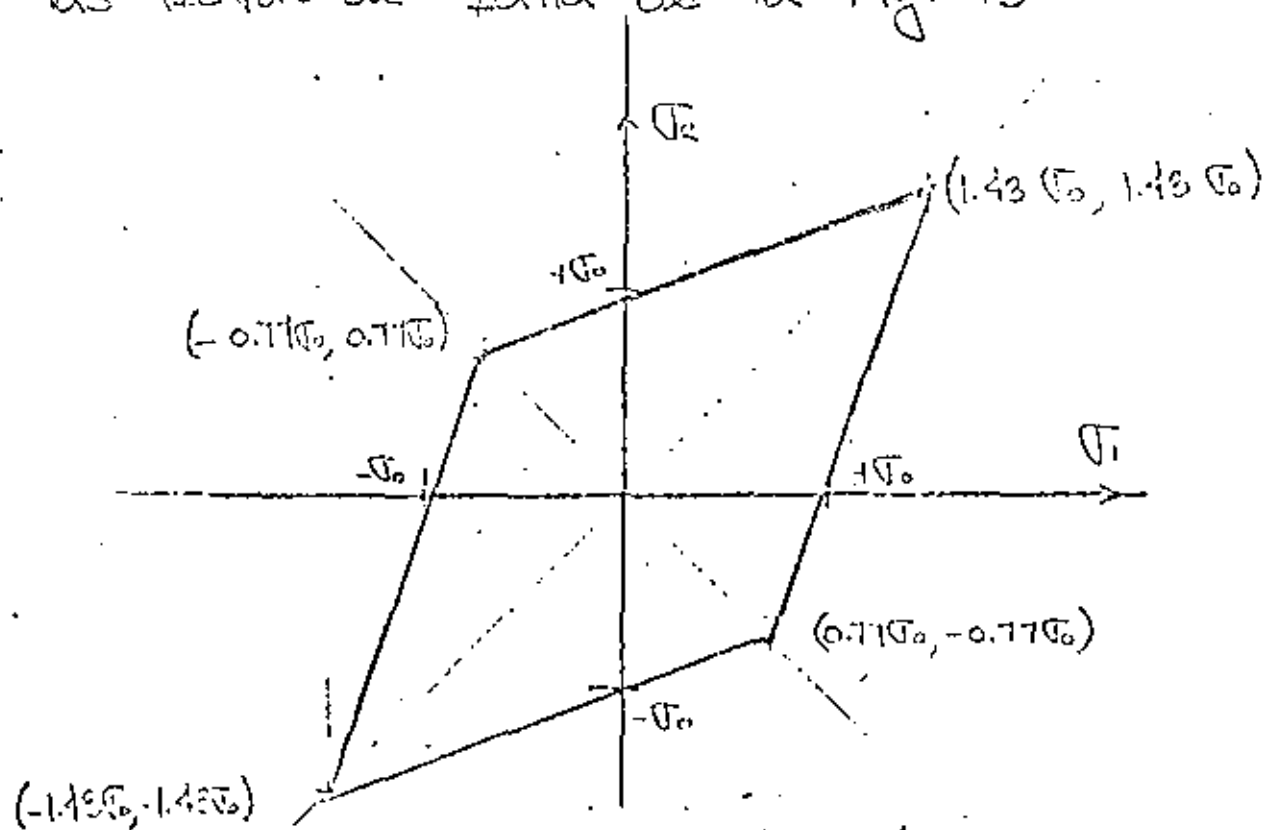


Fig. 13 Líneas de falla en el espacio de esfuerzos (Saint-Venant)

### c) Teoría del Esfuerzo Cortante Máximo (Coulomb)

Si  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$  Coulomb establece que la falla se alcanza cuando

$$(\tau_2)_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{1}{2} \sigma_0 \quad (56)$$

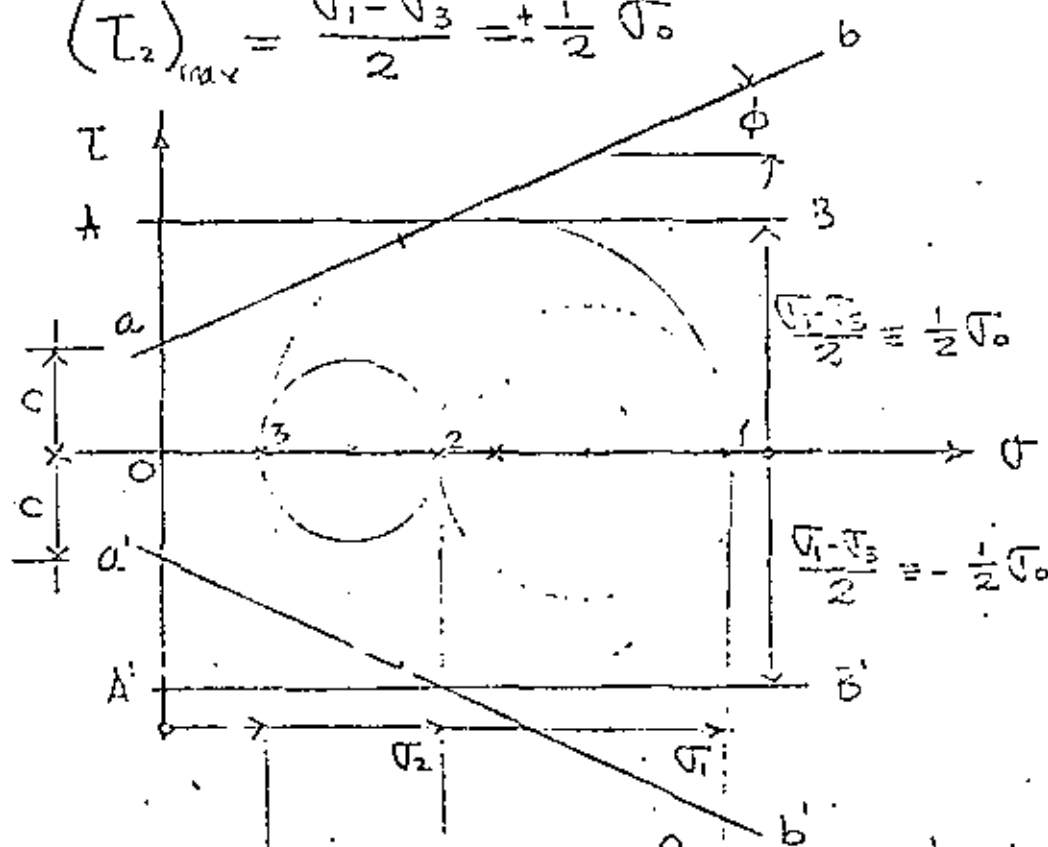


Fig. 13 Teoría del esfuerzo cortante máximo

(56) en el diagrama de Mohr establece como rectas de falla a  $AB$  y  $A'B'$  en Fig. 13 cuando el ángulo de fricción interna  $\phi = 0$ , y cuando  $\phi > 0$  las rectas de falla son las  $ab$  y  $a'b'$  cuya ecuación es igual a

$$\tau_{\max} = c + \sigma \tan \phi \quad (57)$$

$c$  = cohesión o resistencia al esfuerzo cortante puro  
 $\phi$  = ángulo de fricción interna  
 $\tau$  = esfuerzo de falla.

$c$  y  $\phi$  son constantes constitutivas experimentales que se pueden obtener mediante una prueba triaxial de ruptura. La ecuación 56 en el plano de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_3$  se muestra en la Fig. 14

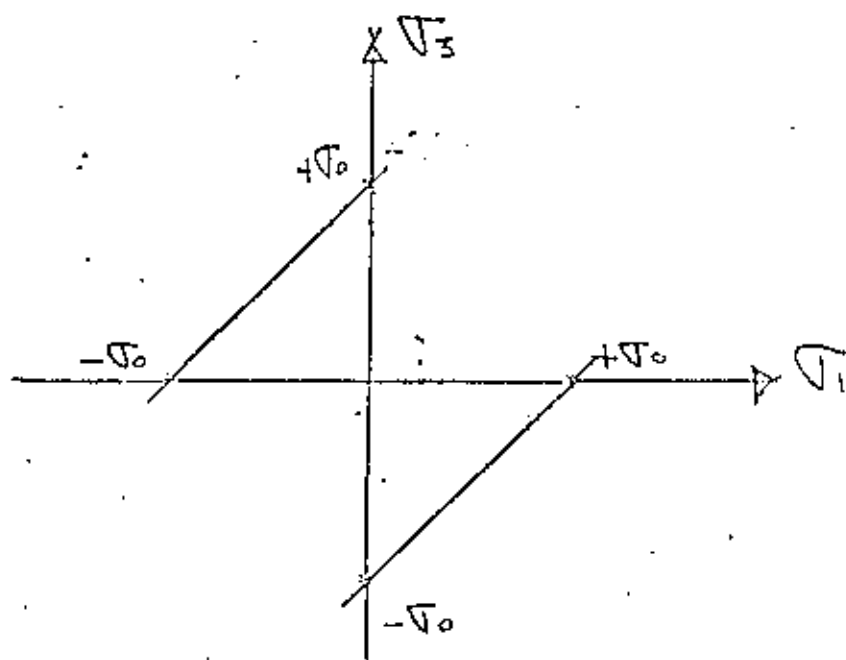


Fig. 14 Teoría del esfuerzo cortante máximo

d) Teoría de la máxima energía de deformación (Beltrami, Haig)

La densidad de energía en un medio elástico lineal viene dada por

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \quad (53)$$

de la Fig. 11 la densidad de energía hasta el límite elástico  $\sigma_0$  es

$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0^2}{E} \quad (54)$$

de (53) y (54) se obtiene la superficie de falla

$$f(\sigma_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) - \sigma_0^2 = 0 \quad (60)$$

En esfuerzos planos  $\sigma_3 = 0$  se obtiene

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \nu\sigma_1\sigma_2 = \frac{\sigma_0^2}{2} \quad (61)$$

(61) es la ecuación de una elipse la cual en el plano de esfuerzos  $\sigma_1, \sigma_2$  se muestra en la Fig. 15 para el acero con  $\nu = 0.3$ , y las

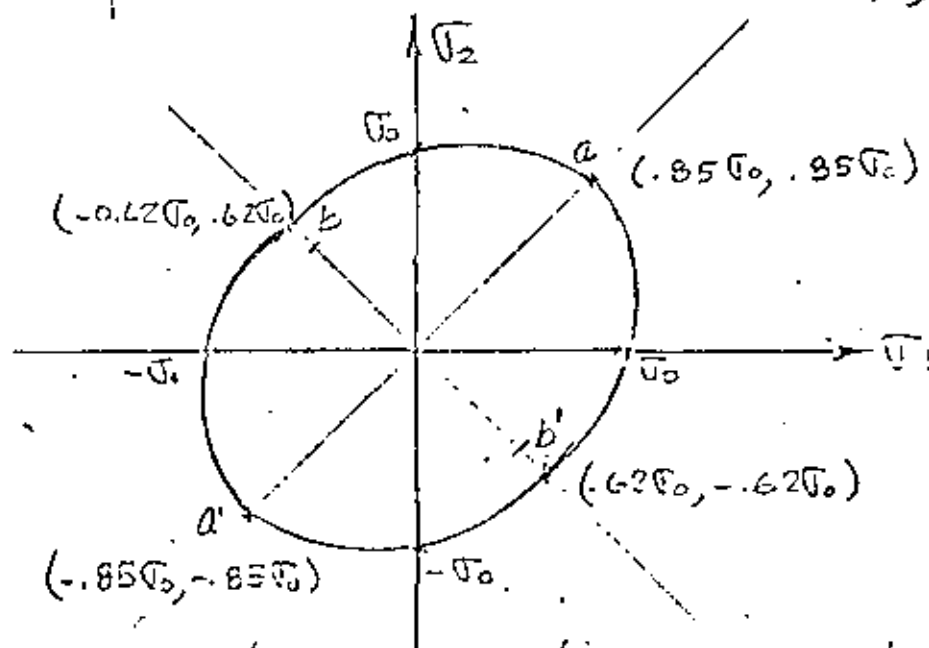


Fig. 15 Teoría de la máxima energía de deformación en el plano  $\sigma_1, \sigma_2$  para  $\nu = 0.3$   
coordenadas de los puntos a, a', b, y b'.

e) Teoría de energía máxima distorsional.

(1856, J.C. Maxwell, M.T. Huber, R.V. Mises, H. Hencky).

Los esfuerzos cortantes máximos actúan sobre el plano octaédrico cuyos cosenos directores son

$n_i = \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$ , y el esfuerzo normal correspondiente llamado, medio, esférico o hidrostático es:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (62)$$

la expansión volumétrica por unidad de volumen correspondiente se expresa por

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{2(1-2\nu)}{E} p \quad (63)$$

la energía por cambio unitario de volumen será

$$U_1 = \frac{1}{2} p e \quad (64)$$

substituyendo (62) y (63) en (64) se obtiene

$$U_1 = \frac{1-2\nu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (65)$$

en un medio elástico lineal homogéneo e isotrópico la energía de deformación por unidad de volumen es

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \quad (66)$$

La densidad de energía desviatoria máxima es

$$\Delta U = U_0 - U_1 \quad (67)$$

substituyendo (65) y (66) en (67) se obtiene

$$\Delta U = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \right] \quad (62)$$

el valor máximo en (62) sería si  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  y (62) se transforma para  $\sigma_1 = \sigma_0$  en

$$\Delta U_{\max} = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_0^2 \quad (69)$$

por lo tanto de (68) y (69) se obtiene cuando  $\Delta U = \Delta U_{\max}$

$$f(\sigma_i) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (70)$$

(70) es la ecuación de un cilindro circular cuyo eje y directrices en el espacio de esfuerzos forma iguales ángulos con los ejes  $\sigma_i$ , la intersección de (70) con el plano  $\sigma_3 = 0$  se obtiene de (70) para  $\sigma_3 = 0$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_0^2 = 0 \quad (71)$$

(71) y (61) deben ser iguales para  $\nu = 0.5$  material incompresible (71) representa también una elipse como en la Fig. 15 solo que las coordenadas de  $a, a', b$  y  $b'$  son para  $\nu = 0.5$

$$\begin{array}{ll} a(\sigma_0, \sigma_0) & b(-0.577\sigma_0, 0.577\sigma_0) \\ a'(-\sigma_0, -\sigma_0) & b'(0.577\sigma_0, -0.577\sigma_0) \end{array}$$

ABCD: Teoría del esfuerzo máximo. (Rankine)

EFGH: " deformación máxima. (Saint-Venant)

— " de máxima energía de deformación. (Beltrami)

- - - " " " " " distorsionante. (von-Mises)

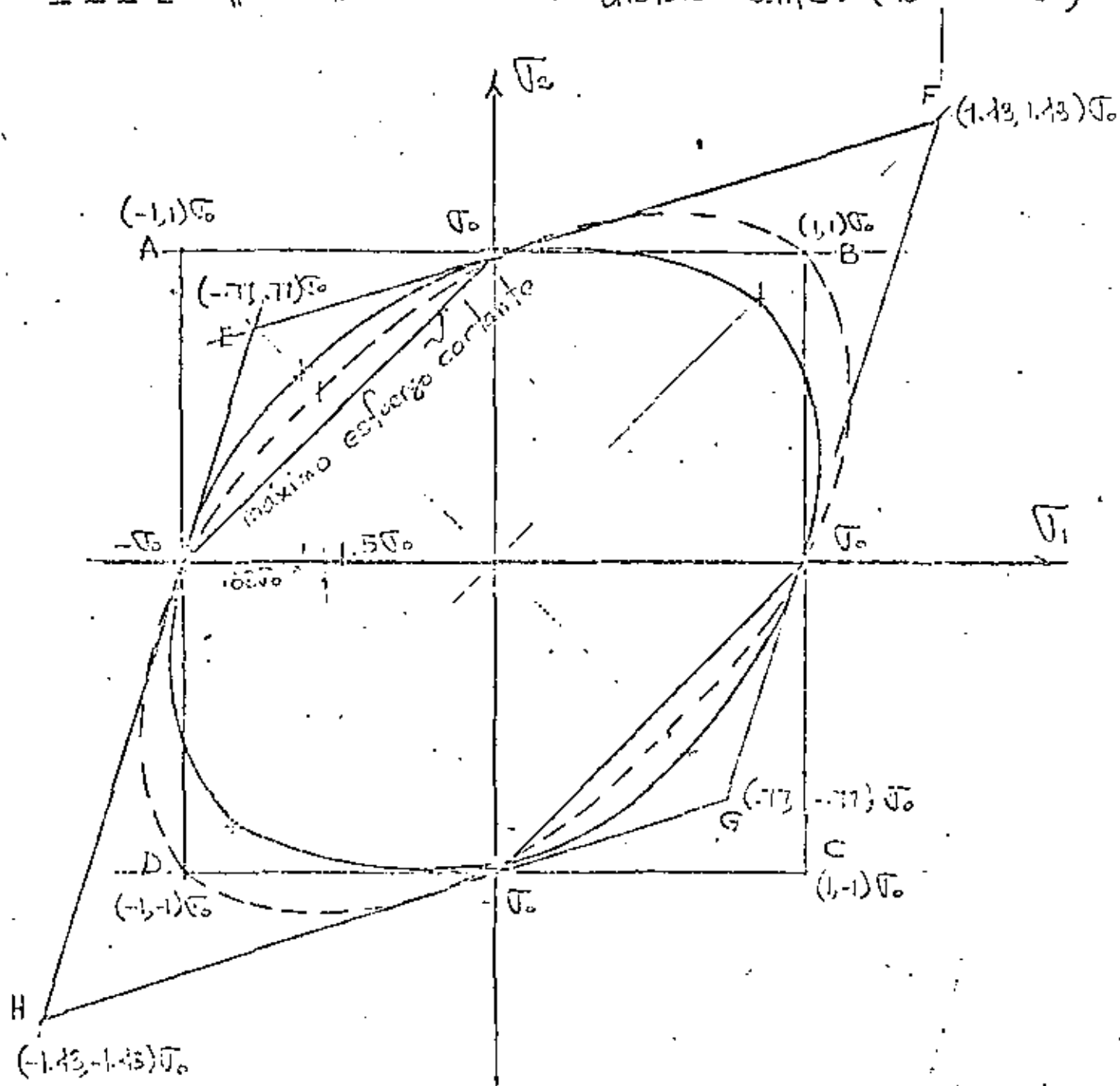


Fig. 16 Comparación entre las distintas Teorías de falla para  $\nu = 0.3$ ,  $\phi = 0$





**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA**

**METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES  
PLANAS**

**Dr. Porfirio Ballesteros**

**MARZO, 1984.**

# 1 METODO DE LAS RIGIDECES PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS ORTOGONALES PLANAS

## 1.1 Convención de signos.

La siguiente convención de signos será utilizada en el desarrollo del método de las rigideces y sus aplicaciones en marcos ortogonales planos.

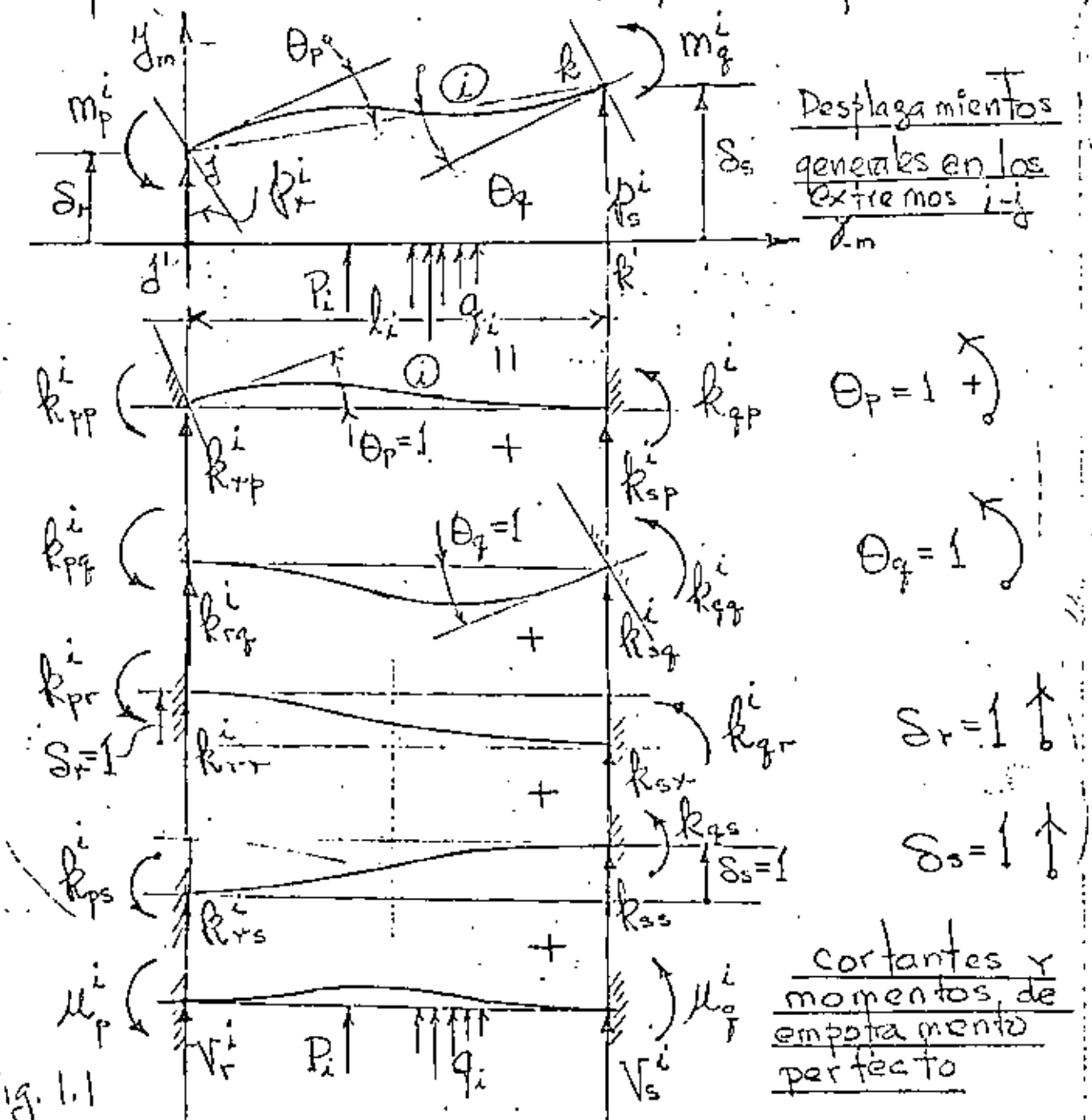


Fig. 1.1

De la Fig. II aceptando el principio de superposición se tiene:

$$\begin{aligned}
 m_p^i &= k_{pp}^i \theta_p + k_{pq}^i \theta_q + k_{pr}^i \delta_r + k_{ps}^i \delta_s + \mu_p^i \\
 m_q^i &= k_{qp}^i \theta_p + k_{qq}^i \theta_q + k_{qr}^i \delta_r + k_{qs}^i \delta_s + \mu_q^i \\
 p_r^i &= k_{rp}^i \theta_p + k_{rq}^i \theta_q + k_{rr}^i \delta_r + k_{rs}^i \delta_s + V_r^i \\
 p_s^i &= k_{sp}^i \theta_p + k_{sq}^i \theta_q + k_{sr}^i \delta_r + k_{ss}^i \delta_s + V_s^i
 \end{aligned} \quad (1.1)$$

en (1.1) se desprecia el efecto de la carga normal expresando (1.1) matricialmente se tiene

$$\{m\}_i = [K]_i \{S\}_i + \{U\}_i \quad (1.2)$$

donde:

$$\{m\}_i = \begin{Bmatrix} m_p \\ m_q \\ p_r \\ p_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{S\}_i = \begin{Bmatrix} \theta_p \\ \theta_q \\ \delta_r \\ \delta_s \end{Bmatrix}_i ; \quad \{U\}_i = \begin{Bmatrix} \mu_p \\ \mu_q \\ V_r \\ V_s \end{Bmatrix}_i \quad (1.3)$$

$\{m\}_i$ ; componentes de acciones sobre barra para mantener equilibrio

$\{S\}_i$ ; Desplazamientos en los extremos del miembro (i)

$\{U\}_i$ ; Momentos y cortantes de empotramiento perfecto en (i)

$[K]_i$ ; Matriz de rigidez del miembro (i), la cual despreciando el efecto de cortante y carga normal, para un miembro de sección constante es:

$$[R]_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} EI & \frac{2}{l} EI & \frac{6}{l^2} EI & -\frac{6}{l^2} EI \\ \frac{2}{l} EI & \frac{4}{l} EI & \frac{6}{l^2} EI & -\frac{6}{l^2} EI \\ \frac{6}{l^2} EI & \frac{6}{l^2} EI & \frac{12}{l^3} EI & -\frac{12}{l^3} EI \\ -\frac{6}{l^2} EI & -\frac{6}{l^2} EI & \frac{12}{l^3} EI & -\frac{12}{l^3} EI \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta \\ \psi \\ r \\ s \end{matrix} \quad (1.4)$$

La filosofía básica del método de las rigideces ha sido presentada, antes de aplicarlo a diversos sistemas estructurales su procedimiento conviene organizarlo en un programa sistemático y las ecuaciones básicas del análisis presentarlas en términos generales. Como ejemplo consideraremos el marco siguiente:

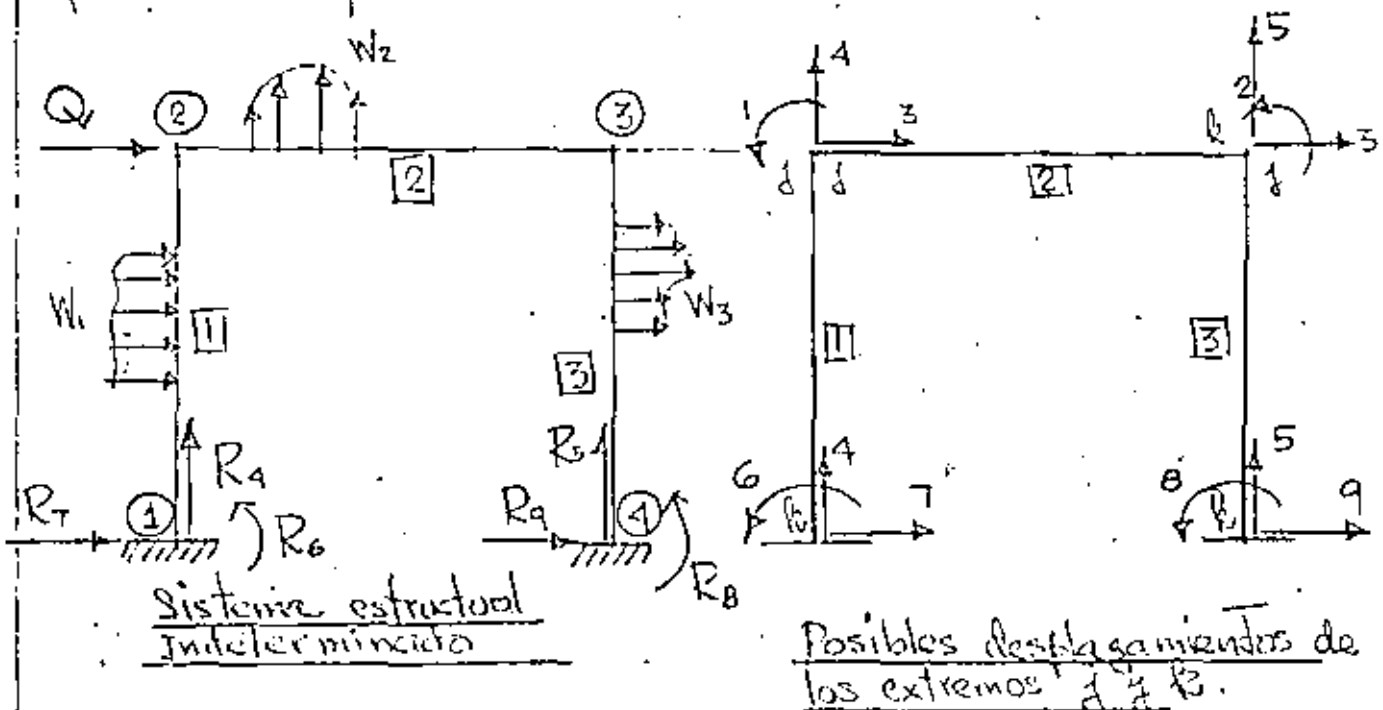


Fig. 1.2

El pórtico de la Fig. 1.2 es indeterminado de tercer grado con  $\theta_1, \theta_2$  y  $\delta_3$ , porque las condiciones de apoyo anulan a  $\delta_4, \delta_5, \theta_6, \delta_7, \theta_8, \delta_9$ . Como primera etapa consideramos la estructura con los nudos fijos determinando la suma de momentos y cortantes correspondientes  $\Sigma m_0$ .

Aplicando las ecuaciones (1.1) al marco de la Fig. 1.2

Miembro 1

$$\begin{cases} m_1^1 = k_{11}^1 \theta_1 + k_{16}^1(0) + k_{13}^1 \delta_3 + k_{17}^1(0) + \mu_1^1 \\ m_6^1 = k_{61}^1 \theta_1 + k_{66}^1(0) + k_{63}^1 \delta_3 + k_{67}^1(0) + \mu_6^1 \\ \phi_3^1 = k_{31}^1 \theta_1 + k_{36}^1(0) + k_{33}^1 \delta_3 + k_{37}^1(0) + V_3^1 \\ \phi_7^1 = k_{71}^1 \theta_1 + k_{76}^1(0) + k_{73}^1 \delta_3 + k_{77}^1(0) + V_7^1 \end{cases} \quad (1.5)$$

Miembro 2

$$\begin{cases} m_1^2 = k_{11}^2 \theta_1 + k_{12}^2 \theta_2 + k_{14}^2(0) + k_{15}^2(0) + \mu_1^2 \\ m_2^2 = k_{21}^2 \theta_1 + k_{22}^2 \theta_2 + k_{24}^2(0) + k_{25}^2(0) + \mu_2^2 \\ \phi_4^2 = k_{41}^2 \theta_1 + k_{42}^2 \theta_2 + k_{44}^2(0) + k_{45}^2(0) + V_4^2 \\ \phi_5^2 = k_{51}^2 \theta_1 + k_{52}^2 \theta_2 + k_{54}^2(0) + k_{55}^2(0) + V_5^2 \end{cases} \quad (1.6)$$

Miembro 3

$$\begin{cases} m_2^3 = k_{22}^3 \theta_2 + k_{28}^3(0) + k_{23}^3 \delta_3 + k_{29}^3(0) + \mu_2^3 \\ m_8^3 = k_{82}^3 \theta_2 + k_{88}^3(0) + k_{83}^3 \delta_3 + k_{89}^3(0) + \mu_8^3 \\ \phi_3^3 = k_{32}^3 \theta_2 + k_{38}^3(0) + k_{33}^3 \delta_3 + k_{39}^3(0) + V_3^3 \\ \phi_9^3 = k_{92}^3 \theta_2 + k_{98}^3(0) + k_{93}^3 \delta_3 + k_{99}^3(0) + V_9^3 \end{cases} \quad (1.7)$$

Como se demostró previamente el análisis de la estructura indeterminada de la Fig. 1.2 puede ser evaluado de

$$[S_{ij}] \{\delta_i\} = \{Q_i\} \quad (1.8)$$

en el caso de la Fig. 1.2, (1.8) es igual a

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{41} & S_{51} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \delta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 \\ \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 \\ V_{21}^1 + V_{21}^2 - Q \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

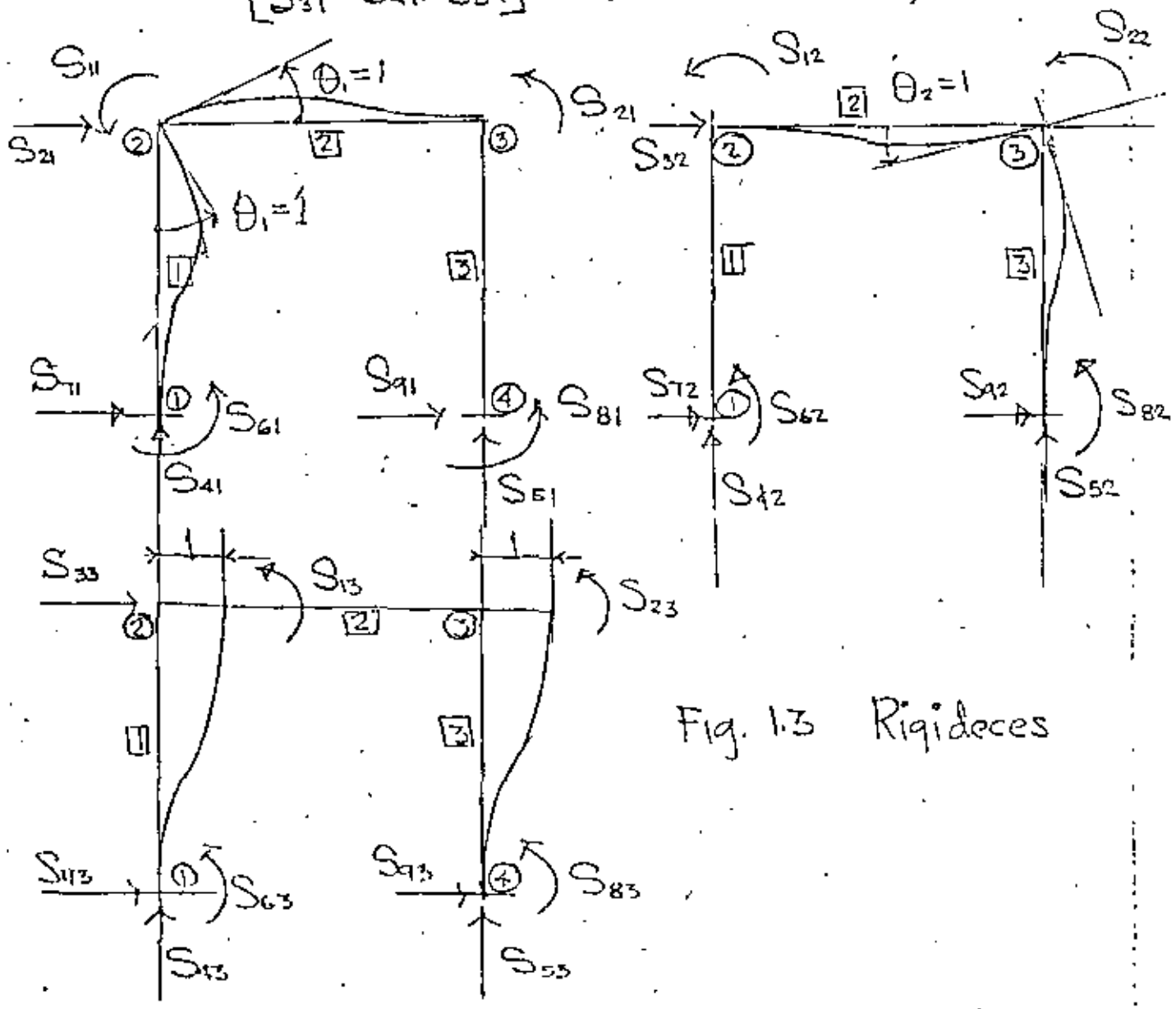


Fig. 1.3 Rigideces

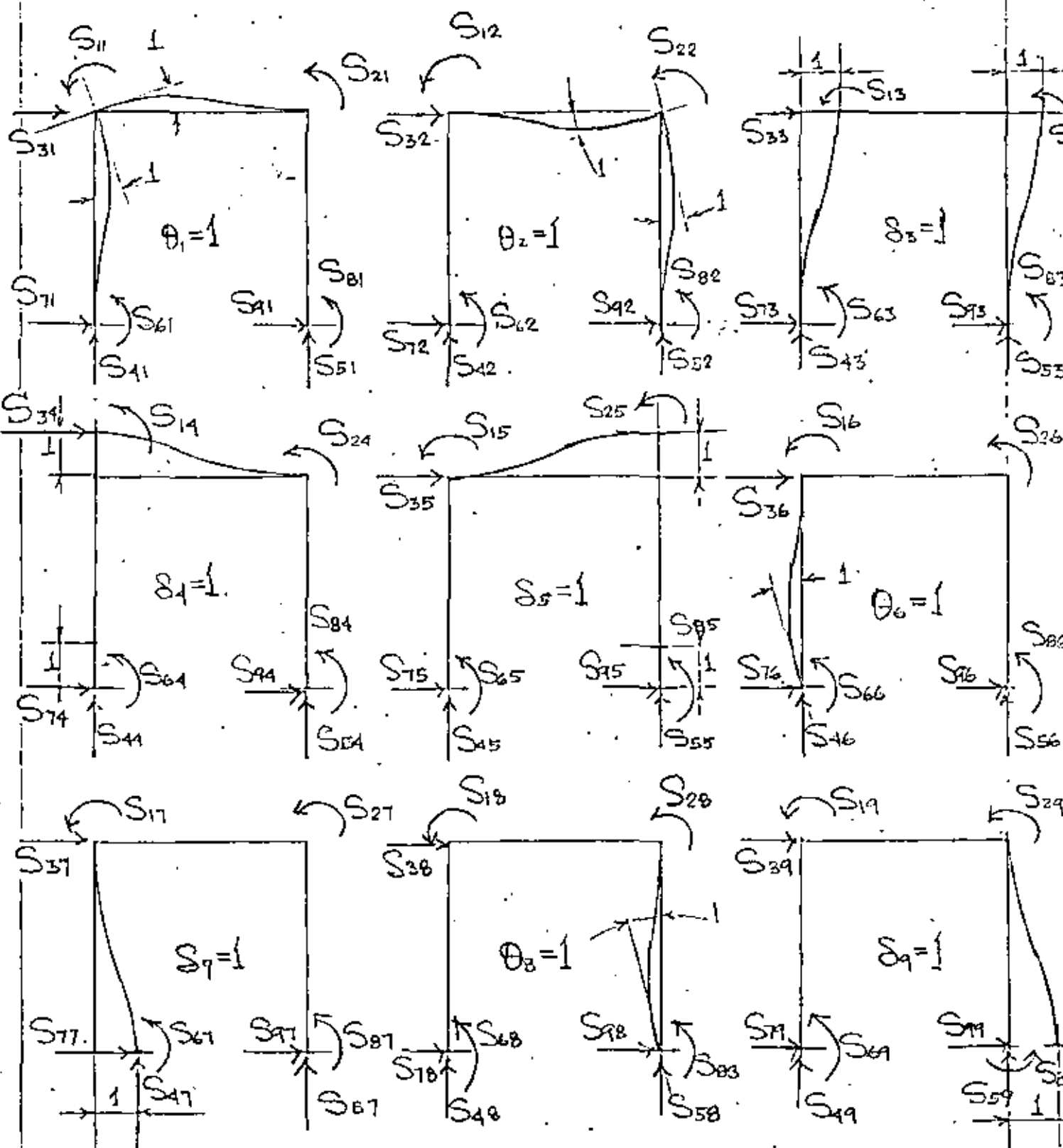


Fig. 1.4 Rigideces considerando todos los posibles grados de libertad despreciando deformaciones axiales (se suponen direcciones positivas)

De la Fig. 1A el desarrollo completo de las ecuaciones de superposición incluyendo reacciones es

$$\begin{aligned}
 S_{11}\theta_1 + S_{12}\theta_2 + S_{13}\delta_3 + S_{14}\delta_4 + S_{15}\delta_5 + S_{16}\theta_6 + S_{17}\delta_7 + S_{18}\theta_8 \\
 + S_{19}\delta_9 + \mu_{21}^1 + \mu_{23}^2 &= 0 \\
 S_{21}\theta_1 + S_{22}\theta_2 + S_{23}\delta_3 + S_{24}\delta_4 + S_{25}\delta_5 + S_{26}\theta_6 + S_{27}\delta_7 + S_{28}\theta_8 \\
 + S_{29}\delta_9 + \mu_{32}^2 + \mu_{24}^3 &= 0 \\
 S_{31}\theta_1 + S_{32}\theta_2 + S_{33}\delta_3 + S_{34}\delta_4 + S_{35}\delta_5 + S_{36}\theta_6 + S_{37}\delta_7 + S_{38}\theta_8 \\
 + S_{39}\delta_9 + V_{21}^1 + V_{21}^3 &= Q \\
 S_{41}\theta_1 + S_{42}\theta_2 + S_{43}\delta_3 + S_{44}\delta_4 + S_{45}\delta_5 + S_{46}\theta_6 + S_{47}\delta_7 + S_{48}\theta_8 \\
 + S_{49}\delta_9 + V_{23}^2 &= R_4 \quad (1.10) \\
 S_{51}\theta_1 + S_{52}\theta_2 + S_{53}\delta_3 + S_{54}\delta_4 + S_{55}\delta_5 + S_{56}\theta_6 + S_{57}\delta_7 + S_{58}\theta_8 \\
 + S_{59}\delta_9 + V_{32}^2 &= R_5 \\
 S_{61}\theta_1 + S_{62}\theta_2 + S_{63}\delta_3 + S_{64}\delta_4 + S_{65}\delta_5 + S_{66}\theta_6 + S_{67}\delta_7 + S_{68}\theta_8 \\
 + S_{69}\delta_9 + \mu_{12}^1 &= R_6 \\
 S_{71}\theta_1 + S_{72}\theta_2 + S_{73}\delta_3 + S_{74}\delta_4 + S_{75}\delta_5 + S_{76}\theta_6 + S_{77}\delta_7 + S_{78}\theta_8 \\
 + S_{79}\delta_9 + V_{12}^1 &= R_7 \\
 S_{81}\theta_1 + S_{82}\theta_2 + S_{83}\delta_3 + S_{84}\delta_4 + S_{85}\delta_5 + S_{86}\theta_6 + S_{87}\delta_7 + S_{88}\theta_8 \\
 + S_{89}\delta_9 + \mu_{43}^3 &= R_8 \\
 S_{91}\theta_1 + S_{92}\theta_2 + S_{93}\delta_3 + S_{94}\delta_4 + S_{95}\delta_5 + S_{96}\theta_6 + S_{97}\delta_7 + S_{98}\theta_8 \\
 + S_{99}\delta_9 + V_{43}^3 &= R_9
 \end{aligned}$$

expresando (1.10) matricialmente se obtiene:



$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{cccccccccc}
 S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & \dots \\
 S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} & S_{27} & S_{28} & S_{29} & \dots \\
 S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} & S_{37} & S_{38} & S_{39} & \dots \\
 S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} & S_{47} & S_{48} & S_{49} & \dots \\
 S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} & S_{57} & S_{58} & S_{59} & \dots \\
 S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} & S_{67} & S_{68} & S_{69} & \dots \\
 S_{71} & S_{72} & S_{73} & S_{74} & S_{75} & S_{76} & S_{77} & S_{78} & S_{79} & \dots \\
 S_{81} & S_{82} & S_{83} & S_{84} & S_{85} & S_{86} & S_{87} & S_{88} & S_{89} & \dots \\
 S_{91} & S_{92} & S_{93} & S_{94} & S_{95} & S_{96} & S_{97} & S_{98} & S_{99} & \dots
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \left\{ \begin{array}{c}
 \theta_1 \\
 \theta_2 \\
 \theta_3 \\
 \theta_4 \\
 \theta_5 \\
 \theta_6 \\
 \theta_7 \\
 \theta_8 \\
 \theta_9
 \end{array} \right\}
 +
 \left\{ \begin{array}{c}
 \mu_{21}^1 + \mu_{25}^2 \\
 \mu_{32}^2 + \mu_{34}^3 \\
 \nu_{21}^1 + \nu_{21}^3 \\
 \nu_{23}^2 \\
 \nu_{32}^2 \\
 \mu_{12}^1 \\
 \nu_{12}^1 \\
 \mu_{43}^3 \\
 \nu_{43}^3
 \end{array} \right\}
 =
 \left\{ \begin{array}{c}
 0 \\
 0 \\
 Q \\
 R_4 \\
 R_5 \\
 R_6 \\
 R_7 \\
 R_8 \\
 R_9
 \end{array} \right\}
 \quad (1.11)
 \end{array}
 \end{array}$$

$[S_{kl}] \quad \{\theta_i\} \quad \{\mu\} \quad \{R\}$

Expresando (1.11) matricialmente con la notación indicada

$$[S_{kl}]\{\theta_i\} + \{\mu\}_k = \{R\} \quad (1.12)$$

El análisis por el método de las rigideces se reduce a evaluar de (1.8)  $\{\theta_i\}$  o sea

$$\{\theta_i\} = [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} \quad (1.13)$$

substituyendo (1.13) en (1.2) se obtiene para cada barra

$$\{m_i\} = [k]_i [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_i \quad (1.14)$$

y las reacciones se obtienen substituyendo (1.13) en (1.12)

$$\{R\} = [S_{kl}] [S_{ij}]^{-1} \{Q_i\} + \{\mu\}_k \quad (1.15)$$

## 2 METODO DE LAS RIGIDECES DE ANALISIS DE ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES

### 2.1 ELEMENTO VIGA.

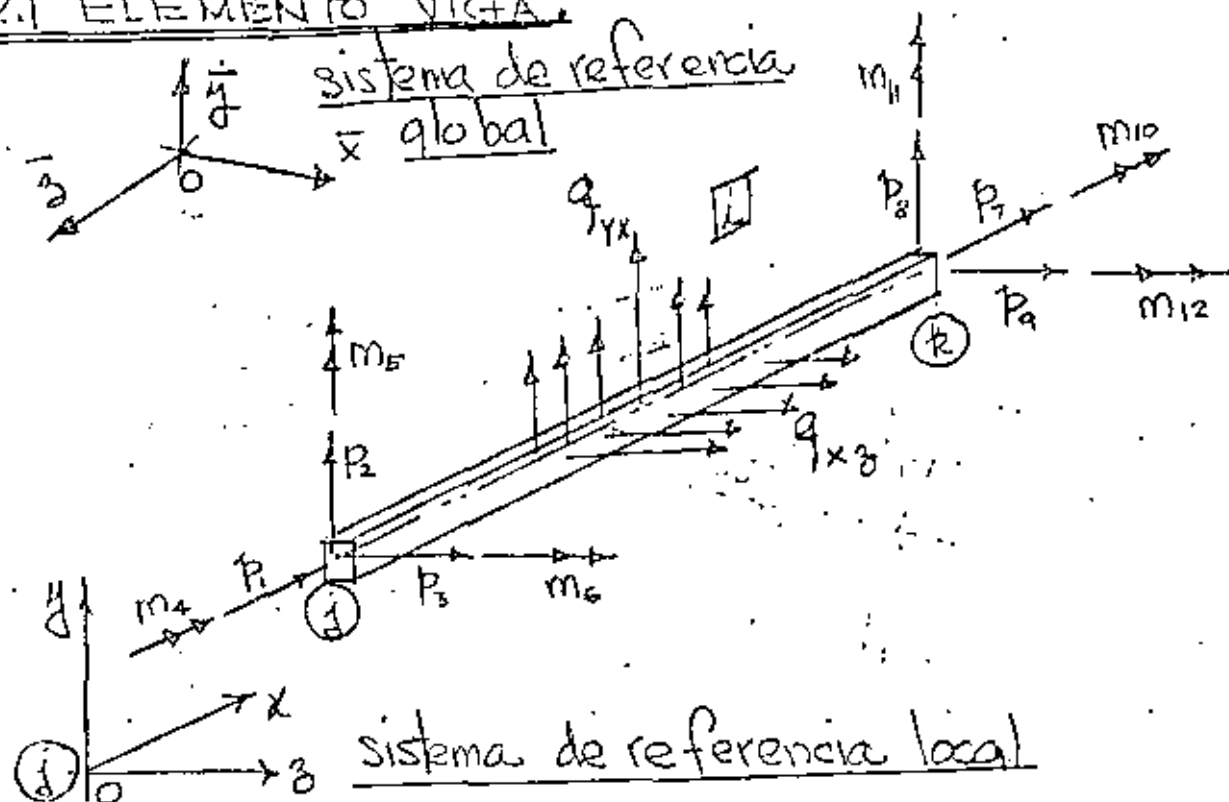


Fig. 2.1 Elemento viga; ejes  $y, z$  son centroidales y principales ( $Q_y = Q_z = I_{yz} = 0$ )

El elemento estructural  $j-k$ , se supone una barra capaz de resistir fuerzas axiales, momentos flectores (respecto a dos ejes principales en el plano de la sección transversal), y momentos de torsión respecto a su eje centroidal. Las siguientes fuerzas actúan en la viga  $j-k$ : Fuerzas axiales  $P_1$  y  $P_7$ ; Fuerzas cortantes  $P_2, P_3, P_8$  y  $P_9$ ; Momentos flectores  $m_5, m_6, m_{11}$  y  $m_{12}$ ; y Momentos de torsión  $m_4$  y  $m_{10}$ . La localización y dirección positiva se muestra en fig. 2.1

Los desplazamientos correspondientes serán  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_{12}$  serán positivos en la dirección positiva de las fuerzas. La posición del elemento viga  $j-k$  será especificado por las coordenadas del extremo  $j$  y los cosenos directores del eje  $x$  (dirección  $j-k$ ) y del eje  $y$  con respecto al sistema global  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ .

La matriz de rigidez del elemento viga será de  $12 \times 12$  pero siempre es posible integrarla con submatrices de  $2 \times 2$  y  $4 \times 4$ . De la teoría de flexión y torsión de vigas las fuerzas  $P_1$  y  $P_2$  dependen solo de sus desplazamientos correspondientes; lo mismo es cierto para los momentos torsionantes  $M_4$  y  $M_{10}$ . Sin embargo, para una selección arbitraria de los planos de flexión, los momentos flectores y fuerza de corte en el plano  $xy$  dependerán no solo de sus desplazamientos correspondientes pero también en los desplazamientos correspondientes a las fuerzas en los planos  $xy$ . Solamente si los  $xy$  y  $xz$  coinciden con los ejes principales de la sección transversal puede considerarse la flexión y corte sobre dichos planos independiente una de la otra.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{array} \right\}_i = \left[ \begin{array}{cccccccccccc}
 k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{1,10} & k_{1,11} & k_{1,12} \\
 k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{3,10} & k_{2,11} & k_{2,12} \\
 k_{31} & \cdot & k_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{3,12} \\
 k_{41} & \cdot & \cdot & k_{44} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{4,12} \\
 k_{51} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{55} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{5,12} \\
 k_{61} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{66} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{6,12} \\
 k_{71} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{77} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{7,12} \\
 k_{81} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{88} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{8,12} \\
 k_{91} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{99} & \cdot & \cdot & k_{9,12} \\
 k_{10,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{10,10} & \cdot & k_{10,12} \\
 k_{11,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{11,11} & k_{11,12} \\
 k_{12,1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & k_{12,12}
 \end{array} \right] + \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \\ \mu_7 \\ \mu_8 \\ \mu_9 \\ \mu_{10} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \end{array} \right\}_i \quad (2.1)$$

(simétrica)

$[k_{ij}]$

$\{\delta\}_i$        $\{\mu\}_i$

Donde:

$\{P\}$ ; vector de cargas actuando sobre  $j$  e

$[k_{ij}]$ ; matriz de rigidez de la barra  $j$  e

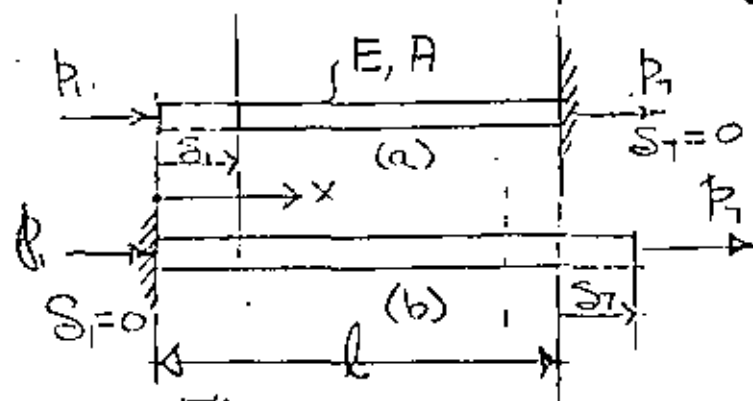
$\{S\}$ ; vector de desplazamientos nodales

$\{U\}$ ; vector de reacciones de empotramiento perfecto

## 2.2 Elementos de la matriz de rigidez $[k_{ij}]$ .

En el cálculo de las rigideces  $k_{ij}$  se utilizan los principios energéticos expuestos considerando la energía elástica de deformación por flexión, corte y carga normal.

### 2.2.1 Fuerzas axiales $P_1$ y $P_7$ .



De la ley de Hooke y la Fig. 2.2.1.2 se obtiene

$$k_{11} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{71} = -\frac{EA}{l} \quad (a)$$

$$k_{77} = \frac{P_7}{S_7} = \frac{EA}{l} ; \quad k_{17} = -\frac{EA}{l} \quad (b)$$

### 2.2.2 Momentos de torsión $m_4$ y $m_{10}$ .

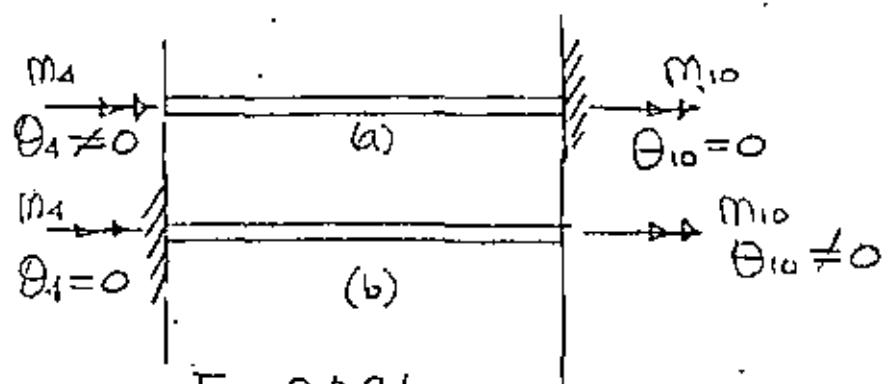


Fig. 2.2.2.1

De la teoría de torsión de barras y la fig. 2.2.2.1 se obtiene

$$k_{44} = \frac{m_4}{\theta_4} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{10,4} = -\frac{GJ}{l} \quad (a)$$

$$k_{10,10} = \frac{m_{10}}{\theta_{10}} = \frac{GJ}{l} \quad ; \quad k_{4,10} = -\frac{GJ}{l} \quad (b)$$

### 2.2.3 Fuerzas de corte $p_2$ y $p_8$ .

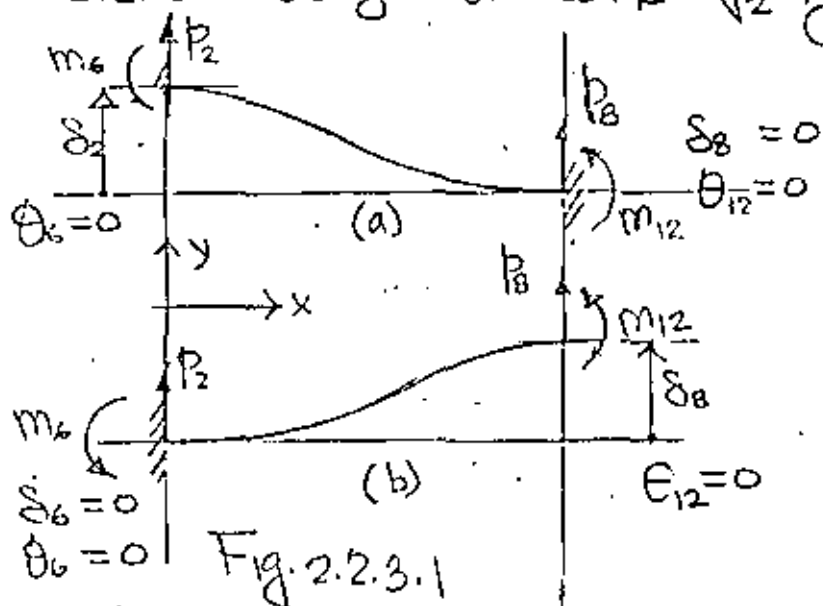


Fig. 2.2.3.1

De la Fig. 2.2.3.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y cortante se obtiene

$$k_{22} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad a$$

$$k_{62} = \frac{m_6}{\delta_2} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad ; \quad k_{26} = \frac{P_2}{\theta_6} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad b$$

$$k_{82} = \frac{P_8}{\delta_2} = \frac{-12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad ; \quad k_{28} = \frac{P_2}{\delta_8} = \frac{-12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad c$$

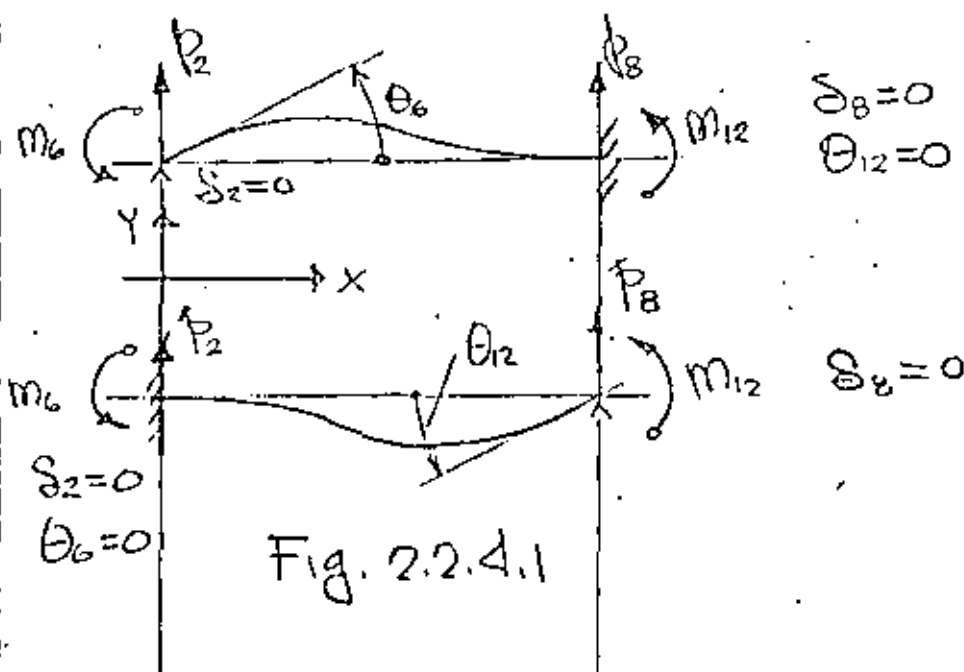
$$k_{12,2} = \frac{m_{12}}{\delta_2} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad ; \quad k_{2,12} = \frac{P_2}{\theta_{12}} = \frac{6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} \quad d$$

$$k_{88} = \frac{P_8}{\delta_8} = \frac{P_2}{\delta_2} = \frac{12EI_3}{(1+\phi_r)l^3} \quad (\text{si } EI \text{ es constante}) \quad e$$

$$k_{12,8} = \frac{m_{12}}{\delta_8} = \frac{-6EI_3}{(1+\phi_r)l^2} = -\frac{P_2}{\theta_6} = -k_{62} \quad f$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\theta_{12}} = \frac{-6EI}{(1+\phi_r)l^2} \quad g$$

### 2.2.4 Momentos Flectores



De la Fig. 2.2.4.1 y los principios energéticos previamente expuestos, considerando la energía de deformación por flexión y corte se obtiene

$$k_{66} = \frac{M_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad a$$

$$k_{86} = \frac{P_8}{\theta_6} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2}; \quad k_{68} = \frac{M_6}{\delta_8} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2} \quad b$$

$$k_{12,6} = \frac{M_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l}; \quad k_{6,12} = \frac{M_6}{\theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad c$$

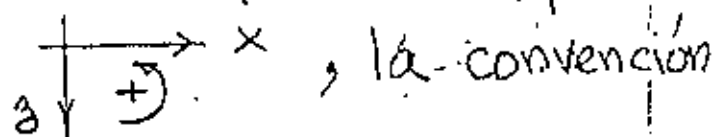
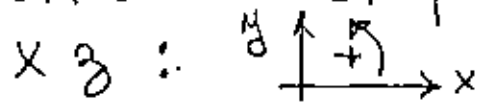
$$k_{12,12} = \frac{M_{12}}{\theta_{12}} = \frac{(4 + \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l} \quad d$$

$$k_{8,12} = \frac{P_8}{\theta_{12}} = -\frac{6 EI_3}{(1 + \phi_r) l^2}; \quad k_{12,8} = \frac{M_{12}}{\delta_8} = k_{8,12} \quad e$$

$$k_{6,12} = \frac{M_6}{\theta_{12}} = \frac{(2 - \phi_r) EI_3}{(1 + \phi_r) l}; \quad k_{12,6} = \frac{M_{12}}{\theta_6} = k_{6,12} \quad f$$

### 2.2.5 Fuerzas de corte $P_3$ y $P_9$

Los coeficientes de rigidez relacionados con los desplazamientos  $\delta_3$  y  $\delta_9$  se obtienen de los resultados previos. Debe observarse, que con la convención de signos adoptada en la Fig. 2.1 las direcciones de los momentos flectores positivos en el plano  $x-y$  son diferentes al plano  $x-z$ :





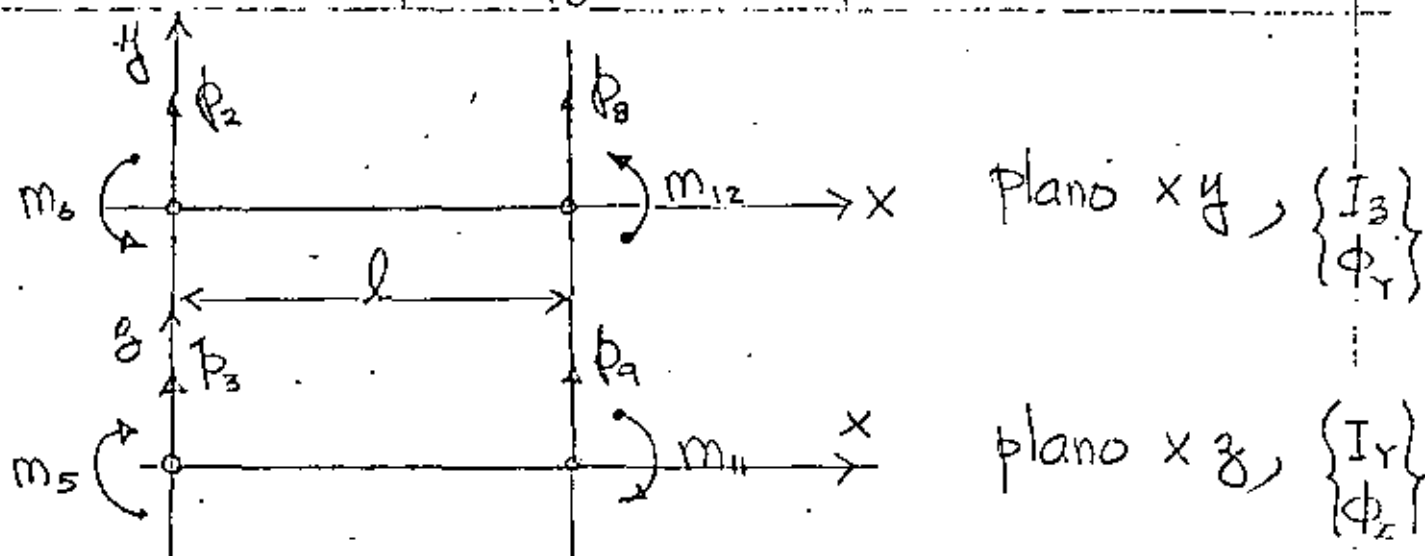


Fig. 2.2.5 Convención de signos para fuerzas de corte y momentos flectores;

de signos se muestra en la Fig. 2.2.5, basado en lo anterior es evidente que

$$k_{33} = \frac{P_3}{\delta_3} \equiv -k_{22} = -\frac{P_2}{\delta_2} \quad a$$

$$k_{53} = \frac{m_5}{\delta_3} \equiv -k_{62} = -\frac{m_6}{\delta_2} \quad b$$

$$k_{73} = \frac{P_7}{\delta_3} \equiv -k_{82} = -\frac{P_8}{\delta_2} \quad c$$

$$k_{11,3} = \frac{m_{11}}{\delta_3} \equiv -k_{12,2} = -\frac{m_{12}}{\delta_2} \quad d$$

$$k_{99} = \frac{P_9}{\delta_9} \equiv -k_{88} = -\frac{P_8}{\delta_8} \quad e$$

$$k_{11,9} = \frac{m_{11}}{\delta_9} \equiv -k_{12,8} = -\frac{m_{12}}{\delta_8} \quad f$$

Debe considerarse en el plano  $xz$  a  $I_7$  y  $\phi_Z$  como momento de inercia y parámetro de cortante.

2.2.6 Momentos Flectores  $m_5$  y  $m_{11}$ 

17

Aplicando las mismas observaciones de la sección anterior, se obtiene

$$k_{55} = \frac{m_5}{\theta_5} \equiv k_{66} = \frac{m_6}{\theta_6} = \frac{(4 + \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} \quad a$$

$$k_{95} = \frac{p_9}{\theta_5} \equiv -k_{86} = -\frac{p_8}{\theta_6} = +\frac{6 EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{59} \quad b$$

$$k_{11,5} = \frac{m_{11}}{\theta_5} \equiv k_{12,6} = \frac{m_{12}}{\theta_6} = \frac{(2 - \phi_3) EI_Y}{(1 + \phi_3) l} = k_{5,11} \quad c$$

Substituyendo los valores  $k_{ij}$  obtenidos en las subsecciones anteriores se obtiene la matriz de rigidez de la barra  $j$   $i$  de la Fig. 2.1 ecuación 2.5. en donde

$$\phi_Y = \frac{12 EI_3}{GA_{sY} l^2} = 24(1 + \nu) \frac{A}{A_{sY}} \left( \frac{\Gamma_3}{l} \right)^2 = \frac{12 f_Y EI_3}{GA l^2} \quad (2.3)$$

$$\phi_Z = \frac{12 EI_Y}{GA_{sZ} l^2} = 24(1 + \nu) \frac{A}{A_{sZ}} \left( \frac{\Gamma_Y}{l} \right)^2 = \frac{12 f_Z EI_Y}{GA l^2}$$

$\nu$  = relación de Poisson,  $A$  = área total de la sección,  $A_{sY}$  y  $A_{sZ}$  = áreas efectivas en cortante en direcciones  $y$  y  $z$  resp.

$\Gamma_Y$  y  $\Gamma_3$  = radios de giro respecto a  $y$  y  $z$  resp. a  $x$ .

$\phi_Y$  y  $\phi_Z$  = Parámetros de deformación de corte. Si

$\Gamma_3/l$  y  $\Gamma_Y/l$  son pequeños comparados con la unidad, como son en elementos flexibles, ambos  $\phi_Y$  y  $\phi_Z$

se pueden considerar cero. Los factores de forma son

$$f_Y = \frac{A}{I_3^2} \int_A \left( \frac{Q_3}{b_3} \right)^2 dA, \quad f_Z = \frac{A}{I_Y^2} \int_A \left( \frac{Q_Y}{b_Y} \right)^2 dA \quad (2.4)$$

$$[R_{ij}] =$$

	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$\theta_1$	$\theta_2$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$\theta_{10}$	$\theta_{11}$	$j_{12}$
$S_1$	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_2$	0	$\frac{12EI_2}{L^3(1+\phi_2)}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_3$	0	0	$\frac{12EI_1}{L^3(1+\phi_1)}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1$	0	0	0	$\frac{GI}{L}$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2$	0	0	0	0	$\frac{(4+\phi_2)EI_2}{L(1+\phi_2)}$	0	0	0	0	0	0
$S_7$	0	0	0	0	0	$\frac{(4+\phi_1)EI_1}{L(1+\phi_1)}$	0	0	0	0	0
$S_8$	0	0	0	0	0	0	$\frac{AE}{L}$	0	0	0	0
$S_9$	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{12EI_3}{L^3(1+\phi_3)}$	0	0	0
$\theta_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{12EI_2}{L^3(1+\phi_2)}$	0	0
$\theta_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{12EI_1}{L^3(1+\phi_1)}$	0
$j_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{GI}{L}$
$S_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_7$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_8$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$S_9$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_{10}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_{12}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(Simétrica)

Para problemas Bi-dimensionales, el elemento viga  $i-k$  se reduce a seis fuerzas y momentos nodales y seis desplazamientos y rotaciones nodales. Utilizando

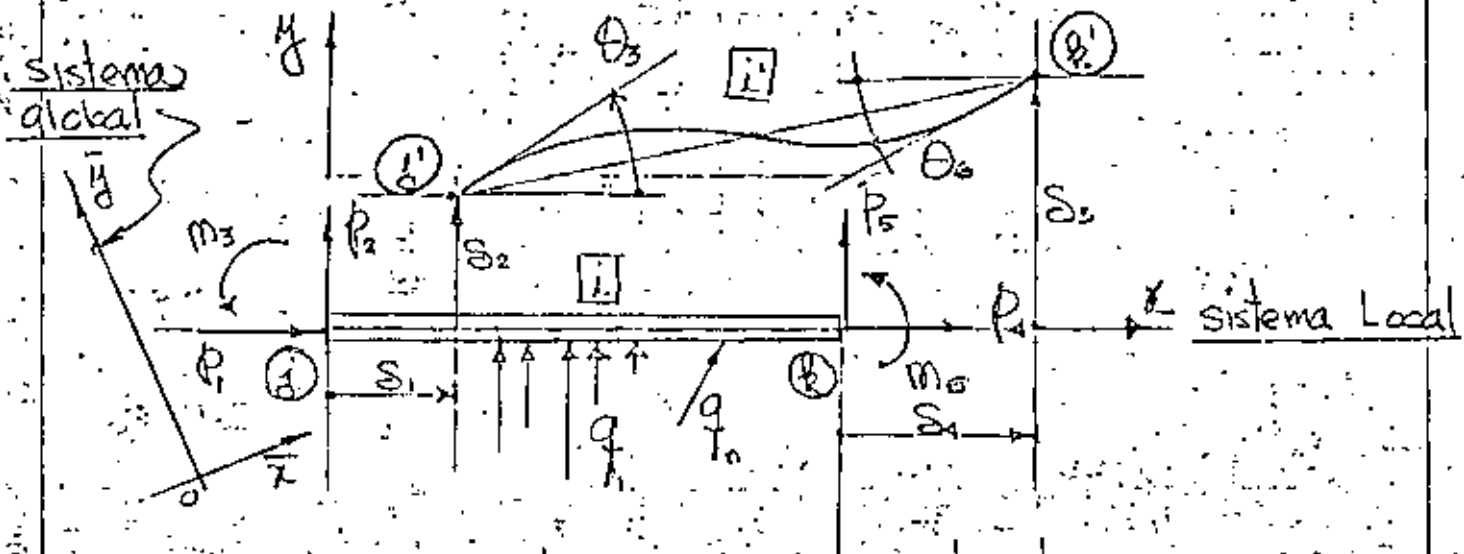


Fig. 2.2 Elemento viga para estructuras bi dimensionales  
la nomenclatura de la Fig. 2.2 (2.1) queda en

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & & & & & k_{26} \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \theta_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \mu_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ \mu_6 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

o sea:  $\{P\}_i = [k_{ij}]_i \{S\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.7)$

De los resultados discutidos previamente la matriz de rigidez de la barra  $i$  figura 2.2 queda

$$[k_{15}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_2}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{6EI_2}{l^2(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6EI_2}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_2}{l(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI_2}{l^3(1+\phi_r)} & \frac{-6EI_2}{l^2(1+\phi_r)} & 0 & \frac{12EI_2}{l^3(1+\phi_r)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_2}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(2-\phi_r)EI_2}{l(1+\phi_r)} & 0 & \frac{-6EI_2}{l^2(1+\phi_r)} & \frac{(4+\phi_r)EI_2}{l(1+\phi_r)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \theta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \theta_6 \end{matrix} \quad (2.8)$$

Si las deformaciones por cortante son despreciables esto es,  $\phi_r = 0$ , la matriz de rigidez (2.8) se simplificaría

$$[k_{15}] = \frac{EI_2}{l^3} \begin{bmatrix} \frac{Al^2}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{Al^2}{I_2} & 0 & 0 & \frac{Al^2}{I_2} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

La ecuación matricial relacionando los desplazamientos entre el sistema coordinado local y el global. Puede fácilmente demostrarse para el elemento viga mostrado en Fig. 2.1 es de la forma

$$\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \theta_{10} \\ \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_{ox} & & & & & & & & & & & & \\ & \bar{\lambda}_{oy} & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ & & \bar{\lambda}_{oz} & & & & & & & & & & \\ & & & \bar{\lambda}_{ox} & & & & & & & & & \\ & 0 & & \bar{\lambda}_{oy} & 0 & 0 & & & & & & & \\ & & & \bar{\lambda}_{oz} & & & & & & & & & \\ & & & & & & \bar{\lambda}_{ox} & & & & & & \\ & 0 & 0 & & & & \bar{\lambda}_{oy} & 0 & & & & & \\ & & & & & & \bar{\lambda}_{oz} & & & & & & \\ & & & & & & & & & \bar{\lambda}_{ox} & & & \\ & 0 & 0 & 0 & & & \bar{\lambda}_{oy} & & & & & & \\ & & & & & & \bar{\lambda}_{oz} & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\delta}_1 \\ \bar{\delta}_2 \\ \bar{\delta}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{\delta}_7 \\ \bar{\delta}_8 \\ \bar{\delta}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

o sea  $\{\delta\} = [L]\{\bar{\delta}\}$  ← *COSEENOS DIRECTORES* (2.11)

donde  $\bar{\lambda}_{ox} = [\bar{l}_{ox} \quad \bar{m}_{ox} \quad \bar{n}_{ox}]$

$\bar{\lambda}_{oy} = [\bar{l}_{oy} \quad \bar{m}_{oy} \quad \bar{n}_{oy}]$  (2.12)

$\bar{\lambda}_{oz} = [\bar{l}_{oz} \quad \bar{m}_{oz} \quad \bar{n}_{oz}]$

representa las matrices de los cosenos directores

para las direcciones  $ox$ ,  $oy$  y  $oz$ , respectivamente referidas al sistema global  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  y  $\bar{z}$ , y  $\{\bar{S}\}$  representa los desplazamientos de la barra  $[L]$  respecto al sistema global.

Para problemas bidimensionales la matriz de transformación  $[\lambda]$  se reduce a

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} l_{ox} & m_{ox} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{oy} & m_{oy} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ox} & m_{ox} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{oy} & m_{oy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

El análisis de marcos tridimensionales se puede describir por las mismas ecuaciones básicas usadas en la descripción del análisis de estructuras planas.

Considerando el sistema total, el equilibrio estático nodal es definido por la ecuación matricial

$$[S_c] \{S_c\} + \{U_c\} = \{R_c\} \quad (2.14)$$

donde:

$[S_c]$  = Matriz de rigidez completa de la estructura.

$\{S_c\}$  = vector de desplazamientos nodales completo.

$\{U_c\}$  = vector de cargas nodales completo.

$\{R\}$  vector de reacciones de la estructura y de (2.14) se obtiene la ecuación:

$$[S_{uu}]\{S_u\} + \{u_u\} = 0 \quad (2.15)$$

de donde se obtiene  $\{S_u\}$  y  $\{S_c\}$ , el que substituyéndolo en (2.14) y (2.1) se obtiene  $\{R_c\}$  y  $\{P\}_i$  como:

$$\{R_c\} = -[S_c][S_{uu}]^{-1}\{u_u\} \quad (2.16)$$

$$\{P\}_i = [R_{ij}][S_{uu}]^{-1}\{u_u\} + \{u\}_i \quad (i=1, 3, \dots, n) \quad (2.17)$$

Ejemplo: En el sistema estructural de la Fig. 2.3, determine las reacciones nodales  $\{P\}_i$  en los extremos de cada miembro y las reacciones originadas por las cargas indicadas.

La estructura tiene miembros prismáticos con las siguientes propiedades:

$$EI_y = EI_z = EI$$

$$GI_x = \frac{EI}{4}$$

$$EA_x = \frac{EI}{4}$$

(2.18)

la estructura es flexible y se puede considerar la ( $\phi_y = \phi_z$ ) deformación por cortante despreciable



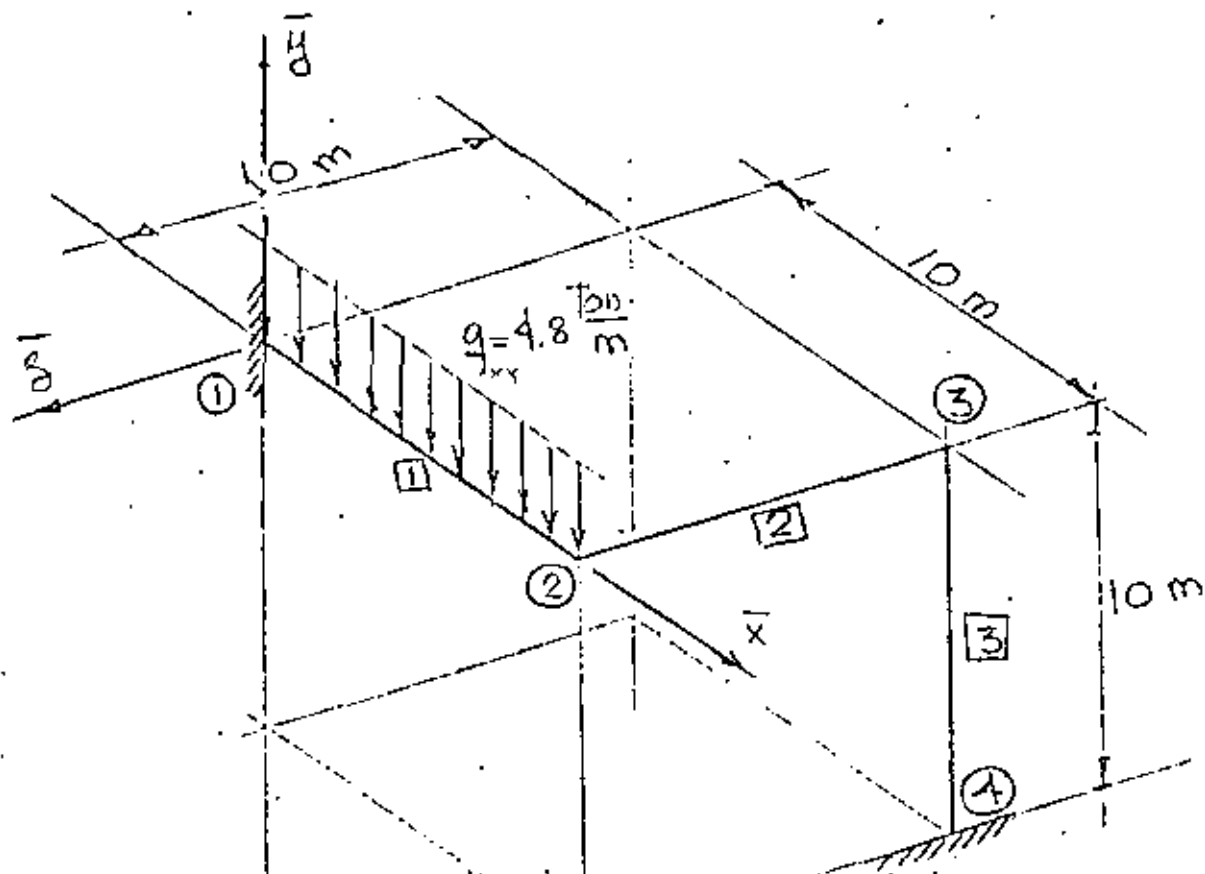


Fig. 2.3 Estructura espacial rígida

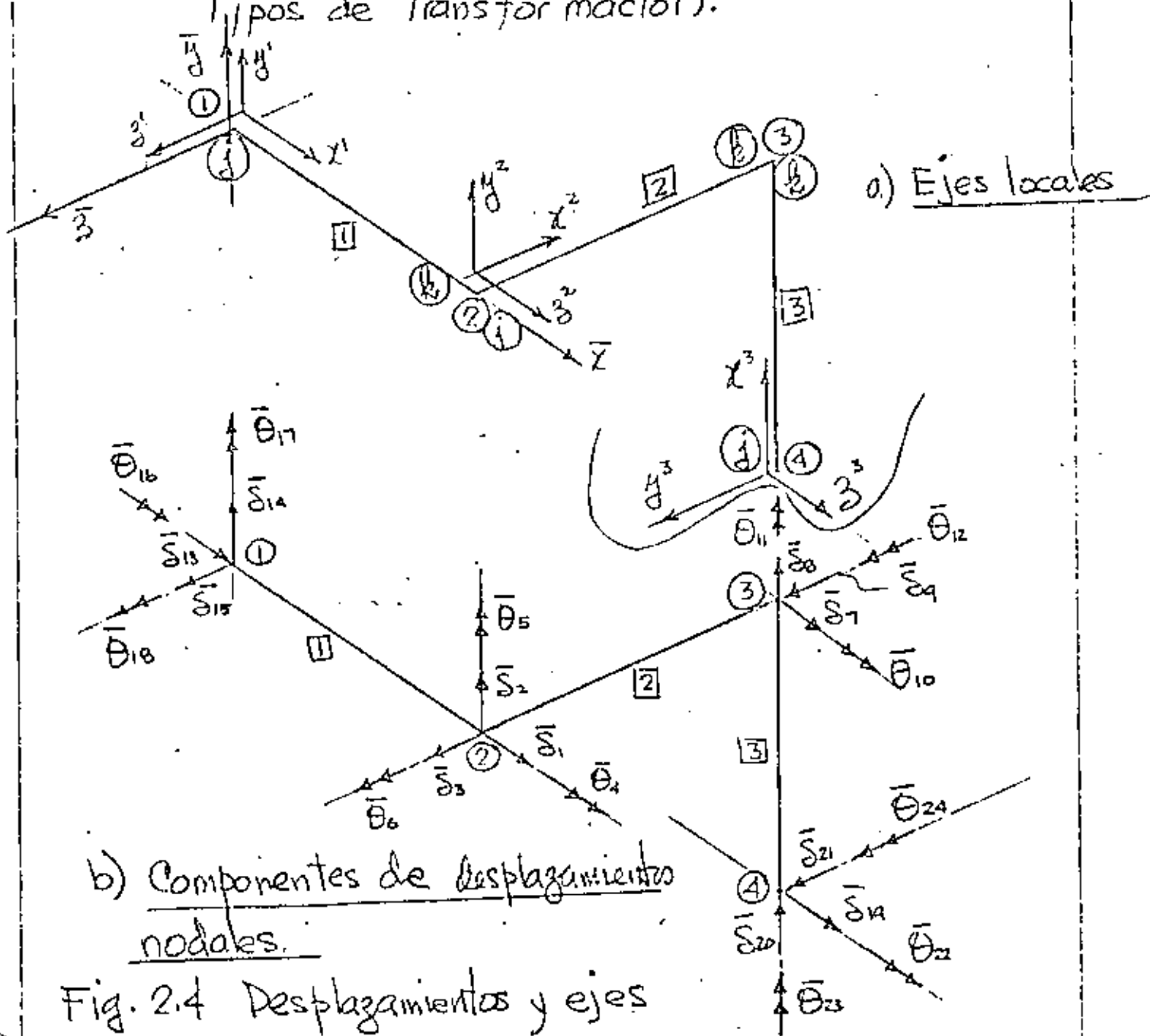
Las tablas 2.1 y 2.2 dan la información requerida para cada nodo y miembro.

Nodo	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
1	0	0	0
2	10.0	0	0
3	10.0	0	-10.00
4	10.0	-10.00	-10.00

Tabla 2.1 coordenadas nodales en metros.

Barra	Longitud (m)	Nodo		Cosenos directores			TIPO DE TRANSFORMACION	Angulo $\psi$
		j	k	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$		
1	10.0	1	2	+1	0	0	y-s-x	0
2	10.0	2	3	0	0	-1	y-s-x	0
3	10.0	4	3	0	+1	0	s-y-x	90°

Tabla 2.2 longitudes, Cosenos directores y Tipos de Transformación.



vector columna de desplazamientos nodales  $\{\delta_c\}$

$$\{\delta_c\} = \begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \\ \delta_7 \\ \delta_8 \\ \delta_9 \\ \delta_{10} \\ \delta_{11} \\ \delta_{12} \\ \delta_{13} \\ \delta_{14} \\ \delta_{15} \\ \delta_{16} \\ \delta_{17} \\ \delta_{18} \\ \delta_{19} \\ \delta_{20} \\ \delta_{21} \\ \delta_{22} \\ \delta_{23} \\ \delta_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\delta_u\} \\ \{\delta_v\} \end{Bmatrix} \quad (2.19)$$

no hay  
de

### Matriz de rigidez de cada miembro

Para cada elemento fija, la matriz de rigidez se establece por medio de (2.1) con respecto a los ejes locales; la matriz de transformación se puede establecer por medio de la expresión (2.10); y la matriz de rigidez de miembro transformada,  $[k_{ij}]_i$  respecto al sistema global se obtiene de

$$[k_{ij}]_i = [\lambda]_i^T [k_{ij}]_l [\lambda]_i \quad (2.20)$$

Miembro II

$$[\lambda]_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [I] ; [k_{ij}]_i = [I]^T [k_{ij}]_l [I] = [k_{ij}]_i \quad (2.21)$$

$$EI \begin{bmatrix} .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & .060 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & -.012 & 0 & -.060 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & .04 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .04 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & .02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -.012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & .012 & 0 & 0 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .012 & 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.06 & 0 & .02 & 0 & 0 & 0 & .06 & 0 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .06 & 0 & 0 & 0 & .02 & 0 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$



Miembro  $\underline{\underline{3}}$ , De (2.5) se obtiene la matriz de rigidez, la cual resulta igual a la de los miembros  $\underline{\underline{II}}$  y  $\underline{\underline{2}}$

$$[k_{ij}]_3 = [k_{ij}]_2 = [k_{ij}]_1 \quad (2.26)$$

De (2.12) se obtiene

$$\bar{\lambda}_{0x_3} = [0 \ 1 \ 0]_3, \quad \bar{\lambda}_{0y_3} = [0 \ 0 \ 1]_3, \quad \bar{\lambda}_{0z_3} = [1 \ 0 \ 0]_3 \quad (2.27)$$

De (2.27) y (2.10) se obtiene

$$[\Lambda]_3 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}} & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad [k_{ij}]_3 = [\Lambda]_3^T [k_{ij}]_1 \quad (2.28)$$

De (2.20), (2.26) y (2.28) se obtiene

$$[k_{ij}]_3 = EI \begin{array}{c} \begin{matrix} 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \hline .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & -.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 \\ 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .012 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.012 & .06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 \\ -.012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 & .012 & 0 & 0 & 0 & 0 & .06 \\ 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -.012 & -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .012 & -.06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .06 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -.06 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -.025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .025 & 0 \\ -.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .06 & 0 & 0 & 0 & 0 & .4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 19 \\ 20 \\ 21 \\ 22 \\ 23 \\ 24 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{matrix} \end{matrix} \quad (2.29)$$

Matriz de rigidez de la estructura.

La matriz completa de la estructura  $[S_c]$  se obtiene sumando los coeficientes de rigidez de miembro dados en las expresiones (2.22), (2.25) y (2.29) con respecto a la identificación de subíndices de los elementos se obtiene

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	.037	0	0	0	-.06	0	-.012	0	0	0	-.06	0	1
	0	.024	0	.06	0	-.06	0	-.012	0	.06	0	0	2
	0	0	.037	0	.06	0	0	0	-.025	0	0	0	3
	0	.06	0	.425	0	0	0	-.06	0	0.2	0	0	4
	-.06	0	.06	0	0.8	0	.06	0	0	0	0.2	0	5
	0	-.06	0	0	0	.425	0	0	0	0	0	-.025	6
	-.012	0	0	0	.06	0	.024	0	0	0	.06	.06	7
	0	-.012	0	-.06	0	0	0	.037	0	-.06	0	0	8
	0	0	-.025	0	0	0	0	0	.037	-.06	0	0	9
	0	.06	0	0.2	0	0	0	-.06	-.06	.8	0	0	10
	-.06	0	0	0	0.2	0	.06	0	0	0	.425	0	11
	0	0	0	0	0	-.025	.06	0	0	0	0	.425	12
	<hr/>												
	-.025	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	13
	0	-.012	0	0	0	.06	0	0	0	0	0	0	14
	0	0	-.012	0	-.06	0	0	0	0	0	0	0	15
	0	0	0	-.025	0	0	0	0	0	0	0	0	16
	0	0	.06	0	0.2	0	0	0	0	0	0	0	17
	0	-.06	0	0	0	0.2	0	0	0	0	0	0	18
	0	0	0	0	0	0	-.012	0	0	0	0	-.06	19
	0	0	0	0	0	0	0	-.025	0	0	0	0	20
	0	0	0	0	0	0	0	0	-.012	.06	0	0	21
	0	0	0	0	0	0	0	0	-.06	.2	0	0	22
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-.025	0	23
	0	0	0	0	0	0	.06	0	0	0	0	.2	24

$[S_c] = EI$

$\equiv \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \\ S_{41} \\ S_{51} \\ S_{61} \\ S_{71} \\ S_{81} \\ S_{91} \\ S_{101} \\ S_{111} \\ S_{121} \\ S_{131} \\ S_{141} \\ S_{151} \\ S_{161} \\ S_{171} \\ S_{181} \\ S_{191} \\ S_{201} \\ S_{211} \\ S_{221} \\ S_{231} \\ S_{241} \end{bmatrix}$

(2.30)

De (2.30) se obtiene  $[S_{\mu\mu}]^{-1}$

31

31

(2)

P. Ballesteros

Margo - 1983

DESFI-UNAM

S<sub>11</sub> = E<sub>11</sub>

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
58.396	1.266	-6.236	0.001	1.750	0.085	11.279	-0.403	-5.028	-0.503	3.005	-1.578
1.266	210.745	-43.160	-21.908	5.487	30.182	-39.151	11.279	-50.707	-13.286	3.124	7.303
-6.236	-43.160	102.023	2.421	-11.235	-6.537	50.707	5.028	84.038	9.312	-2.752	-7.543
0.001	-21.908	2.421	5.546	-0.346	-3.130	3.124	3.005	2.752	0.688	-0.278	-0.625
1.750	5.487	-11.235	-0.346	3.048	0.888	-13.286	-0.503	-9.312	-1.061	0.688	1.928
0.085	30.182	-6.537	-3.130	0.888	6.698	-7.303	1.587	-7.543	-1.928	0.625	1.425
11.279	-39.151	50.707	3.124	-13.286	-7.303	210.745	1.266	43.160	5.487	-21.908	-30.182
-0.403	11.279	5.028	3.005	-0.503	1.587	1.266	58.396	6.236	1.757	0.001	-0.085
-5.028	-50.707	84.038	2.752	-9.312	-7.543	43.160	6.236	102.023	11.235	-2.421	-6.537
-0.503	-13.286	9.312	0.688	-1.061	-1.928	5.487	1.750	11.235	3.048	-0.346	-0.888
3.005	3.124	-2.752	-0.278	0.688	0.625	-21.908	0.001	-2.421	-0.346	5.546	3.130
-1.587	7.303	-7.543	-0.625	1.928	1.425	-30.182	-0.085	-6.537	-0.888	3.130	6.698



Vector de momentos y reacciones fijas miembro [1]

$$\{\mu\}_1 = \begin{pmatrix} P_{13} \\ P_{14} \\ P_{15} \\ \mu_{16} \\ \mu_{17} \\ \mu_{18} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \\ \mu_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 40 \\ 0 \\ 24 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} = \{\bar{\mu}\}_1 \quad (2.32)$$

$$\{\bar{\mu}\}_1 = [\lambda]_1^T \{\mu\}_1 \quad (2.33)$$

$$\{\mu\}_2 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_2 = 0$$

$$\{\mu\}_3 = 0 \quad ; \quad \{\bar{\mu}\}_3 = 0$$

Habiendo definido las cargas nodales en términos de las acciones fijas en los extremos con respecto a los ejes de referencia, se deduce el vector de cargas nodales completo  $\{\mu\}$ , como.

0	1
-24	2
0	3
0	4
0	5
40.0	6
0	7
0	8
0	9
0	10
0	11
0	12
0	13
-24	14
0	15
0	16
0	17
-40.0	18
0	19
0	20
0	21
0	22
0	23
0	24

$$\{\mu_i\} = \begin{cases} \{\mu_{1j}\} \\ \{\mu_{2j}\} \end{cases}$$

(2.34)

Etiqueta de grados de libertad

Substituyendo (2.31) y (2.34) en (2.15) se obtiene

$$\{\bar{S}_u\} = [S_{u,u}]^{-1} \{R_u\} \quad (2.35)$$

$$\{\bar{S}_u\} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} \bar{S}_1 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{S}_3 \\ \bar{\theta}_4 \\ \bar{\theta}_5 \\ \bar{\theta}_6 \\ \bar{S}_7 \\ \bar{S}_8 \\ \bar{S}_9 \\ \bar{\theta}_{10} \\ \bar{\theta}_{11} \\ \bar{\theta}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.592 \\ -96.168 \\ -456.448 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

Los valores de los desplazamientos dados por (2.36) con respecto al sistema global son valores relativos, para obtener los valores se substituye  $E$  en  $\text{ton/m}^2$  e  $I$  en  $\text{m}^4$  en (2.36) y se obtiene  $S_i$  en metros y  $\theta$  en radianes.

Acciones Finales en los extremos.

Habiendo evaluado las componentes de los desplazamientos nodales con respecto al sistema global de referencia por medio de (2.10) se evalúan con respecto a las coordenadas locales de cada barra y las acciones

finales para cada miembro de la estructura se calculan de (2.1)

$$\{p\}_i = [k_{ij}] [\lambda]_i \{\bar{S}\}_i + \{\mu\}_i \quad (2.37)$$

De la Fig. 2.4 se tiene para el miembro III

$$\{\bar{S}\}_1 = \begin{Bmatrix} S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -26.984 \\ -3850.6 \\ 774.36 \\ 400.572 \\ -96.168 \\ -456.448 \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

De (2.21), (2.38), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_1 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ Ton} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ Ton-m} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ Ton} \\ 10.0 \text{ Ton-m} \\ 8.0 \text{ Ton-m} \\ 8.5 \text{ Ton-m} \end{Bmatrix}$$

(Índices según  
convención Fig. 2.4)

(2.39)

Miembro [2]  $\{\bar{S}\}_2 = \{\delta_u\} = [A]_2 \{\bar{\delta}_u\}$  y  $\{u\}_2 = \{0\}$   
De (2.24), (2.25), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_2 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3.5 \text{ Ton} \\ -5.2 \text{ " } \\ 0.7 \text{ " } \\ 8.5 \text{ Ton-m} \\ -8.0 \text{ " } \\ -10.0 \text{ " } \\ -3.5 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ " } \\ -0.7 \text{ " } \\ -8.5 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ " } \\ -41.8 \text{ " } \end{Bmatrix}$$

(Índices según  
convención Fig. 2.4)

(2.40)

Miembro [3]

$$\{S\}_3 = \begin{Bmatrix} S_{19} \\ S_{20} \\ S_{21} \\ S_{22} \\ S_{23} \\ S_{24} \\ S_{18} \\ S_{19} \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{Bmatrix}_3 = \frac{1}{EI} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 647.504 \\ -207.216 \\ 915.248 \\ 241.744 \\ -49.976 \\ -118.272 \end{Bmatrix}_3 \quad (2.41)$$

en [3] también  $\{U\}_3 = 0$ , De (2.28) (2.29), (2.1) y (2.5) se obtiene

$$\{P\}_3 = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ M_{10} \\ M_{11} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_3 = \begin{Bmatrix} 5.2 \text{ Ton} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ ''} \\ 1.2 \text{ Ton-m} \\ 15.2 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ ''} \\ -5.2 \text{ Ton} \\ -3.5 \text{ ''} \\ 0.7 \text{ ''} \\ -1.2 \text{ Ton-m} \\ -8.5 \text{ ''} \\ 41.8 \text{ ''} \end{Bmatrix}_3 \quad (2.42)$$

Reacciones.

Substituyendo las matrices apropiadas en

$$\{R\} = [S_{ru}] \{S_u\} - \{U_r\}$$

se obtiene

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_{13} \\ R_{14} \\ R_{15} \\ R_{16} \\ R_{17} \\ R_{18} \\ R_{19} \\ R_{20} \\ R_{21} \\ R_{22} \\ R_{23} \\ R_{24} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.7 \text{ Ton} \\ 42.8 \text{ ''} \\ -3.5 \text{ ''} \\ -10.0 \text{ Ton-m} \\ 27.2 \text{ Ton-m} \\ 179.7 \text{ ''} \\ -0.7 \text{ Ton} \\ 5.2 \text{ ''} \\ 3.5 \text{ ''} \\ -6.6 \text{ Ton-m} \\ 1.2 \text{ ''} \\ 15.2 \text{ ''} \end{Bmatrix}$$

2.43

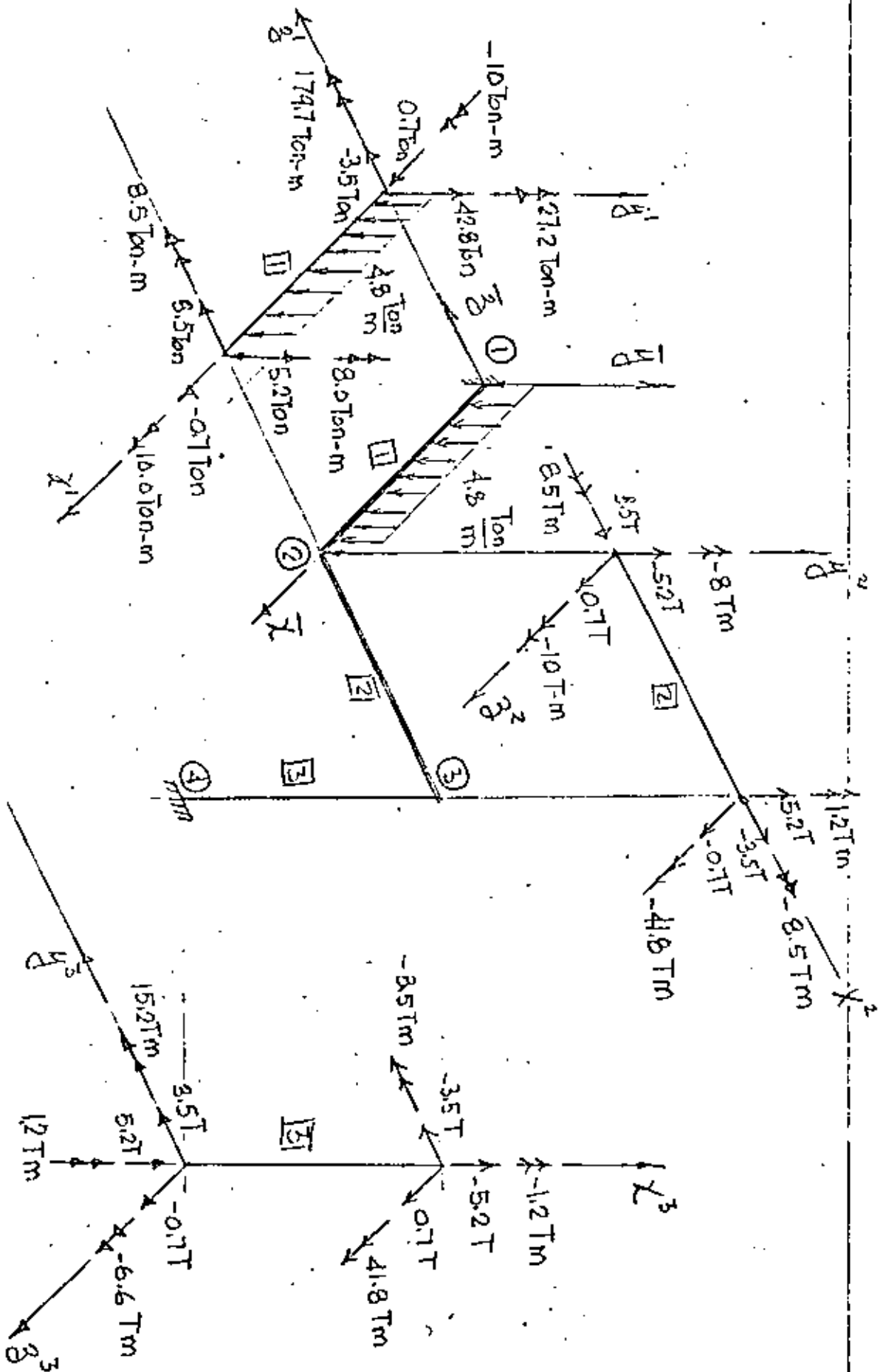


Fig. 2.5 Componentes de acciones finales  $\{P\}$  en los extremos  $i$  &  $k$



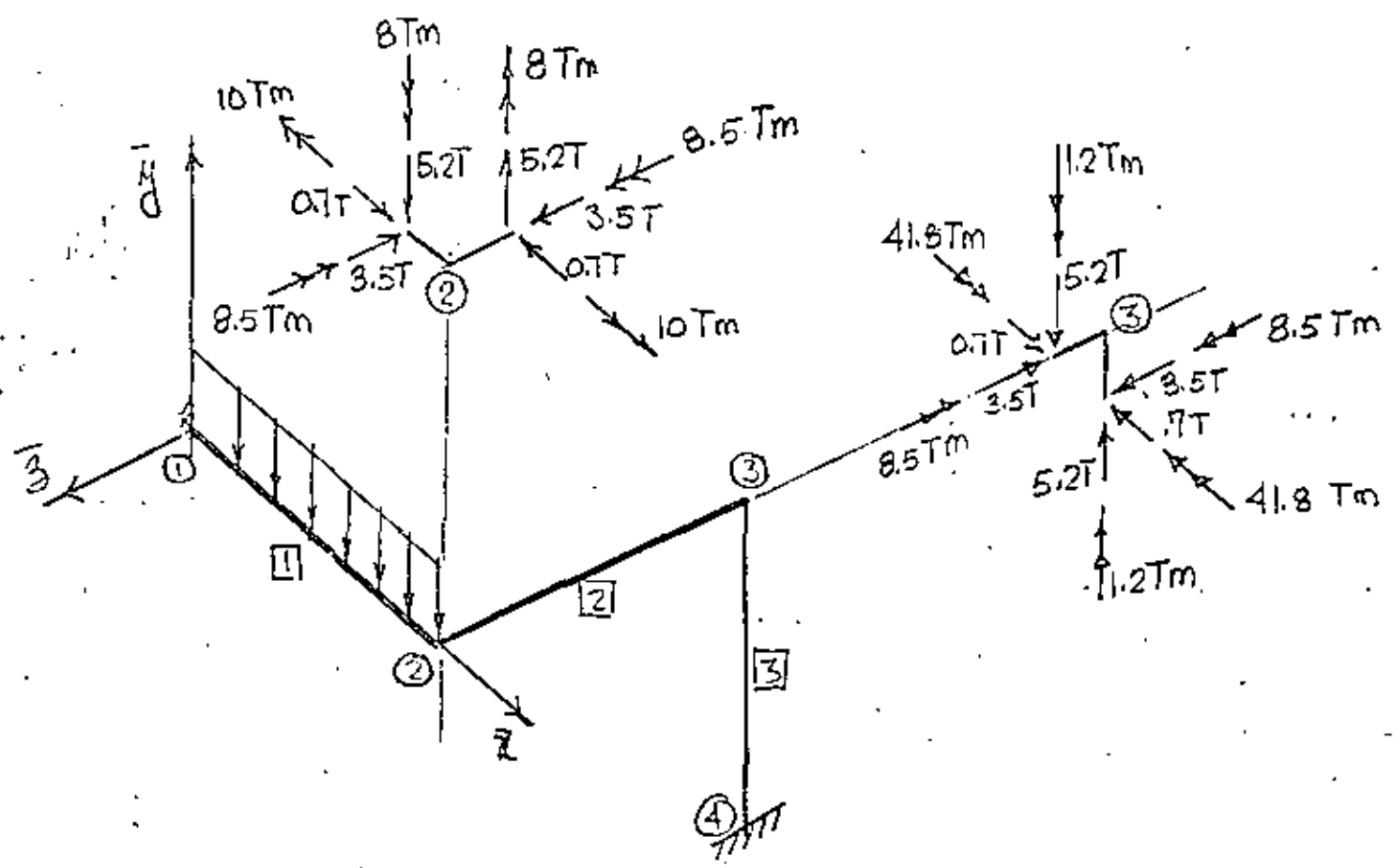


Fig. 2.6 Diagrama de cuerpo libre de los nodos 2 y 3

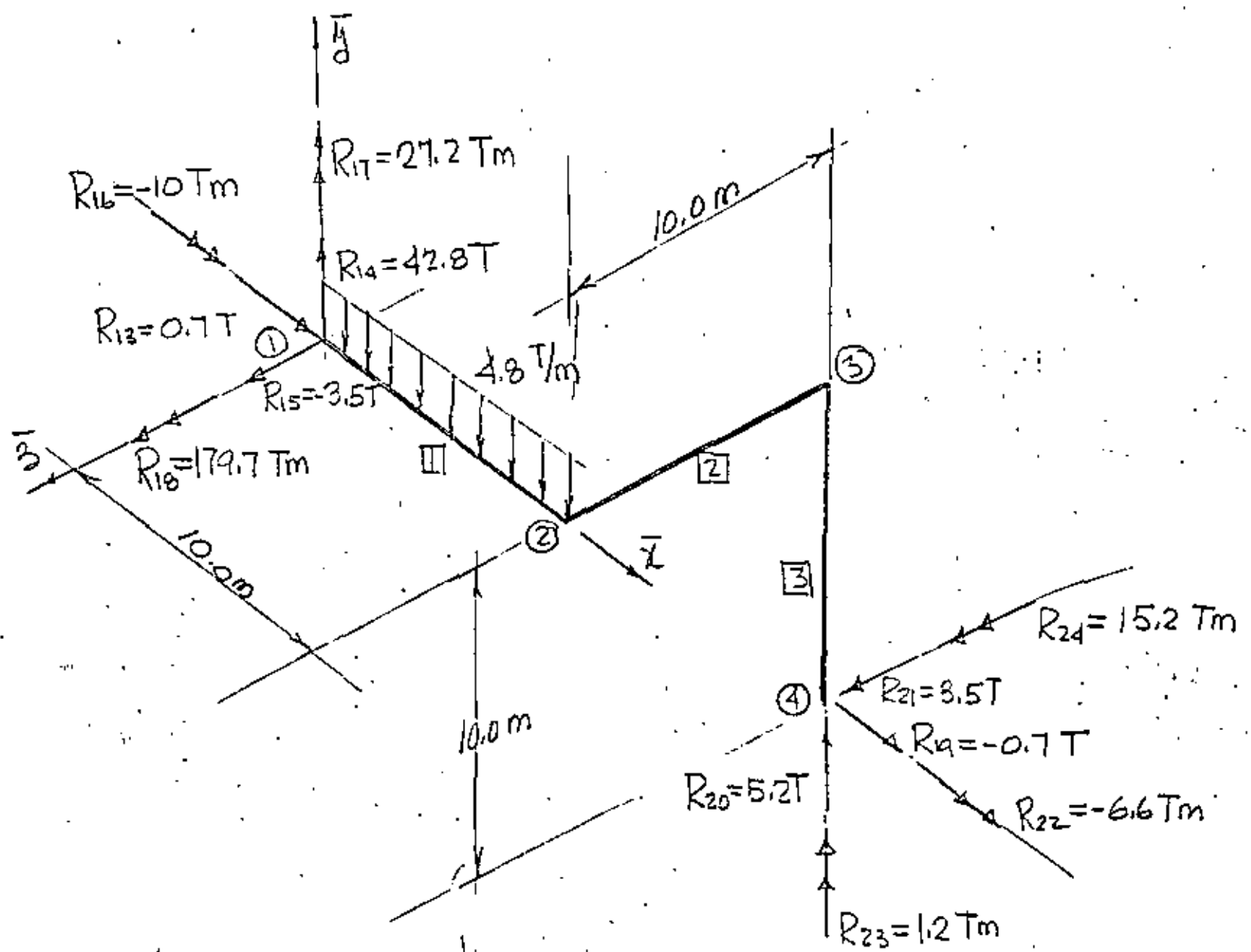


Fig. 2.7 Componentes de las reacciones en los apoyos 1 y 4



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA**

**MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS**

**Dr. Porfirio Ballesteros**

**MARZO, 1984.**

## 4. MODELACION MATEMATICA DE SISTEMAS

### 4.1. Introducción al Cálculo de Variaciones

Existe una gran variedad de sistemas físicos que pueden ser descritos desde un punto de vista variacional y en este contexto, el manejo de cálculo de variaciones se considera como una herramienta matemática que permite la formulación de un sistema mediante conceptos matemáticos que pueden relacionarse directamente con aspectos físicos del mismo.

El problema clásico de cálculo de variaciones consiste en encontrar los valores estacionarios de un funcional el cual se define como una integral definida cuyo valor numérico depende de la función integrada y para encontrar los valores estacionarios de dicha integral es necesario encontrar la función que sustituida en el integrando correspondiente ceda un valor extremo, es decir mínimo o máximo.

Sea el funcional  $I$  definido por:

$$I = \int_a^b F(x) dx \quad (4.1.1)$$

Cada función  $F(x)$  que sea sustituida en esta ecuación resulta en un valor numérico de  $I$  diferente y aquella función  $F^*(x)$  que resulte en un valor mínimo o máximo, hace el funcional  $I$  estacionario.

Es conveniente pensar en el paralelismo que existe entre el concepto de encontrar los valores estacionarios de un funcional y de una función algebraica. Cuando se busca el mínimo o máximo de una función definida como

$$y = f(x) \quad (4.1.2)$$

Ciertas condiciones deben ser satisfechas, como lo son que la función sea continua en el rango de interés, que sea derivable dos veces en dicho rango y que además la primera derivada de la función con respecto a la variable sea cero es decir

$$y' = \frac{dy}{dx} = 0 \quad (4.1.3)$$

El resultado es un valor de la variable independiente para el cual la función  $f(x)$  es estacionario.

Entonces, cuando se extremiza una función se encuentra un valor de la variable independiente, más cuando se extremiza un funcional se encuentra un función. La condición suficiente y necesaria para extremizar dicho funcional consiste en que su primera variación sea cero; es decir:

$$\delta I = \delta \int_a^b F(x) dx \quad (4.1.4)$$

Esta condición es análoga a la condición de la ecuación (4.1.3). Un ejemplo de aplicación del concepto variacional es el problema de encontrar la trayectoria que debe seguir una partícula de masa  $m$  para moverse desde el punto A al punto B en un plano, bajo la acción de la gravedad de tal forma que el tiempo de recorrido sea mínimo. Figura (4.1.1).

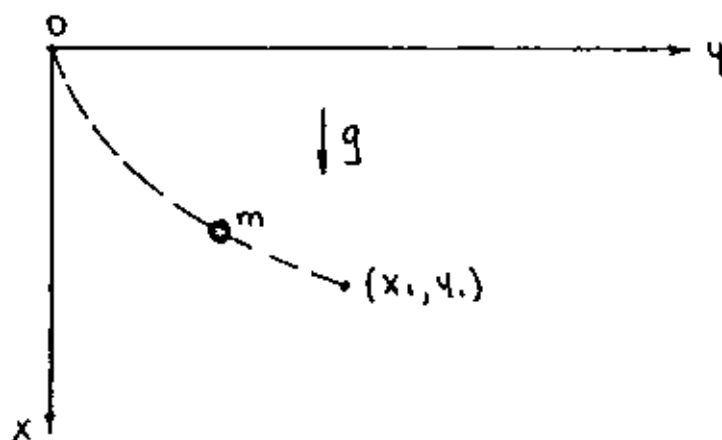


Figura 4.1.1 Problema de brachistochrone

El funcional que se puede proponer para este problema es:

$$t = \int_0^{s_1} \frac{ds}{v} \quad (4.1.5)$$

en donde:

$$ds = \pm \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.1.6)$$

y de consideraciones energéticas

$$\frac{1}{2} mv^2 = mgx \quad (4.1.7)$$

entonces combinando las tres últimas ecuaciones se tiene que

$$t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} dx \quad (4.1.8)$$

El problema consiste en encontrar una función  $y=f(x)$  tal que el funcional  $t$  sea mínimo.

Antes de proceder a formular la solución es necesario describir la forma general del problema clásico de cálculo de variaciones.

Sea el funcional  $\pi$  definido por

$$\pi = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (4.1.9)$$

en donde  $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ . El problema consiste en encontrar funciones  $y=y(x)$  para las cuales pequeñas variaciones arbitrarias  $\delta y(x)$ , no cambien el valor de  $\pi$ .

La condición suficiente y necesaria para encontrar un valor estacionario de  $\pi$  es de acuerdo con la ecuación (4.1.4)

$$\delta \pi = \int_a^b \delta F(x, y, y') dx = 0 \quad (4.1.10)$$

Tomando la variación de  $F$  resulta

$$\delta \Pi = \int_a^b \left( \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = 0 \quad (4.1.11)$$

en donde  $\delta y' = \frac{d}{dx} (\delta y)$  (4.1.12)

Sustituyendo (4.1.12) en (4.1.11) e integrando por partes el resultado es:

$$\delta \Pi = \int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \Big|_a^b = 0 \quad (4.1.13)$$

Entonces para que  $\delta \Pi$  sea cero es necesario que:

$$y(a) = y(b) = \text{constante} \quad (4.1.14)$$

y por lo tanto

$$\delta y(a) = \delta y(b) = 0 \quad (4.1.15)$$

o en su defecto que los dos términos de la integral en la ecuación (4.1.12) sean cero, es decir

$$\frac{\partial F(a)}{\partial y'} = \frac{\partial F(b)}{\partial y'} = 0 \quad (4.1.16)$$

y 
$$\int_a^b \left[ \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \delta y dx = 0 \quad (4.1.17)$$

dado que  $\delta y$  es arbitraria entre los límites  $a$  y  $b$  y no necesariamente cero entonces

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.1.18)$$

Esta es la ecuación conocida como la ecuación Euler-Lagrange y aquella función  $Y(x)$  que satisfaga la ecuación (4.18) hace el funcional  $\pi$  estacionario.

Regresando al problema de brachistochrone podemos identificar el integrando de las ecuaciones (4.1.8) y (4.1.9) es decir

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gx}} \quad (4.1.19)$$

y dado que  $y$  no aparece explícitamente en (4.1.19) entonces

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (4.1.20)$$

que implica que el paréntesis es igual a una constante

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{2gx(1+y'^2)}} = C \quad (4.1.21)$$

despejando  $y'$  de (4.1.21) queda

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2gc^2x}{1-2gc^2x}} \quad (4.1.22)$$

de donde

$$y = \int \left( \frac{2gc^2x}{1-2gc^2x} \right)^{1/2} dx \quad (4.1.23)$$

La solución de esta integral a través de tablas de integración y algunas manipulaciones cede la siguiente solución.

$$y = \frac{1}{4gc^2} (\theta - \sin \theta) \quad (4.1.24)$$

en donde

$$\theta = \cos^{-1}(1-4gc^2x) \quad (4.1.25)$$

Entonces sustituyendo la ecuación (4.1.22) en (4.1.8) se puede comprobar que el tiempo de recorrido es mínimo en comparación con cualquier otra trayectoria que pase por los puntos extremos de la curva.



Otro problema clásico que el lector puede realizar como ejercicio consiste en encontrar la trayectoria que debe seguir la partícula que haga la distancia de recorrido mínima. El resultado es obviamente una línea recta que une los puntos extremos. El funcional correspondiente para este otro problema es:

$$S = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (4.1.26)$$

Un funcional en general puede tener varias variables independientes, por ejemplo:

$$\Pi = \int_V F(x, y, z, \psi, \psi_x, \psi_y, \psi_z) dV \quad (4.1.27)$$

en donde  $\psi_x, \psi_y, \psi_z$  son las parciales de  $\psi$  con respecto a las tres variables independientes. Una variación de  $\Pi$  ocasionada por un pequeño cambio en  $F$  es:

$$\delta \Pi = \int_V \left( \frac{\partial F}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial F}{\partial \psi_x} \delta \psi_x + \frac{\partial F}{\partial \psi_y} \delta \psi_y + \frac{\partial F}{\partial \psi_z} \delta \psi_z \right) dV \quad (4.1.28)$$

y aplicando la ecuación (4.1.11) resulta

$$\delta \Pi = \int_V \left[ \frac{\partial F}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial F}{\partial \psi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) + \frac{\partial F}{\partial \psi_y} \frac{\partial}{\partial y} (\delta \psi) + \frac{\partial F}{\partial \psi_z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta \psi) \right] dV \quad (4.1.29)$$

en esta ecuación los últimos términos satisfacen por el teorema de divergencia de Gauss lo siguiente:

$$\int_V \frac{\partial F}{\partial \psi_x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta \psi) dV = \int_S l_x \frac{\partial F}{\partial \psi_x} \delta \psi ds - \int_V \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \psi_x} \right) \delta \psi dV \quad (4.1.30)$$

en donde  $l_x$  es el coseno direccional de la normal a la superficie con respecto al eje  $x$ . La ecuación (4.1.29) queda como sigue:

$$\delta\pi = \int_V \left[ \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) \right] \delta\varphi \, dv$$

$$+ \int_S \left[ l_x \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} + l_y \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} + l_z \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right] \delta\varphi \, ds \quad (4.1.31)$$

Ahora, un valor estacionario de  $\pi$  ocurre solamente cuando los términos de los paréntesis son cero. Esto da como resultado la ecuación diferencial que gobierna el sistema y sus condiciones de frontera.

El funcional de la ecuación (4.1.31) es aplicable a problemas de campo y un ejemplo es el siguiente; sea el funcional

$$\pi = \int_V \left[ \frac{1}{2} \left[ k_{xx} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + k_{yy} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + k_{zz} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - 2\varphi\varphi \right] dv \quad (4.1.32)$$

aplicando la forma de la ecuación (4.1.31) el resultado es el siguiente

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = 0 \quad (4.1.33)$$

y considerando los términos individuales resulta

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -2\varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( 2k_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = 2k_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( 2k_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = 2k_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad (4.1.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial \varphi_z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( 2k_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 2k_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Las ecuaciones combinadas ceden la ecuación diferencial que aplica para problemas de campo:

$$\Phi + K_{xx} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_{zz} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (4.1.35)$$

y como conclusión tenemos que el funcional  $\Pi$  de la ecuación (4.1.32) es estacionario cuando la ecuación diferencial (4.1.35) se satisface.

## 4.2 Formulación Variacional del Elemento Finito

### 4.2.1 Introducción

El concepto fundamental del método del elemento finito (MEF) consiste en que cualquier función continua en un dominio dado, puede aproximarse mediante una sucesión de funciones que se definen en una serie de subdominios dentro de los cuales estas funciones son continuas y las cuales se interconectan para aproximar así la función dada (Fig.4.2.1)

Desde un punto de vista físico, el concepto fundamental del método del elemento finito consiste en que para resolver un sistema que representa una estructura física sujeta a ciertas condiciones físicas, se puede utilizar un modelo aproximado compuesto de una serie de elementos que se interconectan en una serie de puntos llamados nodos (Fig.4.2.2) y cuyo comportamiento es conocido a través de ciertas ecuaciones preestablecidas y que corresponden a los tipos de elementos usados y al número de nodos en cada uno de ellos.

La solución de las ecuaciones del modelo pueden ser exactas, pero el modelo en si es una aproximación discreta al sistema físico y la solución de dicho modelo se aproxima a la solución del sistema real. Los antecedentes del método del elemento finito datan de los años 50's cuando surgió del análisis de estructuras aeronáuticas, y ha evolucionado rápidamente hasta expandir sus aplicaciones a varios campos de la ingeniería como son la transmisión de calor, la elasticidad, mecánica de fluidos, estructuras, lubricación y otros muchos.

### 4.2.2 Formulación de un Problema de Ingeniería

La formulación matemática en problemas de ingeniería generalmente se puede efectuar en dos formas diferentes,

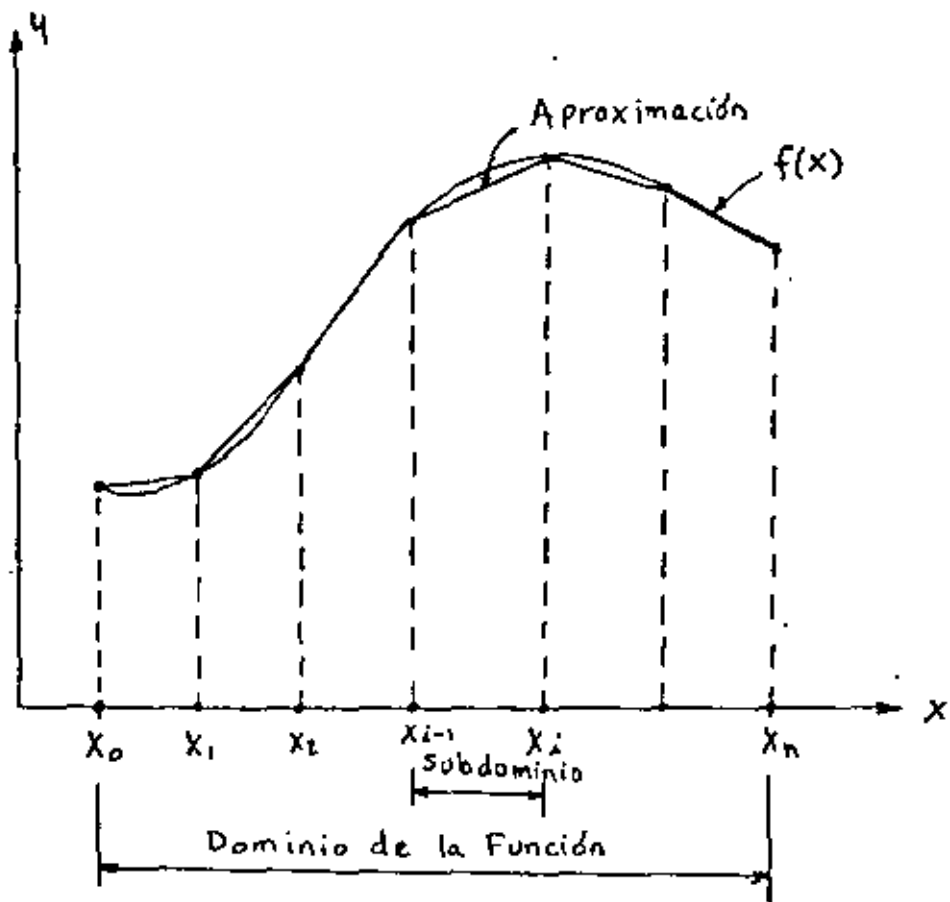


Fig. 4.2.1 Aproximación de una función continua a través de una serie de funciones lineales conectadas

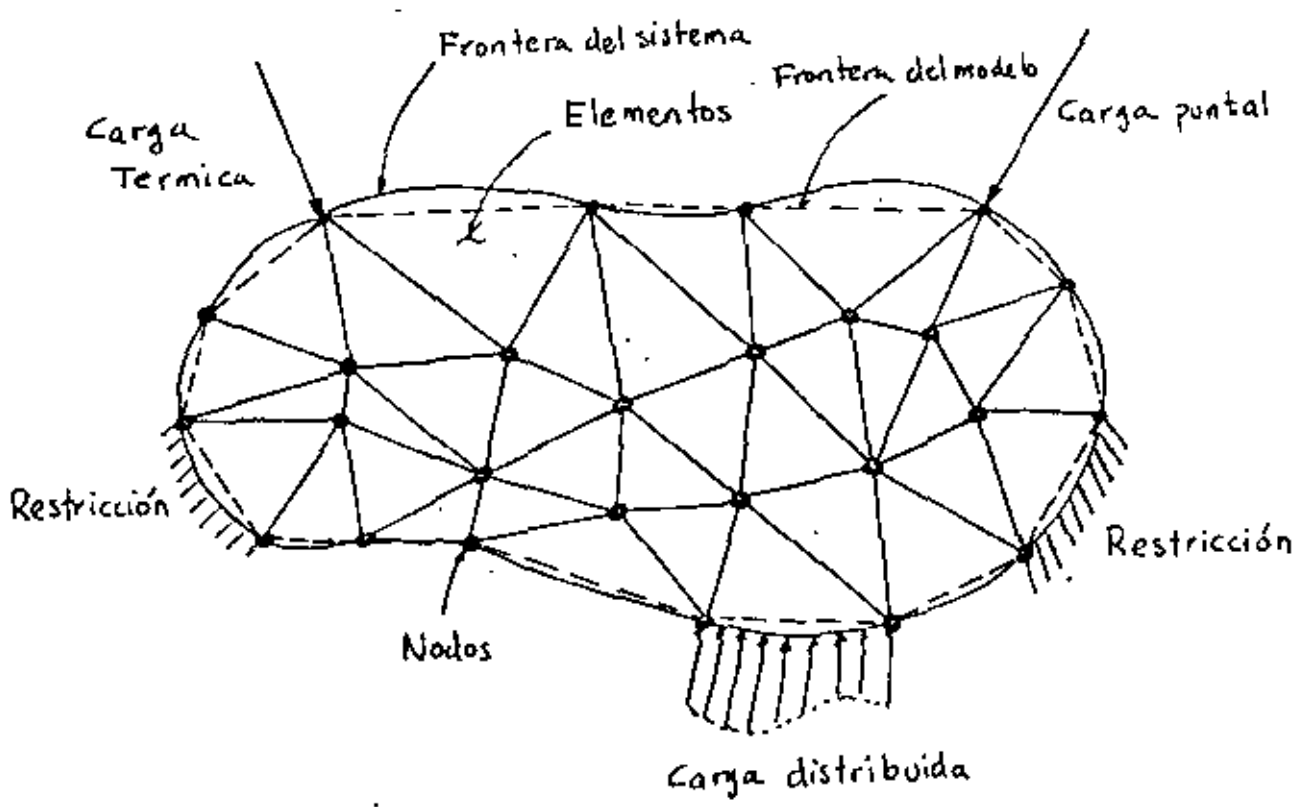


Fig. 4.2.2 Sistema de un cuerpo deformable sujeto a cargas y restricciones y discretizado con elementos finitos

la primera considera el comportamiento de una área o volumen infinitesimal del sistema y las ecuaciones correspondientes se formulan en forma diferencial, y como el área o volumen considerado es representativo de toda la región, las mismas ecuaciones son válidas para todo el dominio de esa región. Como ejemplo tenemos la ecuación de Reynolds en la lubricación hidrodinámica de cojinetes Fig 4.2.3 la cual es una ecuación diferencial en dos dimensiones que se deriva a partir de un elemento infinitesimal y es de la forma:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h^3 \frac{\partial P}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ h^3 \frac{\partial P}{\partial z} \right] = 6\mu\omega \frac{\partial h}{\partial \theta} \quad (4.2.1)$$

en donde  $h$  es el espesor de la capa lubricante,  $\theta$  es la coordenada polar angular,  $z$  es la perpendicular al plano  $(x, y)$ ,  $\mu$  es la viscosidad del lubricante,  $\omega$  es la velocidad angular de rotación de la flecha y  $P$  es la distribución de la presión al rededor y a lo largo del eje  $z$ .

En la segunda alternativa se postula un principio que englobe la región entera o dominio dado y consecuentemente es una formulación en forma Integral y la solución es generalmente dada por valores extremos de dicha integral. Este método es conocido como el Método Variacional y como ejemplo se tiene el caso de la energía potencial de cuerpos elásticos, en el cual se establece que la configuración del equilibrio estático de una estructura deformable requiere de una energía potencial mínima. Esta energía se refiere al total de la energía de toda la estructura y se obtiene mediante la suma de energías de las partes de la estructura.

De todas las posibles configuraciones que la estructura pueda adoptar, aquella que ceda un valor mínimo a la energía potencial nos da la configuración de equilibrio. Esto se conoce como el Principio de la Energía Potencial Mínima.

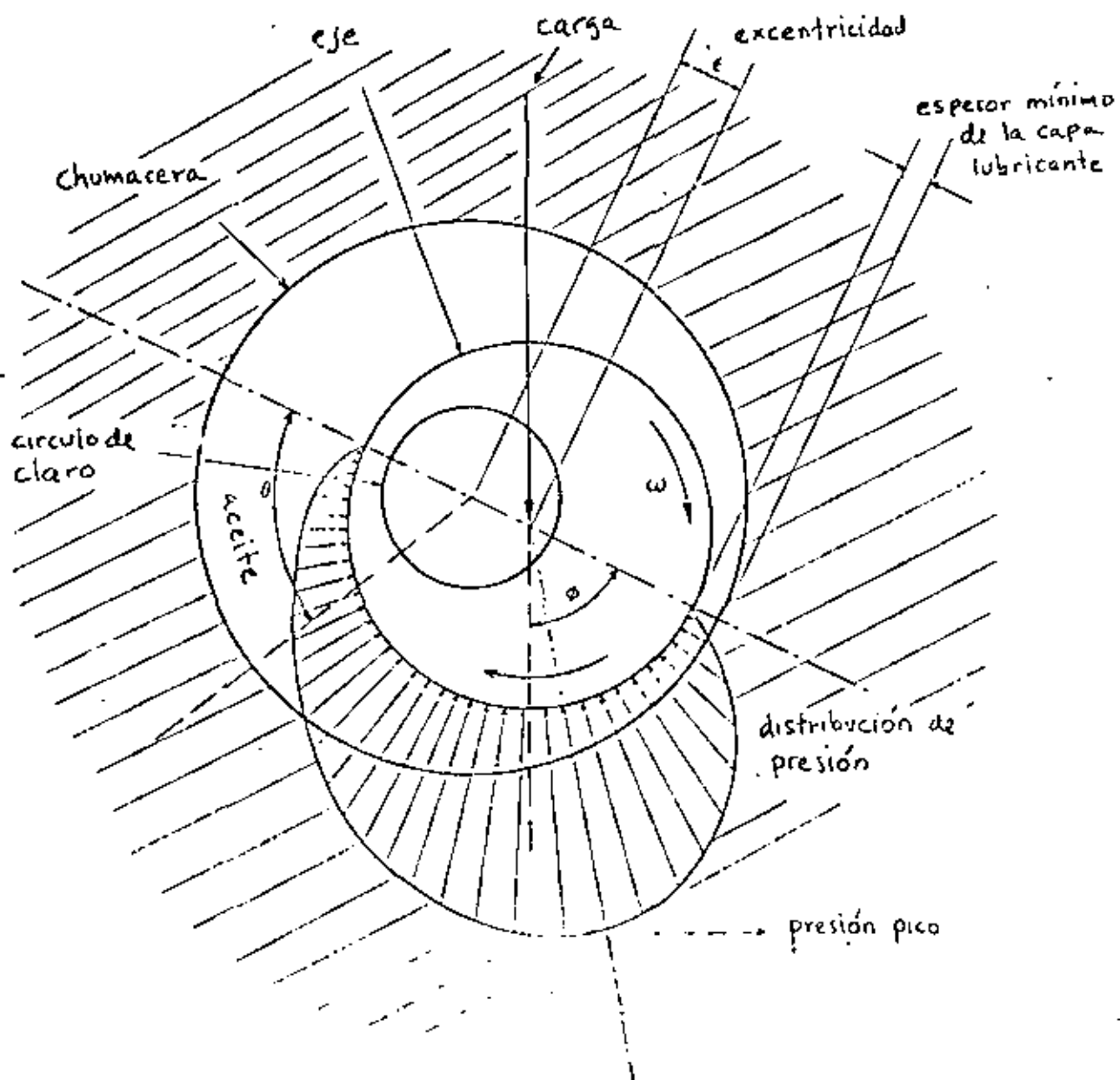


Fig. 4.2.3 Sistema chumacera - Eje lubricado hidrodinámicamente

Resumiendo lo anterior, el procedimiento para desarrollar el análisis de una estructura deformable consiste en establecer un funcional, el cual es el valor de una integral y que tiene la forma

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx \quad (4.2.2)$$

en donde

$$y = y(x) \quad , \quad y' = \frac{dy(x)}{dx} \quad (4.2.3)$$

Una vez establecido este funcional se procede a encontrar sus valores extremos, lo cual requiere que su primera variación sea igual a cero, es decir que cumpla con la condición de estacionaridad de una integral mediante:

$$\delta \Pi = 0 \quad (4.2.4)$$

Cabe mencionar que encontrar el valor estacionario de una integral es similar a encontrar los valores mínimos o máximos de una función en cálculo diferencial, excepto que al minimizar una función se obtiene un valor de la variable independiente que nos da un mínimo en la función, mientras que al minimizar un funcional se obtiene una función que al integrarse hace el valor de dicha integral mínimo.

Para llevar a cabo lo anterior se puede proceder a discretizar la integral mediante la siguiente ecuación

$$\Pi = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx = \int_{x_a}^{x_1} F(x, y, y') dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx + \dots + \int_{x_n}^{x_b} F(x, y, y') dx \quad (4.2.5)$$



O bien:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \dots + \Pi_n \quad (4.2.6)$$

La integral total  $\Pi$  ahora consiste en varias integrales parciales  $\Pi_i$ , cada una extendiéndose en los subdominios  $(x_{i-1}, x_i)$ .

El concepto de discretizar la integral de la ecuación puede tener una interpretación física al dividir el dominio de la función en una serie de elementos a los cuales se asigna cada una de las integrales. La ventaja es que ahora es posible usar alguna aproximación polinomial (lineal, parabólica etc.) para la función  $Y(x)$  en cada integral, es decir en cada elemento. Esto permite que el valor de cada función integral sea una función de los coeficientes utilizados en el polinomio de dicho elemento. Entonces la integral total  $\Pi$  es también una función de los coeficientes polinomiales usados en cada uno de los elementos y la condición de la ecuación se satisface si

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4.2.7)$$

donde las  $a_i$ 's son el juego completo de coeficientes polinomiales usados en cada elemento.

Al substituir la función  $Y(x)$  por una aproximación polinomial  $y(x) = a_1 x + a_2 x^2 \dots$  el problema se reduce a encontrar los coeficientes de los polinomios usados en la aproximación.

Es decir, la solución directa de la ecuación (4.2.2) sujeta a las condiciones (4.2.3) puede ser bastante complicada y es necesario aplicar los conceptos de cálculo variacional, sin embargo el problema se puede formular mediante la ecuación (4.2.5) y al substituir la aproximación polinomial el problema se puede resolver algebraicamente

### 4.2.3 Energía Potencial

En la introducción de conceptos fundamentales del método del elemento finito se derivaron unas ecuaciones algebraicas de equilibrio que en forma matricial se pueden expresar como:

$$[K] \{D\} = \{P\} \quad (4.2.8)$$

Este sistema de ecuaciones representa un modelo matemático cuya interpretación física está directamente relacionada con la definición de un sistema físico el cual consiste de un cuerpo deformable caracterizado por la matriz de propiedades elásticas  $[k]$ , y por las cargas que actúan sobre el sistema  $\{P\}$  que ocasionan ciertos desplazamientos en dicho cuerpo  $\{D\}$ .

En general, un cuerpo elástico es la composición de una infinidad de partículas las cuales interactúan entre si y producen ciertas respuestas a ciertas perturbaciones y dado a que existe un número infinito de partículas en cada cuerpo no es conveniente describir la respuesta de un sistema elástico en términos de los desplazamientos de cada partícula, más bien se toma un número finito de puntos que puedan caracterizar el comportamiento del sistema.

En ciertos casos es posible formular las ecuaciones de equilibrio en base a relaciones directas de carga y desplazamiento, como es en el caso de resortes lineales, o vigas, pero en otros casos no es tan evidente la relación de carga y deformación y por lo tanto es conveniente usar métodos alternativos para la formulación de las ecuaciones de equilibrio. Uno de estos métodos se basa en la expresión de la energía potencial la cual se define como sigue:

La energía potencial de un cuerpo deformable sujeto a cargas estáticas es igual a la energía interna o de deformación almacenada en el cuerpo deformado menos el trabajo

realizado por las cargas que actuan en el a lo largo de los desplazamientos de los puntos de aplicaci3n de dichas cargas. Esto se puede expresar como sigue

$$V = U - W \tag{4.2.9}$$

en donde V=Energía potencial

U=Energía de deformaci3n o interna

W=Trabajo de las cargas aplicadas

Como ejemplo podemos considerar el caso simple de un resorte lineal mostrado en la Fig.4.2.4 .El desplazamiento D del extremo libre del resorte es ocasionado por la carga P aplicada en ese extremo en tonces la energía potencial se puede expresar como:

$$V = \int_0^D Kx dx - \int_0^D P dx \tag{4.2.10}$$

En esta expresi3n, la primera integral representa la energía de deformaci3n y la segunda el trabajo realizado por la carga sobre el resorte de constante K. Al integrar se obtiene:

$$V = \frac{1}{2} (Kx^2) \Big|_0^D - Px \Big|_0^D = \frac{1}{2} KD^2 - PD \tag{4.2.11}$$

Es decir la expresi3n de la energía potencial es el valor de una integral y por lo tanto V es un funcional el cual puede ser minimizado, de acuerdo al principio de la energía potencial m3nima. Entonces de la ecuaci3n(4.2.4) se tiene que:

$$\delta V = (KD - P) \delta D \tag{4.2.12}$$

La cual es consistente con el principio de trabajo virtual y dado que  $\delta D$  es diferente de cero entonces

$$KD - P = 0 \tag{4.2.12a}$$

Es decir que el desplazamiento D que resulte en el equilibrio del sistema es tal que:

$$D_e = \frac{P}{K} \tag{4.2.12b}$$

Gráficamente la ecuación(4.2.11) se puede representar por medio de la suma de dos funciones tal como se muestra en la Fig(4.2.5) de tal forma para un potencial mínimo se tiene que el desplazamiento D es aquel que produce el equilibrio.

4.2.4. Sistemas con Varios Grados de Libertad

Por definición los grados de libertad son aquellas variables que definen completamente y en forma única el estado o configuración de un sistema dado, por ejemplo, el sistema de resorte lineal que se acaba de ver es un sistema con un solo grado de libertad ya que una sola cantidad define el estado del sistema, esa variable es el desplazamiento lineal del extremo del resorte. Si en ese extremo se anexa otro resorte, entonces existen dos grados de libertad y así sucesivamente. Sin embargo la naturaleza de los grados de libertad no es necesariamente la misma, ya que éstos se pueden referir a desplazamientos, rotaciones, temperaturas o también coeficientes de un polinomio que aproximan una función.

Si consideramos un sistema elástico con n grados de libertad el cual está sujeto a ciertas perturbaciones. Entonces la energía potencial total se puede expresar como un función de estos n grados de libertad o sea

$$\Pi_T = \Pi_T (D_1, D_2, D_3 \dots D_n) \tag{4.2.13}$$

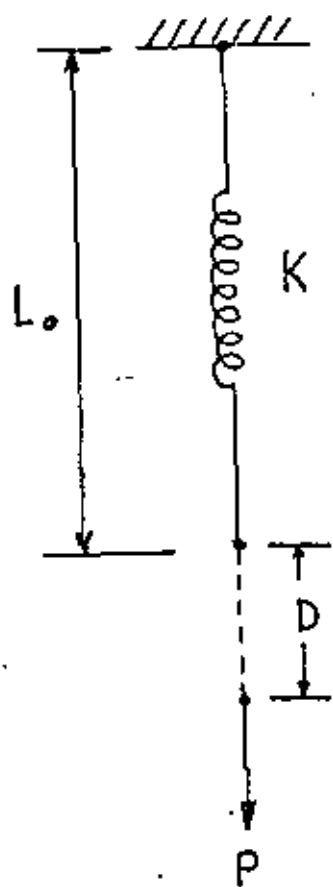


Fig 4.2.4  
Sistema de resorte lineal con un extremo fijo y otro extremo libre y cargado (1 grado de libertad)

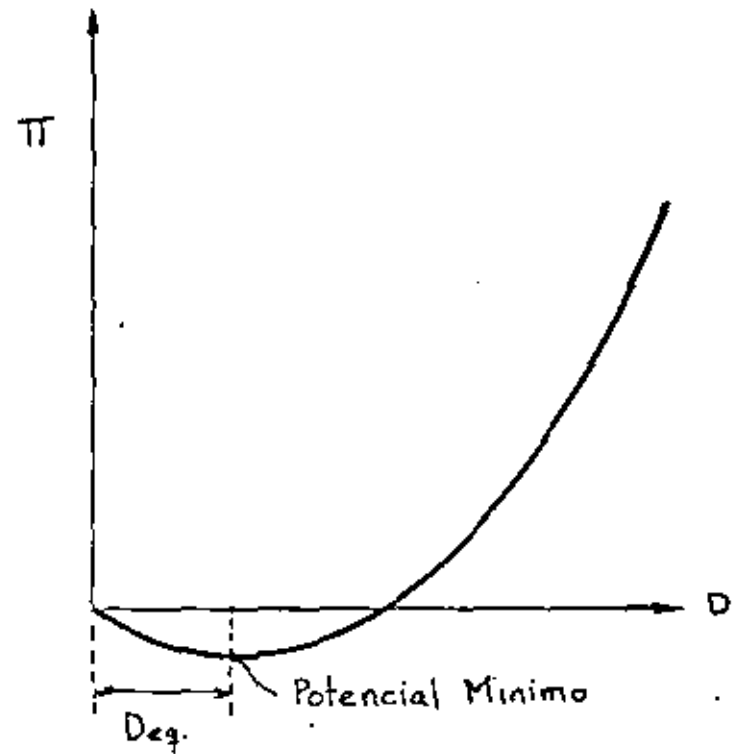
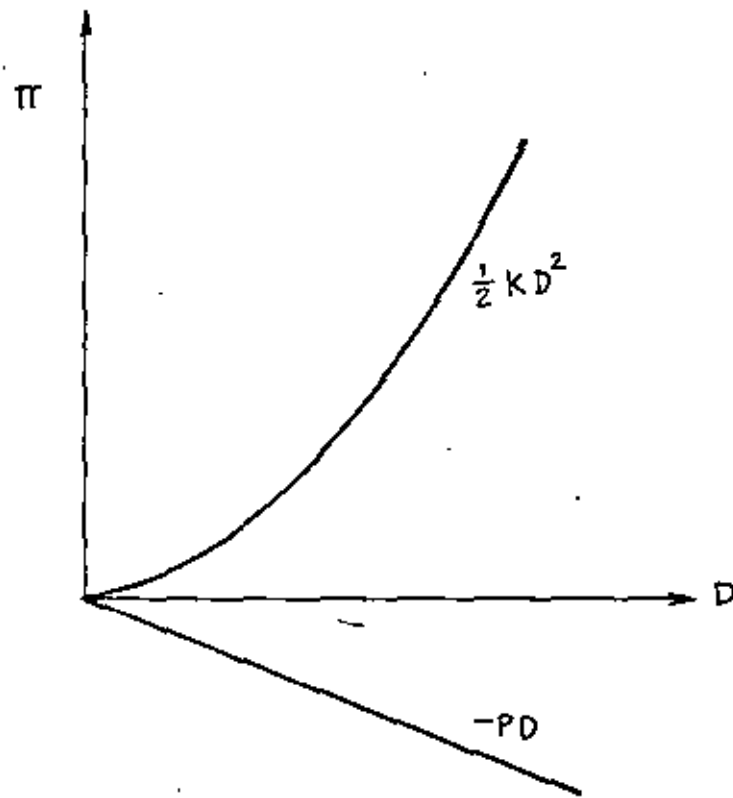


Fig. 4.2.5 Energía potencial como función del desplazamiento en el extremo libre de un resorte con constante  $K$  y carga  $P$  dadas

entonces la primera variación del potencial con respecto a los grados de libertad se expresa como

$$\delta \Pi_r = \frac{\partial \Pi_r}{\partial D_1} \delta D_1 + \frac{\partial \Pi_r}{\partial D_2} \delta D_2 + \frac{\partial \Pi_r}{\partial D_3} \delta D_3 \dots + \frac{\partial \Pi_r}{\partial D_n} \delta D_n \quad (4.2.14)$$

la cual debe cumplir con la condición de estacionaridad de la ecuación (4.2.4), es decir  $\delta \pi = 0$  y por lo tanto:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} = \dots = \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} = 0 \quad (4.2.15)$$

De acuerdo con el principio de energía potencial mínima, la ecuación (4.2.15) define la configuración de equilibrio del sistema.

Un ejemplo de un sistema con dos grado de libertad es el que se muestra en la Fig. 4.2.6 el cual consta de dos resortes lineales empotrados, y una barra rígida ligada los dos resortes con una carga puntal como se muestra. La expresión para la energía potencial se puede escribir ya integrada como:

$$V = \frac{1}{2} k_1 D^2 + \frac{1}{2} k_2 (D + \theta L)^2 - P(D + \theta a) \quad (4.2.16)$$

Al substituir  $v$  por  $\pi$  en la ecuación (4.2.5) el resultado es:

$$\frac{\partial V}{\partial D} = k_1 D + k_2 D + k_2 \theta L - P = 0 \quad (4.2.17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_2 L D + k_2 L^2 \theta - a P = 0 \quad (4.2.18)$$

que en forma matricial adquiere la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & k_2 L \\ k_2 L & k_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D \\ \theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P \\ aP \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2.19)$$

que se puede reducir a la forma común de las ecuaciones de equilibrio

$$[K] \{X\} = \{F\}. \quad (4.2.20)$$

En la ecuación 4.2.19, (P) y (aP) son llamadas las fuerzas generalizadas correspondientes a las coordenadas generalizadas (D) y (θ).

De este ejemplo se puede concluir entonces que la matriz de rigidez [k] es una matriz simétrica es decir  $k_{ij} = k_{ji}$  y también que el producto de una fuerza generalizada por su correspondiente coordenada siempre tiene unidades de trabajo.

Si un tercer resorte es anexado al sistema digamos en el punto intermedio de la barra, el sistema se convierte en un sistema estaticamente indeterminado. Sin embargo las coordenadas D y θ son aun suficientes para determinar la configuración del sistema y dos ecuaciones de equilibrio son generadas, es decir la indeterminación estática no afecta el procedimiento general basado en la minimización del potencial.

4.2.5 Formulación General Usando Campos de Desplazamiento

Antes de desarrollar una expresión general para la energía potencial de cuerpos elásticos es conveniente describir el concepto de campo de desplazamiento y aproximaciones.

En muchos sistemas mecánicos la configuración del mismo en un instante dado puede ser expresada en términos de los desplazamientos de ciertos puntos de referencia, los cuales represen-

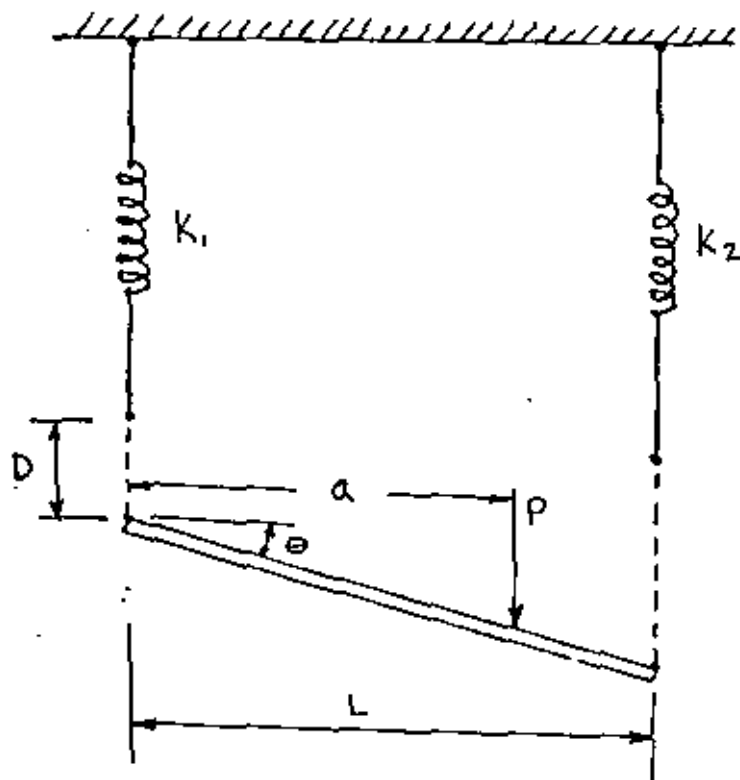


Fig 4.2.6 Sistema de dos resortes y una barra rígida con carga intermedia (dos grados de libertad)

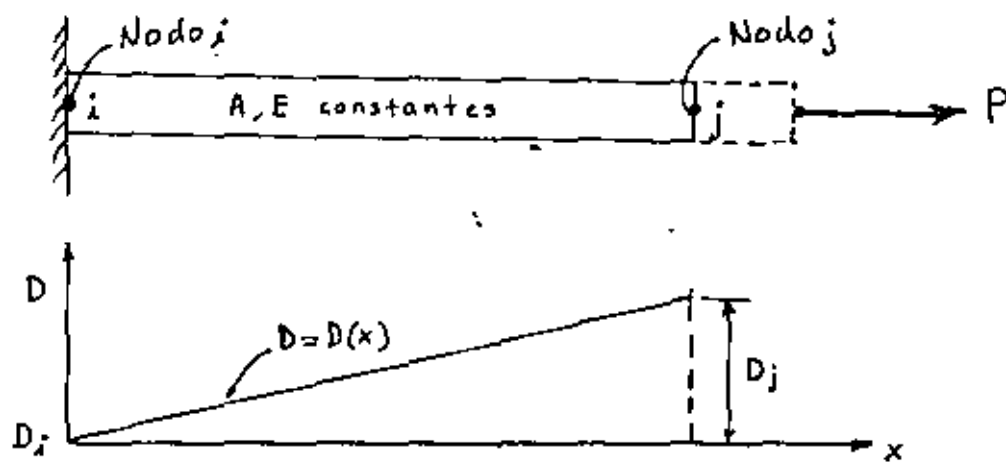


Fig. 4.2.7 Campo de desplazamientos en una barra de sección uniforme en terminos de los desplazamientos nodales.



tan un campo de desplazamientos con respecto a un marco de referencia. Por ejemplo el campo de desplazamiento de una barra elastica de sección uniforme con una carga axial Fig.4.2.7 se puede describir en términos de los desplazamientos en los extremos de la misma en una forma lineal. Es decir el desplazamiento en cualquier punto intermedio de una barra se puede expresar como una función del desplazamiento de los puntos extremos de la misma con una relación de la forma

$$D_x = D_i + \frac{x}{L} (D_j - D_i) \quad (4.2.21)$$

Donde  $D_x$  es el desplazamiento de un punto en la coordenada  $x$  de la barra,  $L$  es la longitud original de la barra y  $D(i, j)$  es el desplazamiento del extremo  $(i, j)$  de la barra.

La ecuación (4.2.21) puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$D_x = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L}) & (\frac{x}{L}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_j \end{Bmatrix} \quad (4.2.22)$$

Si consideramos que la barra representa un elemento con el nodo  $i$  en el extremo  $i$  y el nodo  $j$  en el extremo  $j$  y que  $f$  es el desplazamiento de un punto cualquiera del elemento entonces la ecuación (4.2.22) se puede expresar en forma matricial como sigue:

$$\{f\} = [N] \{d\} \quad (4.2.23)$$

En el caso de un elemento en dos dimensiones como el mostrado en la Fig.4.2.8 el vector  $\{d\}$  los desplazamientos en dos dimensiones de los nodos del elemento, entonces la ecuación (4.2.23) tendría la forma:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (4.2.24)$$

en donde:

$$N_1 = \frac{(b-x)(c-y)}{4bc}, \quad N_2 = \frac{(b+x)(c+y)}{4bc}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(c-y)}{4bc}, \quad N_4 = \frac{(b-x)(c+y)}{4bc} \quad (4.2.25)$$

$N_{1,2,3,4}$  son llamadas las funciones de "forma" o de interpolación. La descripción del campo de desplazamiento para otros elementos también es posible en base de los desplazamientos nodales, es decir que es posible conocer el desplazamiento absoluto de cualquier punto en un elemento o estructura conociendo el vector de desplazamientos nodales. Por lo tanto la formulación general usando elementos finitos está orientada a obtener la solución de un sistema con un número finito de grados de libertad, en donde los grados de libertad son los desplazamientos independientes de cada nodo y donde dichos desplazamientos pueden ser de traslación o de rotación.

La aproximación a un campo de desplazamiento también se puede hacer en base a un polinomio cuyo grado de libertad sea el mismo que el correspondiente al elemento en cuestión, por ejemplo en el caso de la barra uniforme se puede utilizar un polinomio del tipo:

$$\{f\} = \{u\} = \{a_1 + a_2 x\} \quad (4.2.26)$$

$$\{f\} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (4.2.27)$$

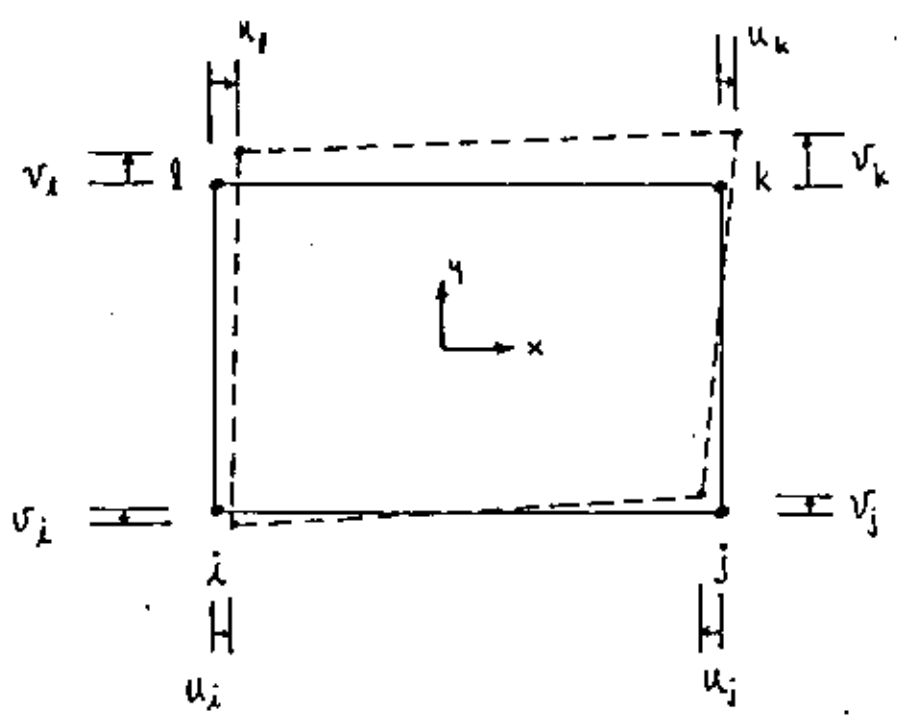


Fig. 4.2.8 Elemento cuadrilatero bidimensional, 2 grados de libertad por nodo, 4 nodos o sea 8 g.d.l.

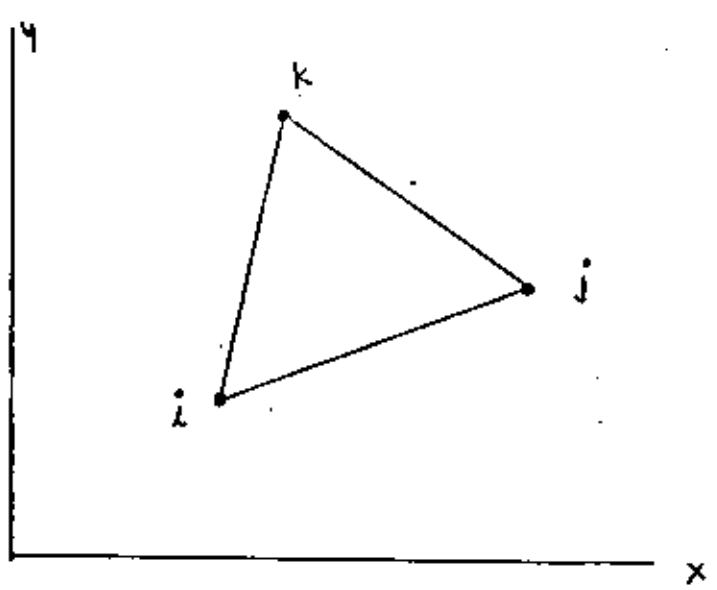


Fig 4.2.9 Elemento triangular plano, 2 grados de libertad por nodo, 3 nodos, 6 g.d.l.

en donde  $a_1$  y  $a_2$  son los coeficientes del polinomio de grado 1, entonces hay dos coeficientes para un elemento que tiene dos grados de libertad.

Los desplazamientos nodales  $\{d\}$  se pueden expresar en función de estos coeficientes substituyendo las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} u_{x=0} &= u_i \\ u_{x=L} &= u_j \end{aligned} \quad (4.2.28)$$

Entonces substituyendo en (4.2.26) resulta el siguiente sistema:

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [A] \{a\} \quad (4.2.29)$$

Despejando  $\{a\}$  de (4.2.29) y substituyendo en (4.2.27) se tiene

$$\{f\} = [1 \quad x] [A]^{-1} \{d\} \quad (4.2.30)$$

Invirtiéndola matriz  $[A]$  y desarrollando el producto en la ecuación 4.2.30 se obtiene la ecuación 4.2.22 o sea:

$$\{f\} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{x}{L}) & (\frac{x}{L}) \end{bmatrix} \{d\} = [N] \{d\} \quad (4.2.31)$$

En el caso de un elemento plano triangular como el mostrado en la fig. 4.2.9, la aproximación se puede hacer en base a las siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

Que en forma matricial quedan expresados como

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.2.33)$$

Tomando las condiciones de frontera se obtiene que para la dirección  $x$ :

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.34)$$

y para la dirección  $y$

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (4.2.35)$$

de donde

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.36)$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.37)$$

Substituyendo (4.2.36) y (4.2.37) en la ecuación (4.2.33) se obtiene

$$u = [1 \ x \ y] [\Lambda]^{-1} \{u_1 \ u_2 \ u_3\}^T \quad (4.2.38)$$

$$v = [1 \ x \ y] [\Lambda]^{-1} \{v_1 \ v_2 \ v_3\}^T \quad (4.2.39)$$

y donde

$$[\Lambda]^{-1} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (4.2.40)$$

Substituyendo (4.2.40) en (4.2.38) y (4.2.39) y reduciendo el sistema resultante es

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}_{\text{Triangulo}} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.41)$$

en donde

$$N_1 = \frac{1}{2A} \left[ \frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \right] \quad (4.2.42)$$

$$N_2 = \frac{1}{2A} \left[ \frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right] \quad (4.2.43)$$

$$N_3 = \frac{1}{2A} \left[ \frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \right] \quad (4.2.44)$$

De la misma manera se puede aproximar el campo de desplazamiento para un elemento cuadrilatero plano de la Fig.4.2.8 usando polinomios del tipo:

$$u = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (4.2.45)$$

$$v = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \quad (4.2.46)$$

Los cuales conducen a un sistema equivalente al dado en las ecuaciones (4.2.24) y (4.2.25).

#### 4.2.6 Expresión General de la Energía Potencial

Podemos considerar ahora el caso general de un cuerpo elástico en el espacio el cual está sujeto a cargas que producen un campo de desplazamientos, deformaciones y esfuerzos tal que en un punto dado de dicho cuerpo y con respecto a un marco de referencia, los vectores de esfuerzos y de deformaciones son:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \sigma_y \sigma_z \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}^T \quad (4.2.47)$$

$$y \quad \{E\} = \{E_x \ E_y \ E_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^T \quad (4.2.48)$$

La relación esfuerzo-deformación puede escribirse como:

$$\{\sigma\} = [E] \{E\} + \{\sigma_0\} \quad (4.2.49)$$

en donde  $[E]$  es la matriz de propiedades elásticas del material y el vector  $\{\sigma_0\}$  es el vector de esfuerzos iniciales (dichos esfuerzos iniciales pueden referirse a los esfuerzos presentes sin la aplicación de las cargas externas, como podrían ser esfuerzos residuales, esfuerzos de ensamble etc.).

La definición de energía interna o de deformación se puede escribir como

$$U_0 = \frac{1}{2} \{E\}^T [E] \{E\} - \frac{1}{2} \{E_0\}^T [E] \{E_0\} \quad (4.2.50)$$

Esta energía de deformación es originada por ciertas cargas que actúan en el cuerpo las cuales desarrollan un cierto trabajo. Estas fuerzas se pueden clasificar en fuerzas internas o de cuerpo, que en un punto cualquiera tiene la forma:

$$\{\Phi\} = \{\Phi_x \ \Phi_y \ \Phi_z\}^T \quad (4.2.51)$$

y el vector de fuerzas de superficie expresado por:

$$\{F\} = \{F_x \ F_y \ F_z\}^T \quad (4.2.52)$$

Entonces usando las expresiones (4.2.41) a la (4.2.52) y la expresión general de la energía potencial de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \pi = & \int_{Vol} \left( \frac{1}{2} \{E\}^T [E] \{E\} + \{E\}^T \{\sigma_0\} \right) dV \\ & - \int_{Vol} \{f\}^T \{F\} dV - \int_{Sup} \{f\}^T \{\Phi\} dS \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

en donde la primera integral representa la energía interna o de deformación, la segunda integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de cuerpo sobre la estructura y la tercera integral representa el trabajo desarrollado por las fuerzas de superficie sobre el cuerpo. La ecuación (4.2.53) es una forma más general de la ecuación (4.2.9)

#### 4.2.6 Formulación Elemental en Base a la Energía Potencial

El objetivo ahora es formular las ecuaciones que caracterizan un elemento en base a la minimización de la energía potencial usando la expresión general (4.2.53) y la expresión del campo de desplazamiento  $\{f\} = \{u \ v \ w\}$ .

Primeramente las deformaciones en un elemento se pueden expresar en terminos de los desplazamientos nodales a través de la siguiente expresión

$$\{\epsilon\} = [B] \{d\} \quad (4.2.54)$$

en donde  $[B]$  es la matriz esfuerzo-deformación que en el caso general de un material elástico isotropico es de la forma

$$[B] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.2.55)$$



Substituyendo las ecuaciones (4.2.23) y (4.1.54) en (4.2.53) la energía potencial puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \pi_e = & \frac{1}{2} \{d\}^T \left( \int_{Vol} [B]^T [E] [B] dV \right) \{d\} + \{d\}^T \int_{Vol} [B]^T \{c_0\} dV \\ & - \{d\}^T \int_{Vol} [N]^T \{F\} dV - \{d\}^T \int_{Sup} [N]^T \{\Phi\} dS \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

En esta ecuación el subíndice en  $\pi_e$  indica que la energía potencial es de un elemento y por lo tanto el vector  $\{d\}$  es el vector de desplazamientos nodales de un elemento solamente, y para una estructura compuesta de varios elementos se tiene que la energía potencial total se expresa como la sumatoria de las energías potenciales de cada uno de los elementos y la energía potencial total queda expresada como:

$$\begin{aligned} \pi_T = & \frac{1}{2} \{D\}^T \left( \sum_i^m \int_{Vol} [B]^T [E] [B] dV \right) \{D\} + \{D\}^T \sum_i^m \left( \int_{Vol} [B]^T \{c_0\} dV \right. \\ & \left. - \int_{Vol} [N]^T \{F\} dV - \int_{Sup} [N]^T \{\Phi\} dS \right) - \{D\}^T \{P\} \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Una vez encontrada la expresión general de la energía potencial se procede a encontrar el valor extremo del funcional  $\pi_T$ , substituyendo en la ecuación (4.2.4) lo cual resulta en el sistema de ecuaciones dado por la ecuación (4.2.7) o

$$\left\{ \frac{\partial \pi_T}{\partial D} \right\} = 0 \quad (4.2.58)$$

Entonces al substituir  $\pi_p$  dada por la ecuación (4.2.57) en la ecuación (4.2.58) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio.

$$\left( \sum_i^m \int_{Vol} [B]^T [E] [B] dV \right) \{D\} = \sum_i^m \left( - \int_{Vol} [B]^T \{\sigma_0\} dV + \int_{Vol} [N]^T \{F\} dV \right. \\ \left. + \int_{Sup} [N]^T \{\Phi\} ds \right) + \{P\} \quad (4.2.59)$$

La ecuación (4.2.59) se puede abreviar en tal forma que la sumatoria de las integrales del lado izquierdo de la misma sea identificada como la "Matriz de Rigidez" y la sumatoria de integrales del lado derecho de la ecuación como vector de cargas generalizadas, entonces la ecuación (4.2.59) queda

$$[K] \{D\} = \{R\} \quad (4.2.60)$$

Ejemplo. Podemos considerar un caso simple en forma general mediante el cual podremos establecer la siguiente secuencia de operaciones

$$\{f\} = \{u\} = [1 \quad x] \{a\} \quad (4.2.61)$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [A] \{a\} \quad (4.2.62)$$

$$\{f\} = [1 \quad x] [A]^{-1} \{d\} = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \left(\frac{x}{L}\right) \right] \{d\} = [N] \{d\} \quad (4.2.63)$$

$$U = \int_0^L \frac{1}{2} E \epsilon_x^2 A dx = \frac{1}{2} \int_0^L \epsilon_x^T E \epsilon_x A dx \quad (4.2.64)$$

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T \int_0^L [B]^T E [B] A dx \{d\} \quad (4.2.65)$$

$$k_e = \int_0^L [B]^T E [B] A dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} A dx \quad (4.2.66)$$

$$k_e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \text{Matriz elemental de rigidez} \quad (4.2.67)$$

#### 4.2.8 El Método Rayleigh-Ritz

Podemos considerar un ejemplo unidimensional para describir el método Rayleigh-Ritz como el mostrado en la Fig. 4.2.10 en donde el área (S) y el módulo elástico (E) son constantes y la carga distribuida (q) son tales que

$$A = E = L = 1 \quad \text{y} \quad q = x \quad (4.2.68)$$

Las condiciones de frontera son:

$$\begin{aligned} u &= 0 & @ & X=0 \\ u_{,x} &= 0 & @ & X=L \end{aligned} \quad (4.2.69)$$

La energía potencial se puede expresar como:

$$\Pi = \int_0^L \frac{AE}{2} u_{,x}^2 dx - \int_0^L u(q dx) \quad (4.2.70)$$

Substituyendo los valores dados en (4.2.68) y asumiendo que los desplazamientos u son de la forma  $u = a_1 x$  entonces

$$\Pi = \frac{1}{2} a_1^2 - \frac{a_1}{3} \quad (4.2.71)$$

4

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0 = a_1 - \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3} \quad (4.2.72)$$

Si se asume ahora que  $u = a_1 x + a_2 x^2$ , entonces la energía potencial queda como sigue:

$$\Pi = \int_0^1 \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 x)^2 dx - \int_0^1 (a_1 x + a_2 x^2) x dx \quad (4.2.73)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{Bmatrix} \quad (4.2.74)$$

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/12 \\ -1/4 \end{Bmatrix} \quad (4.2.75)$$

Sumarizando Resultados:

	$u(x=1/4)$	$u(x=1/2)$	$u(x=3/4)$	$u(x=1)$	$\sigma(x=0)$	$\sigma(x=1)$
1 Termino	.0833	.1667	.2500	.333	.333	.333
2 Terminos	.1302	.2292	.2969	.333	.5833	.0833
Exacto	.1224	.2292	.3041	.333	.5000	.0

Si asumimos un polinomio de 3er grado para  $u$  (tres términos) tendríamos la solución exacta porque la solución exacta es cúbica de la forma  $u = (3x - x^3)/6$  o sea que el método Rayleigh-Ritz basada en

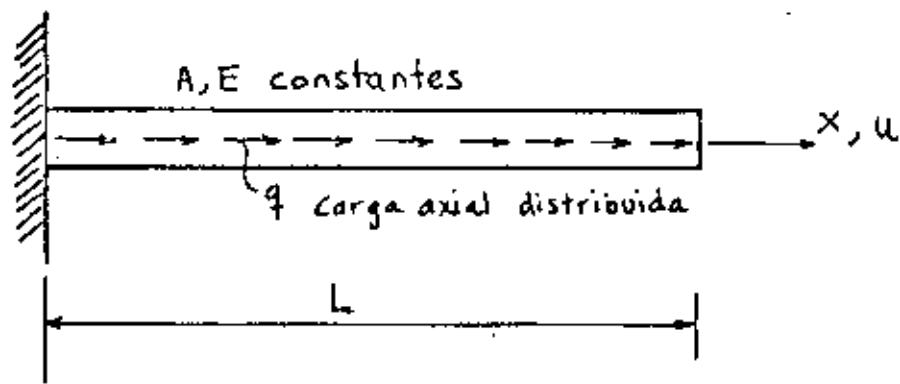
$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (4.2.76)$$

daría como resultado

$$a_1 = 1/2 \quad (4.2.77)$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -1/6$$



Condiciones de frontera:

Forzada  $u=0$  @  $x=0$

Natural  $u_{,x}=0$  @  $x=L$

Fig. 4.2.10 Barra con carga axial distribuida y seccion constante

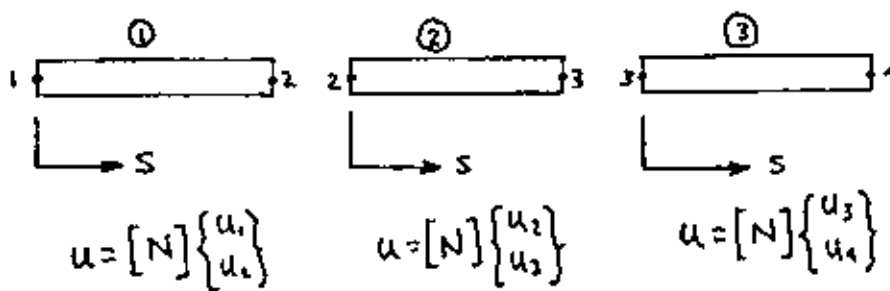
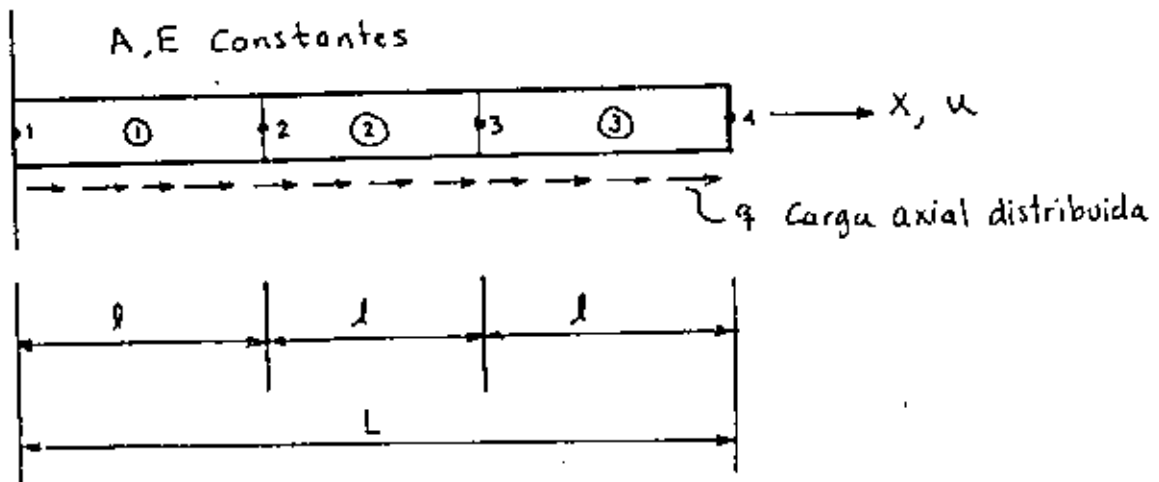


Fig 4.2.11 Barra con carga axial distribuida dividida en tres elementos.

y si se incluyeran más términos como por ejemplo

$$u = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n \quad (4.2.78)$$

la solución sería:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2} \\ a_2 &= 0 \\ a_3 &= -\frac{1}{6} \\ a_4 &= a_5 = \dots = a_n = 0 \end{aligned} \quad (4.2.79)$$

#### El Método del Elemento Finito y su relación con R.R

Podemos considerar ahora la barra del ejemplo anterior pero dividida en tres elementos como se muestra en la Fig 4.2.11 Para cada elemento existe una matriz de forma tal que el campo de desplazamientos en cada elemento se puede expresar como:

$$u_i = [N]_i \{u_i\}_i \quad (4.2.80)$$

y donde 
$$[N]_i = \begin{bmatrix} \frac{l_i - s}{l_i} & \frac{s}{l_i} \end{bmatrix} \quad (4.2.81)$$

Las deformaciones son dadas por:

$$\epsilon_x = u_{,x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial s} \quad (4.2.82)$$

Usando la ecuación(4.2.82) en la ecuación(4.2.80)

$$\epsilon_x = \frac{\partial}{\partial s} [N] \{d\} = [B] \{d\} \quad (4.2.83)$$

en donde 
$$[B] = \frac{\partial}{\partial s} [N] \quad \text{y} \quad \{d\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (4.2.84)$$

y donde que  $\epsilon_x$  es escalar entonces;

$$\epsilon_x^2 = \epsilon_x^T \epsilon_x = \{d\}^T [B]^T [B] \{d\} \quad (4.2.85)$$

Substituyendo la ecuación (4.2.85) en la expresión para la energía de un elemento se obtiene que

$$U_i = \int_0^l \frac{AE}{2} \epsilon_x^2 dx = \frac{1}{2} \{d\}_i^T \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} ds \{d\} \quad (4.2.86)$$

lo cual se puede expresar en forma compacta como:

$$U_i = \frac{1}{2} \{d\}_i^T [K]_i \{d\}_i \quad (4.2.87)$$

en donde

$$[K]_i = \int_0^l AE \begin{bmatrix} -1/l \\ 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/l & 1/l \end{bmatrix} ds = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.2.88)$$

Por otra parte el trabajo realizado por la carga es

$$W = \int_0^l q u ds = \{d\}_i^T \int_0^l [N]^T q ds \quad (4.2.89)$$

y el potencial total de la estructura es

$$\Pi_T = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \quad (4.2.90)$$

Suponiendo que para cada elemento las propiedades cumplen con las propiedades de las ecuaciones (4.2.68) y además

$$l = 1/3$$

$$q = x \quad \text{para el elemento 1} \quad (4.2.91)$$

$$q = \frac{1}{3} + s \quad \text{para el elemento 2}$$

$$q = \frac{2}{3} + s \quad \text{para el elemento 3}$$

Expandiendo los vectores al rango de la estructura se tiene que el vector global es

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (4.2.92)$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.90) y expandiendo al rango de la estructura, la energía potencial es:

$$\begin{aligned} \pi_T = \frac{1}{2} \{D\}^T & \left( \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \right) \{D\} \\ & - \{D\}^T \left( \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \\ 8 \end{Bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4.2.93)$$

Minimizando la energía potencial se obtiene que

$$\left\{ \frac{\partial \pi_T}{\partial D} \right\} = 0 \quad (4.2.94)$$

la cual resulta en el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1/54 \\ 6/54 \\ 12/54 \\ 8/54 \end{Bmatrix} \quad (4.2.95)$$



La Matriz cuadrada del lado izquierdo de esta ecuación es singular debido a que no se han impuesto las condiciones de frontera de la estructura, ésta condición es

$$u_1 = 0 \quad (4.2.96)$$

Al imponer la condición (3.96) en la ecuación (4.2.95) se obtiene

$$\begin{bmatrix} 6 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \frac{1}{54} \begin{Bmatrix} 6 \\ 12 \\ 8 \end{Bmatrix} \quad (4.2.97)$$

de donde se obtiene que  $u_2 = .1605$ ,  $u_3 = .2840$  y  $u_4 = .333$  los cuales son exactos sin embargo son aproximados en cualquier otro punto, por ejemplo en  $x=L/2$  se tiene

$$u = [N] \{d\}_2 = \left[ \frac{1-l/2}{l} \quad \frac{l/2}{l} \right] \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.2.98)$$

$$u = \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right] \begin{Bmatrix} .1605 \\ .2840 \end{Bmatrix} = .222 \quad (4.2.99)$$

El valor exacto de  $u$  en  $x=L/2$  es de 0.2292. El esfuerzo en el elemento  $i$  es  $\sigma_i = (E u_{,x})_i$  o también

$$\sigma_i = E [B] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (4.2.100)$$

Substituyendo las condiciones (4.2.91) en (4.2.100) se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= .4815 && \text{exacto en } x = \frac{L}{6} \\ \sigma_2 &= .3704 && \text{exacto en } x = \frac{L}{2} \\ \sigma_3 &= .1481 && \text{exacto en } x = \frac{5L}{6} \end{aligned}$$

Es decir los esfuerzos no son continuos en el modelo y los desplazamientos son más exactos que los esfuerzos como se puede apreciar en la Fig. 4.2.12

De estos dos ejemplos se puede concluir que el método clásico de Rayleigh-Ritz (R-R) es aproximado pero más exacto si se utilizan más términos en el polinomio. En el caso de cargas distribuidas el método de R-R puede ser exacto si se usan suficientes términos en el polinomio y la inclusión de más términos no cambia la solución.

Por otra lado usando elementos finitos se llega a resultados exactos si las cargas se localizan en los nodos y es aproximado para el caso de cargas distribuidas pero puede ser bastante cercano al exacto si se usan más elementos.

El método clásico de R-R utiliza un polinomio que se aplica a todo el dominio de la estructura, mientras que el método del elemento finito utiliza un polinomio para cada elemento.

#### 4.2.10 Modelación de Sistemas con Elementos Finitos

Existe una variedad muy grande de sistemas mecánicos y estructurales los cuales requieren de una solución la cual no es siempre trivial ni simple de obtener, en tales casos es práctica común hacer una clasificación de efectos significantes y otros que por su naturaleza pueden considerarse insignificantes o ignorables, de tal manera que en general siempre se habla en términos de una solución aproximada a la solución real del sistema o de una solución exacta o aproximada de un modelo aproxi-

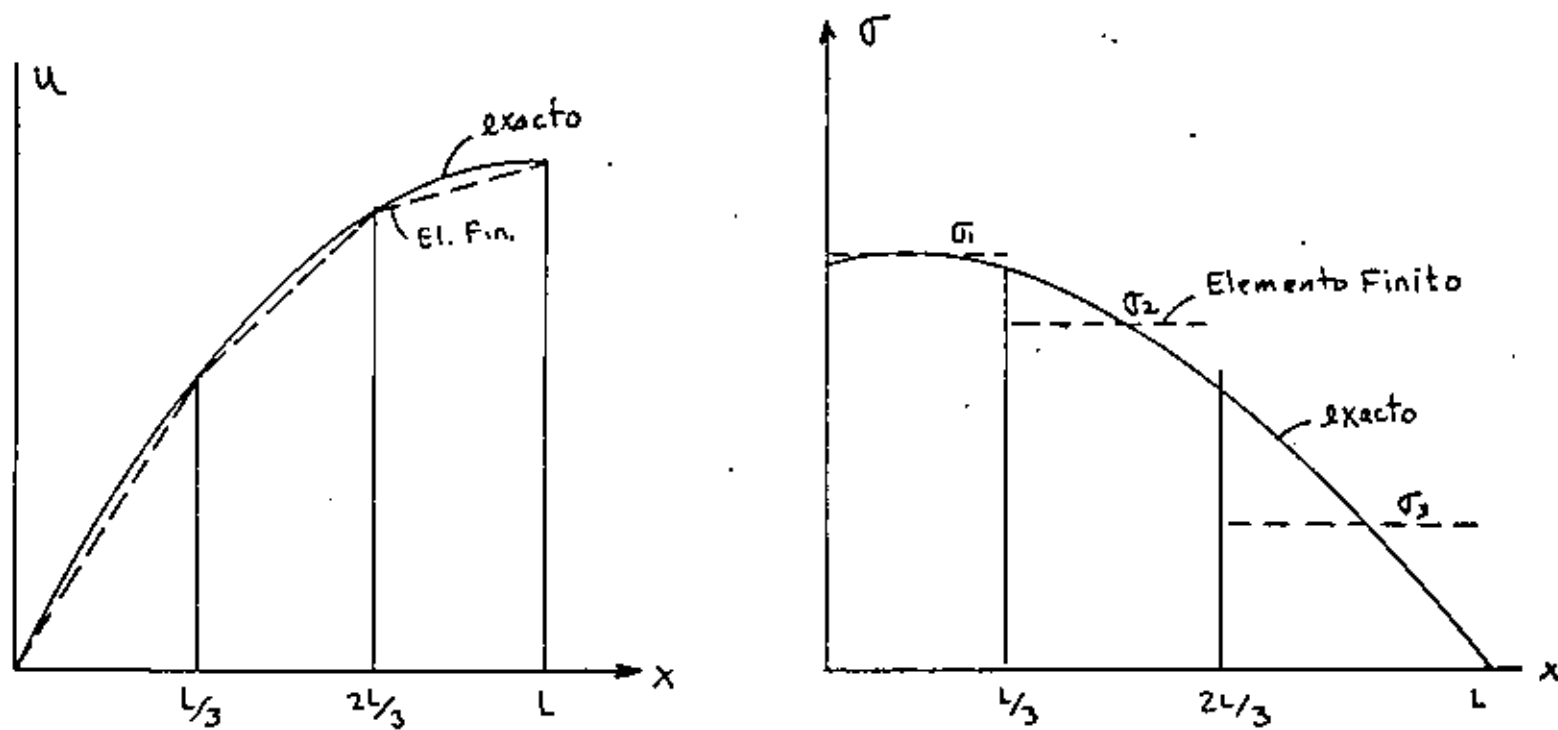


Fig 4.2.12 Comparación del método del elemento finito y la solución exacta para el problema de la barra con carga distribuida

mado al sistema real,

En la formulación analítica de un sistema, las suposiciones de que algunos efectos son ignorables tienen como objetivo simplificar los procedimientos de cálculo, sin embargo a través del desarrollo de técnicas digitales se han podido mejorar dichos procedimientos, aunque en general siempre es necesario hacer algunas suposiciones respecto a aquellos efectos que pueden ser ignorables o simplemente no dominantes.

La formulación con elementos finitos también requiere de suposiciones lógicas en base a la naturaleza del sistema en cuestión y para tal efecto se han desarrollado una variedad de elementos cuyas propiedades son representativas de algunos casos específicos de sistemas y así se tienen por ejemplo elementos planos para la simulación de problemas bidimensionales de esfuerzo plano o deformación plana, elementos viga en dos y tres dimensiones, elementos sólidos o de volumen, elementos cascarón y otros varios que tienen propósitos específicos.

En general, el análisis y modelación de un sistema es un proceso que se desarrolla en varias etapas que son:

1. Definición del sistema físico
2. Definición de condiciones de frontera
3. Definición de agentes de perturbación
4. Definición de variables de respuesta
5. Definición de efectos despreciables
6. Desarrollo del modelo analítico o modelo matemático
7. Aplicación sistemática de procedimientos de Cálculo
8. Interpretación de Resultados

Cabe mencionar que un entendimiento general del sistema en cuestión es siempre básico e importante pues la definición

del sistema físico, de las condiciones iniciales y de frontera y la definición de agentes perturbadores puede depender de un entendimiento bastante completo del problema que se está analizando ya que una formulación errónea conceptualmente genera resultados que no corresponden al verdadero problema.

En el área de aplicaciones del método del elemento finito se parte de la suposición que el análisis conoce y entiende el problema en cuestión, de tal forma que los puntos del 1 al 5 del proceso de análisis queden satisfactoriamente establecidos.

En el punto 6, referente al desarrollo del modelo matemático es necesario que las características de los elementos empleados sean compatibles con el comportamiento general del sistema y por compatibilidad se entiende que el conjunto de elementos que componen el sistema sean capaces de reproducir en forma aproximada la respuesta del sistema a las perturbaciones y condiciones a que está sujeto.

Son varios los aspectos que se deben tomar en cuenta para la selección de los elementos apropiados para cada caso, por ejemplo:

- El número de nodos del elemento
- El número de grados de libertad
- Condiciones naturales de frontera del elemento
- Tipo de cargas admisibles por el elemento
- Tipo de geometría permitido por el elemento
- Sistemas de coordenadas permisibles del elemento
- Limitaciones del tipo <sup>de</sup> elemento

En la Fig. 4-2-13 se muestran algunos elementos que en general pueden ser aplicados a la modelación de varios tipos de sistemas y a continuación se presentan algunos casos específicos de aplicaciones a sistemas reales.

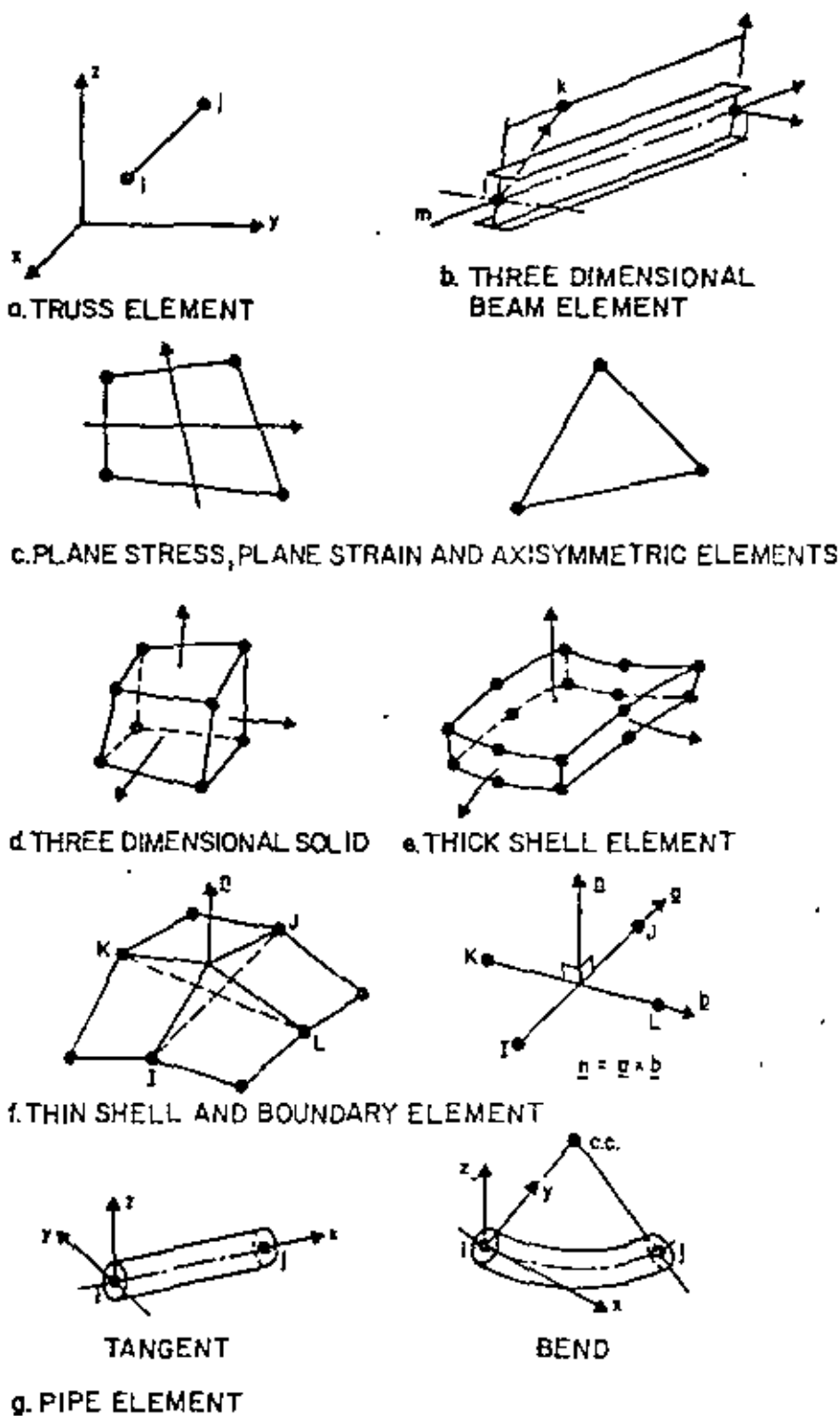


Fig 4.2.13 Biblioteca de elementos del programa SAP

#### 4.3. Formulación de Residuos Pesados (Método de Galerkin)

Una formulación alternativa a la variacional es la denominada de residuos pesados. Esta formulación no requiere de un postulado variacional que aplique al sistema de interés y parte de una manipulación directa sobre la ecuación diferencial que gobierna la física del mismo.

Una formulación diferencial resulta en una ecuación del tipo

$$L(\varphi) = 0 \quad (4.3.1)$$

en donde  $L$  es un operador diferencial, con las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 0 \\ \varphi'(0) &= b \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Una función de campo que puede satisfacer las condiciones anteriores se puede definir como:

$$\{\varphi\}_a = [N] \{\psi_i\} \quad (4.3.3)$$

en donde  $[N]$  es una función de las coordenadas

$\{\psi_i\}$  es el vector de valores nodales de

$\{\varphi\}_a$  es una función a "prueba"

entonces, si  $\{\varphi\}_a$  es la verdadera función, al sustituirla en la ecuación (4.3.1) el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = 0 \quad (4.3.4)$$

la verdadera función pero es una buena aproximación de la misma; entonces al sustituir en 4.3.1. el resultado es:

$$L(\{\varphi\}_a) = R \approx 0 \quad (4.3.5)$$

en donde  $R$  es un residuo de error dado por  $a$  es solamente una buena aproximación de la verdadera función  $u$ . Por lo tanto  $R$  se puede evaluar en puntos discretos (nodos) e igualar la suma a cero para minimizar el error, o sea

$$\int_V R \, dV = 0 \quad (4.3.6)$$

Pero una mejor solución sería la de distribuir  $R$  sobre una región de acuerdo a alguna función de peso  $w$  de las coordenadas (nodales) antes de la integración, es decir

$$\int_V w R \, dV = 0 \quad (4.3.7)$$

o sustituyendo la ecuación (4.3.3.) en (4.3.5) y esta en (4.3.7) se tiene:

$$\int_V w L([N]\{\psi_i\}) \, dV = 0 \quad (4.3.8)$$

La función de peso  $w$  puede ser de cualquier forma en general pero cuando se selecciona igual a las funciones de forma o de interpolación se tiene que  $w$  es igual a  $N$  y por lo tanto

$$\int_V [N] L([N]\{\psi_i\}) \, dV = 0 \quad (4.3.9)$$

La ecuación (4.3.9) es la formulación de "Galerkin" de elemento finito y si se aplica a cada elemento en la región, se obtienen  $n$  ecuaciones simultáneas para  $n$  parámetros nodales en  $V$ .

La solución del sistema de ecuaciones que resulta se desarrolla de igual manera que para otros casos, aunque una desventaja es que la ecuación (4.3.9) contiene derivadas de orden más alto que las de formulación variacional.



Considerar la ecuación diferencial:

$$Lu - f = 0 \quad (4.3.10)$$

en donde  $L$  es un operador diferencial, y la aproximación

$$\bar{u} = \sum N_i u_i \quad (4.3.11)$$

entonces

$$L\bar{u} - f = \epsilon \quad (4.3.12)$$

en donde  $\epsilon$  = error residual. La condición es entonces:

$$\int_R N_i \epsilon \, dR = 0 \quad (4.3.13)$$

Es decir que el error  $\epsilon$  entre la solución aproximada y la solución real es ortogonal a las funciones usadas en la aproximación  $N_i$ . Este es el método de Galerkin cuya ecuación estable:

$$\int_R N_\beta L(\varphi) \, dR = 0 \quad \beta = i, j, k, \dots \quad (4.3.14)$$

donde

$$\varphi = [N_i, N_j, N_k, \dots] \{ \Phi \} \quad (4.3.15)$$

Un ejemplo es el siguiente, sea la ecuación

$$L(\varphi) = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 3 \frac{d\varphi}{dx} + 4 = 0 \quad (4.3.16)$$

con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Usando la ecuación (4.3.14) resulta

$$\int_0^1 N_\beta \left( \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 3 \frac{d\varphi}{dx} + 4 \right) dx = 0 \quad (4.3.18)$$

1 es el límite de  $x$

Aplicación del Método de Galerkin a Vigas.

La ecuación fundamental

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (4.3.19)$$

Usando la ecuación (4.3.14)

$$\int_0^l [N]^T \left( \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \quad (4.3.20)$$

La función de forma óde interpolación se define sobre cada elemento, entonces para todo el sistema se tiene:

$$\sum_{e=1}^R \int_{l(e)} [N^{(e)}]^T \left( \frac{d^2 y^{(e)}}{dx^2} - \frac{M^{(e)}}{EI} \right) dx = 0 \quad (4.3.21)$$

Las funciones de interpolación son tales que:

$$y = N_i Y_i + N_j Y_j = \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right), \frac{x}{l} \right] \begin{Bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{Bmatrix} = [N^{(e)}] \{Y\} \quad (4.3.22)$$

Entonces el Momento M se puede aproximar:

$$\frac{M}{EI} = [N^{(e)}] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} \quad (4.3.23)$$

Para reducir el orden de la integral en la ecuación(4.3.21) se puede integrar por partes entonces:

$$\int_{l(e)} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 y}{dx^2} = [N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{l(e)} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} dx \quad (4.3.24)$$

Substituyendo en (4.3.21) se tiene:

$$[N^{(e)}]^T \frac{dy}{dx} \Big|_{x_i}^{x_j} - \int_{l(e)} \left( \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dy}{dx} + [N^{(e)}]^T \frac{M}{EI} \right) dx = 0 \quad (4.3.25)$$

La primera integral nos da la matriz elemental de coeficientes  $[k^{(e)}]$  en la ecuación

$$[K^{(e)}]\{Y\} = \{f^{(e)}\} \quad (4.3.26)$$

A través de la suma sobre todos los elementos, la segunda integral produce el vector  $\{F\}$ .

El primer término de la ecuación (4.3.25) contribuye al vector  $\{F\}$  si  $dy/dx$  se define en cualquier extremo del elemento, si no se desprecia.

Las integrales de la ecuación (4.3.25) se evalúan como sigue:

$$\frac{d}{dx} [N]^T = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} (1 - \frac{x}{l}) \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.27)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{d}{dx} [N] \{Y\} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.28)$$

Entonces:

$$\int_0^l \frac{d}{dx} [N]^T \frac{d^4 y}{dx^4} dx = \int_0^l \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.29)$$

y para la segunda integral:

$$\int_0^l [N]^T \frac{M}{EI} dx = \int_0^l [N]^T [N] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \quad (4.3.30)$$

$$\frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}$$

La primera integral nos da la matriz elemental de coeficientes  $[k^{(e)}]$  en la ecuación

$$[K^{(e)}]\{Y\} = \{f^{(e)}\} \quad (4.3.26)$$

A través de la suma sobre todos los elementos, la segunda integral produce el vector  $\{F\}$ .

El primer término de la ecuación (4.3.25) contribuye al vector  $\{F\}$  si  $dy/dx$  se define en cualquier extremo del elemento, si no se desprecia.

Las integrales de la ecuación (4.3.25) se evalúan como sigue:

$$\frac{d}{dx} [N]^T = \frac{d}{dx} \begin{Bmatrix} (1 - \frac{x}{l}) \\ \frac{x}{l} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4.3.27)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} [N]\{Y\} = \frac{1}{l} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.28)$$

Entonces:

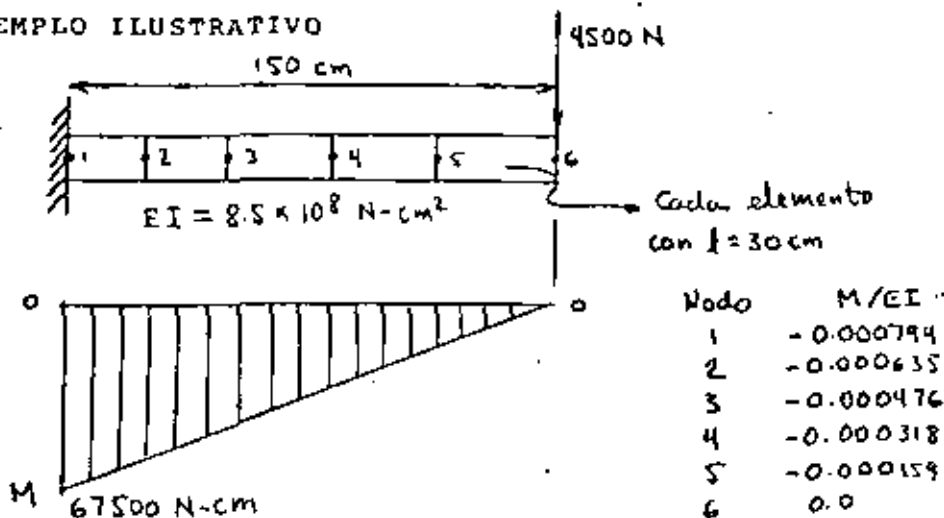
$$\int_0^l \frac{d}{dx} [N]^T \frac{dy}{dx} dx = \int_0^l \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 1] \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} dx = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_j \end{Bmatrix} \quad (4.3.29)$$

y para la segunda integral:

$$\int_0^l [N]^T \frac{M}{EI} dx = \int_0^l [N]^T [N] \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} dx = \quad (4.3.30)$$

$$\frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix}$$

EJEMPLO ILUSTRATIVO



Las ecuaciones para el primer elemento son:

$$-\frac{1}{30} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{Bmatrix} - \frac{30}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_i/EI \\ M_j/EI \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.31)$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \Big|_{x=0}$ , el último término desaparece. Entonces, una vez ensamblado el sistema queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & 0 \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ 0 & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} + 150 \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & 1 & 4 & 1 & \\ 0 & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.000794 \\ -0.000635 \\ -0.000476 \\ -0.000318 \\ -0.000159 \\ -0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.3.32)$$

que se puede reducir a:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} .333 \\ .571 \\ .428 \\ .286 \\ .143 \\ .023 \end{Bmatrix} \quad \therefore y_1 = 0 \quad (4.3.33)$$

Resultados

Nodo	E.F.	Teoría
1	0	0
2	-.3334	-.3335
3	-1.2385	-1.2388
4	-1.5719	-2.5729
5	-4.1929	-4.1929
6	-5.9559	-5.9559

Conclusión: Sin comentarios.

Ecuación de campo en dos dimensiones:

$$L(\varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varphi = 0 \tag{4.3.34}$$

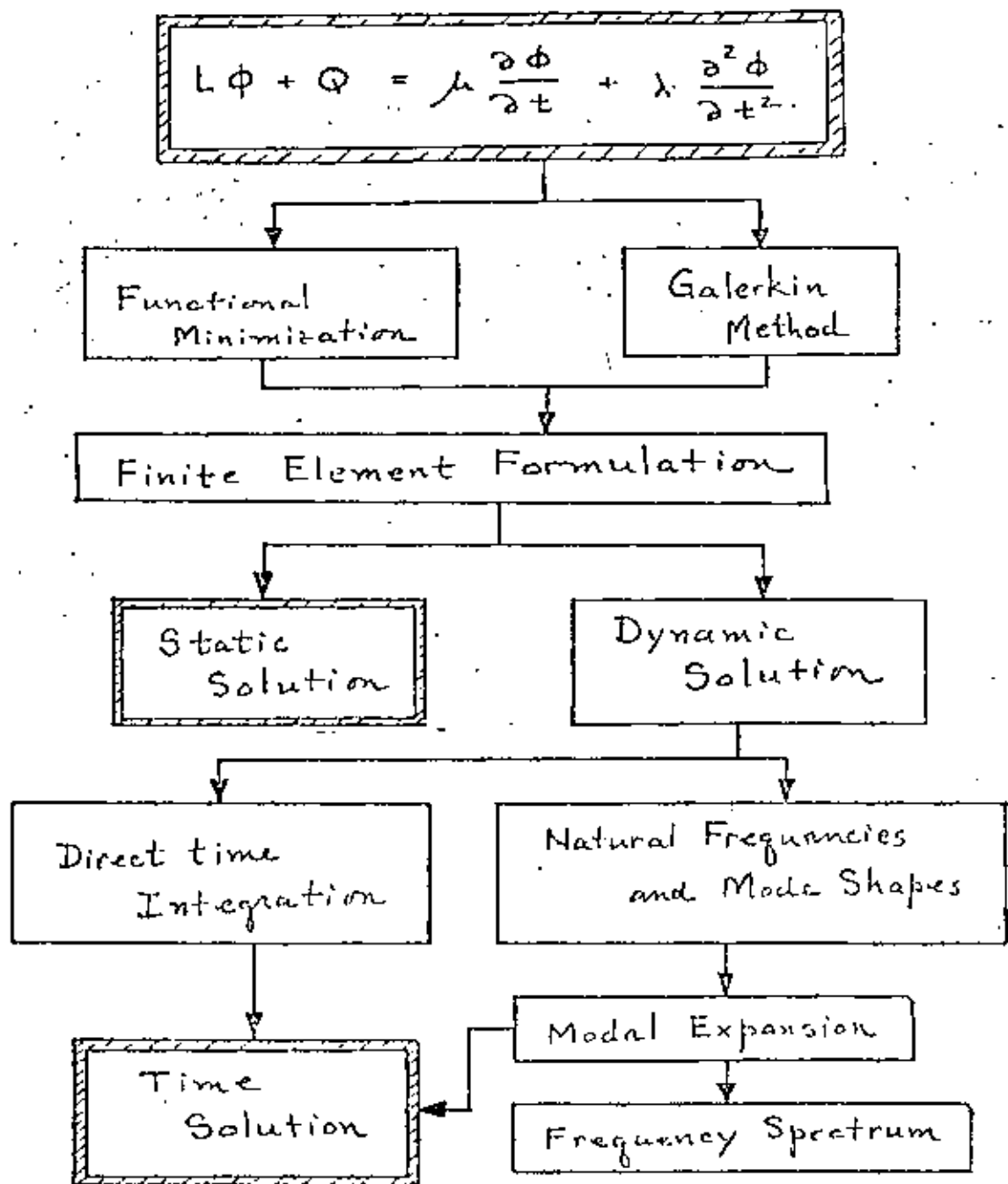
Aplicable a problemas de:

- Torsión
- Transmisión de Calor
- Mecánica de Fluidos

La integral de Galerkin para el caso de la ecuación (4.3.34) es:

$$\int_V [N]^T \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varphi \right) dV = 0 \tag{4.3.35}$$

①



Flow Chart of Finite Element Solution Procedures



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA**

**BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES**

MARZO, 1984.



## 5. BIBLIOTECA DE ELEMENTOS Y APLICACIONES

### 5.1 Desarrollo de Matrices Elementales

Cada elemento está asociado a un número determinado de nodos y estos a su vez a un número específico de grados de libertad (gdl). En general, dependiendo de la variable de campo (desplazamiento, temperatura, etc) se puede definir el tipo de grados de libertad que se requieren para la representación física del comportamiento del sistema; por ejemplo, si se trata del desplazamiento de una partícula en una línea, se tiene entonces un (gdl), si se trata de desplazamientos en un plano de la misma entonces se tienen dos (gdl) y se tienen tres (gdl) para el caso de desplazamientos en el espacio.

Los elementos comúnmente usados en la práctica de elementos finitos pueden clasificarse de varias formas y en varias categorías, algunas de estas pueden ser las que se indican en la tabla 5.1.1. Algunas de las características indicadas en esta tabla pueden ser físicamente interpretadas, por ejemplo el número de nodos necesarios para describir la topología del elemento, forma relativa (rectangular, trapezoidal etc), pero otras no son tan obvias como por ejemplo el orden de la integración explícita, el tipo de las fun-

Característica Categórica	Tipos de Elementos	Ejemplos
Espacial Geométrica	Lineales (unidimensionales)	barra, viga
	Planos (bidimensionales) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Triangulares} \\ \text{cuadriláteros} \end{array} \right.$	esfuerzo plano, deformación plana, axisimétricos
	Espaciales (Tridimensionales)	solidos, placas gruesas
Forma Relativa	Naturales (regulares)	Triangulares, rectangulares
	Isoparamétricas (irregulares) 1, 2 y 3 puntos de integración	de geometría irregular
Orden de los polinómios de interpolación	Lineales (nodos esquinales)	lados rectos
	Cuadráticas (nodos esq. y 1 intermedio)	lados parabólicos
	Cúbicas (nodos esq. y 2 intermedios)	lados cúbicos
Tipo de grados de libertad	Traslacionales	barra, planos, solidos
	Rotacionales	vigas, cascarones, placas.

TABLA 5.1.1 Algunas clasificaciones de Elementos Finitos

3  
ciones de interpolación de la variable de campo etc. En un programa general de elementos finitos, cada elemento está debidamente formulado a través de ciertas ecuaciones que toman en cuenta las siguientes características:

- Número de nodos
- Número de grados de libertad por nodo
- coordenadas nodales
- conectividad del elemento
- Número de puntos de integración (isoparamétricas)
- propiedades del material

y para cada elemento en un sistema, se formulan las matrices elementales que caracterizan sus propiedades y que se ensamblan en matrices globales que caracterizan la estructura total del sistema. Por ejemplo la estructura mostrada en la figura 5.1.1 tiene 8 elementos cuyos nodos tienen un solo grado de libertad (temperatura por ejemplo). El resultado de ensamblar las matrices elementales en la matriz global es una matriz cuyos terminos diferentes de cero se indican con una "x" como se muestra en las siguientes ecuaciones indicadas.

Sea  $[K_i]$  la matriz del elemento  $i$  cuyo orden  $n$  es igual al número de nodos (dado que cada nodo tiene un solo gdl) entonces se obtienen las siguientes matrices elementales

$$[K_1]_{3 \times 3}, [K_2]_{4 \times 4}, [K_3]_{3 \times 3}, [K_4]_{4 \times 4}, [K_5]_{3 \times 3}$$

$$[K_6]_{2 \times 2}, [K_7]_{2 \times 2}, [K_8]_{2 \times 2} \quad (5.1.1)$$

El vector global de grados de libertad se ordena de acuerdo al esquema de numeración nodal tal que

$$\{D\}^T = \{d_1, d_2, \dots, d_9\} \quad (5.1.2)$$

y los vectores elementales se ordenan de acuerdo a los nodos que definen el elemento, entonces se tienen los siguientes vectores elementales:

$$\{D_1\}^T = \{d_1, d_4, d_5\}$$

$$\{D_2\}^T = \{d_1, d_2, d_5, d_6\}$$

$$\{D_3\}^T = \{d_4, d_5, d_8\}$$

$$\{D_4\}^T = \{d_5, d_6, d_8, d_9\} \quad (5.1.3)$$

$$\{D_5\}^T = \{d_2, d_3, d_6\}$$

$$\{D_6\}^T = \{d_3, d_7\}$$

$$\{D_7\}^T = \{d_6, d_7\}$$

$$\{D_8\}^T = \{d_7, d_9\}$$

Al expandir las matrices (5.1.1) al tamaño de la matriz global se pueden sumar término a término y el resultado sería una matriz  $[K]$  cuyos términos diferentes de cero se indican en la siguiente ecuación:

$$[K] = \begin{bmatrix} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & X & X & O & X & X & X & O & O & O \\ 2 & X & X & X & O & X & X & O & O & O \\ 3 & O & X & X & O & O & X & X & O & O \\ 4 & X & O & O & X & X & O & O & X & O \\ 5 & X & X & O & X & X & X & O & X & X \\ 6 & X & X & X & O & X & X & X & X & X \\ 7 & O & O & X & O & O & X & X & O & X \\ 8 & O & O & O & X & X & X & O & X & X \\ 9 & O & O & O & O & X & X & X & X & X \end{bmatrix} \quad (S.1.4)$$

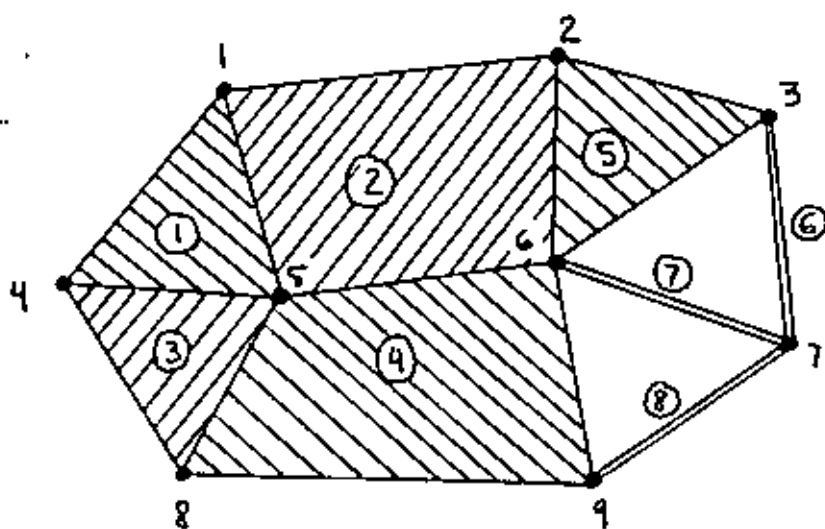

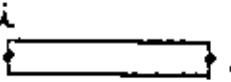
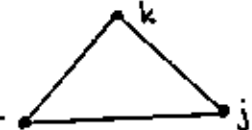
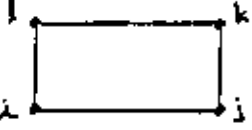
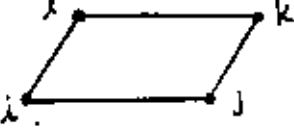
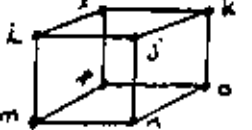
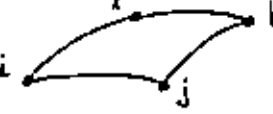

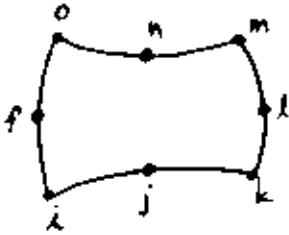
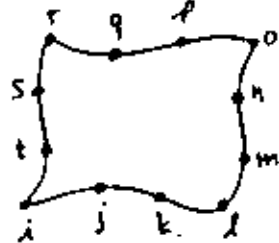
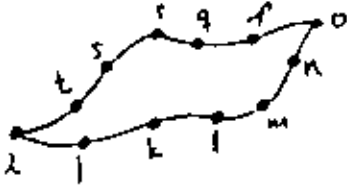



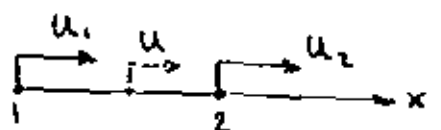
Figura S.1.1 Sistema con 5 elementos planos (tres triangulares y dos cuadriláteros) y tres elementos barra, con un grado de libertad por nodo

ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	BARRA	2	1 línea 2 plano 3 espacio	axiales
	VIGA	2	2 } plano 3 } 6 espacio	Concentradas, distribuidas cortantes, momentos, axiales
	TRIANGULAR PLANO	3	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLANO	4	2	concentradas en el plano
	RECTANGULAR PLACA	4	3	concentradas en el plano y fuera del plano y distribuidas en la cara
	SOLIDO	8	3	Concentradas en los nodos en cualquier dirección y en las caras distribuidas
	CASCARON	4	6	Concentradas y distribuidas en cualquier dirección
	PLACA GRUESA	8	6	Concentradas y distribuidas en cualquier dirección

ELEMENTO	TIPO	Nº NODOS	Nº (g d l)	TIPO DE CARGAS
	PLANO ISOPARAMETRICO PARABOLICO.	8	2	concentradas en el plano
	PLANO ISOPARAMETRICO CUBICO	12	2	mismas
	CASCARON ISOPARAMETRICO CUBICO	12	6	Concentradas, cortantes y momentos y de superficie
	SOLIDO ISOPARAMETRICO CUBICO	32	3	Concentradas, sin momentos, de superficie.

A continuación se presenta el desarrollo de las matrices elementales para algunos elementos basados en una formulación variacional que resulta en matrices del tipo

$$[K_e] = \int_{\text{Vol.}} [B]^T [E] [B] dV \quad (5.1.5)$$

Caso 1 Elemento tipo barra 

Sea la función de campo  $\{u\}$  expresada en términos de un campo

$$\{u\} = [1 \quad x] \{a\} \quad (5.1.6)$$

- $\therefore$   $\{u\}$  es el desplazamiento de cualquier punto del elemento  
 $\{a\}$  es el vector de coeficientes de un polinomio que aproxima el desplazamiento en el elemento  
 $x$  es la coordenada dentro del elemento para la cual se calcula el desplazamiento  $\{u\}$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = [N] \{a\} \quad (5.1.7)$$

combinando (5.1.7) y (5.1.6)

$$\{u\} = [1 \quad x] [N]^{-1} \{d\} = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right] \{d\} \quad (5.1.8)$$

$$\{u\} = [N] \{d\} \quad (5.1.9)$$

por otro lado se tiene que,

$$\{E\} = [B] \{d\} = \left( -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \frac{d_2 - d_1}{L} \quad (5.1.10)$$



De las ecuaciones (5.1.9) y (5.1.10) se tiene que

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x} [N] \tag{5.1.11}$$

De la expresión de la energía de deformación se tiene:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \{E\}^T [E] \{E\} A dx \tag{5.1.12}$$

Sustituyendo (5.1.10) en (5.1.12) se tiene

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T \left[ \int_0^L [B]^T E [B] A dx \right] \{d\} \tag{5.1.13}$$

La cual se puede escribir como

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K_e] \{d\} \tag{5.1.14}$$

Entonces para obtener  $[K_e]$  se tiene

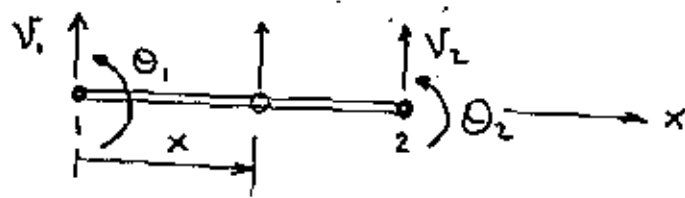
$$[K_e] = \int_0^L [B]^T E [B] A dx = \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} E \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{Bmatrix} A dx \tag{5.1.15}$$

y el resultado es

$$[K_e] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.1.16}$$

que es la matriz que caracteriza a un elemento barra en coordenadas naturales, es decir cuando el eje x coincide con el eje longitudinal del elemento.

## Caso 2 Elemento Viga



Un desplazamiento cortante  $v$  en cualquier punto del elemento localizado en una coordenada  $x$  del mismo se puede aproximar mediante:

$$v_x = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (5.1.17)$$

Segun la teoría de vigas, el desplazamiento angular  $\theta$  de un punto en la viga es igual a la derivada del desplazamiento cortante con respecto a la coordenada longitudinal, entonces:

$$\theta_x = \frac{dv_x}{dx} = \frac{d}{dx} [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (5.1.18)$$

$$\theta_x = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (5.1.19)$$

tomando las condiciones de frontera para el elemento se tiene que:

$$v_x = v_1 \quad @ \quad x=0$$

$$v_x = v_2 \quad @ \quad x=L$$

$$\theta_x = \theta_1 \quad @ \quad x=0$$

$$\theta_x = \theta_2 \quad @ \quad x=L$$

$$(5.1.20)$$

entonces

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = [A] \{a\} \quad (5.1.21)$$

esta ecuación tiene la forma de la ecuación (5.1.7), de (5.1.17) y (5.1.18) se tiene lo siguiente:

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (5.1.22)$$

entonces despejando el vector  $\{a\}$  de (5.1.21) y sustituyéndolo en la última ecuación se obtiene

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ \theta_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [A]^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.1.23)$$

en donde el producto de las matrices en (5.1.23) se define como:

$$[N] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} [A]^{-1} \quad (5.1.23)$$

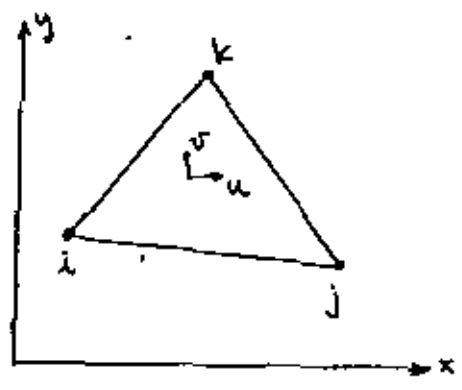
tomando de la ecuación (5.1.23) la derivada con respecto a  $x$  se obtiene la matriz  $[B]$

$$[B] = \frac{d}{dx} [N] \quad (5.1.24)$$

sustituyendo la matriz [B] en la ecuación (5.1.5) con la matriz [E] = [EI] = EI, el resultado es el siguiente despues de desarrollar la integraci3n:

$$[k_e] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (5.1.25)$$

### Caso 3 Elemento Triangular Plano



$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y \\ v &= a_4 + a_5 x + a_6 y \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

expresando la aproximaci3n de campo (5.1.26) en forma matricial se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (5.1.27)$$

Tomando las condiciones de frontera para i=1, j=2 y k=3 se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} ; \quad \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (5.1.28)$$

despejando los vectores  $\{a_1, a_2, a_3\}^T$  y  $\{a_4, a_5, a_6\}^T$  se tiene

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \{u\} \quad (5.1.29)$$

y

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda]^{-1} \{v\} \quad (5.1.30)$$

sustituyendo estas expresiones en la ecuación (5.1.27) debidamente ordenadas se obtiene

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (5.1.31)$$

en donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{2A}{3} + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \\ N_2 &= \frac{2A}{3} + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \\ N_3 &= \frac{2A}{3} + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \end{aligned} \quad (5.1.32)$$

La matriz  $[S]$  se obtiene tomando las parciales de  $[N]$  es decir

$$[S]$$

Para obtener la matriz de rigidez del elemento, solamente es necesario sustituir la expresión de  $[B]$  de la ecuación (5.1.33) en la ecuación (5.1.5), pero la matriz de propiedades de material depende del caso que se trate, en el caso de esfuerzo plano se tiene:

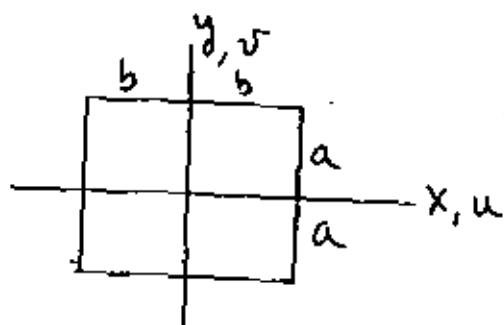
$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1.34)$$

en el caso de deformación plana se tiene:

$$[E] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu/(1-\nu) & 0 \\ \nu/(1-\nu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (5.1.35)$$

La matriz final se puede obtener de las ecuaciones (5.1.5), (5.1.33) y según sea el caso de ecuaciones (5.1.34) y/o (5.1.35).

#### Caso 4 Elemento cuadrilátero plano



$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\ v &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Las ecuaciones (5.1.36) representan la aproximación de desplazamiento a través de un polinomio. Desarrollando los mismos pasos que en el caso anterior se obtienen las siguientes matrices:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5.1.37)$$

en donde

$$N_1 = \frac{(b-x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_2 = \frac{(b+x)(a-y)}{4ba}$$

$$N_3 = \frac{(b+x)(a+y)}{4ba}$$

$$N_4 = \frac{(b-x)(a+y)}{4ba}$$

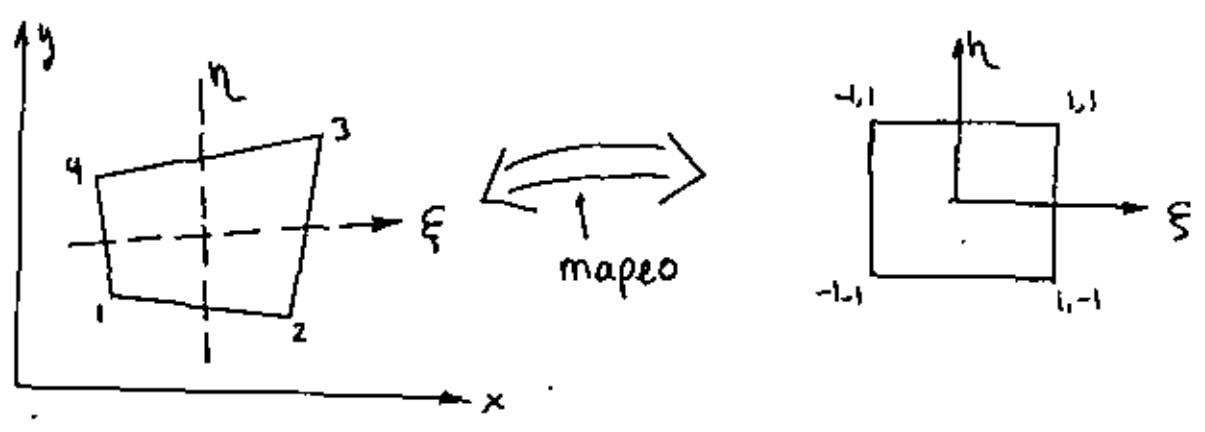
(5.1.38)

La matriz  $[B]$  se obtiene mediante:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5.1.39)$$

la matriz elemental de rigidez se obtiene sustituyendo la matriz  $[B]$  de la ecuación (5.1.39) en la ecuación (5.1.5) y donde la matriz  $[E]$  tiene la misma forma que para el caso del elemento triangular.

# caso 5 Elemento rectangular isoparamétrico



Para este caso, podemos considerar la función de mapeo:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_4 \end{Bmatrix} \quad (5.1.40)$$

en donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (5.1.41)$$

Este "mapeo" relaciona un punto de coordenadas  $(x, y)$  en el elemento irregular con un punto de coordenadas  $(\xi, \eta)$  del elemento regular. El polinomio correspondiente es:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi \eta \\ y &= a_5 + a_6 \xi + a_7 \eta + a_8 \xi \eta \end{aligned} \quad (5.1.42)$$



las condiciones de frontera nodales son:

$$y = y_1, \quad x = x_1 \quad @ \quad \xi = \eta = -1$$

$$y = y_2, \quad x = x_2 \quad @ \quad \xi = 1, \eta = -1$$

$$y = y_3, \quad x = x_3 \quad @ \quad \xi = \eta = 1$$

$$y = y_4, \quad x = x_4 \quad @ \quad \xi = -1, \eta = 1$$

(5.1.43)

El campo de desplazamientos queda:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [N] \{d\} \quad (5.1.44)$$

y las funciones de interpolación son tales que:

$$x = \sum_1^4 N_i x_i \quad y = \sum_1^4 N_i y_i \quad (5.1.45)$$

y por lo tanto los desplazamientos son:

$$u = \sum_1^4 N_i u_i \quad v_i = \sum_1^4 N_i v_i \quad (5.1.46)$$

Usando la regla de la cadena para la derivación en dos sistemas de coordenadas se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} ( \cdot )_{,\xi} \\ ( \cdot )_{,\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} ( \cdot )_{,x} \\ ( \cdot )_{,y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} ( \cdot )_{,x} \\ ( \cdot )_{,y} \end{Bmatrix} \quad (5.1.47)$$

entonces para este caso se tiene que el jacobiano queda

$$[J] = \begin{bmatrix} N_{1,\xi} & N_{2,\xi} & N_{3,\xi} & N_{4,\xi} \\ N_{1,\eta} & N_{2,\eta} & N_{3,\eta} & N_{4,\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (5.1.48)$$

definimos  $[J^*] = [J]^T$  entonces usando la ecuación (5.1.47)

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_s \\ u_n \\ v_s \\ v_n \end{Bmatrix} \quad (5.1.49)$$

de la definición de deformaciones en el plano se tiene que

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ v_{,x} \\ v_{,y} \end{Bmatrix} \quad (5.1.50)$$

de las expresiones (5.1.45) y (5.1.46)

$$\begin{Bmatrix} u_s \\ u_n \\ v_s \\ v_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,s} & 0 \\ N_{i,n} & 0 \\ 0 & N_{i,s} \\ 0 & N_{i,n} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}_{i=4} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (5.1.51)$$

combinando las últimas tres ecuaciones y de la ecuación

$$\{E\} = [B] \{d\} \quad (5.1.52)$$

se obtiene que

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & 0 & 0 \\ J_{21}^* & J_{22}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* \\ 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{i,s} & 0 \\ N_{i,n} & 0 \\ 0 & N_{i,s} \\ 0 & N_{i,n} \end{bmatrix}_{i=1} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}_{i=2} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}_{i=3} \begin{bmatrix} \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{bmatrix}_{i=4} \quad (5.1.52)$$

El siguiente paso es integrar el producto  $[B]^T [E] [B]$  en donde  $[E]$  tiene la misma forma que en casos anteriores al integrar se tiene que.

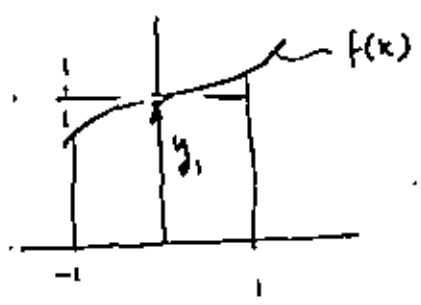
$$I = \int_x \int_y ( \quad ) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ( \quad ) \det [J] d\xi d\eta \quad (5.1.53)$$

pero debido a la complejidad del integrando se requiere de una aproximación mediante una integración numérica la cual se describe brevemente a continuación.

sea la integral

$$I = \int_{-1}^1 y dx \quad (5.1.54)$$

se puede aproximar de acuerdo a las siguientes aproximaciones



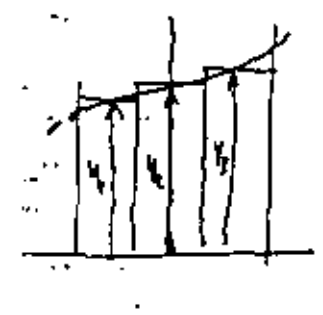
$$I = 2 y_1$$

(a)



$$I = w_1 y_1 + w_2 y_2$$

(b)



$$I = w_1 y_1 + w_2 y_2 + w_3 y_3$$

(c)

Entonces la integral se puede expresar como

$$I = \int_{-1}^1 y dx \approx \sum_i w_i y_i \quad (5.1.54)$$

La integral de la ecuación (5.1.53) se puede aproximar<sup>20</sup> mediante:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_i W_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta \quad (5.1.55)$$

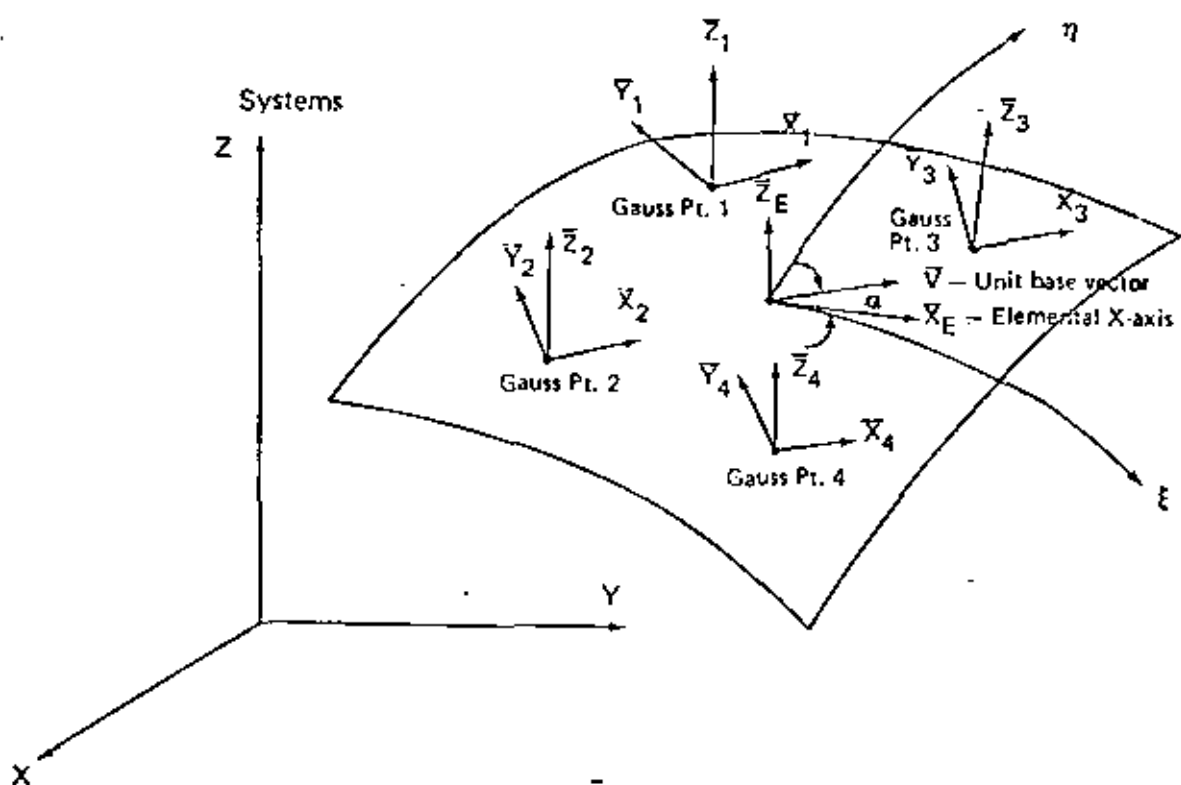
y finalmente

$$I = \sum_i W_i \left[ \sum_j W_j f(\xi_i, \eta_j) \right] = \sum_i \sum_j W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (5.1.56)$$

la localización de los puntos  $i, j$  de integración y sus pesos asociados se dan a través de la cuadratura de Gauss dada en la siguiente tabla para 1, 2 y 3 puntos.

Nº de Puntos	Localización	Peso asociados
1	$x = 0,0$	2
2	$x_1, x_2 = \pm 0,577$	1
3	$x_1, x_3 = \pm 0,754$ $x_2 = 0,0$	$5/9$ $8/9$

Tabla 5.1 : Cuadratura de Gauss para integración con 1, 2 y 3 puntos.

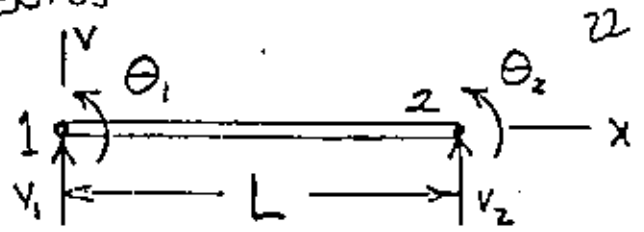


1.  $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$  = unit vectors defining directions of local coordinate axes at Gauss point (i).
2.  $\bar{X}_E$  = elemental X-axis tangent to middle surface at  $\xi = \eta = \zeta = 0.0$  and parallel to local  $\xi$  direction.
3.  $\bar{V}$  = unit base vector defined by rotation angle  $\alpha$  with respect to vector  $\bar{X}_E$ .
4.  $\bar{Z}_i$  is normal to middle surface at Gauss point (i)
5.  $\bar{Y}_i = \bar{V} \times \bar{Z}_i$
6.  $\bar{X}_i = \bar{Y}_i \times \bar{Z}_i$

Figure III.5.3  
Definition of Elemental Gauss Point Coordinate  
Axes for Shell Elements

# 5.2 FAMILIAS DE ELEMENTOS

## Elemento Viga



$$v = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{donde}$$

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$v_{,xx} = [B_1 \quad B_2 \quad B_3 \quad B_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \text{donde}$$

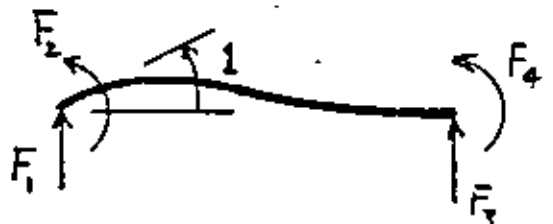
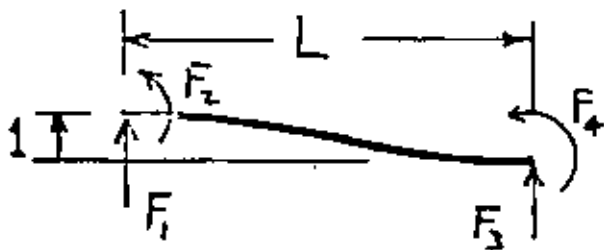
$$B_1 = -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}$$

$$B_2 = -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$B_3 = \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}$$

$$B_4 = -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}$$

$$[k] = \int_0^L [B]^T EI [B] dx = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \\ -12EI/L^3 \\ 6EI/L^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6EI/L^2 \\ 4EI/L \\ -6EI/L^2 \\ 2EI/L \end{Bmatrix}$$

## Matriz de Rigidez de un elemento cuadrilatero

Ref. Fig. 8

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} [N]$$

$$[B] = \frac{1}{4bc} \begin{bmatrix} -(c-y) & 0 & (c-y) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & -(b-x) & 0 & -(b+x) & \dots & \dots \\ -(b-x) & -(c-y) & -(b+x) & (c-y) & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

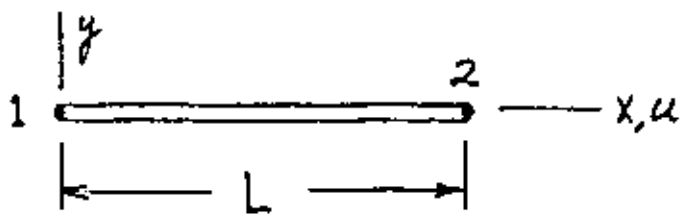
$3 \times 8$

$$[k] = \int_{-c}^c \int_{-b}^b [B]^T [E] [B] t \, dx \, dy \quad (a)$$

$8 \times 8$        $8 \times 3$        $3 \times 3$        $3 \times 8$

En donde:

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

ELEMENTOS ISOPARAMETRICOSBarra en coordenadas rectangulares

Relaciones:  $x = \frac{L}{2}(1+\xi)$        $dx = \frac{L}{2}d\xi = J d\xi$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$$

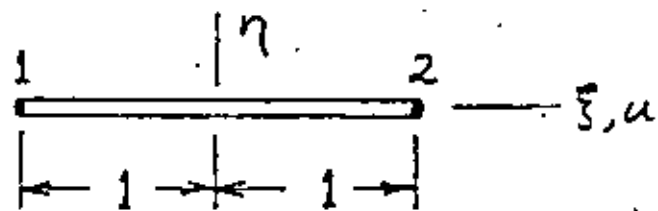
$$u = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$E_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_0^L AE [B]^T [B] dx$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} L$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Barra en coordenadas Isoparam.

$$u = \begin{bmatrix} \frac{1-\xi}{2} & \frac{1+\xi}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$E_x = u_{,\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_{-1}^1 AE [B]^T [B] J d\xi$$

$$[k] = AE \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \frac{L}{2} \cdot 2$$

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



Podemos continuar con este ejemplo un paso mas, este es aumentar un nodo en la barra a la mitad del segmento, entonces:

$$u = \left[ \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1, \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L}, -\frac{4x^2}{L^2} + \frac{4x}{L} \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{Rectangular})$$

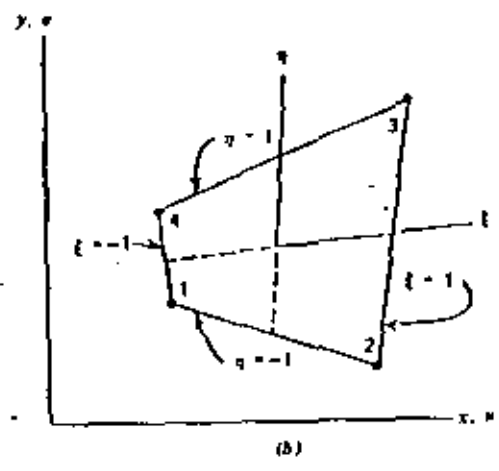
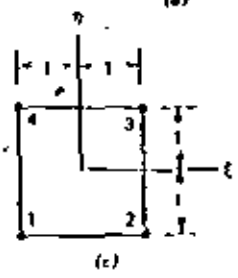
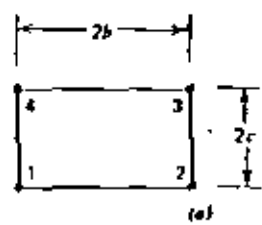
$$u = \left[ \frac{-\xi + \xi^2}{2}, \frac{\xi + \xi^2}{2}, 1 - \xi^2 \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$E_x = \frac{2}{L} \left[ \frac{-1 + 2\xi}{2}, \frac{1 + 2\xi}{2}, -2\xi \right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

[ B ]

Entonces en general [B] es una función de las coordenadas naturales, De la misma manera J dependería de  $\xi$  si el nodo 3 no estuviera colocado en el centro.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ y_4 \end{pmatrix}$$



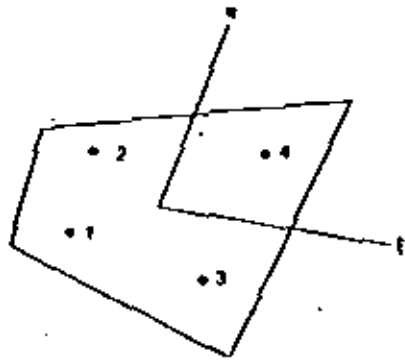
$$x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta$$

$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \quad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}, \quad N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

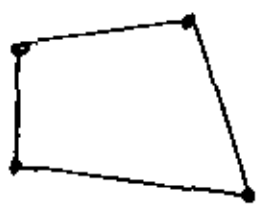


$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \quad (5.3.5)$$

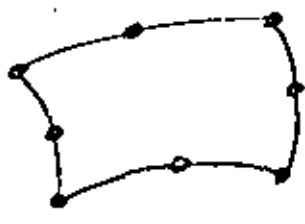
Gauss Quadrature Coefficients

No. of Points	Locations	Associated Weights $W_i$
1	$x_1 = 0.000000000000000000000000$	2.
2	$x_1, x_2 = \pm 0.5773502691896257645091488$	1.
3	$x_1, x_2 = \pm 0.7745966692414833770358531$	$\frac{5}{9}$ (= 0.555...)
	$x_3 = 0.000000000000000000000000$	$\frac{8}{9}$ (= 0.888...)

SOME ELEMENT TYPES



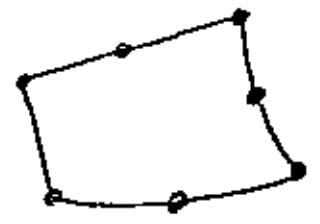
linear



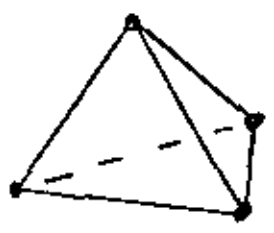
quadratic



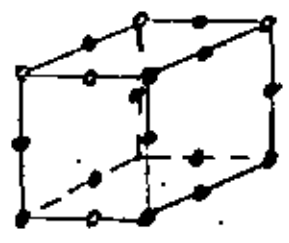
quadratic



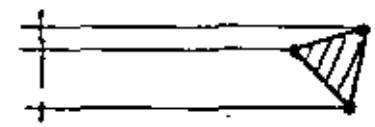
linear-quadratic



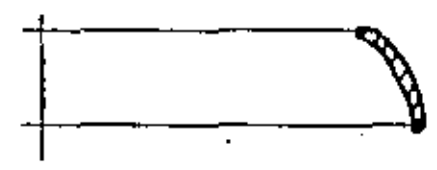
linear



quadratic

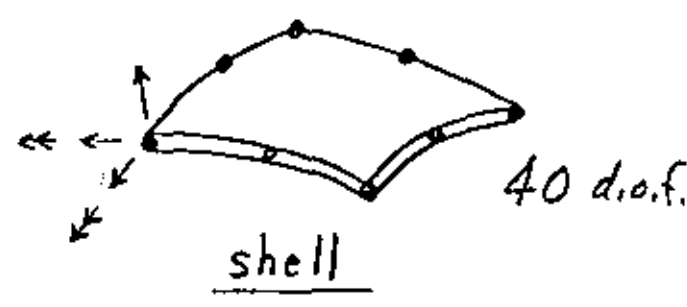
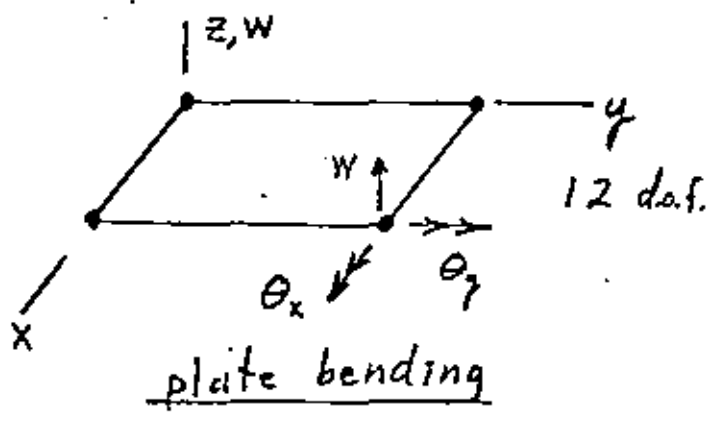


6 d.o.f.

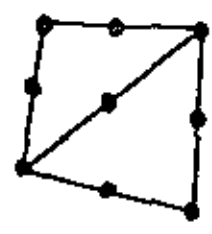
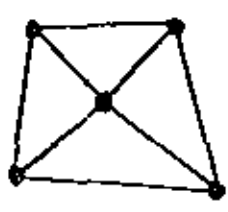
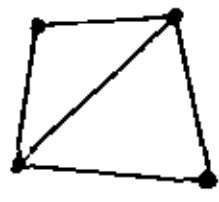


4 d.o.f.

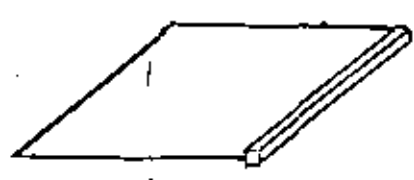
elements for axisymmetric solids & thin shells



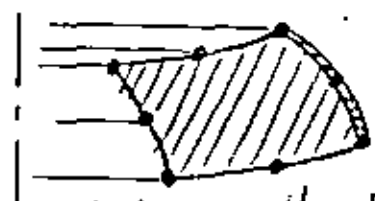
SOME ASSEMBLAGES



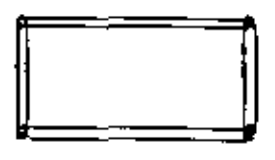
5 tetrahedra combine into a hexahedron



edge beam on a plate



solid propellant in rocket case



four stringers on shear pane

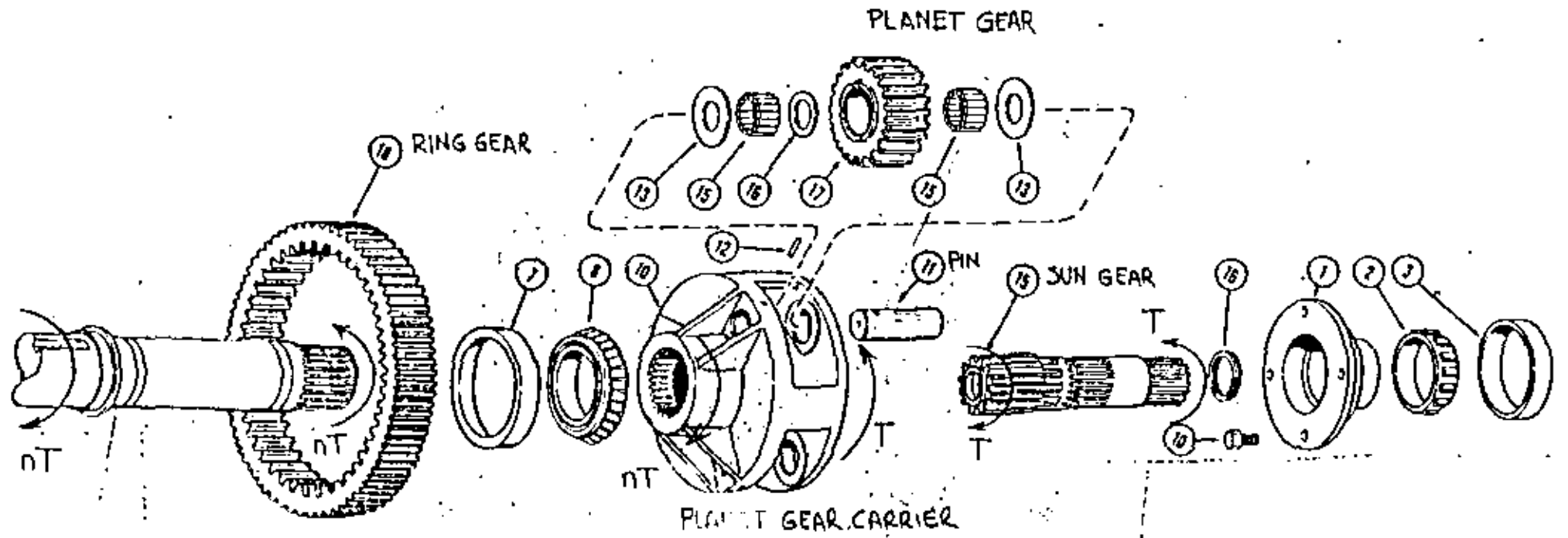
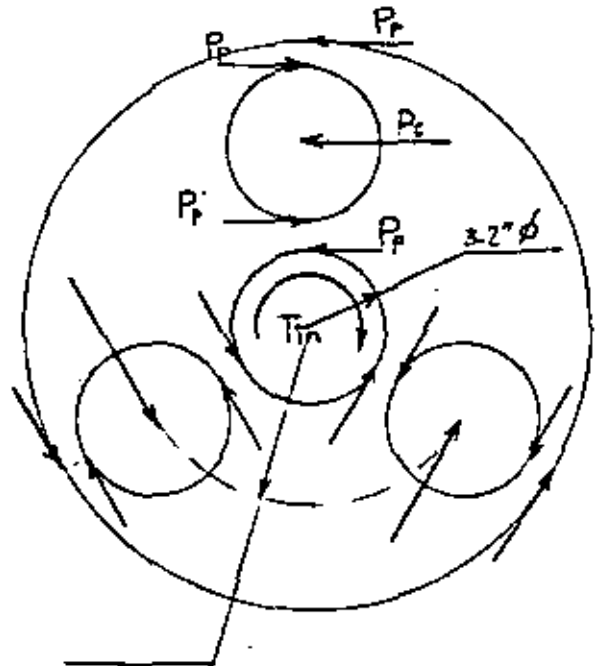
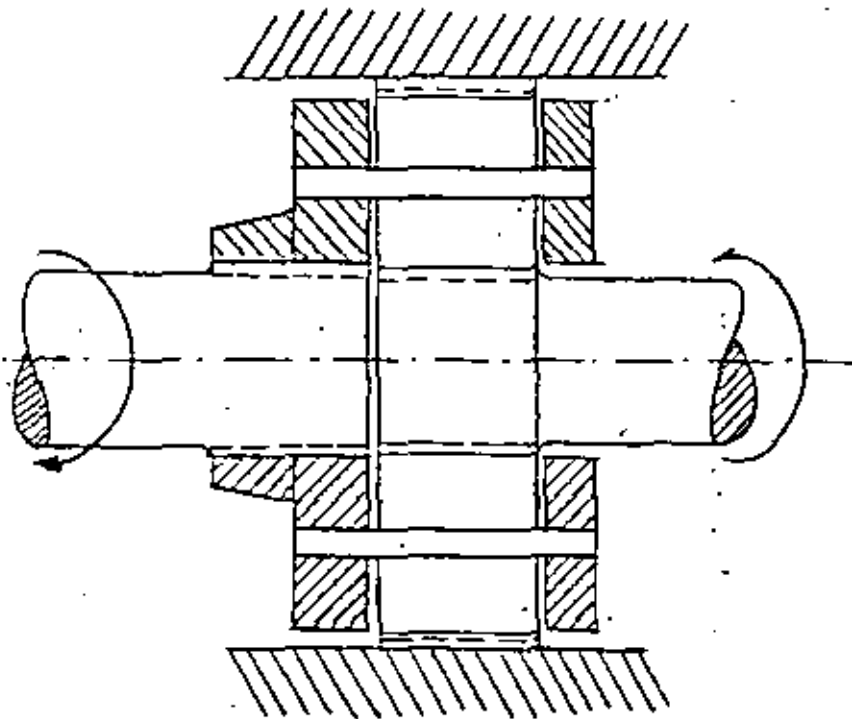


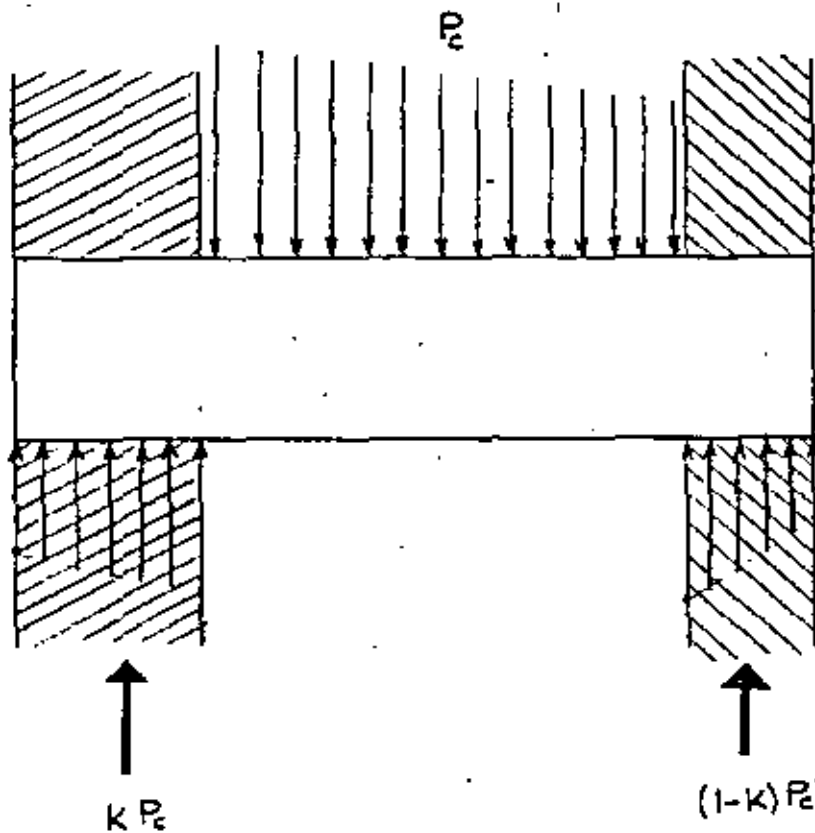
FIG. 1

PLANETARY GEAR TRAIN SYSTEM



$T_{in} = 41\,022 \text{ lb-in}$   
 $F_p = 41022 / 3 \times 1.6 = 8546.25 \text{ lb}$

$P_p$  - Reaction @ planet  
 $P_c$  - Load @ Carrier  
 $F_c = 2F_p = 17\,092.5 \text{ lb}$



**FIG 3**  
FREE BODY DIAGRAM AND REACTIONS

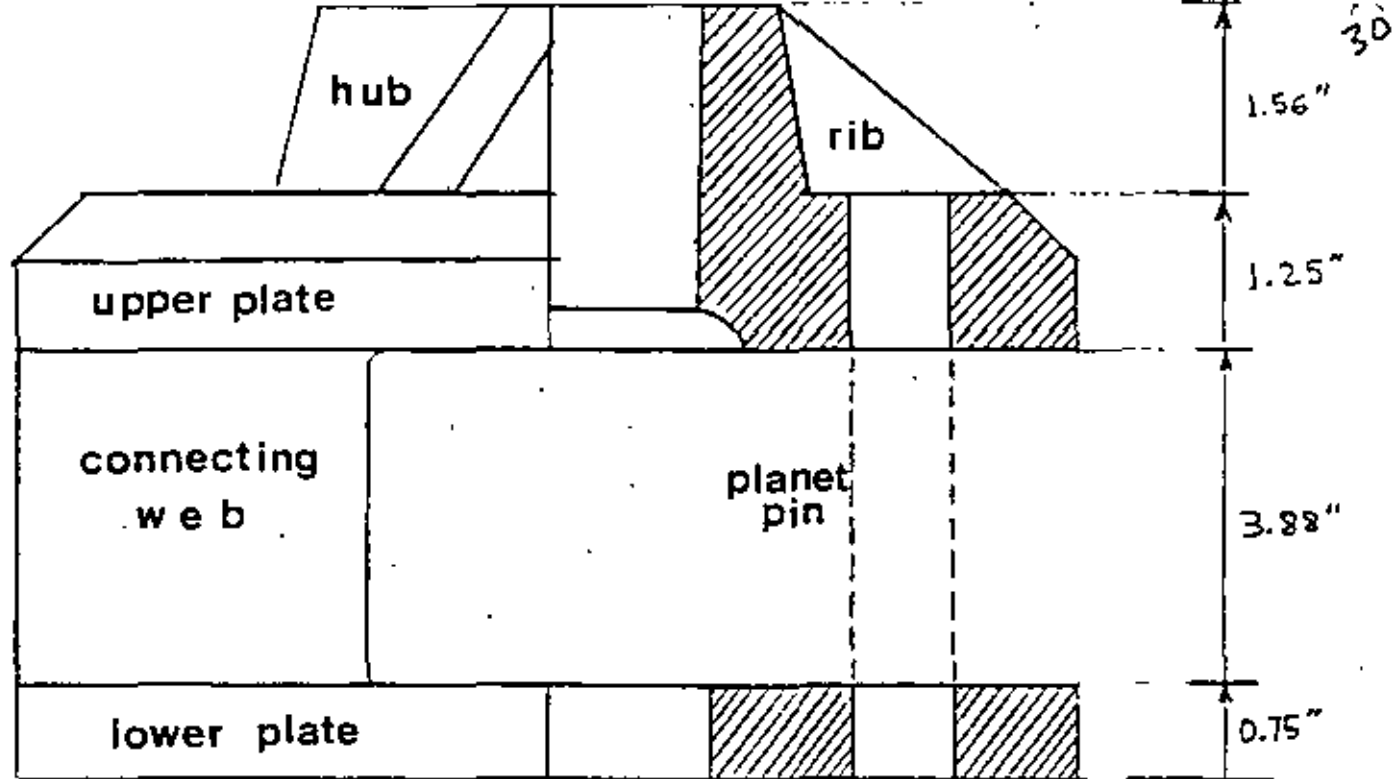


FIG 4

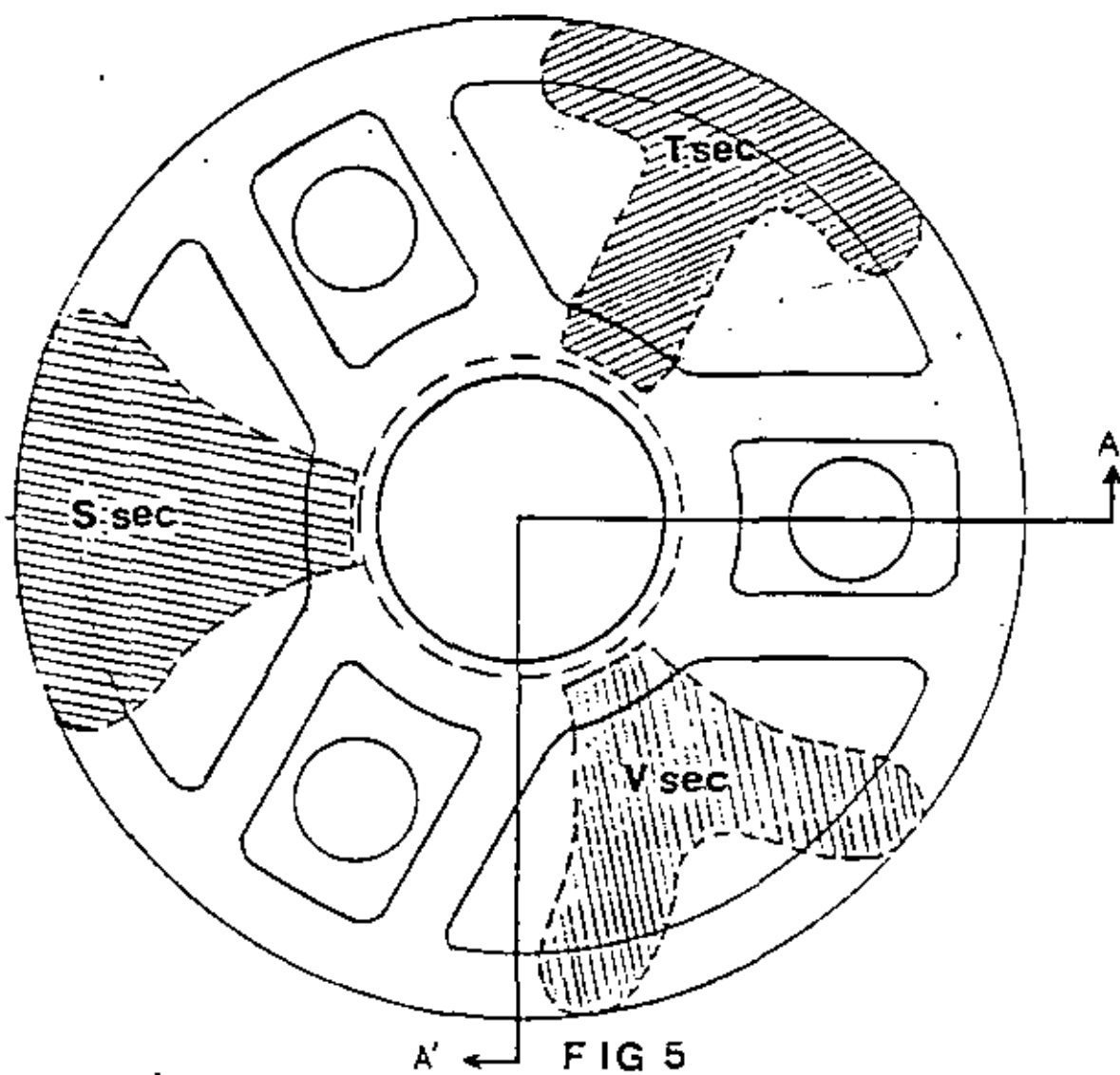
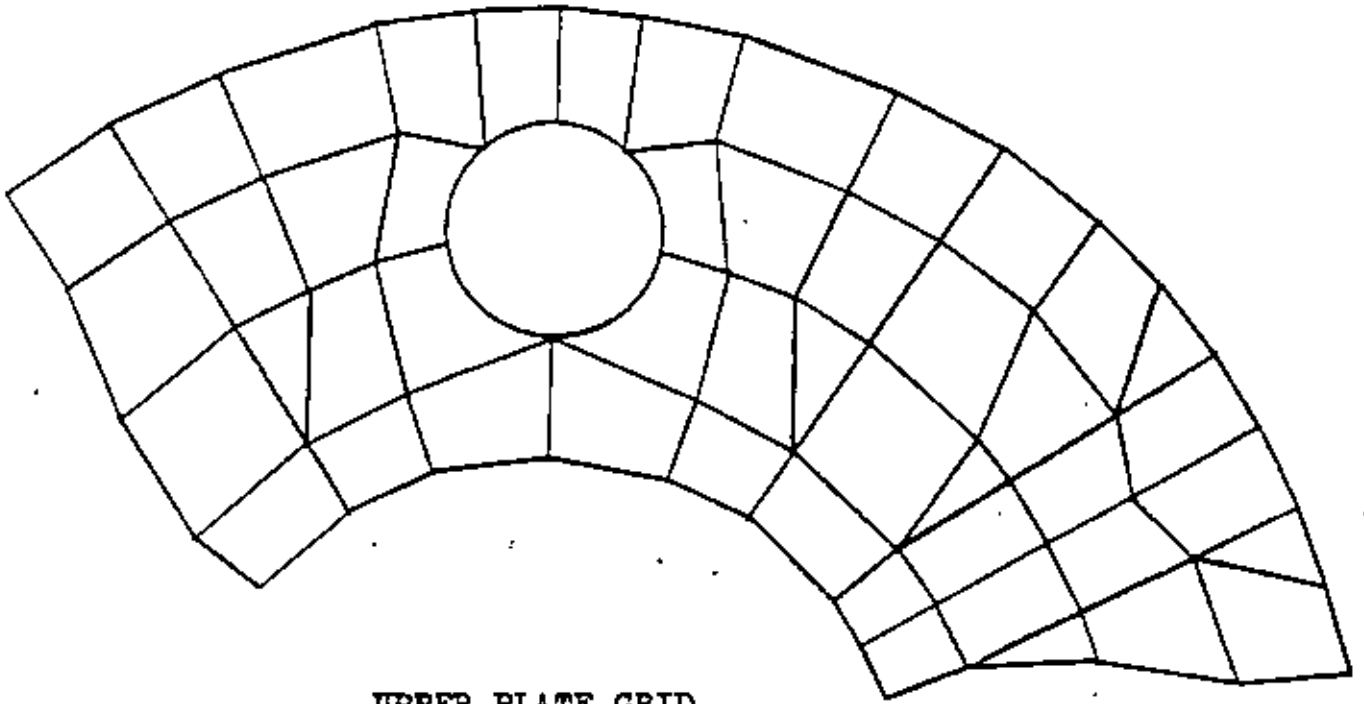
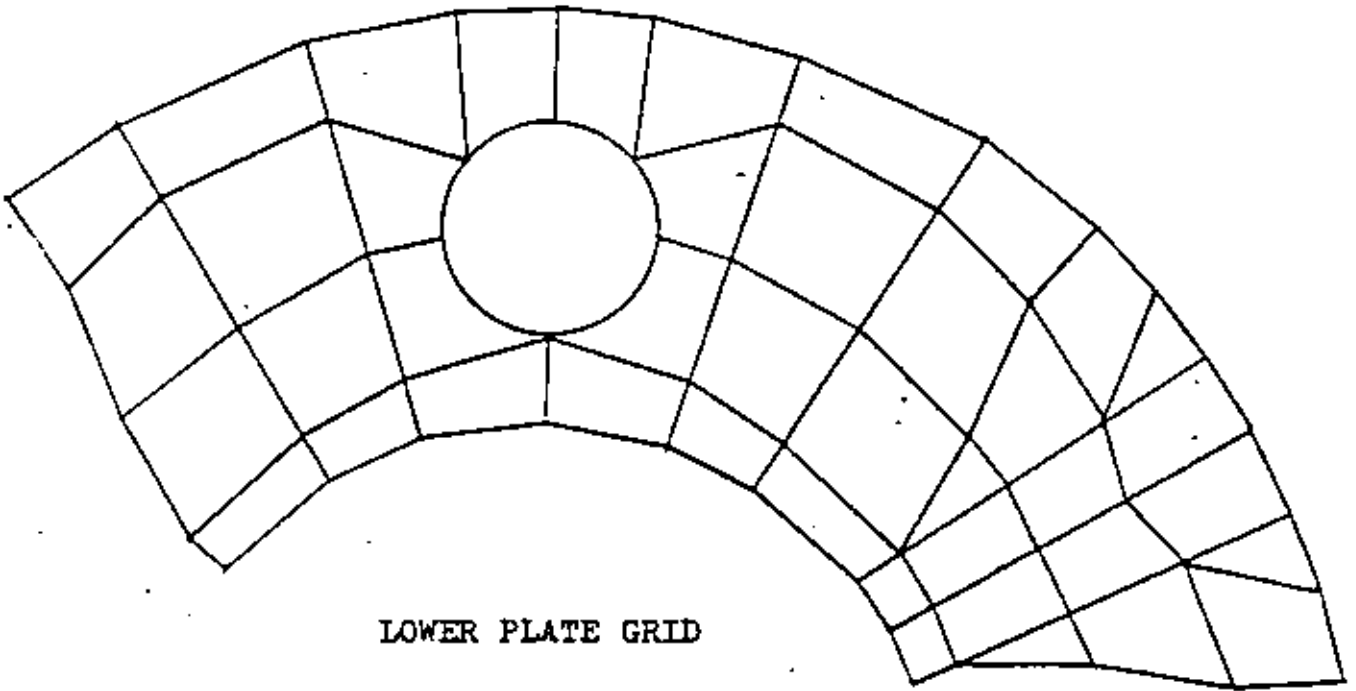


FIG 5

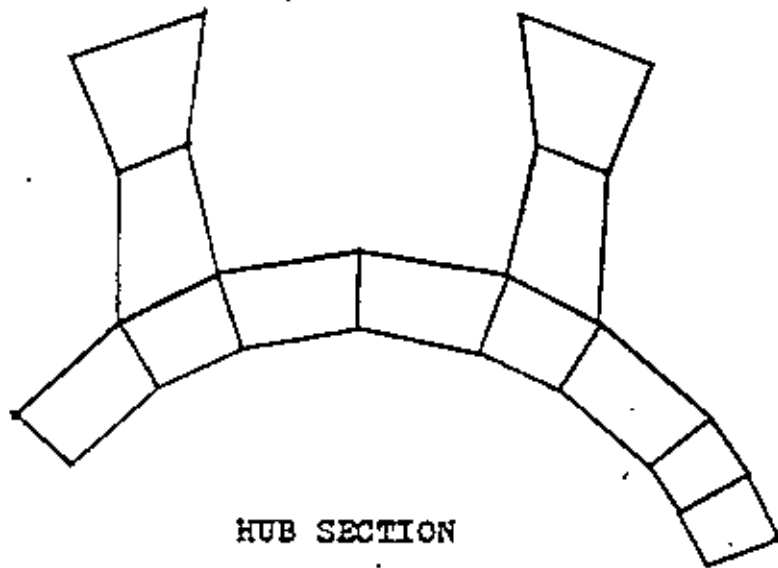


UPPER PLATE GRID

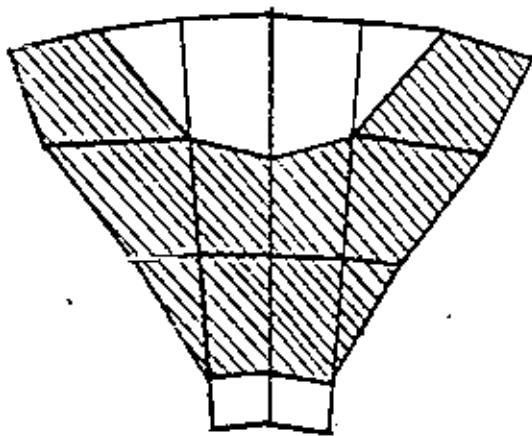


LOWER PLATE GRID

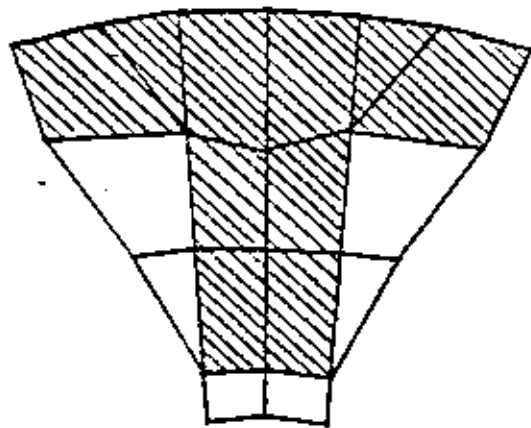
FIG 7 .- GEAR CARRIER FEM MODEL



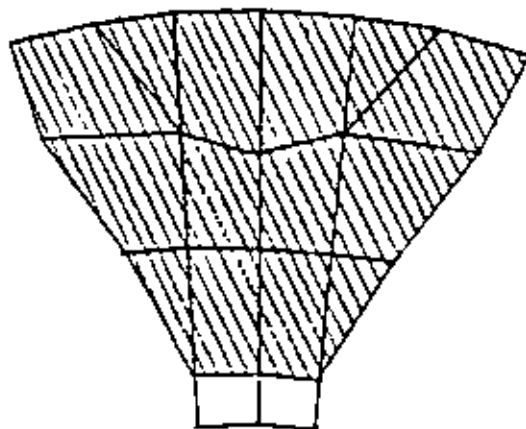
HUB SECTION



"Y"-SECTION  
CONNECTING WEB



"T"- SECTION  
CONNECTING WEB



"S"-SOLID SECTION  
CONNECTING WEB

FIG. 8



COUPLED BOUNDARY DEGREES OF FREEDOM

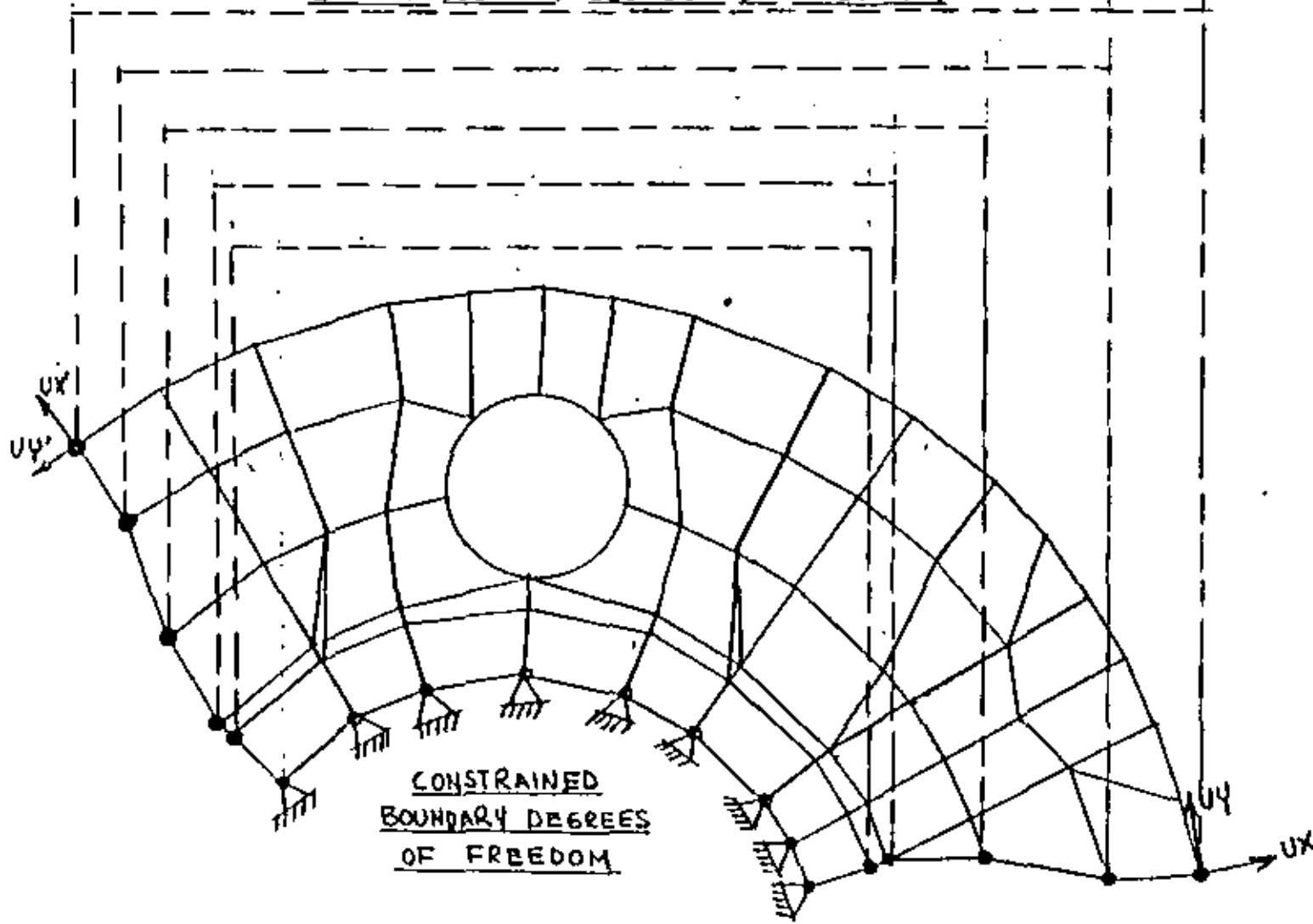
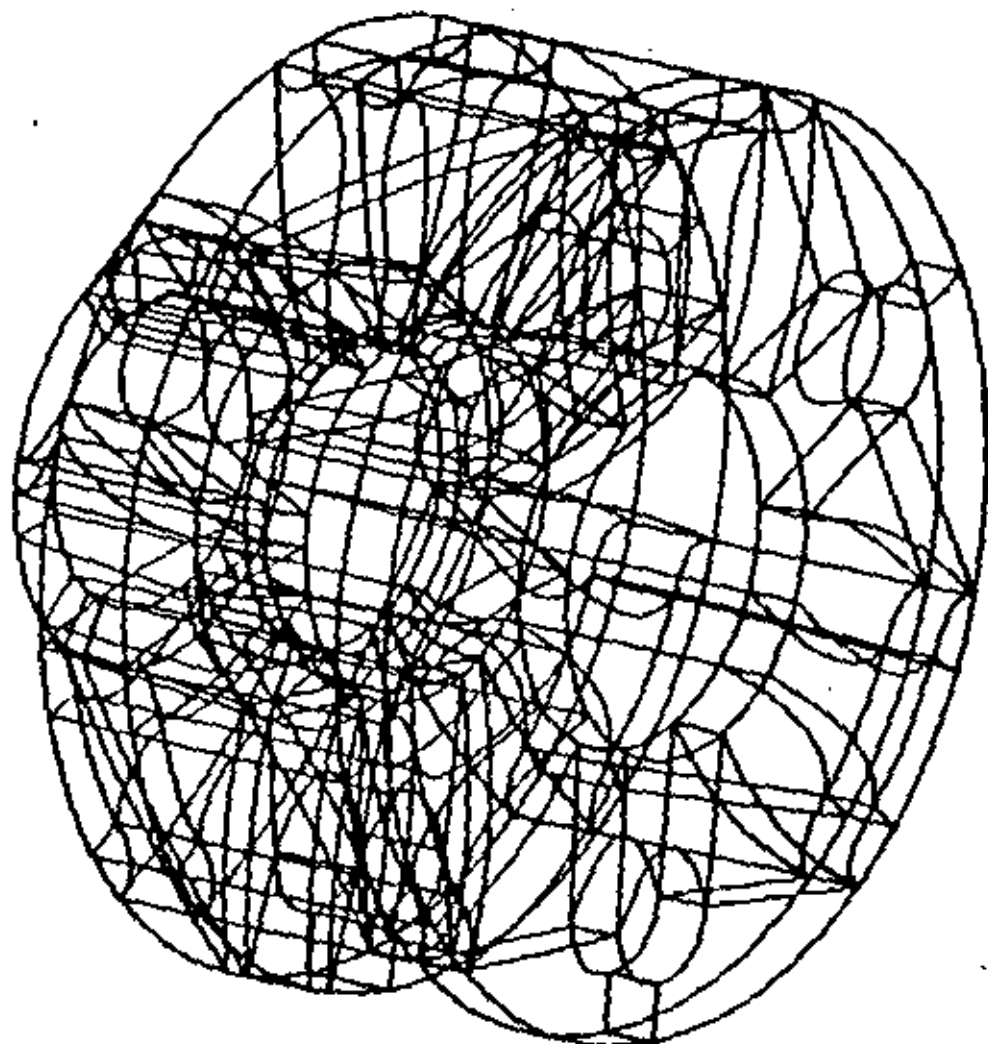


FIG 9

Table 1 - Coupled Node Displacements

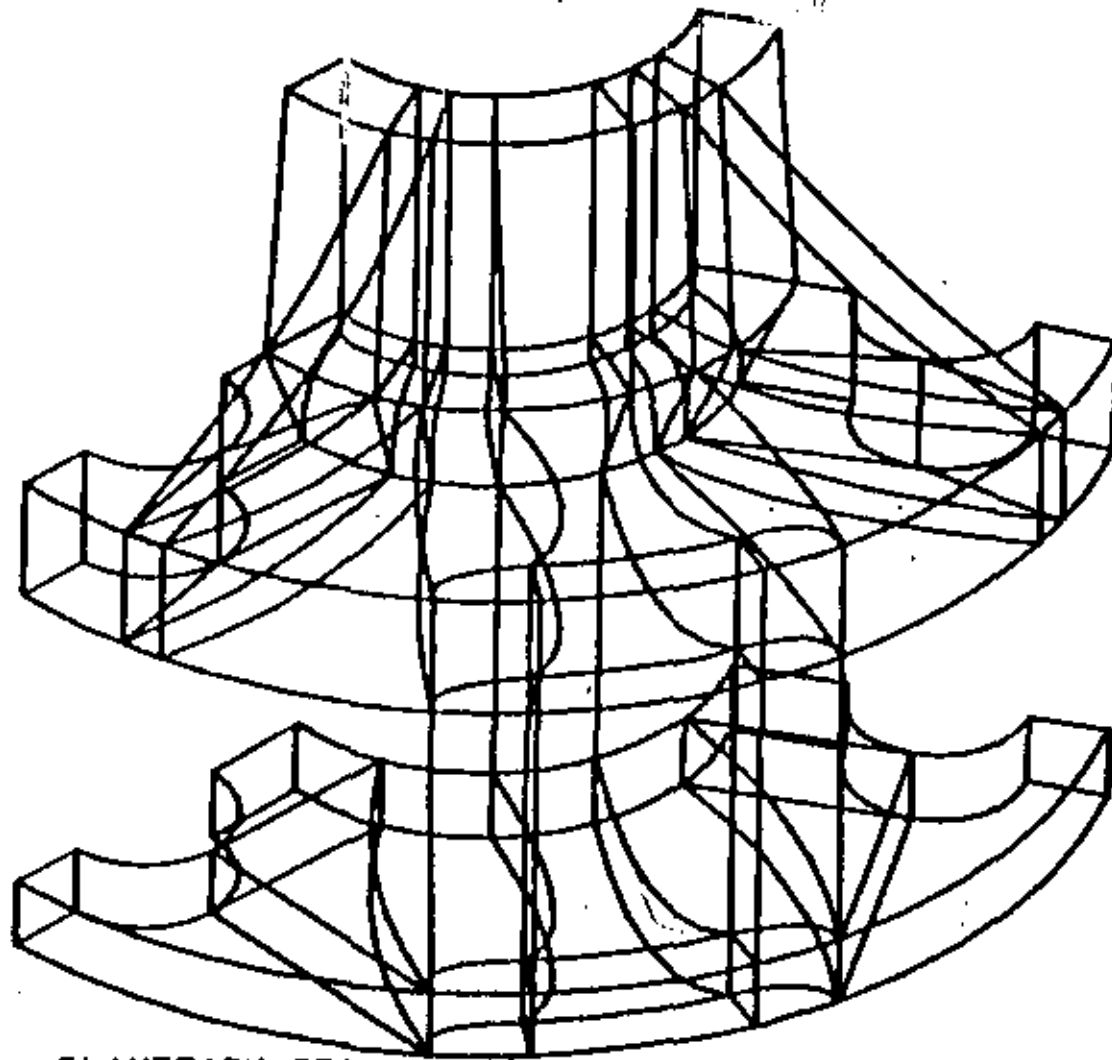
Node 1	Node 2	Directions
1	1001	UX, UY, UZ
27	1027	UX, UY, UZ
40	1040	UX, UY, UZ
55	1055	UX, UY, UZ
70	1070	UX, UY, UZ
85	1085	UX, UY, UZ
102	1002	UX, UY, UZ
119	1119	UX, UY, UZ
215	1215	UX, UY, UZ
651	1651	UX, UY, UZ
664	1664	UX, UY, UZ
667	1667	UX, UY, UZ
709	1709	UX, UY, UZ
728	1728	UX, UY, UZ
747	1747	UX, UY, UZ
764	1764	UX, UY, UZ
781	1781	UX, UY, UZ



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

FIG 10



PLANETARY GEAR CARRIER

PLOT NO. 1

FIG 11

	V section	Tsection	Ssection	Ssec/pin
$U_{61}^*$	0.005308	0.004900	0.004031	0.00372
$U_{63}$	0.005324	0.004914	0.004049	0.00375
$U_{275}$	0.005630	0.005221	0.004260	0.004175
$U_{277}$	0.006351	0.005945	0.004967	0.004149
$U_{417}$	0.001577	0.001614	0.001645	0.002155
$U_{419}$	0.002169	0.002208	0.002235	0.002148
$U_{717}$	0.001788	0.001817	0.001798	0.001773
$U_{719}$	0.002117	0.002145	0.002127	0.001766
$\alpha_1^{**}$	0.001044	0.000929	0.000674	0.000520
$\alpha_2$	0.001077	0.000963	0.000704	0.000515

TABLE 3

$U_{(i)}^*$  - Tangential displacement node i

$\alpha_{(j)}^{**}$  - Slope of pin side j

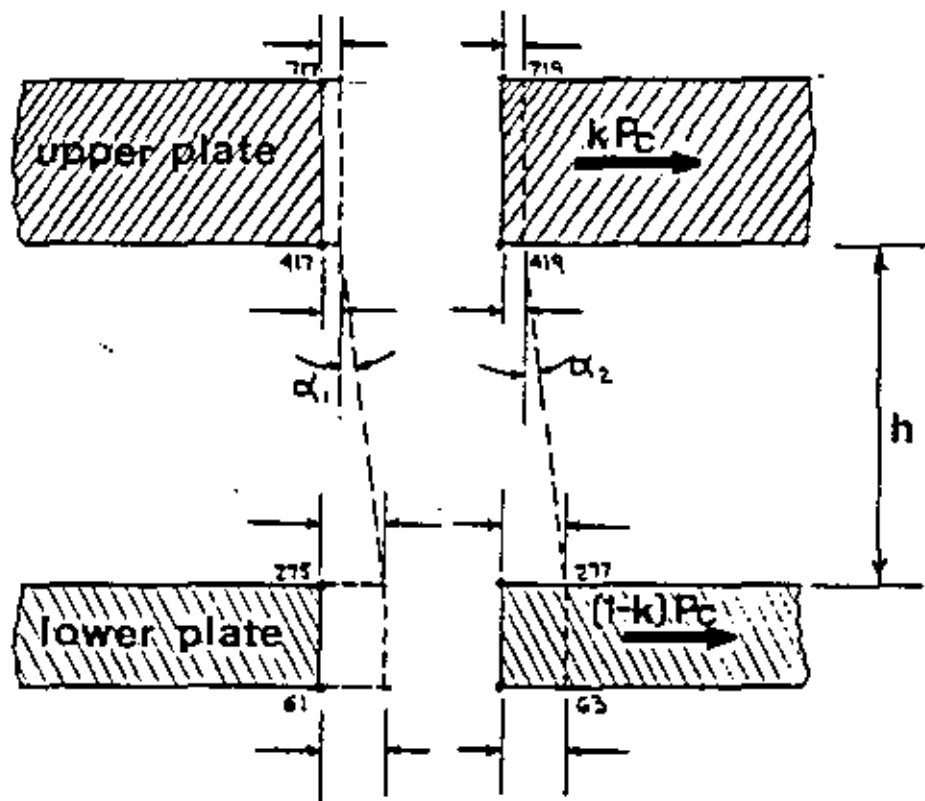
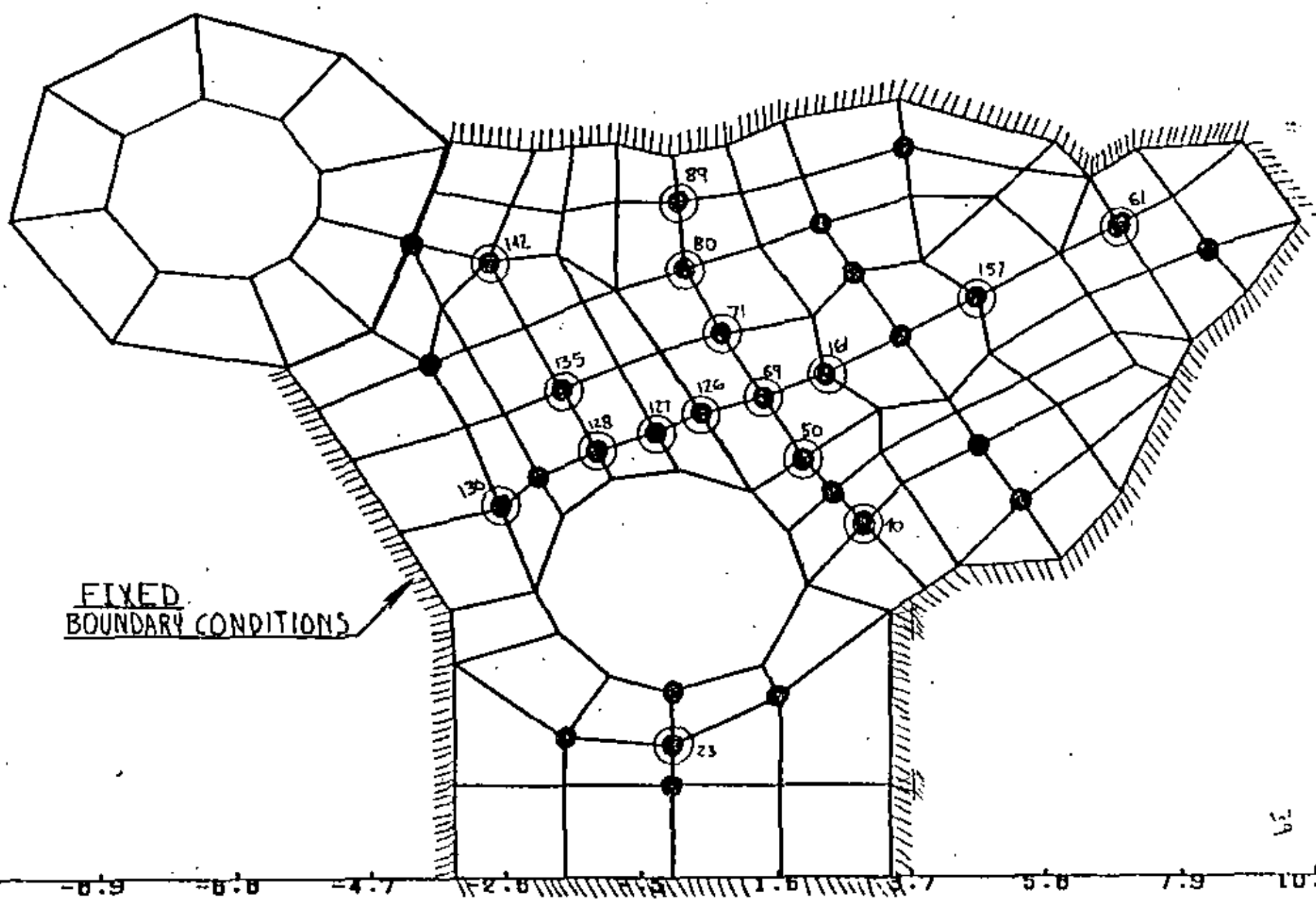


FIG 14

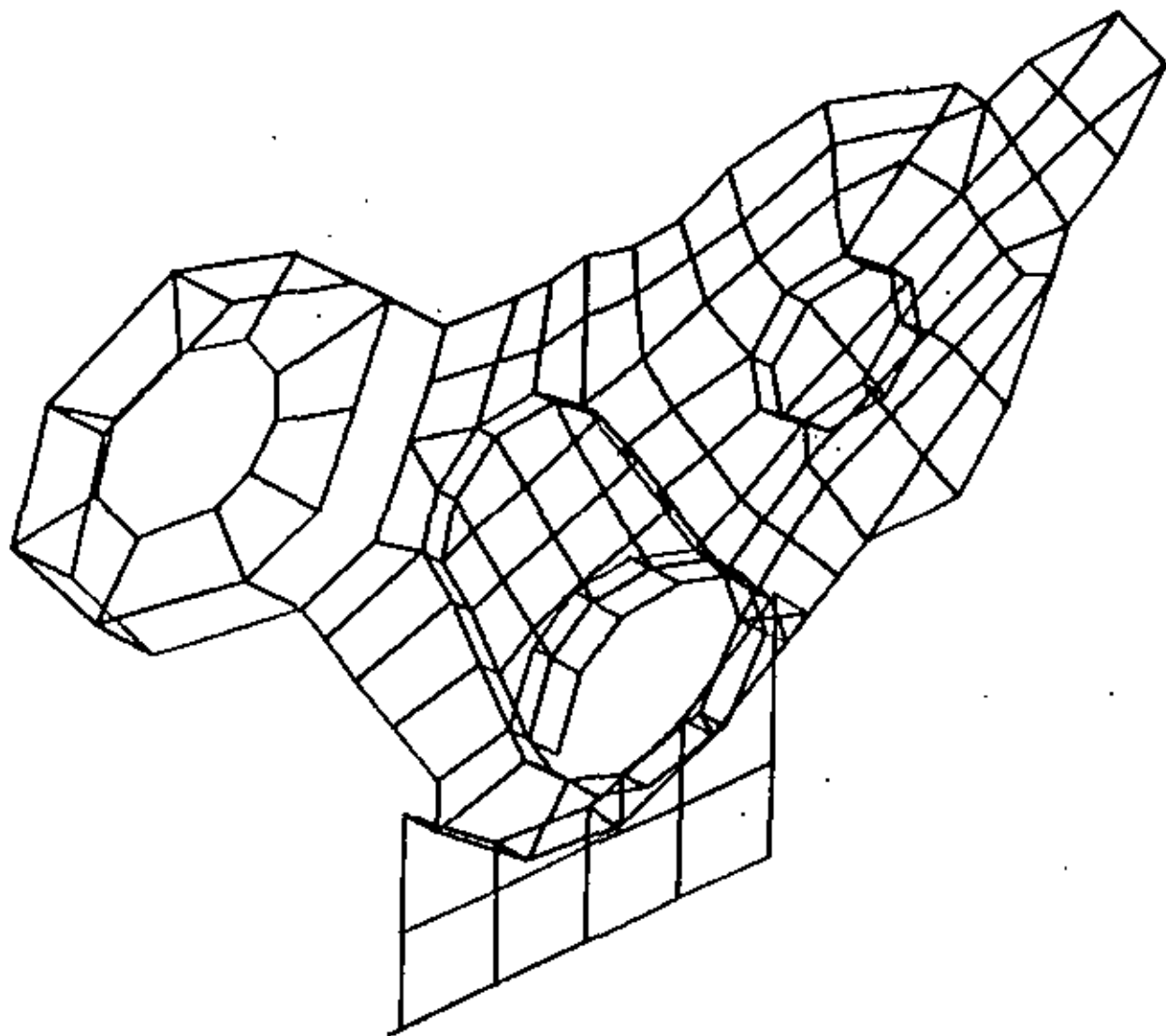
18.9  
16.8  
14.7  
12.6  
10.5  
8.4  
6.3  
4.2  
2.1  
-11.0  
-8.9  
-6.8  
-4.7  
-2.6  
-0.5  
1.6  
3.7  
5.8  
7.9  
10.0

● INDICATES DYNAMIC DEGREES OF FREEDOM INCLUDED FOR THE MODAL AND FREQUENCY RESPONSE ANALYSES.  
○ INDICATES DYNAMIC DEGREES OF FREEDOM INCLUDED ONLY IN THE SECOND MODAL ANALYSIS.



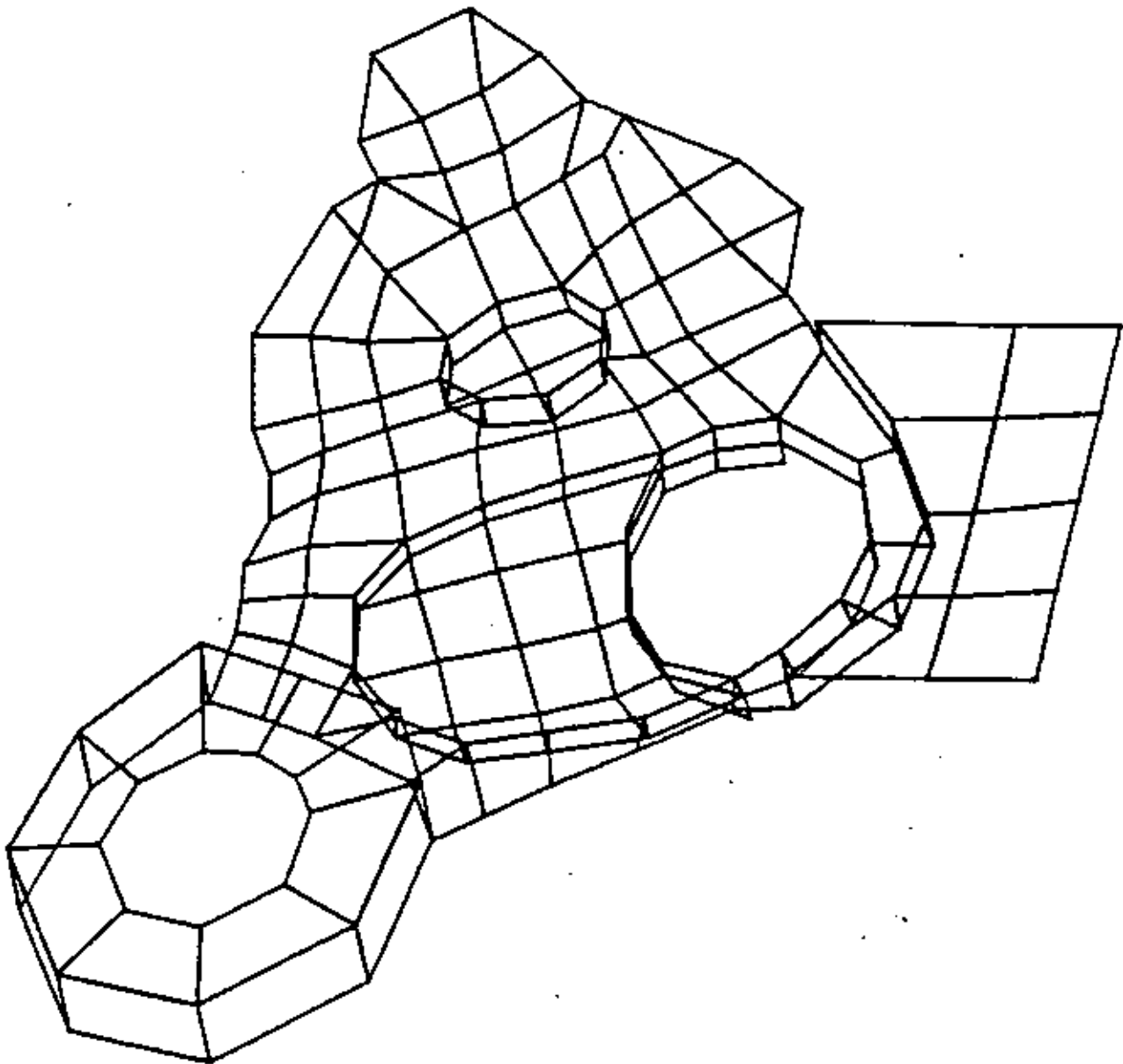
FIXED  
BOUNDARY CONDITIONS

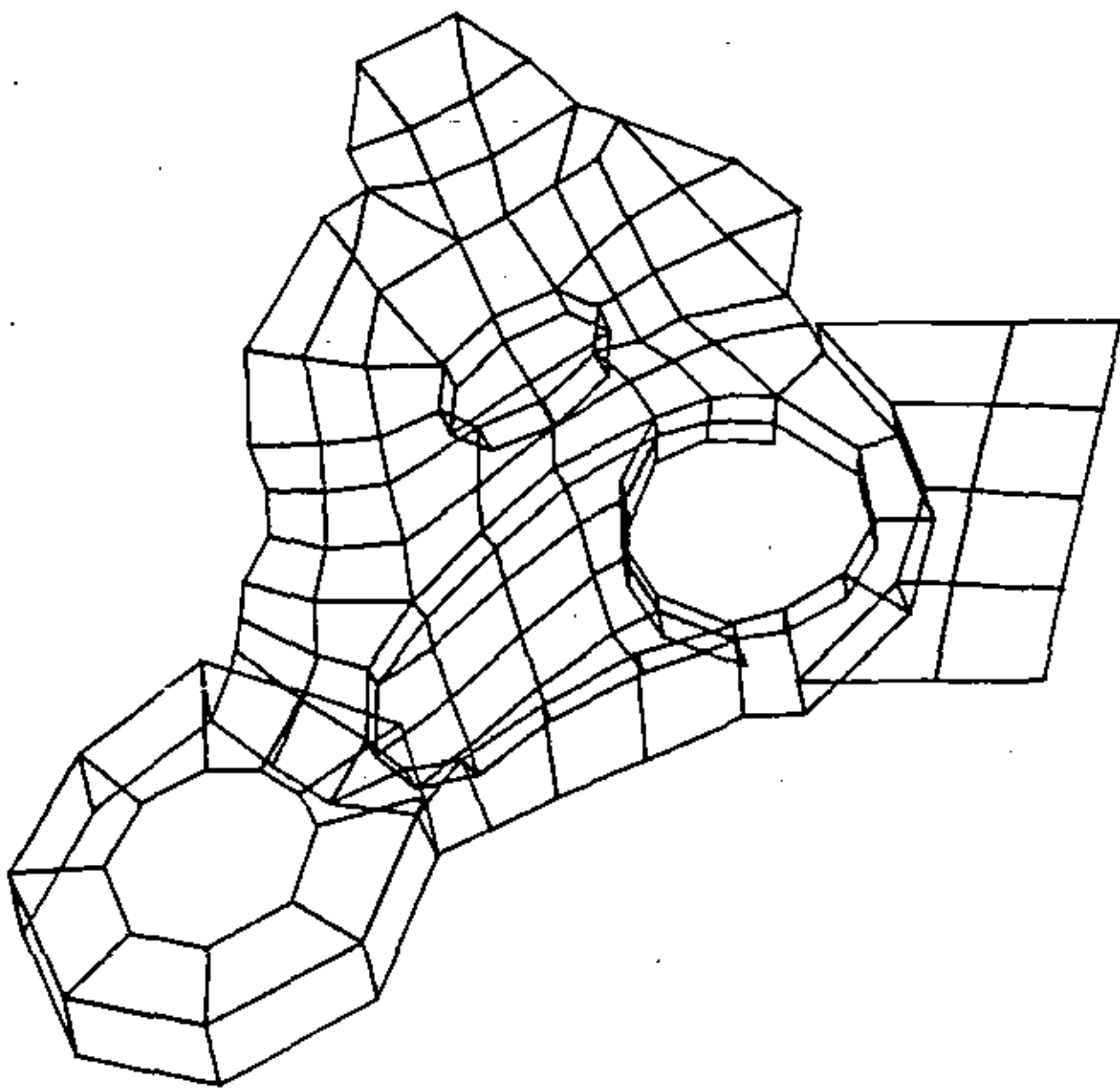
NO BEAR COVER\*



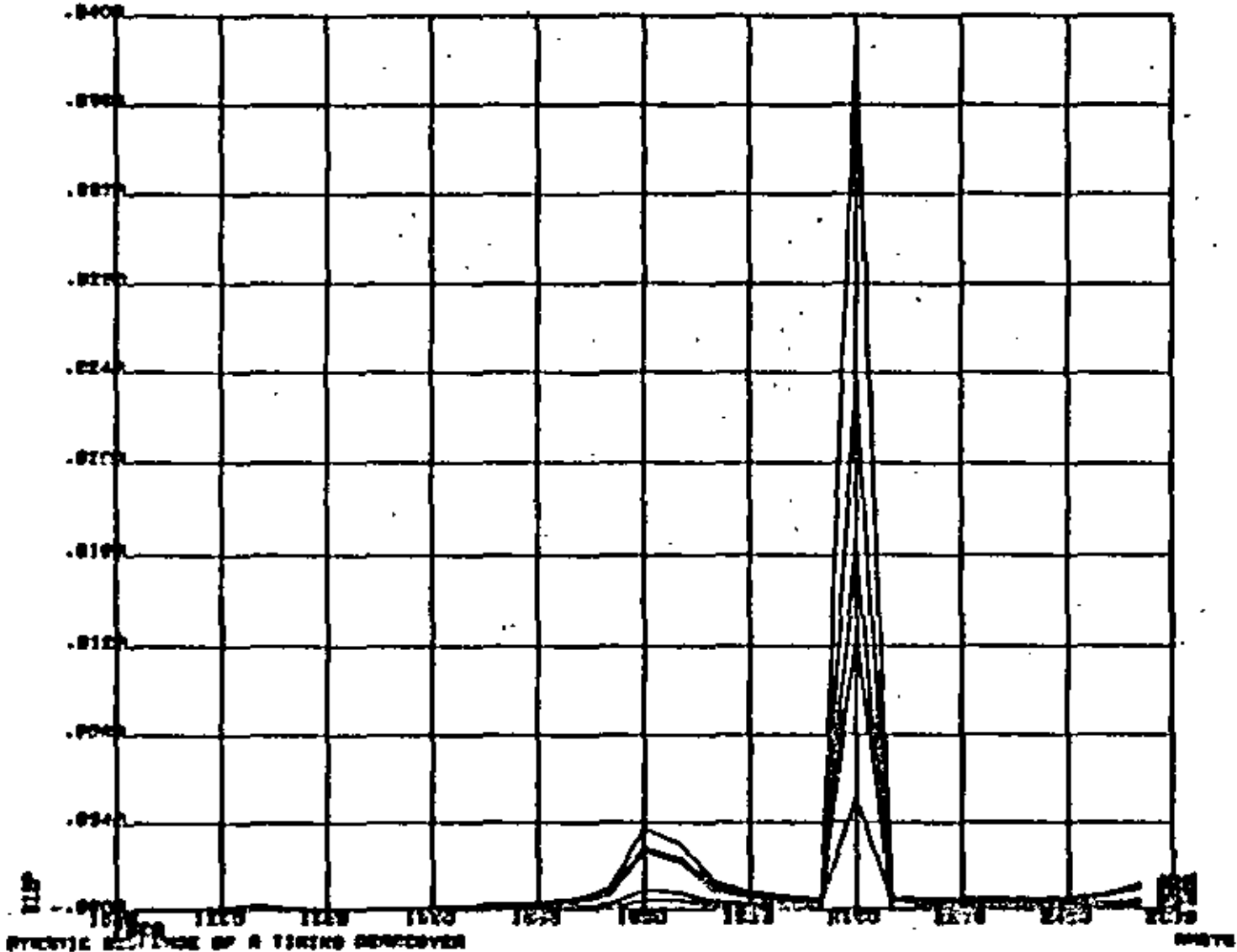
"TIMING GEAR COVER"



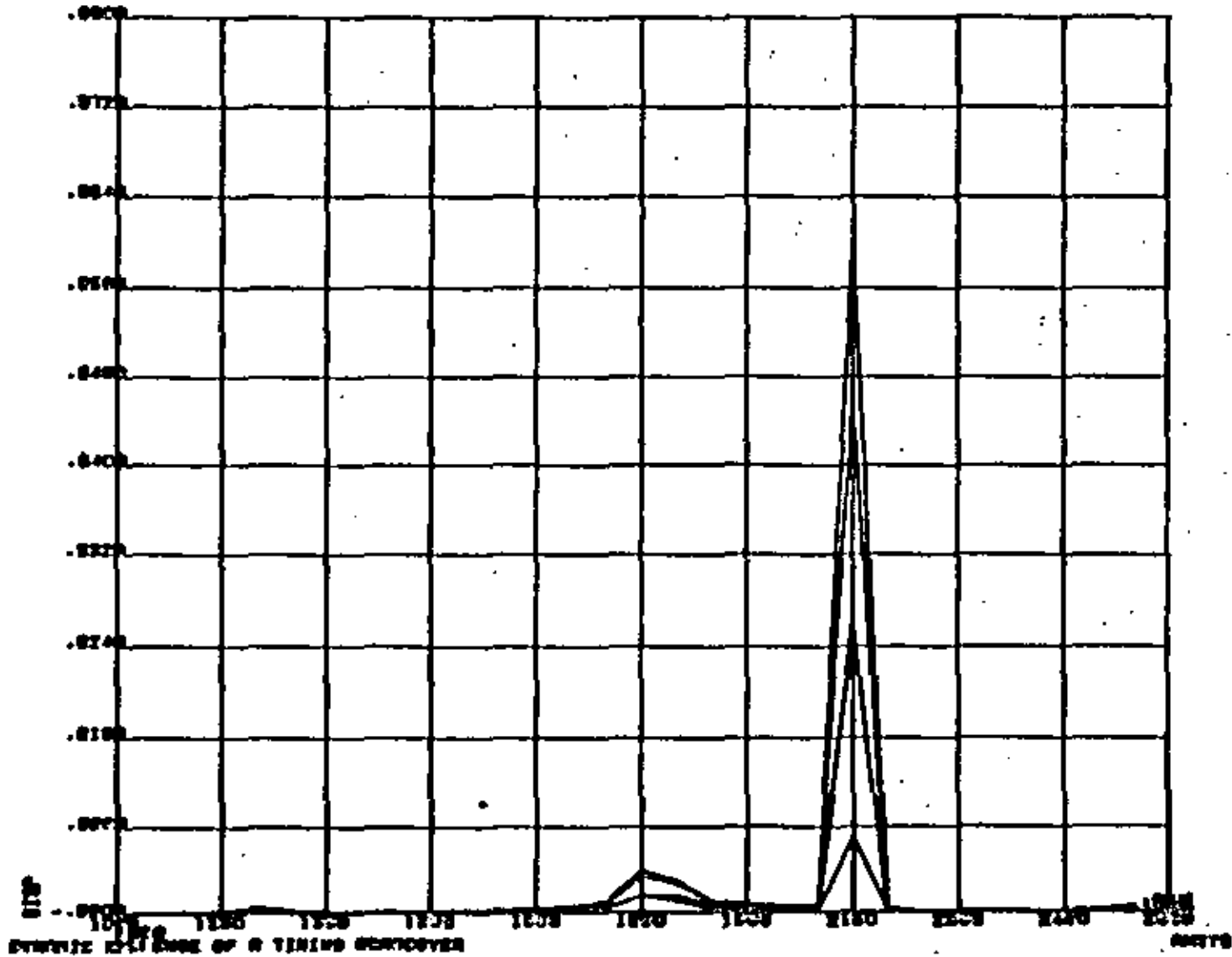




?

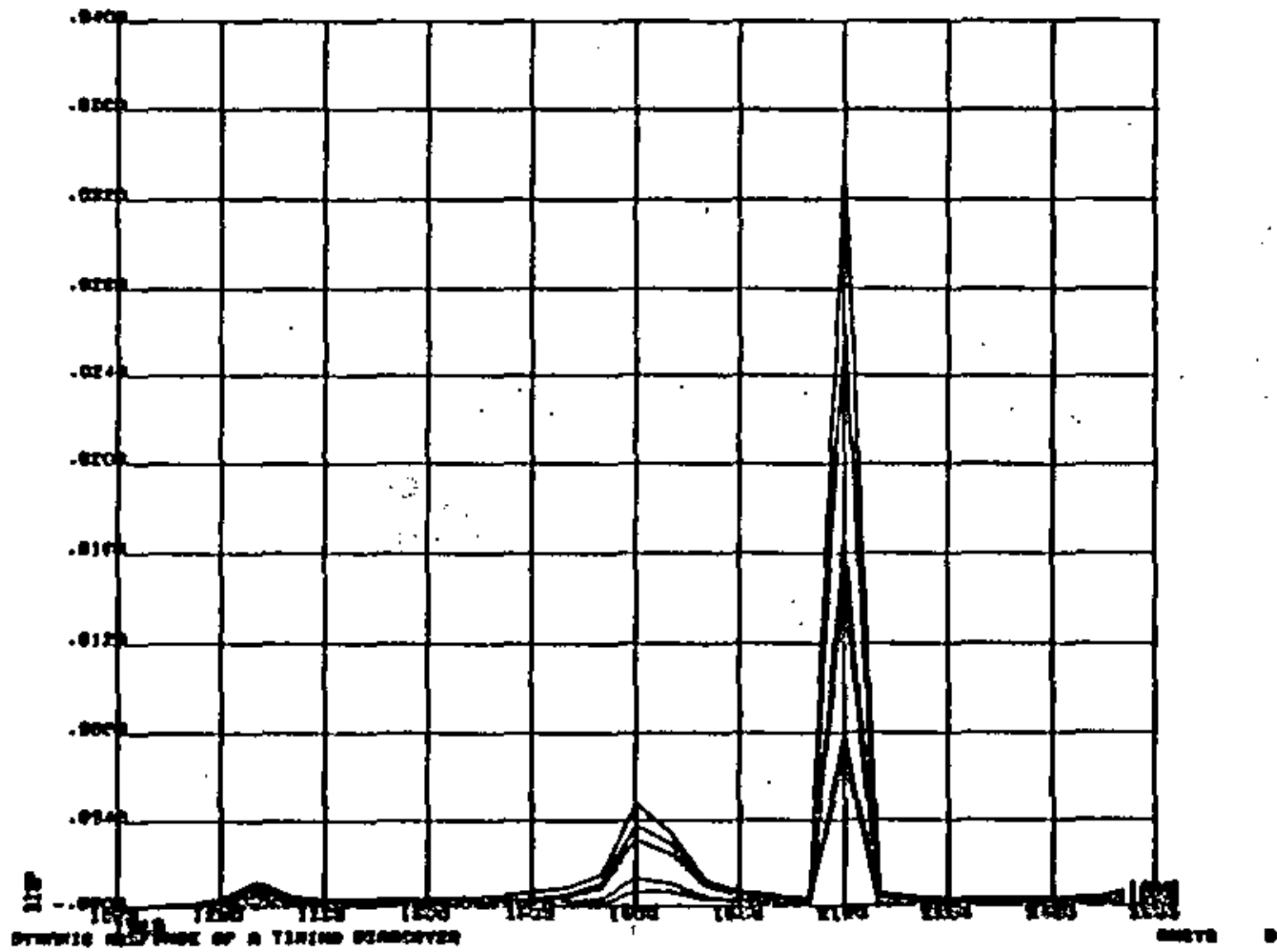


?



11

7



45



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA

METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS

MARZO, 1984.

## VI.1 Estructura General de Paquetes Computacionales

### METODO DE ANALISIS POR ELEMENTOS FINITOS.

#### INTRODUCCION.

El ingeniero en la busca de los valores numéricos adecuados para describir su proceso de diseño, se encontraba generalmente con formulaciones matemáticas difíciles. Por ejemplo, considerando el simple caso de teoría de flexión de placas, bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y que las secciones planas permanecen planas después de la deformación, la ecuación diferencial que gobierna el análisis para un material elástico lineal homogéneo e isotrópico es

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (1)$$

donde  $W$  es la deflexión en el punto  $(x, y)$ ,  $q$  es la intensidad de la carga en el punto  $(x, y)$ , y  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  es la rigidez flexionante de la placa la cual depende del módulo de elasticidad  $E$ , el espesor de la placa  $h$  y la relación de Poisson  $\nu$ . En la Fig. 1 se presenta un elemento diferencial de la placa y las acciones y reacciones sobre él. Combinando la flexión simple en dos direcciones se obtiene para los momentos y cortantes por unidad de longitud de placa lo siguiente:

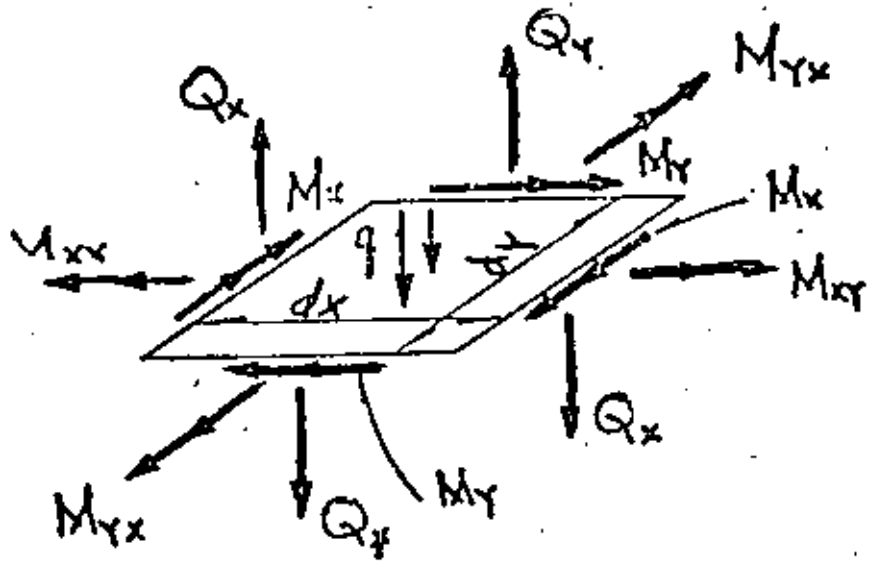
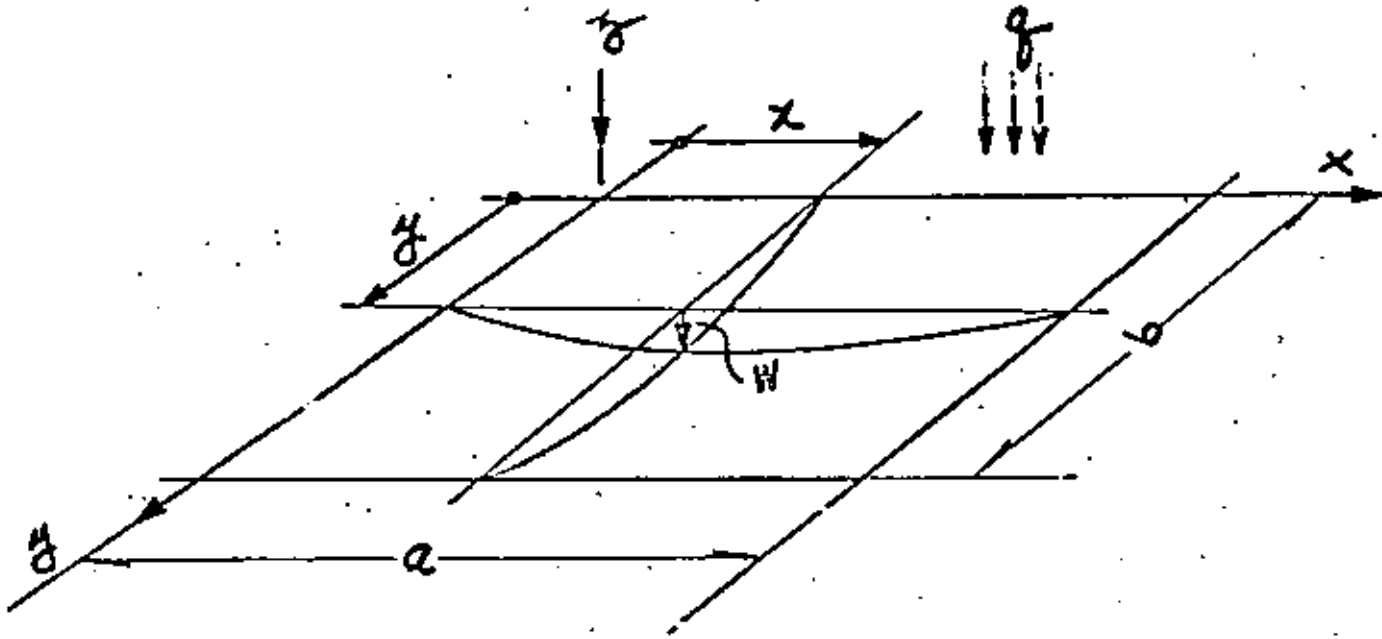


Fig. 1 Superficie media de una placa, y un elemento diferencial  $dx, dy$ .



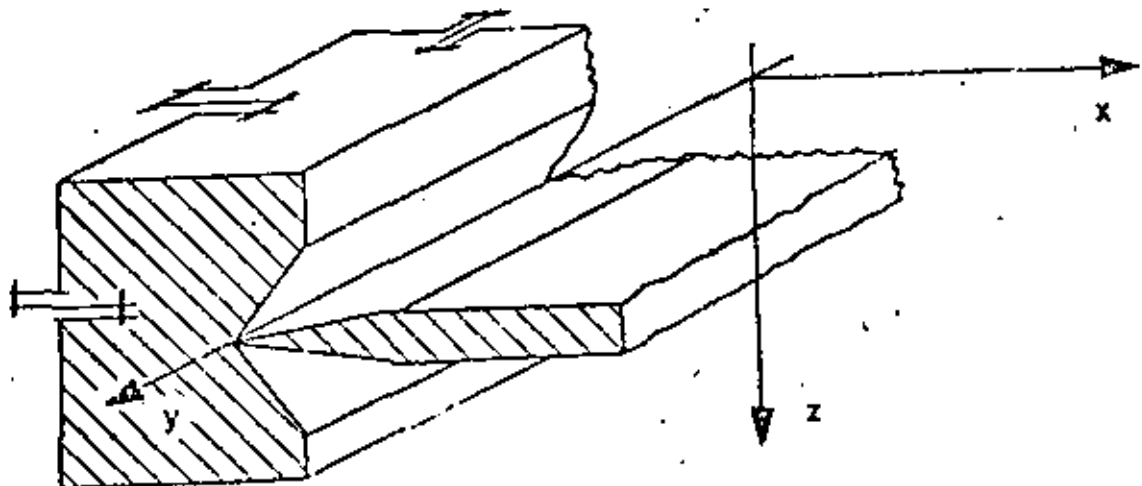
$$\begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= D(1-\nu) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W \\
 Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

donde

$$\nabla^2 W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$$

Para el caso particular de la placa libremente apoyada, y rectangular, -  
 cuyas condiciones en la frontera ( Fig. 2 ) son:

$$\begin{aligned}
 W(0,y) &= 0 \\
 W_{xx}(0,y) + \nu W_{yy}(0,y) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$



Navier en 1820 presentó a la Academia Francesa de Ciencias, la solución representando la carga  $q(x, y)$ , por medio de una serie trigonométrica doble

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

substituye (4) en (1) y considerando las propiedades de ortogonalidad de las series trigonométricas obtiene la solución de la ecuación diferencial bi-armónica (1) como

$$W = \frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \quad (5)$$

en donde el coeficiente  $a_{mn}$  viene expresado por

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} x \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, dx \, dy \quad (6)$$

El procedimiento de Navier consiste en lo siguiente: Conocida la función de carga  $q(x, y)$ , se substituye en (6) y se obtiene el coeficiente  $a_{mn}$  el cual nuevamente se substituye en (5) y se obtiene la deflexión  $W(x, y)$ , y por medio las ecuaciones (2) se obtienen los momentos y cortantes  $\{M\}$  y  $\{Q\}$

Es importante observar que las limitaciones de Navier se refieren a una placa rectangular libremente apoyada y con una función de carga  $q(x, y)$  impar con respecto a  $x$ , y con respecto a  $Y$ , es decir,  $f(x) = -f(-x)$  y

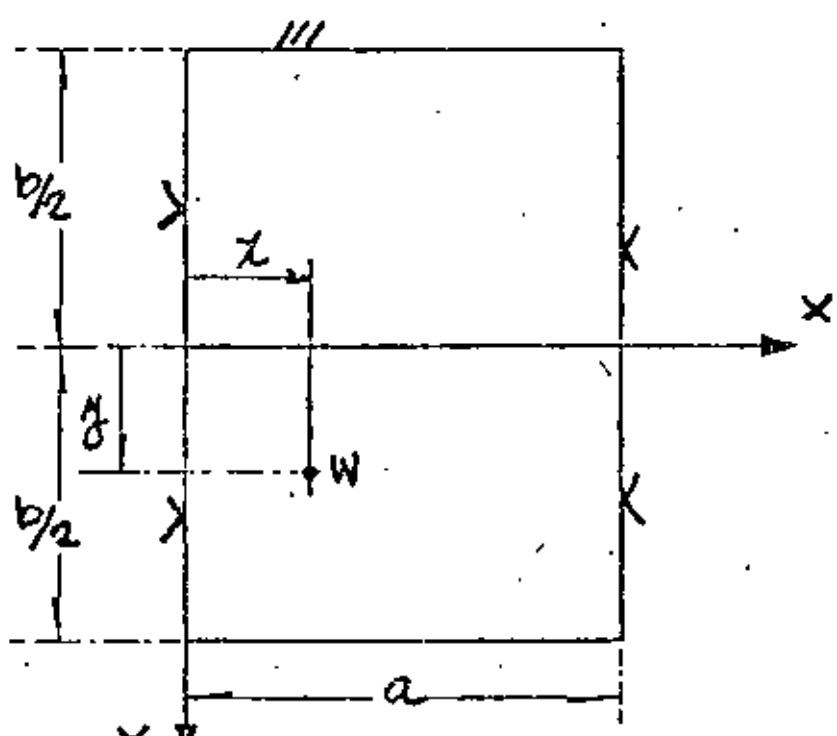
Si la función fuese par, la representación de  $q(x, y)$  sería mediante una serie de cosenos, y si  $q(x, y)$  fuese una función cual

quiera, se representaría mediante una serie trigonométrica doble completa de senos y cosenos, y se tendrían problemas en satisfacer las condiciones en la frontera. Generalmente la convergencia de la serie (5) es lenta, y en algunos casos es necesario considerar más de 500 términos para asegurar la solución correcta.

Posteriormente en 1900 M. Levy cambia de posición los ejes coordenados ( Fig. 3 ) e utiliza una serie trigonométrica simple

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} f_m\left(\frac{y}{b}\right) \cdot \text{sen} \frac{m\pi}{a} x \quad (7)$$

El procedimiento de Levy consiste en substituir (7) en (1) obteniendo una ecuación diferencial lineal de cuarto orden en  $f_m(y)$  con coeficientes constantes no homogénea con la cual ya es posible satisfacer diferentes condiciones en la frontera  $y = \pm \frac{b}{2}$  pero continua limitado a una placa rectangular libremente apoyada en las fronteras  $x = 0$  y  $x = a$ .



Las limitaciones de análisis tan restringidas, como los ejemplos anteriores, aparecían en innumerables problemas de ingeniería, lo cual originó el principio de los métodos numéricos, el cual presenta dos etapas de desarrollo. Antes de la época de las computadoras, donde representa un importante papel el Prof. Southwell del Colegio Imperial de Inglaterra, desarrollando y aplicando los métodos numéricos de relajación y diferencias finitas, superando las limitaciones restringidas de los métodos analíticos de solución.

Durante la era de las computadoras digitales, el método de análisis por elementos finitos ha obtenido gran popularidad, puesto que en este procedimiento como resultado de la discretización del medio por analizar, se obtienen sistemas grandes de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas, lo cual actualmente su solución no representa ningún problema. Por ejemplo, en el caso de análisis elástico lineal de placas, podemos tener cualquier condición de apoyo, de geometría y de cargas, prácticamente se eliminan la mayoría de las restricciones de las soluciones analíticas mencionadas, el problema más importante es verificar adecuadamente su convergencia.

El primer trabajo referente al método se debe a Hrenikoff Ref. 1 publicado en 1941, y el segundo a McHenry publicado en 1943 en ambos trabajos ( Fig. 4 ) se verifican soluciones de problemas de elasticidad bidimensional en estado plano de esfuerzos; discretizando el medio y buscando la analogía con la solución estructural.

Posteriormente en 1949 Newmark, en su libro de Métodos Numéricos Ref. 3 , presenta los métodos de Hrenikoff y McHenry. Sin embargo, el

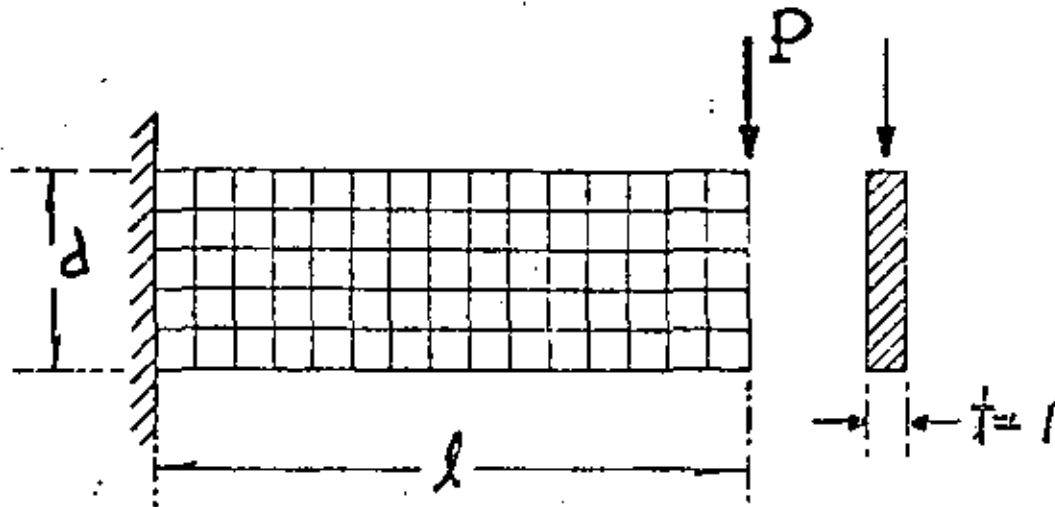


Fig. 4 Primera solución presentada por Hrenikoff en 1941.

crédito de aplicarlo a medios continuos es de Turner, Clough, Martin y Topp Ref. 5 , y no es, sino hasta 1960 con Clough, Ref. 6 nace por primera vez el nombre mágico de "Elemento Finito", derivando más correctamente las propiedades básicas del elemento triangular y el rectangular, y el hecho de que en el mismo tiempo la computadora comienza a ser una herramienta muy efectiva, conduce rápidamente a la solución numérica de problemas elástico lineales complejos, en los cuales una solución analítica no era posible.

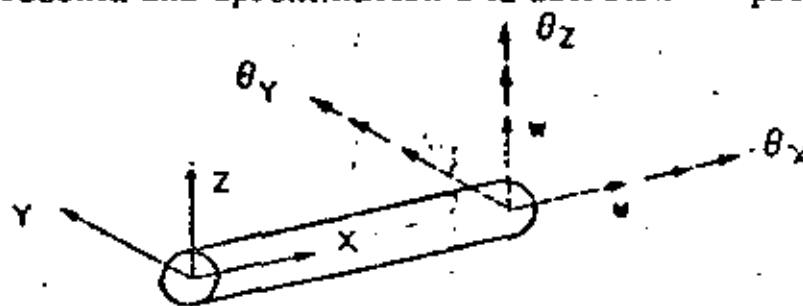
Se inician la derivación de las propiedades de rigidez de los elementos finitos, el campo de desplazamientos en el medio se expresa en función de los desplazamientos nodales del elemento, satisfaciendo continuidad, las fuerzas internas se definen aplicando el principio del trabajo virtual, la identidad de este proceso con el de minimizar la energía potencial total, o sea, el proceso de Rayleigh-Ritz

Ref. 7 es obvia. El desarrollo anterior se acentúa en el campo de la Mecánica de Sólidos y posteriormente Zienkiewicz Ref: 13 y Wilson Ref. 14 lo aplican en Mecánica de fluidos y en problemas de análisis de conducción de calor.

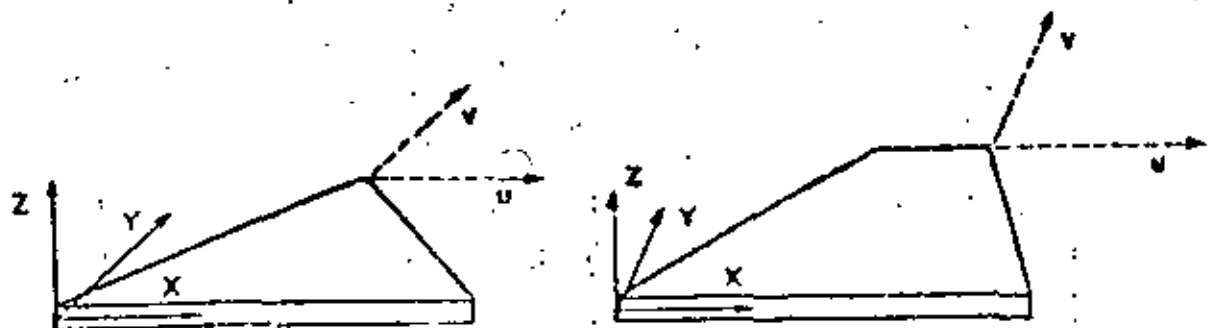
Se presenta al final una lista de referencias de importancia del método del elemento finito

Al iniciar la determinación de esfuerzos y desplazamientos en cierto problema de diseño, las ecuaciones que gobiernan el problema en cualquier forma deben satisfacer equilibrio y continuidad.

El Método del Elemento Finito es un procedimiento analítico, y cuando se aplica a un medio continuo, éste se modela analíticamente subdividiéndolo en sub-regiones ( los elementos finitos ) en los que el comportamiento de cada uno es definido por grupos separados de funciones que supuestamente definen esfuerzos y desplazamientos en esa región, las funciones se seleccionan en forma tal que se satisfaga la condición de continuidad a través de todo el medio, por lo tanto, el método del elemento finito en común con las soluciones por series y diferencias finitas representa una aproximación a la solución del problema

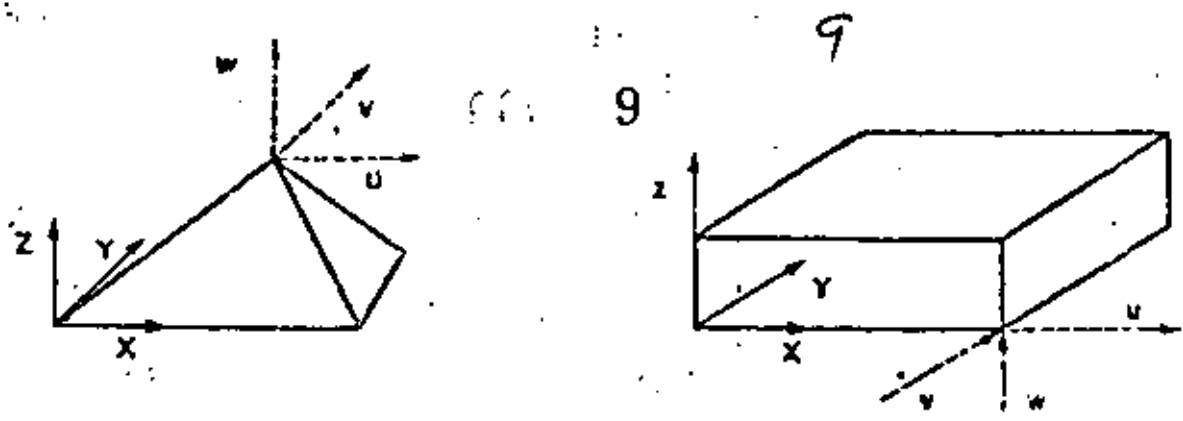


a ) Elemento estructural

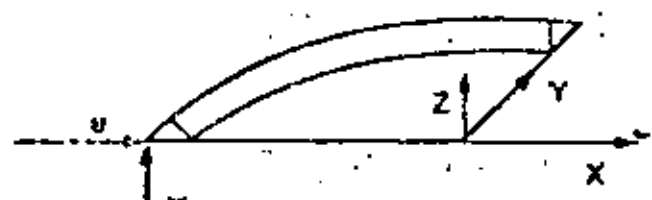


$$\gamma_{XY} = \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X}$$

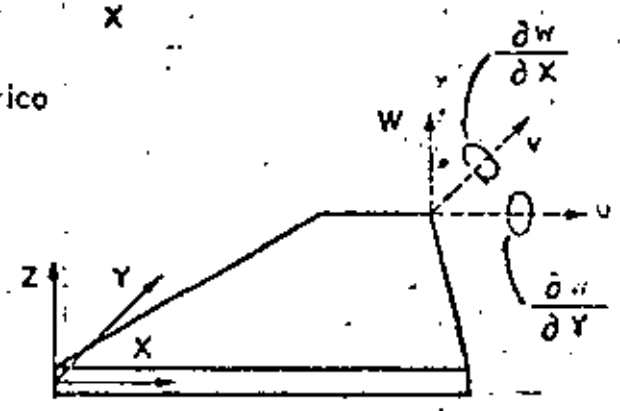
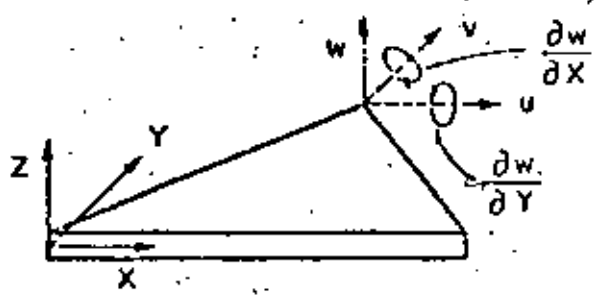
b ) Esfuerzos planos



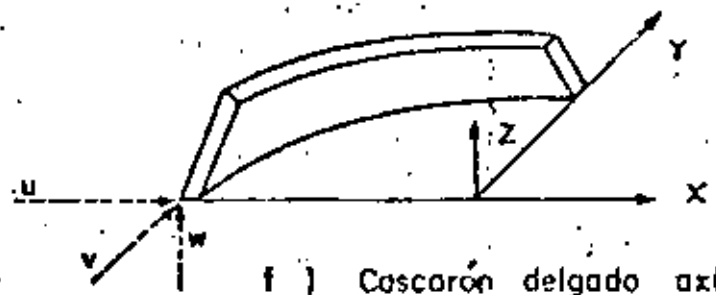
c) Elementos sólidos



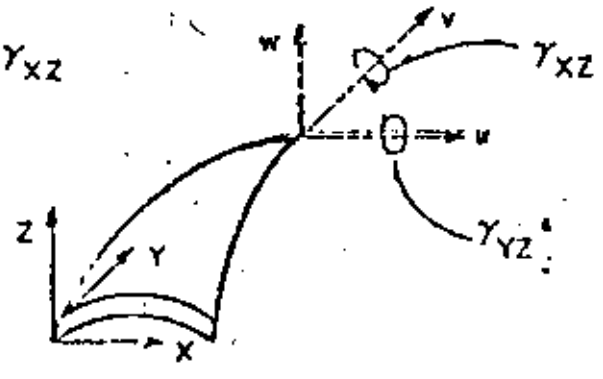
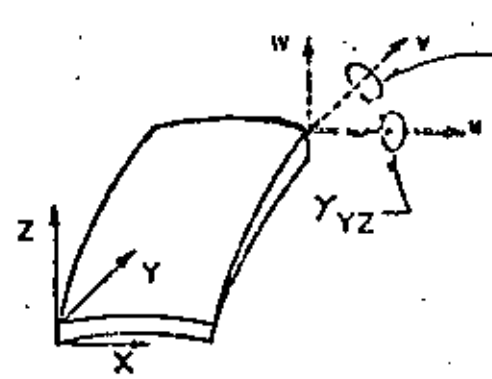
d) Sólidos axisimétrico



e) Flexión de placas



f) Coscorón delgado axisimétrico



g) Coscorones delgados curvos

Fig 5 Tipos de elementos finitos

## TIPOS DE ELEMENTOS.

Elementos que son usados comunmente en la práctica son ilustrados en la Fig. 5.

El elemento estructural simple, Fig. 5 (a), es un miembro de la familia total de elementos finitos. Cuando se usa con elementos del mismo tipo describe armaduras y estructuras espaciales. Cuando se combina con elementos de tipo diferente, especialmente con elementos de placa generalmente se describen miembros de rigidez.

Los elementos básicos en análisis por elementos finitos son placas delgadas con cargas contenidas en su plano (condición de esfuerzos planos), triangulares y cuadriláteros se ilustran en la Fig. 5b. Se denominan básicos porque los primeros desarrollos concernientes con el método se refieren a ellos.

Los elementos sólidos, Fig. 5 (c), son la generalización tridimensional de los elementos de esfuerzos planos. El tetrahedro y el hexaedro son las formas más comunes y son esenciales para modelar analíticamente problemas de mecánica de suelos, rocas y estructuras nucleares. Es conveniente mencionar que la única forma práctica de resolver problemas tridimensionales prácticos, es el método de elementos finitos.

Uno de los campos más importantes de aplicación del método de elementos finitos es en el análisis de "sólidos axisimétricos", Fig. 5 (d). Una gran variedad de problemas de ingeniería caen en esta categoría, incluyendo concreto, tanques, recipientes nucleares, rotores, pistones, flechas de motores, y la cabeza de los roquets. Generalmente son medios de carga y geometría axisimétrica.



En la Fig. 5 (d) se muestra el elemento triangular, también se usan secciones cuadriláteras.

Elemento de placa plana en flexión es empleado no solo en conexión con el comportamiento de placas planas, sino también en cascarones y miembros de pared delgada. Fig. 5 (e).

Estructuras de cascarón delgado axisimétricas, Fig. 5 (f), tienen el mismo rango de significado en la aplicación práctica que los sólidos axisimétricos. Sin embargo, las relaciones gobernantes se derivan de la teoría de cascarones delgados.

Cuando una estructura de cascarón delgado que de hecho es curva, es preferible emplear elementos de cascarón curvos delgados para el modelo analítico, tienen la ventaja de describir más aproximadamente la superficie curva del cascarón, y la apropiada representación del acoplamiento de deformación y equilibrio entre cada elemento. Elementos típicos de cascarones de doble curvatura se muestran en Fig. 5 (g). Gran número de formulaciones para este elemento existen.

### ALGUNAS APLICACIONES DE ELEMENTOS FINITOS.

Examinaremos algunas aplicaciones del método de elementos finitos en diseño estructural con el objeto de ilustrar la forma en la cual se usan los elementos de la Fig. 5, y la escala y complejidad de los problemas.

El desarrollo del método del elemento finito se debe a los investigadores relacionados con la industria aeronáutica. La Figura 6 muestra la forma en que

se aplicó el análisis por elementos finitos de una porción del avión Boeing 747. La estructura del fuselaje de un avión consiste de laminas de aluminio ligadas a una estructura interna formada por armaduras y adiesadores. La experiencia ha mostrado que los efectos locales de flexión en el cascarón son despreciables, por lo tanto, se supone que consiste de elementos en condición plana de esfuerzos Fig. 5(b). El análisis de elementos finitos del Boeing 747, de la parte achurada, región que conecta el cuerpo o Cascarón Monocoque con las alas, área achurada en Fig. 6, consiste de 7000 incógnitas. Por lo tanto, es común en la práctica dividir la estructura en regiones, o subestructuras, y analizar cada una por elementos finitos con el objeto de producir un superelemento. Los superelementos se ligan entre sí por medio de un procedimiento convencional que determina la fase final del análisis.

El esquema de subestructuración del Boeing 747 es mostrado en la Fig. 6 y los detalles son listados en la Tabla 1.

Sub-Estructura	Descripción	Nodos	Condición Carga	Elemento Viga	Elemento Placa	Grados libertad interacción elementos	Grado de libertad total.
1	Ala	262	14	355	363	104	796
2	Centro ala	267	8	414	295	198	880
3	Cascarón Monocoque	291	7	502	223	91	1,026
4	Cascarón M 213	5	5	377	185	145	820
5	Cascarón M 292	7	7	415	241	200	936
6	Caja Tren Aterrizaje	170	10	221	103	126	686
7	Cascarón M 285	6	6	392	249	233	909
8	Caja Tren Aterrizaje	129	10	201	93	148	503
9	Cascarón M 286	7	7	497	227	92	1,038
TOTAL		2,195	63	3,374	1,979	555	7,594

Tabla 1 Subestructuración del Boeing 747

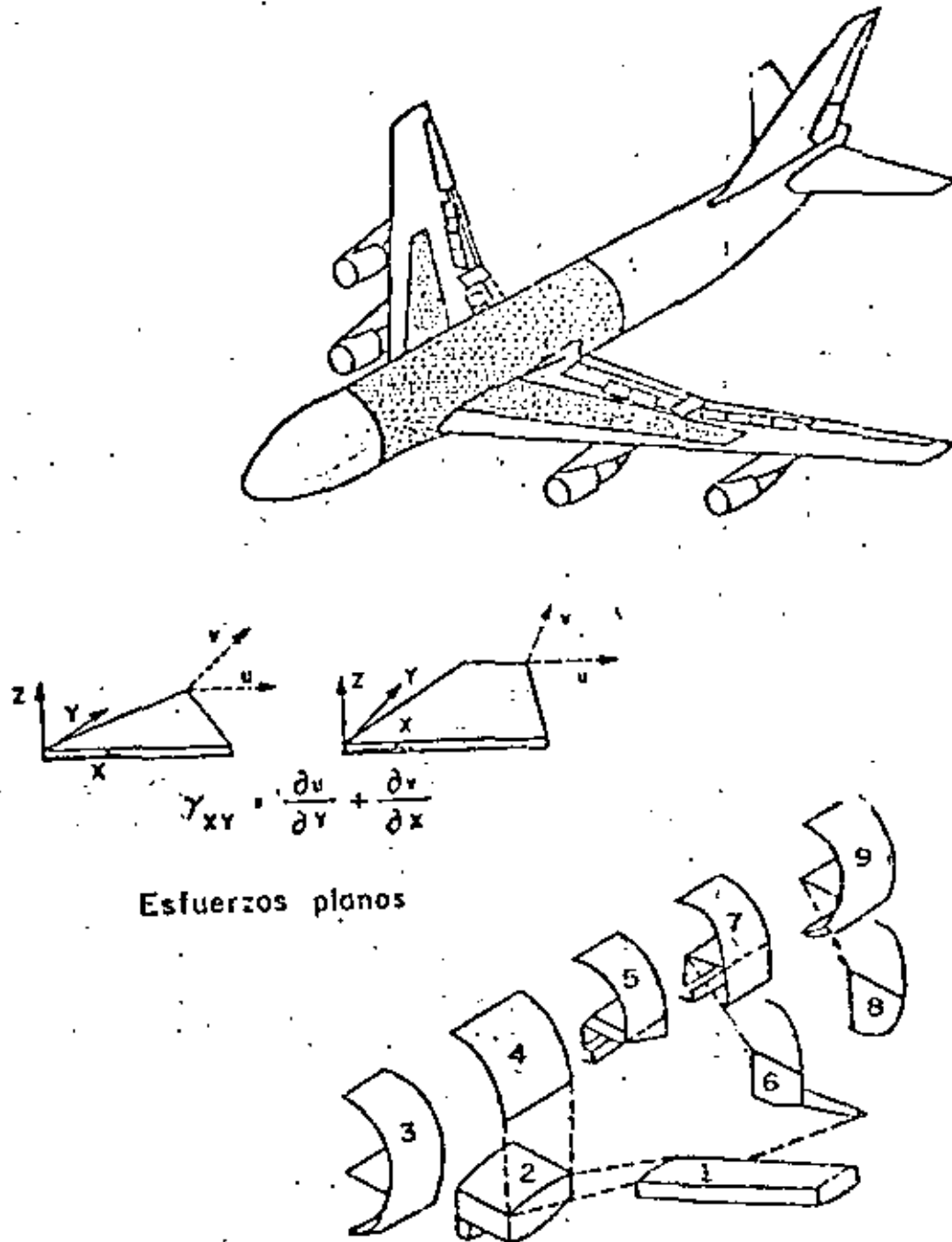


Fig 6 Boeing 747

Como es usual en el diseño de aviones, se hicieron pruebas en el prototipo y los resultados se compararon con la solución por elementos finitos, coincidiendo como se muestra en la Fig. 7

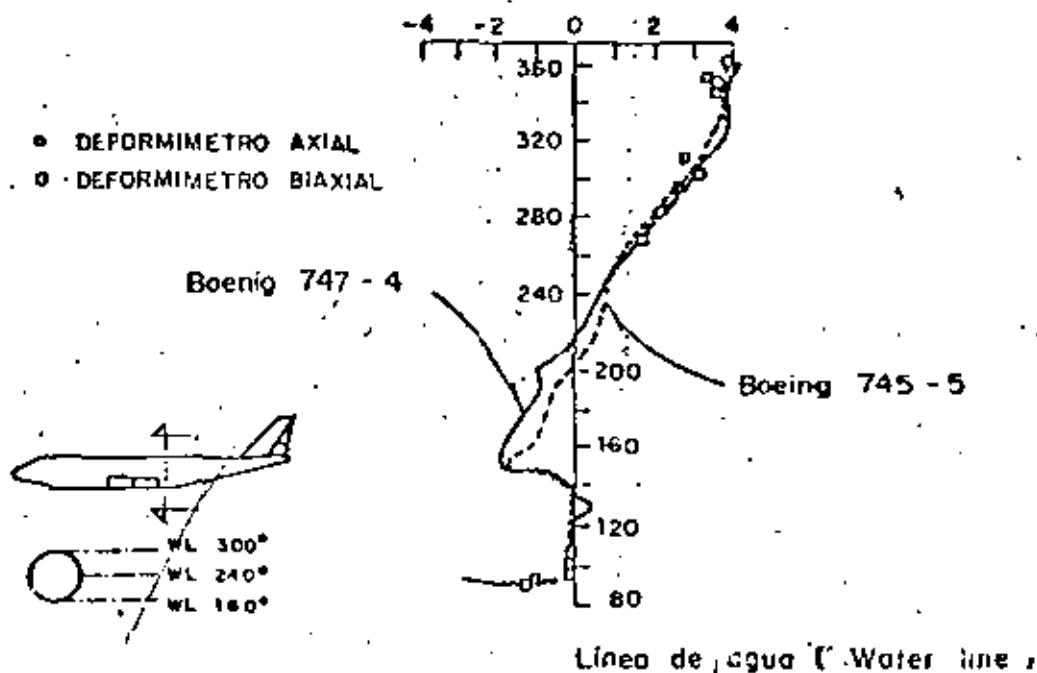


Fig. 7 Comparación entre análisis y experimentación del Boing 747

Es importante agregar que la respuesta dinámica de un avión es muy importante, así como su inestabilidad elástica es una forma importante de falla. Ninguno de estos fenómenos puede tratarse por los métodos simplificados, pero su análisis usando el método de elementos finitos ha probado ser muy aceptable.

Problemas similares se encuentran en Arquitectura Naval. Figura 8 una porción de una estructura de un transbordador. La parte plana es representada por elementos en estado plano de esfuerzos, Fig. 5 (b). Elementos estructurales, Fig. 5 (a), son empleados en la representación de la estructura interna.

El número total de incógnitas para definir las partes importantes de un barco es del orden de 50,000, y de nuevo se subdivide el problema en subestructuras obteniendo menos incógnitas.

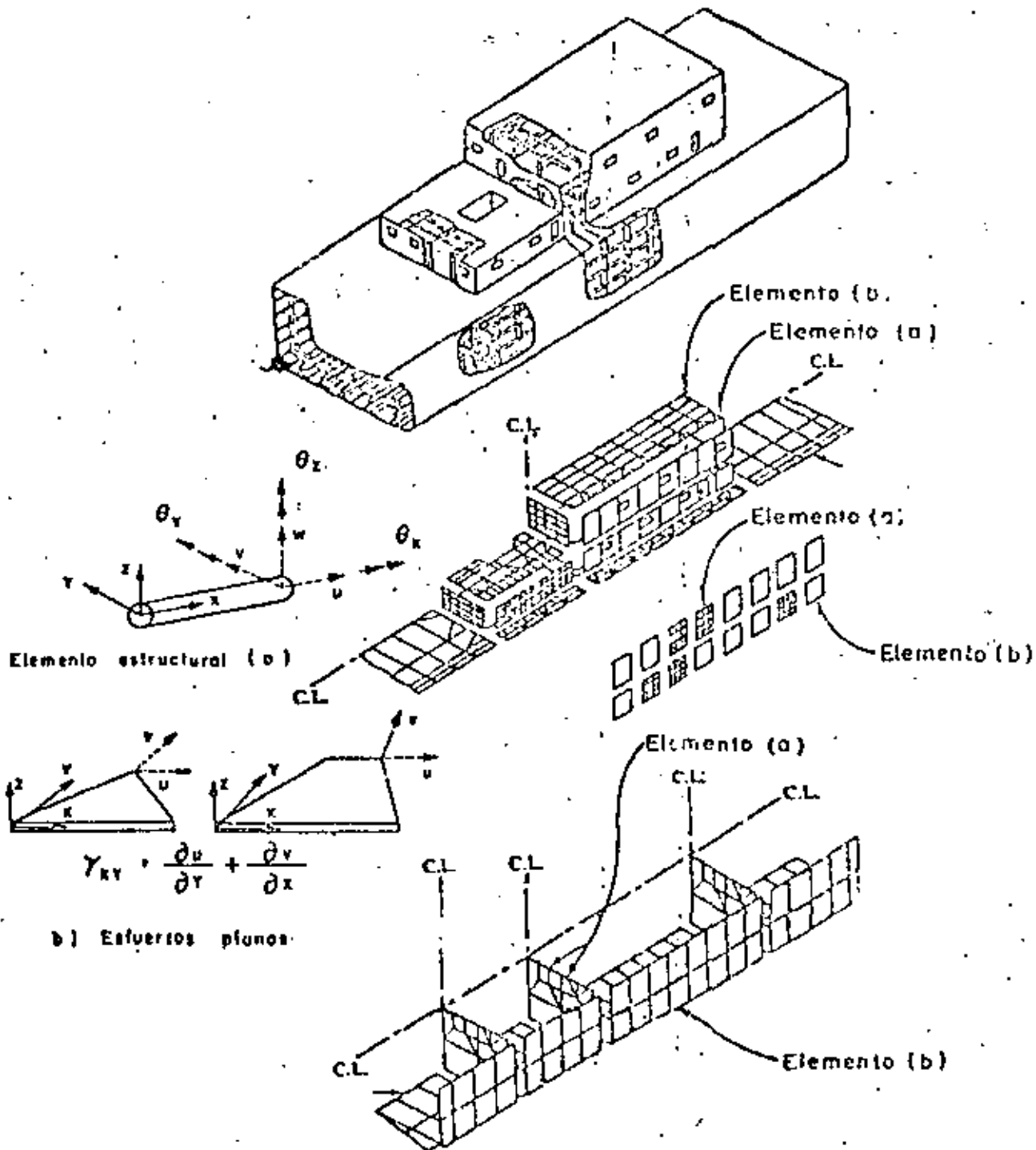


Fig. 8 Análisis por elemento finito de estructura de un transbordado.

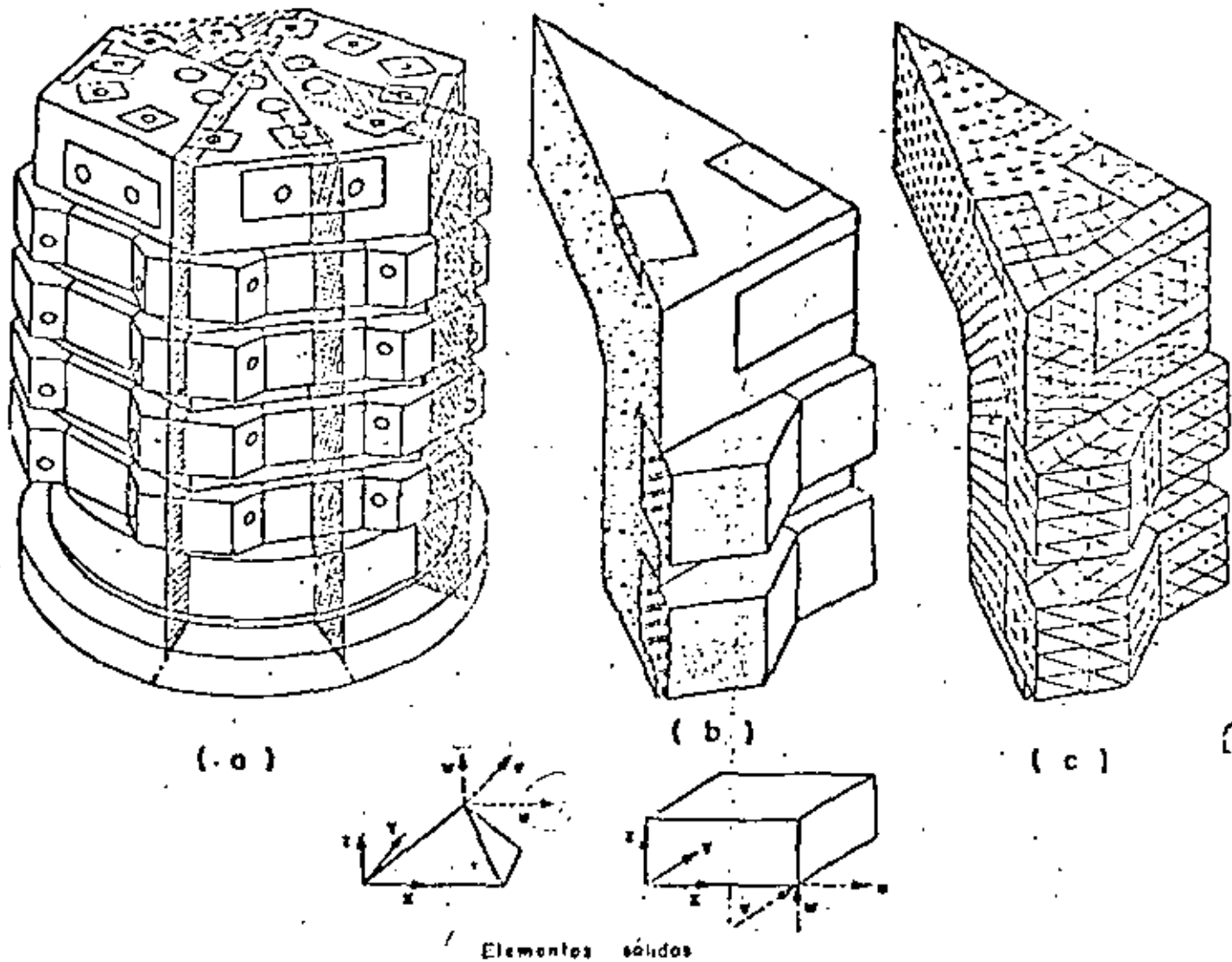


Fig 9 Análisis por elementos finitos de un recipiente reactor de concreto presforzado

Requerimientos de seguridad en el diseño estructural de los reactores nucleares han causado que la industria use ampliamente el análisis por elementos finitos. Figura 9 (a) un recipiente reactor de concreto presforzado. Debido a la simetría es posible analizar solamente un doceavo de la estructura total, Fig. 9 (b). Su volumen se modela analíticamente en un ensamble de elementos tetraedrales y hexaedrales, Fig. 5 (c). En problemas de este tipo, el número de incógnitas es del orden de 20,000, y muy común hacer el análisis en condiciones no lineales en material y geometría.

No todos los problemas de aplicación del método de elementos finitos son de proporciones monumentales. Las figuras 10 y 11 muestran aplicaciones básicas a ciertos problemas de ingeniería civil. Una forma de incrementar la eficiencia de diseño en secciones roladas de acero estructural es cortando el alma en la forma dentada mostrada en la Fig. 10 (a), colocando una sección sobre la otra y soldándolas, Fig. 10 (b). Y se obtiene una viga más aperaltada reduciendo el acero en el alma, y por supuesto que en este problema rutinario de diseño, no es necesario el uso del método de elementos finitos.

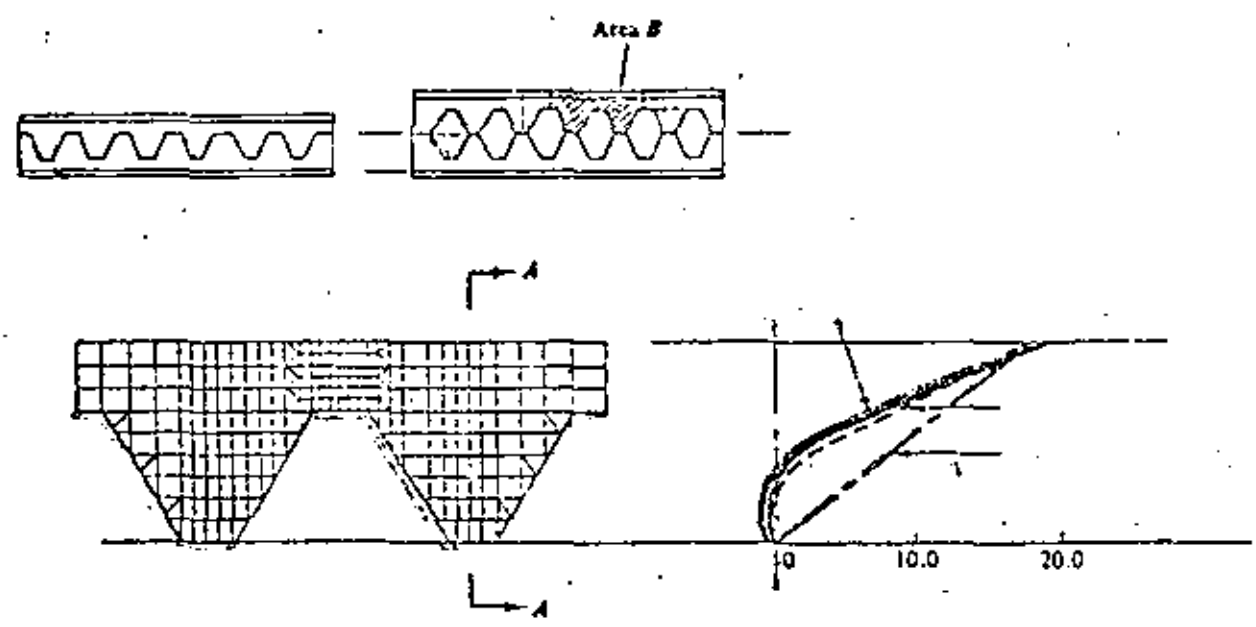


Fig. 10 Análisis de elementos finitos de una viga aperaltada en celosía.

Un problema todavía más común es el de una viga de concreto reforzado, Fig. 11, para el cual se conoce muy poco respecto a la adherencia entre el acero de refuerzo y el concreto, y la formación y crecimiento de las grietas al aumentar la carga. La Figura 11 (a) muestra el modelo analítico de ele-

mentos finitos y la descripción de las trayectorias de grietas y las gráficas de esfuerzos se muestran en la Fig. 11 (b).

Los pocos ejemplos mostrados muestran que el método de elementos finitos puede ser usado ventajosamente en cualquier situación que se requiera la predicción de esfuerzos y deformaciones internas, desplazamientos, vibraciones, inestabilidad elástica, mecánica de fluidos, transferencia de calor. Situaciones que se levantan de diversos campos que tradicionalmente han sido considerados como disciplinas ingenieriles separadas. Ejem., Ingeniería Civil, Mecánica, Aeroespacial, Arquitectura Naval. El método del elemento finito proporciona una tecnología unificada de análisis en casi todos los campos.

Es nuestro intento en este curso desarrollar los conceptos teóricos básicos y estudiar problemas específicos de carácter práctico. Un compendio de tales problemas llenaría muchos volúmenes, por lo tanto es recomendable consultar las memorias de congresos y publicaciones periódicas correspondientes.

### PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

Se ha indicado que las ecuaciones del método de elementos finitos son de una forma tal que su carácter general permite teóricamente escribir un solo programa de computadora que resuelva la mayoría de los problemas que se presentan en la Mecánica de Medio Continuos. Programas de computadora con este objetivo, aún en escala restringida, son llamados programas "de propósitos generales". La ventaja de programas de propósitos generales no es sólo su capacidad



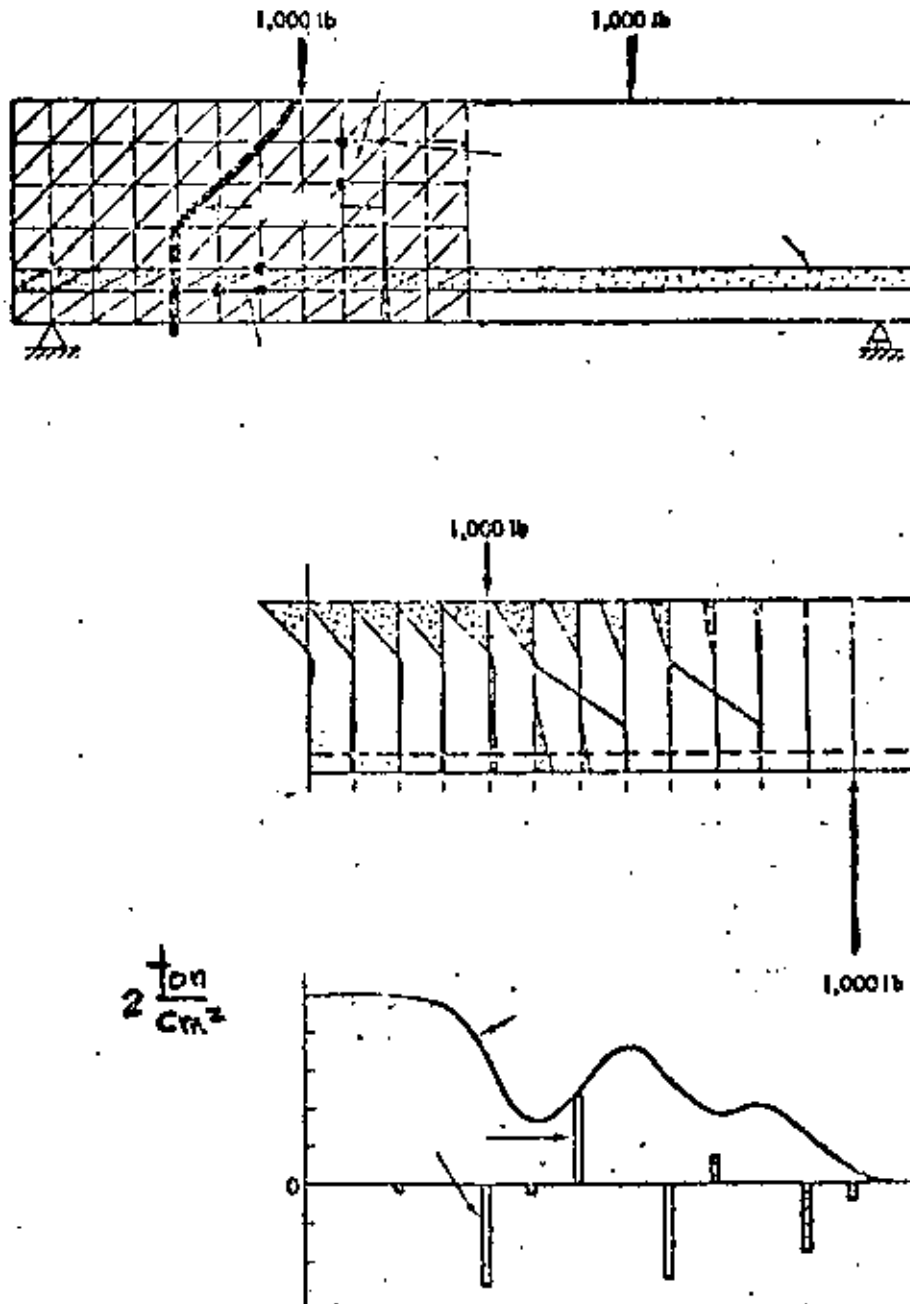


Fig. 11 Análisis por elementos finitos de una viga de concreto reforzado.

sino también en la instrucción de los probables usuarios respecto a la interpretación de la documentación, los datos y procedimientos de entrada y salida de resultados.

El costo de desarrollo de un programa de propósitos generales es usualmente muy alto por lo que la amortización de la inversión es esencial. Ciertos programas de propósitos generales son codificados en un lenguaje computacional que permite operar el programa a muchas organizaciones diferentes localizadas en grandes separaciones geográficas. Otros programas de propósitos especiales de limitada capacidad se usan en organizaciones industriales y gubernamentales con un costo menor en su desarrollo y operación.

Las cuatro componentes mostradas en el diagrama de flujo de la Fig. 12, son comunes en el desarrollo de programas de propósitos generales, fase de datos de entrada, requiere del usuario información del medio o material, descripción geométrica de la representación por elementos finitos y las condiciones de carga y de frontera. Los programas de propósitos generales más sofisticados facilitan el proceso de entrada como propiedades constitutivas del material, almacenados previamente, esquemas de modelar analíticamente el medio, trazar estereográficamente la idealización por elementos finitos en forma tal que los errores pueden detectarse antes de efectuar los cálculos.

La fase de biblioteca de elementos finitos es de interés primordial en el curso. En ella se tienen los procesos de codificación formulativos para los elementos individualmente. La mayoría de los programas de propósitos generales contienen todos los elementos de la Fig. 5, así como ciertas otras alternativas de formulación para un tipo dado de elemento, por ejemplo el trián-

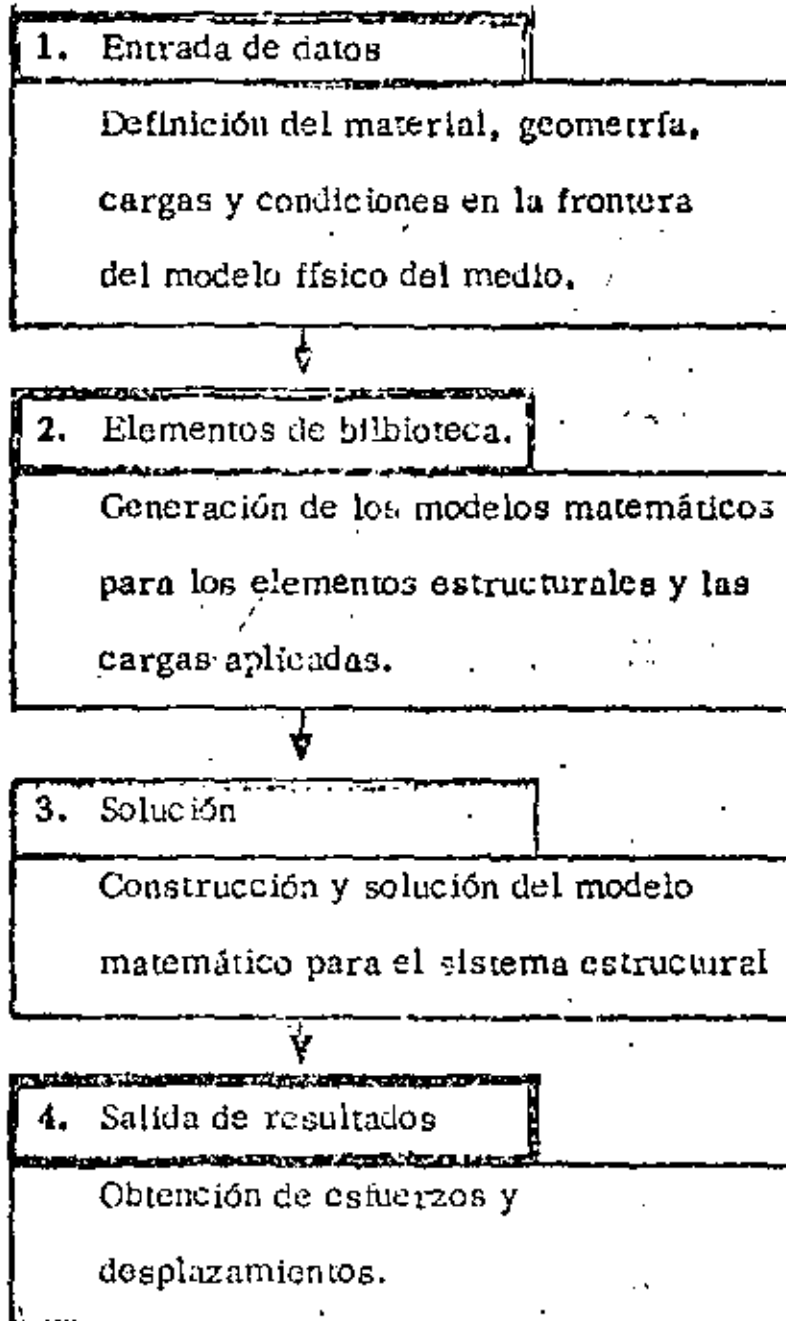


Fig. 12 Diagrama de flujo computacional en Análisis Estructural.

gulo en flexión. Teóricamente el elemento biblioteca es de extremos abiertos y capaz de acomodar cualquier nuevo elemento de cualquier grado de complejidad.

La fase elemento de biblioteca recibe los datos almacenados y establece las relaciones algebraicas del elemento por medio de la aplicación de los procesos formulativos relevantes de codificación. Esta fase del programa de propósitos generales también incluye todas las relaciones algebraicas para interconectar los elementos vecinos y la conexión del proceso en sí. Las operaciones posteriores producen un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales simultáneas para representar la estructura completa por elementos finitos.

La fase solución del programa de propósitos generales opera sobre las ecuaciones del problema formadas en la fase anterior. En el caso de un problema de análisis estructural solo significa la solución de un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas. Soluciones para respuesta dinámica requerirán computaciones más extensas sobre la historia-tiempo de las cargas aplicadas. En algunos casos hay que operar en regiones subdivididas como en el caso del análisis del Boeing 747, o efectuar operaciones especiales en las ecuaciones construidas originalmente. Incluidas en esta fase están las operaciones necesarias de sustitución para obtener todos los aspectos deseados de la solución.

La fase salida de resultados presenta el análisis con un registro de la solución sobre la cual se pueden tomar decisiones respecto al dimensionamiento estructural o diseño. El registro comunmente es presentado mediante una lista impresa de esfuerzos y desplazamientos de los respectivos elementos. Así como en la fase de entrada existe una fuerte tendencia a la representación gráfica de datos,

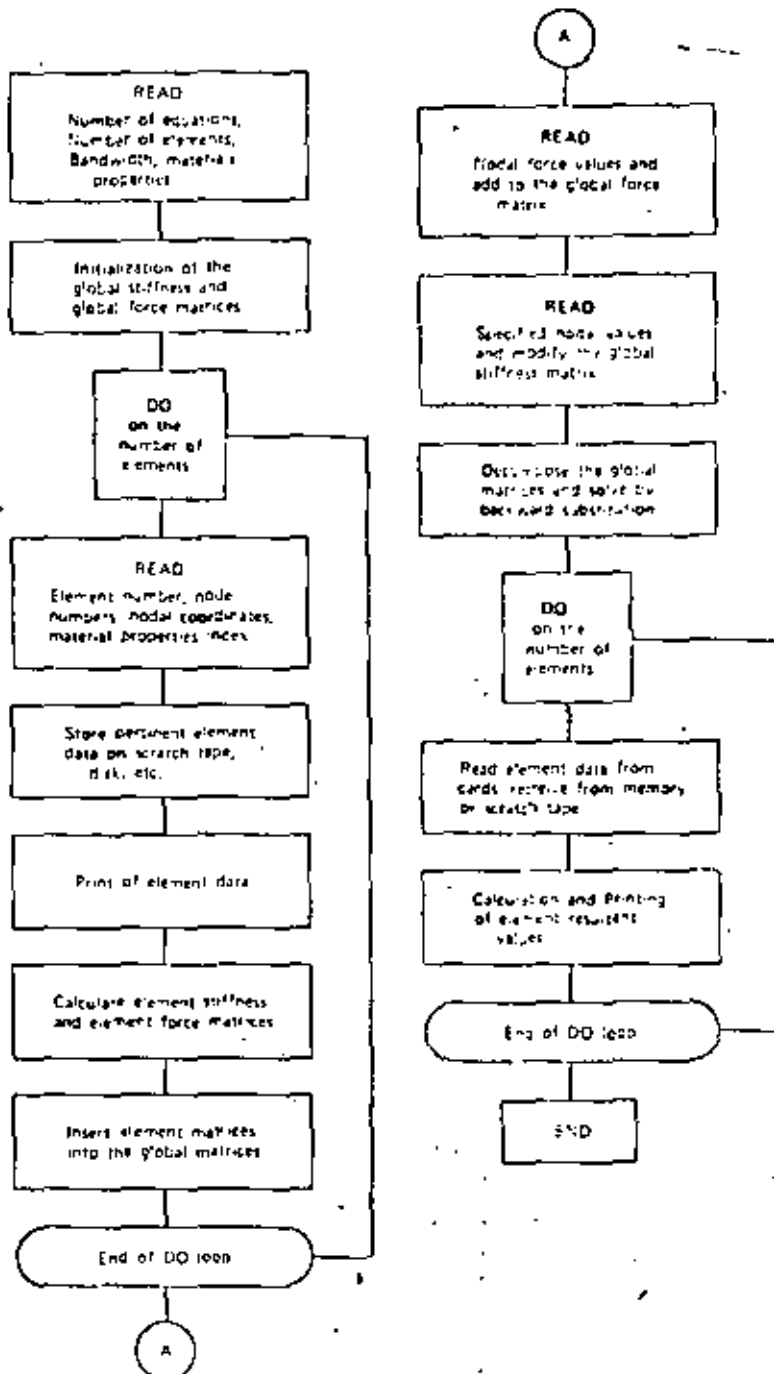


Fig. 7.3 General computer flow diagram for a finite element program.

tales como gráficas de trayectorias principales de esfuerzos o modos de pandeo y vibración.

### ALGUNOS PROGRAMAS DE PROPOSITOS GENERALES.

ICES-STRUDL II, Integrated Civil Engineering System, (ICES), MIT. Maneja problemas de deformación y esfuerzos planos, cascarones rebajados, sólidos tridimensionales, flexión de placas con y sin deformación axial. Su uso en problemas muy especializados resulta caro. ASKA, Automatic System for Kinematic Analysis. Desarrollado por J. H. Argyris, H. A. Kanel y otros en la Universidad de Stuttgart. Sistema general muy potente el cual incluye una biblioteca de 42 elementos diferentes. Puede ser costoso para un usuario especializado. SAP, A General Structural Analysis Program, elaborado por E. L. Wilson de la Universidad de California. Incluye análisis lineal estático y dinámico de estructuras elásticas, estructuras tridimensionales, sólidos axisimétricos, sólidos tridimensionales, esfuerzos y deformación plana, placas y cascarones.

Zienkiewicz, O.C., programa desarrollando en la Universidad de Wales, Swansea. Incluye lo de los programas anteriores y problemas de Mecánica de Fluidos y transferencia de calor.

NASTRAN, NAsa STRuctural ANalysis. Desarrollado por U. S. National Aeronautical and Space Administration para análisis elástico de varias estructuras incluye, análisis de expansión térmica, respuesta dinámica a cargas transitorias y excitaciones random, cálculo de valores característicos reales y complejos, esta

## 25

**SAMIS, Structural Analysis and Matrix Interpretative System.** Desarrollado por Jet Propulsion Laboratory, y Manned Spacecraft Center. Contiene un elemento unidimensional general y elementos triangulares para deformaciones por flexión y membrana.

**ELAS y ELAS 8, Equilibrium Problems of Linear Structures.** Desarrollado por el Jet Propulsion Laboratory. Incluye una biblioteca de elementos unidimensionales triangulares, cuadriláteros, tetraedros, hexaedros, cónicos, sólidos axisimétricos de secciones cuadriláteros y triangulares.

**MARC, elaborado por P. V. Marcal.** Incluye análisis lineal y no lineal de problemas de Mecánica de Medios Continuos.

## ANSYS

**Capability:** Static and dynamic linear and nonlinear structural analysis and heat transfer analysis. Program has plasticity, creep, and large displacement and rotation capability.

**Method:** Finite element displacement method. Program uses the incremental method of solution accounting for plasticity with isotropic and kinematic hardening. Program uses the wave-front method coupled with an explicit time integration scheme for the solution of the nonlinear equations of motion. Eigenvalues are extracted via Jacobi iteration with Guyan reduction.

**Language:** FORTRAN

**Hardware:** Program runs on CDC, IBM, and UNIVAC machines.

**Usage:** Program has been extensively used in the nuclear industry and indications of its reliability are available.

**Developer:** John A. Swanson  
Swanson Analysis Systems, Inc.,  
870 Pine View Drive  
Elizabeth, PA 15037

Table 15-1. General Purpose Finite Element Programs.

Features	Program <sup>a</sup>				
	ANSYS	MARC	NASTRAN	SAP	STARDYNE
Straight beam, straight pipe, solid and flat plate elements	X	X	X	X	X
Axisymmetric elements	X	X	X	X	O
Curved beam/curved pipe elements	O/X	X/X	O/O	O/X	O/X
Curved shell elements	O	X	O	O	O
Inviscid fluid element	O	O	X	O	O
Buckling analysis	O	X	X	O	O
Shock spectra	X	O	O	X	X
Mesh generation	Yes	Yes	Yes	Some	Some
Nonlinear analysis	Extensive	Extensive	Limited	Limited <sup>b</sup>	None
Pages in manual describing elements, input and output (approximate)	830	820	960	130	560
Proprietary/public	Prop.	Prop.	Public	Public	Prop.
Availability <sup>c</sup>	CDC, W, D	CDC, D	CDC, W	CDC, D	CDC

<sup>a</sup>X = program has this capability; O = program lacks this capability.

<sup>b</sup>Nonlinear capability in MODSAP version.

<sup>c</sup>CDC = Control Data Corporation Cybernet; W = Westinghouse Telecomputer Center, Pittsburgh, PA; D = developer (see text).



**LISTA DE REFERENCIAS EN ORDEN CRONOLOGICO DEL METODO DE  
ELEMENTOS FINITOS**

- (1) Hrenkoff, A., "Solution of problems in elasticity by the framework method," *J. Appl. Mech.* 8, A 169-175, 1941.
- (2) McHenry, D., "A lattice analogy for the solution of plane stress problems," *J. Inst. Civ. Eng.* 21, 59-82, 1943.
- (3) Newmark, N. M., "Numerical methods of analysis in bars plates and elastic bodies," "Numerical Methods of Analysis in Engineering," edited by L. E. Grinter, MacMillan (1949).
- (4) Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., and Topp, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures," *J. Aero Sci.* 23, 805-823, 1956; AMR 10 (1957), Rev. 1776.
- (5) Clough, R. W., "The finite element in plane stress analysis," *Proc. 2nd. ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., Sept. 1960.*
- (6) Argyris, J. H., "Energy Theorems and structural analysis," Butterworth, London (1960). (Reprinted from *Aircraft Eng.* 1954-55); AMR 15 (1962), Rev. 2705.
- (7) Clough, R. W., "The finite element method in structural mechanics," (Ch. 7 "Stress Analysis", O. C. Zienkiewicz and G. S. Holister, edited by, J. Wiley & Son (1965); chapter in AMR 20 (1967), Rev. 3942.
- (8) Courant, R., "Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibration," *Bull. Am. Math. Soc.* 49, 1-23, 1943.
- (9) Prager, W., and Synge, J. L., "Approximation in elasticity based on the concept of function space," *Quart. Appl. Math.* 5, 241-69, 1947.
- (10) Synge, J. L., "The hypercircle in mathematical physics, Cambridge Univ. Press (1957); AMR 11 (1958), Rev. 733.
- (11) Schmelter, J., "The energy method of networks of arbitrary shape in problems of theory of elasticity," *Proc. IUTAM Symp. on Non-homogeneity in Elasticity and Plasticity, W. Olszak, edited by, Pergamon Press (1959).*
- (12) Zienkiewicz, O. C., and Cheung, Y. K., "Finite elements in the solution of field problems," *Engineer.* 200, 507-510, Sept. 1965.
- (13) Wilson, E. L., and Nickell, R. E., "Application of finite element method to heat conduction analysis," *Nuclear Eng. and Design* 3, 1-11, 1966.

- (95) Ariett, P. L., Bahrami, A. K., and Zienkiewicz, O. C., "Application of finite elements to the solution of Helmholtz's equation (wave guides)," Proc. Inst. El. Eng. 115, 1762-1964, 1968.
- (96) Zienkiewicz, O. C., and Newton, R. E., "Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid," Int. Symp. on finite element techniques in shipbuilding, Stuttgart, 1969.
- (97) Taylor, C., Pail, B. S., and Zienkiewicz, O. C., "Harbour oscillation in a numerical treatment for undamped modes," Proc. Inst. Civ. Eng. 43, 1941-153, 1969.
- (98) Archer, J. S., and Rubin, C. P., "Improved linear axisymmetric-shell - fluid model for launch vehicle longitudinal response analysis," Proc. Conf. Mat. Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (99) Zienkiewicz, O. C., Irons, B., and Nath P., "Natural frequencies of complex free or submerged structures by the finite element method," Symp. on Vibration in Civ. Eng., Inst. Civ. Eng., (Butterworth), London, 1965.
- (100) Sandhu, R. S., and Wilson, E. L., "Finite element analysis of seepage in elastic media," J. of Engr. Mech. Div., Proc. ASCE 95, 641-651, 1969.
- (101) Rashid, Y. R., "Three-dimensional analysis of elastic solids," Int. J. Solids Struct., " Part I: Analysis procedure," 5, 1311-33, 1969; Part II: " The computational problem," 6, 195-207, 1970.
- (102) Irons, B. M., "A frontal solution program for finite element analysis," Int. J. Num. Meth. in Eng. 2, 5-32, 1970.
- (103) Johnson, W. M., and Mclay, R. W., "Convergence of the finite element method in the theory of elasticity," J. Appl. Mech. Trans. ASME, 274-278, June 1968.
- (104) Przemieniecki, J. S., "Theory of matrix structural analysis," McGraw-Hill, 1968.
- (105) Jenkins, W. M., "Matrix and digital computer methods in structural analysis," McGraw-Hill, 1969.
- (106) Pope, G. G., "The application of the matrix displacement method in plane elastoplastic stress problems," Proc. Conf. Matrix Meth. in Struct. Mech., Wright-Patterson AFB, Ohio, 1965.
- (107) Miller, R. E. and S. D. Hansen, "Large Scale Analysis of Current Aircraft," On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed), ASME Special Publication, New York, N. Y., 1970.

- 9 -

(108) Smith, C. S. and G. Mitchell, "Practical Considerations in the Application of Finite Element Techniques to Ship Structures," Proc. of Symposium on Finite Element Techniques, U. of Stuttgart, Stuttgart, Germany, June, 1969.

(109) Corum, J. M. and J. E. Smith, "Use of Small Models in Design and Analysis of Prestressed-Concrete Reactor Vessels," Report ORNL-4346, Oak Ridge Nat. Lab., Oak Ridge, Tenn., May, 1970.

(110) Cheng, W. K., M. U. Hossain, and V. V. Nois, "Analysis of Cabled Beams by the Finite Element Method," Proc. of Conf. on Finite Element Method in Civil Eng., McGill U., Montreal, Canada, 1972, pp. 1105-1140.

(111) Gallagher, R. H., "Large-Scale Computer Programs for Structural Analysis" in On General Purpose Finite Element Computer Programs, P. V. Marcal (ed.), ASME Special Publication, 1970, pp. 3-34.

(112) Marcal, P. V., "Survey of General Purpose Programs for Finite Element Analysis," in Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, J. T. Oden, et al. (ed.), U. of Alabama Press, University, Ala., 1972.

(113) Gallagher, R. H. and O. C. Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley & Sons, Inc., New York, N. Y., 1973.

FINITE ELEMENT METHOD  
THEORY AND APPLICATION

1. INTRODUCTION

1.1 HISTORICAL BACKGROUND

The finite element method (FEM) has become a powerful numerical technique for solving complex problems in science and engineering, mainly due to the advances made earlier in the numerical methods particularly in matrix methods as well as due to the rapid introduction of high speed computers in the market. However, the introduction of concepts and applications of FEM dates back to the era of mathematicians who tried to calculate the perimeter and area of a circle by idealizing it as a regular polygon. It is also interesting to note that the bound solutions which are often discussed in FEM can be traced back to the solution of the area of a circle. If the circle is modelled with an inscribed polygon, a lower bound solution is obtained whereas an upper bound solution is obtained by replacing the circle by a circumscribed polygon. Even though the basic concepts of FEM existed for over two thousand years, for all practical purposes, one can only say that these concepts were actually used for solving physical problems in 1950s by the aeronautical engineers.

In 1955, Turner et al (Ref 1) presented the stiffness analysis for the complex structures, which is the starting point in the rediscovery of FEM. Nevertheless, Clough (Ref 2) was the one who actually used the term FEM in 1960. Since then, a tremendous amount of research has been done in this field and

quite a large number of papers have been published in almost all the journals related to all fields of engineering as well as some in the fields of mathematics and science. In addition, several conferences have been held all over the world and hundreds of papers have been presented in each. The theory and application of FEM have also been presented in numerous text books (Ref 3-22) In order to help the research workers in tracing the references required for their particular work several bibliographies have either been published or under preparation, among them notably Ref (23) is a good source of information.

## 1.2 APPLICATIONS OF FEM

The FEM is applicable to a variety of boundary value and initial value problems in engineering as well as applied science. Some of these applications are:

1. Stress Analysis of Structures, Stability of Structures, Dynamic response of structures, Thermal Stress Analysis, Torsion of prismatic members
2. Stress Analysis of Geomechanics problems, Soil-Structure Interaction, Slope Stability problems, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Seepage in soils and rocks, Consolidation settlement
3. Solutions in Fluid Mechanics, Harbour oscillations, Pollution Studies, Sedimentation
4. Analysis of Nuclear Reactor Structures
5. Stress Analysis and Flow Problems in Biomechanics
6. Characteristic Study of Composites in Fibre Technology
7. Wave Propagation in Geophysics
8. Field Problems in Electrical Engineering

## 32

Apart from the above mentioned areas, the FEM is also applicable to any other problem as long as the analyst makes certain that the problem is amenable to solution based on the assumptions introduced in the formulation of FEM and appropriate material properties can be provided in a realistic manner.

### 1.3 METHODS OF ANALYSIS

In general, there are four basic methods of analysis in FEM- displacement method, equilibrium method, mixed method and hybrid method. The field variables or unknown quantities in each of these methods are as follows.

Displacement method - displacements and their derivatives

Equilibrium method - stress components

Mixed method - some displacements and some stress components

Hybrid method - displacements or boundary forces

In the displacement method, smooth displacement distribution is assumed within an element, interelement compatibility of displacement is generally assured and minimum potential energy criterion is used in the formulation.

In the equilibrium method, the interior stress distribution is assumed to be smooth, the equilibrium of boundary tractions is maintained and the minimum complementary energy is the basis for the formulation.

In the mixed method which is generally used for plate and shell problems, both displacements and stresses are assumed smooth

in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the inter-element boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

#### 1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as elements. These elements are interconnected at joints known as nodes. The principal unknown is termed as the field variable. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed

in the interior, the displacement components and the equivalent stress components are considered to be continuous at the inter-element boundaries and the formulation is based on Reissner's principle.

In the hybrid method, depending on whether the model is displacement type or equilibrium type, the distribution of displacements or stresses within the element is considered to be smooth and along the interelement boundary either assumed compatible displacements or assumed equilibrating boundary tractions are ensured and either modified complementary energy or modified potential energy principle is adopted for the formulation.

Among these four methods, the displacement method is the most widely used approach. However, for plate bending problems either the equilibrium or mixed method is preferred and for some field problems hybrid method is more suitable.

#### 1.4 DESCRIPTION OF FEM

A structure, continuum or a domain is divided into a number of arbitrary shaped parts or regions known as elements. These elements are interconnected at joints known as nodes. The principal unknown is termed as the field variable. This field variable can be displacement, temperature, pore-pressure or stress. The distribution of the field variable within an element is approximated by the use of certain polynomial functions. Variational methods or residual methods are employed



to develop the finite element equations which relate the field variables at the nodes to the corresponding action vector at the nodes of the element. This relationship is provided by the so called property matrix which is based on the material and the geometric properties of the element. Finally these finite element equations are assembled to form a system of algebraic equations for the entire domain. The unknown field variable is obtained by solving this system of algebraic equations.

### 1.5 BASIC STEPS IN FE ANALYSIS

The basic steps in the finite element analysis of general problems are as follows.

1. The continuum is divided into finite elements of any arbitrary shape.
2. A suitable polynomial is chosen to represent the distribution of the field variable within an element in terms of its nodal values. Thus, the field variables at the nodes become the primary unknowns.
3. Using variational methods or residual methods, the finite element equations are formulated.
4. The individual finite element equations obtained in step 3 are assembled to form a set of algebraic equations for the overall continuum.
5. The solution of the algebraic equations obtained in step 4 yields the values of the field variables at the nodes.
6. From the field variables at the nodes, the secondary variables such as stress, strain for an element can be obtained.

## REFERENCES

1. TURNER, M. J., CLOUGH, R. W., MARTIN, H. C., and TOPP, L. J., "Stiffness and deflection analysis of complex structures", *J. Aero, Sci.*, Vol. 23, No. 9, 1956, pp 805-823
2. CLOUGH, R. W., "The finite element method in plane stress analysis", *Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation*, Pittsburgh, 1960, pp 345-378
3. ZIENKIEWICZ, O. C. and CHEUNG, Y. K., *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1967
4. ZIENKIEWICZ, O. C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, McGraw-Hill, London, 1971
5. SMITH, G. N., *An Introduction to Matrix and Finite Element Methods in Civil Engineering*, Applied Science, London, 1971
6. DESAI, C. S. and ABEL, J. F., *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand and Reinhold, New York, 1972
7. ODEN, J. T., *Finite Elements of Nonlinear Continua*, McGraw-Hill, New York, 1972
8. URAL OKTAY, *Finite Element Method*, Intext Educational Publishers, New York, 1973
9. MARTIN, H. C. and CAREY, G. F., *Introduction to Finite Element Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973
10. STRANG, G. and FIX, G. J., *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice Hall, N. J., 1973
11. BREBBIA, C. A. and CONNOR, J. J., *Fundamentals of Finite Element Technique*, Butterworths, London, 1973
12. NORRIS, D. H. and de VRIES, G., *The Finite Element Method-Fundamentals and Applications*, Academic Press, New York, 1973
13. COOK, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley, New York, 1974
14. WACHPRESS, E. L., *A Rational Finite Element Basis*, Academic Press, New York, 1975
15. FENNER, R. T., *Finite Element Method for Engineers*, MacMillan Press, London, 1975
16. GALLAGHER, R. H., *Finite Element Analysis-Fundamentals*, Prentice-Hall, N. J., 1975

17. HUEBNER, K. H., The Finite Element Method For Engineers; John Wiley, New York, 1975
18. ROCKEY, K. C., et al, The Finite Element Method, Crosby, Lockwood, Staples, London, 1975
19. CONNOR, J. J. and BREBBIA, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Butterworths, London, 1976
20. OZEN, J. J. and REDDY, J. N., An Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements, John Wiley, New York, 1976
21. SEGERLIND, L. J., Applied Finite Element Analysis, John Wiley, New York, 1976
22. BATHE, K. J. and WILSON, E. L., Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, N. J., 1976
23. NORRIE, D. H. and de VRIES, G., "A Finite Element Bibliography (3 Parts), Report No. 57, Mechanical Engineering Department The University of Calgary, Canada, 1974

VI.2 Programas de Proposito General y Opciones de Analisis  
ELEMENTS AND SOME POPULAR (?)  
COMPUTER CODES

---

<u>PROGRAM</u>	<u>AUTHORS</u>
SUPERD	STRUCTURAL DYNAMICS RESEARCH CORPORATION (SDRC)
EASE2	ENGINEERING ANALYSIS CORPORATION (EAC)
STARDYNE	MECHANICS RESEARCH INC. (MRI)
NASTRAN	MCNEAL-SCHWENBLER CORP. (MSC)
ANSYS	SWANSON ANALYSIS SYSTEMS (SAS)
MARC-CDC	MARC ANALYSIS CORP.

2

1978

















38

# TYPES OF ANALYSIS

		PROGRAM					
		EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPER
ANALYTICAL CAPABILITY							
LINEAR STATICS	MECHANICAL LOADS	•	•	•	•	•	•
	TEMPERATURE LOADS	•	•	•	•	•	•
	EULER BUCKLING			•		•	
	INERTIA RELIEF			•			
DYNAMICS	MODE/FREQUENCY	•	•	•	•	•	
	FREQUENCY RESPONSE		•	•	•		
	TRANSIENT RESPONSE	•	•	•	•	•	
	SHOCK SPECTRA	•	•		•		
	RANDOM RESPONSE		•	•			
	NONLINEAR TRANSIENT			•	•	•	
NONLINEAR STATICS	NONLINEAR BUCKLING					•	
	LARGE DISPLACEMENT				•	•	
	PLASTICITY			•	•	•	
	CREEP				•	•	
	VISCOELASTICITY			•		•	
	LARGE STRAINS					•	
HEAT TRANSFER	STEADY STATE			•	•	•	•
	TRANSIENT			•	•	•	
SUBSTRUCTURES (SUPER-ELEMENTS)	STATIC		•	•	•		
	DYNAMIC		•	•	•		
	CYCLIC SYMMETRY			•			
MISCELLANEOUS	FRACTURE MECHANICS				•	•	
	FLUIDS			•	•	•	
	ELECTRIC CIRCUITS				•		
	OPTIMIZATION			•			
	ACOUSTIC CAVITIES			•			
	FATIGUE DAMAGE				•		

STRUCTURAL ANALYSIS  
ELEMENT/MATRIX LIBRARY















39

			PROGRAM					
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
LINE ELEMENTS	ROD		.		.	.	.	.
	BEAM		.	.	.	.	.	.
	TAPERED BEAM					.	.	
	OFFSET BEAM			.	.	<small>CAN HANDLE BEAM OFFSET</small>		.
	PINNED END BEAM		.	.	.			.
	CURVED BEAM						.	
FLAT MEMBRANES AND PLATES	3 NODE TRIANGLE		.	.	.	.	M	
	6 NODE TRIANGLE				M		M	C
	SHEAR PANEL				.			
	4 NODE QUAD		.	.	.	.	M	.
	6 NODE QUAD					S	M	S
CURVED SHELLS	3 NODE TRIANGLE						.	
	6 NODE TRIANGLE							C
	4 NODE QUAD						.	.
	8 NODE QUAD						.	S
	REDUCED THICK SHELL						.	

NOTES:

- M Membrane and/or plane strain only (no plate bending)
- S Includes sub-parametric forms with fewer nodes
- C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes

**STRUCTURAL ANALYSIS**  
**ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)**





ELEMENT				PROGRAMS					
				EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPER9
AXI-SYMMETRIC ELEMENTS	SHELLS	CONICAL				•	•	D	
		CURVED				•		•	
	TRIANGULAR RINGS	3 NODE				•	•	•	D
		6 NODE				•		D	C
	QUAD RINGS	4 NODE				•	•	•	•
		8 NODE					S	•	S
SOLID ELEMENTS	TETRA- HEDRONS	4 NODE			•	•	•	D	
	WEDGES	6 NODE		•	•	•	•	D	I
		15 NODE						•	I
	HEXA- HEDRONS	8 NODE		•	•	•	•	•	•
		20 NODE				S		•	S
PIPE ELEMENTS	STRAIGHT			•	•	•	•	•	
	ELBOW			•	•		•	•	
	TEE				•				

NOTES:

- S Includes subparametric forms with fewer nodes
- C Also includes cubic isoparametric element with two midside nodes
- D Degenerate case

STRUCTURAL ANALYSIS  
ELEMENT/MATRIX LIBRARY (continued)













41

ELEMENT			PROGRAM					
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
GENERAL STIFFNESS ELEMENTS	SPRING		1	•		•	•	•
	SCALAR SPRING				•			
	6 x 6 or 12 x 12 MATRIX			•	•	•		•
	GENERAL MATRIX				•			
MASSES	ELEMENT	LUMPED (DIAGONAL)	2	2	2	2		
		CONSISTENT			2	2	2	
	NON-STRUCTURAL	SCALAR (DOF)			•		•	
		NODAL	•	•	•	•		
		DISTRIBUTED			•			
	GUYAN REDUCTION			•	•	•		
	GENERAL MATRIX				•	•		
DAMPING	SCALAR				•			
	DASHPOT					•	•	
	DISCRETE VISCOUS $[C] = \alpha[K] + \beta[M]$		•		•	•	•	
	STRUCTURAL $(1 + i\eta)[K]$				•			
	MODAL VISCOUS		•	•	•		•	
	GENERAL MATRIX				•	•		
OTHER ELEMENTS	GAP						•	•
	FRICTION						•	•
	RIGID			3	•	•		
	REDAR SOLID							•
	ELASTIC FOUNDATION							•
	CRACK TIP					•	•	
	LAMINATED SHELL						•	•
	PLOT ONLY					•		

NOTES:  
 1 See restraints  
 2 Generated from density  
 3 See constraints



## HEAT TRANSFER—CONDUCTING ELEMENTS

ELEMENT			PROGRAM					
			EASEZ	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	
LINEAR		/			•	•	•	
PLANAR	3 NODE TRIANGLE				•	•	•	P
	4 NODE QUAD				•	•	•	
	8 NODE QUAD					S	•	C
	TRANSVERSE CONDUCTING SHELL					•		
AXISYMMETRIC	TRIANGULAR RING				•	•	•	T
	4 NODE QUAD RING				•	•	•	
	8 NODE QUAD RING					S	•	C
SOLID	TETRAHEDRON				•	•		
	WEDGE				•	•	•	D
	8 NODE BRICK				•	•	•	
	15 NODE WEDGE							D
	20 NODE BRICK						•	
GENERAL MATRIX INPUT					•			

## NOTES:

- S Contains subparametric forms with fewer number of nodes
- P Also contains parabolic isoparametric element with one midside node
- C Also contains cubic isoparametric element with two midside nodes
- D Degenerate case

# COORDINATE SYSTEMS AND MATERIAL PROPERTIES

43

			PROGRAM					
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	
FEATURE								
COORDINATE SYSTEMS	BASIC (GLOBAL)	CARTESIAN	*	*	*	*	*	
		CYLINDRICAL	*	*	*	*		
		SPHERICAL			*	*		
		GENERAL					1	
	SKEWED (LOCAL)	CARTESIAN	*	*	*	*	*	
		CYLINDRICAL	*	*	*	*		
		SPHERICAL			*	*		
		GENERAL					1	
			MIXED	*	*	*	*	*
	MATERIAL PROPERTIES		ISOTROPIC	*	*	*	*	*
		2-D ORTHOTROPIC		*	*	*	1	
		3-D ORTHOTROPIC				*	1	
		TEMPERATURE DEPENDENT	*		*	*	*	
		STRESS DEPENDENT			*	*	*	
		TIME DEPENDENT				*	*	
		NONLINEAR ELASTIC					*	
WORK HARDENING			ISOTROPIC				*	*
			KINEMATIC				*	*
			COMBINED					*
			ORNI. 10 CYCLE					*
		GENERAL					1	

NOTES:

1 Performed by user subroutine

# BOUNDARY CONDITIONS

FEATURE			PROGRAM					
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	
LOADING	STATIC	CONCENTRATED	•	•	•	•	•	
		DISTRIBUTED (BEAM)	•	•	•	•	•	
		PRESSURE	PLATES/SHELLS	•	•	•	•	•
			AXISYMMETRIC ELEMENTS			•	•	•
			SOLIDS	•	•	•	•	•
		TEMPERATURE	•	•	•	•	•	
		ACCELERATION	•	•	•	•	•	
		ROTATIONAL VELOCITY	•	•	•	•	1	
		COMBINATION	•	•	•	•		
		AXI-SYMMETRIC	AXISYMMETRIC SHELLS			•	•	
	AXISYMMETRIC RINGS					•		
	DYNAMIC	TIME DEPENDENT	•	•	•	•	•	
		FREQUENCY DEPENDENT		•	•			
		PSD RANDOM		•	•			
SHOCK SPECTRUM		•	•		•			
DISPLACEMENT CONSTRAINTS	SINGLE POINT*	•	•	•	•	•		
	MULTI POINT*	2		•	•	•		
	SPECIFIED NONZERO DISPLACEMENT	•	•	•	•	•		
HEAT TRANSFER	HEAT SOURCE/SINK			•	•	•		
	CONVECTION			•	•	•		
	RADIATION			•	•	•		
	SPECIFIED TEMPERATURE			•	•	•		

TES: \*Single point constraint = enforced zero translation(s) and/or rotation(s) in coordinate(s) associated with a node point  
 Multi-point constraint = enforced linear constraint relationships between translation(s) and/or rotation(s) which may be associated with different node points

- 1 Applies to some elements
- 2 Specialized forms of rigid and interface coupling
- 3 Displacement components set equal on different nodes
- 4 Stand alone program

PRE- AND POST-PROCESSING

45

FEATURE			PROGRAM					
			EASE2	STARDYNE	NASTRAN	ANSYS	MARC	SUPERB
PLOTTING	INPUT	UNDEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		NODE LABELS	+	+	•	•	•	•
		ELEMENT LABELS	+		•	•	•	•
		PROPERTY LABELS			•	•		•
		2-D SECTIONS				•	•	
		BOUNDARY CONDITION LABELS	+		•			
		HIDDEN LINES REMOVED					+	
	OUTPUT	DEFORMED GEOMETRY	+	•	•	•	•	•
		CONTOURS 2D STRUCTURE		+	•	•	•	•
		CONTOURS SOLID STRUCTURE				•	•	•
		TIME HISTORY	4	•	•	•	+	
		FREQUENCY RESPONSE		•	•,4			
		POWER SPECTRAL DENSITY		•	•,4			
		ARBITRARY X VS. Y				•	+	
DATA GENERATION	NODES	1	1,2	1,2,3	1,2	2,3	1,2	
	ELEMENTS	1	1	1,2,3	1,2	2,3	1,2	
	RESTRAINTS	1	1	1,2	1	2,3	1	
	LOADS	1	1	2	1	2,3	1	
OUTPUT SORTING	BY LOAD CASES		•	•	•	•	•	
	BY ELEMENT	•		•				
	MAX/MIN SUMMARY	•	•	•			•	
	SELECTED NODES AND/OR ELEMENTS		•	•	•	•		
BANDWIDTH MINIMIZATION			•	•	•	W	•,W	+,1

NOTES:

- 1 Generates data in 1 "dimension"
- 2 Generates data in 2 "dimensions"
- 3 Generates data in 3 "dimensions"
- 4 Printer plots
- Stand alone program
- W Wavefront solution

p. 10 of 10

NISA ELEMENT LIBRARY

ELEMENT TYPE	DEGREES OF FREEDOM	DISPLACEMENT ORDER		CUBIC	LINEAR PARABOLIC	LINEAR PARABOLIC	LINEAR CUBIC	PARABOLIC CUBIC	LINEAR PARABOLIC CUBIC
		LINEAR	PARABOLIC						
2D ISOPARAMETRIC PLANE STRESS* PLANE STRAIN* AXISYMMETRIC*	UX UY								
3D ISOPARAMETRIC GENERAL SHELL DESCRIBED BY MIDDLE SURFACE NODES	UX UY UZ RX RY RZ								
3D ISOPARAMETRIC THICK SHELL* DESCRIBED BY TOP AND BOTTOM NODES	UX UY UZ								
3D ISOPARAMETRIC HEXAHEDRON	UX UY UZ				<ul style="list-style-type: none"> <li>• STRAIGHT BEAM 3D 2D - SYM ASYM</li> <li>• STRAIGHT BEAM WITH OFFSETS 3D 2D SYM, ASYM, *</li> <li>• SPAR 3D 2D 1D</li> <li>• AXIAL SPRING 3D 2D 1D</li> <li>• TORSIONAL SPRING 3D 2D 1D *</li> </ul> <p style="text-align: center;">MASS ELEMENTS</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 1D MASS (Mx = M)</li> <li>• 2D MASS (Mx = M, My = M)</li> <li>• 3D MASS (Mx = M, My = M, Mz = M)</li> <li>• 2D GENERAL MASS (Mx, My, Iz)</li> <li>• 3D GENERAL MASS (Mx, My, Mz, Ix, Iy, Iz)</li> </ul>				
3D ISOPARAMETRIC SUPER SHELL*	AT CORNER NODES: UX UY UZ AT MIDDLE NODES: UX UY UZ RX RY								
OTHER ELEMENTS									
NEW ELEMENTS	6-NODE 	18-NODE 	9-NODE 	12-NODE 	ANISYMMETRIC ELEMENT WITH UNSYMMETRIC LOADING 8-NODE 	SANDWICH SHELLS TYPICAL CONSTRUCTION METAL-FOAM METAL COMPOSITE HONEY COMB-COMPOSITE MAY BE MULTI-TIERED 		LAMINATED COMPOSITE SHELLS SYMMETRICAL OR UNSYMMETRICAL LAYUP 	

\* THESE ELEMENTS ARE ALSO AVAILABLE FOR STEADY STATE AND TRANSIENT HEAT TRANSFER, SEEPAGE, TORSION AND OTHER FIELD PROBLEMS

9/8

The user (designer, draftsman, engineer or technician) interacts with a CAD system through applications software. The programs "talk" the user's language as opposed to the computer implementation language which is, hopefully, isolated from the user in lower levels of utilities and system software. The usefulness of applications software is related to the human engineering of its interface with the user (command language, user I/O hardware devices, software design, etc.) as much as the technical content and features of the program.

Applications software can be divided into two categories: standalone and turnkey. The standalone software is available from a software vendor and frequently runs on several different manufacturer's computers. The turnkey software is available as part of a packaged hardware/software system from a turnkey vendor. The turnkey vendor typically buys computer equipment from a computer manufacturer and combines this with his own software, hardware packaging, and workstation design. A few turnkey vendors offer modified software from another software vendor. A few also produce their own hardware components, particularly microprocessors for speeding up interactive graphics response.

Standalone applications software has the primary advantage of flexibility. It often can be implemented on computers over a broad size/speed range in organizations having diverse computing machinery. Standalone software dominates engineering analysis, where turnkey systems either don't offer capabilities or are very weak. Turnkey systems, on the other hand, have the primary advantage of being available from one source, avoiding the potential problems of multi-vendor scenarios. They have achieved a dominance in the area of geometric modeling and drafting (particularly 2D).

This section reviews the standalone applications software used in CAD. Turnkey systems are discussed in Section VII. The big news in standalone CAD software is the migration to smaller computers.

CAD Software Vendors/Distributors

1. Professor K. J. Bathe  
Massachusetts Institute of  
Technology  
Room 3-365  
Cambridge, MA 02139
2. Swanson Analysis Systems, Inc.  
Box 65  
Houston, PA 15342
3. Merlin Technologies, Inc.  
977 Town and Country Village  
San Jose, CA 95128
4. Atkins Research and  
Development  
Woodcote Grove, Ashley Road  
Epsom, Surrey, U.K.
5. IKOSS GmbH.  
Vaihinger Str. 49  
D-7000 Stuttgart 80  
West Germany
6. C.E.G.B.  
Berkeley Nuclear Labs.  
Gloucestershire, England
7. Engineering Information  
Systems, Inc.  
5120 Campbell Ave.  
Suite 240  
San Jose, CA 95130
8. COSMIC  
112 Barrow Hall  
University of Georgia  
Athens, GA 30602
9. MacNeal-Schwendler Corp.  
7442 North Figueroa Street  
Los Angeles, CA 90041
10. Marc Analysis Research Corp.  
250 Sheridan, Suite 200  
Palo Alto, CA 94036
11. Universal Analytics, Inc.  
7740 W. Manchester Bldg.  
Playa del Ray, CA 90291
12. Engineering Mechanics  
Res. Corp.  
P.O. Box 696  
Troy, MI 48099
13. PAFEC, Ltd.  
Strelley Hall  
Main Street, Strelley  
Nottingham, NG8 6PE  
England
14. SAP Users Group  
Denney Research Bldg., USC  
University Park  
Los Angeles, CA
15. A. S. Computas  
Veritasveien 1  
P.O. Box 310  
N-1322 Hovik, Norway
16. GTICES Systems Laboratory  
School of Civil Engineering  
Georgia Institute of Tech.  
Atlanta, GA 30332
17. Structural Dynamics Research  
Corporation  
2000 Eastman Drive  
Milford, OH 45150
18. T-Programm GMBH  
Gustav-Werner-Str. 3  
D-7410 Reutlingen  
West Germany
19. MCAUTO  
Dept. K161/270A  
P.O. Box 515  
St. Louis, MO 63166
20. SIA Ltd.  
23 Lower Belgrave Street  
London, SW 1  
England
21. Jordan, Apostol, Ritter  
Assoc. Inc.  
Administration Bldg. 7  
Davisville, RI 02854

22. Interactive Graphics Engineering Lab  
University of Arizona  
College of Engineering  
AME Bldg. 16, Room 210A  
Tucson, AZ 85721  
(602) 626-1650
23. PDA Engineering  
1740 Garry Ave., Suite 201  
Santa Ana, CA 92705  
USA
24. Manufacturing & Consulting Services  
3195A Airport Loop Drive  
Costa Mesa, CA 92626
25. Lockheed, Burbank  
Building 67, Plant A-1  
Department 8034  
Burbank, CA 91501
26. Evans and Sutherland Computer Corp.  
580 Arapeen Drive  
Salt Lake City, Utah 84108
27. Production Automation Project  
College of Engineering and Applied Science  
University of Rochester  
Rochester, NY 14627
28. MAGI  
3 Westchester Plaza  
Elmsford, NY 10523
29. MATRA-Datavision UK, Ltd.  
Systems Engineering Laboratories  
Rafferty House  
2-4 Sutton Court Road  
Sutton, Surrey SM1 4SY  
England
30. MCAUTO  
Dept. K507  
P.O. Box 516  
St. Louis, MO 63166
31. Technische Datenverarbeitung  
A-8010, Graz  
Luthergasse 4, Austria
32. Washington University  
Technology Associates  
8049 Litlinger Road  
St. Louis, MO 63144
33. SCIA  
Attenrodestraat 6  
3385 Meensel-Kiezegem  
Belgium
34. Advanced Engineering Consultants AB  
Box 3044  
S-580 03 Linköping  
Sweden
35. Engineering Computer Services, Ltd.  
Piccadilly, Tamworth, Staffs  
B78 2ER, England
36. Computational Mechanics  
125 High Street  
Southampton, Hampshire  
SO1 0AA, England
37. SOCOTEC  
"Les Quadrants"  
3 Avenue du Centre  
78102 St Quentin en Yvelines  
Cedex, France
38. Dr. Edward L. Wilson  
1050 Leneve Place  
El Cerrito, CA 94530
39. IMSI, Inc.  
5th Floor NBC Building  
7500 Bellaire Blvd.  
Houston, TX 77036
40. A. D. Little, Inc.  
20 Acorn Park  
Cambridge, MA 02140
41. Quadrex Corporation  
1700 Dell Avenue  
Campbell, CA 95008



22. Interactive Graphics  
Engineering Lab  
University of Arizona  
College of Engineering  
AME Bldg. 16, Room 210A  
Tucson, AZ 85721  
*(602) 626-1650*
23. PDA Engineering  
1740 Garry Ave., Suite 201  
Santa Ana, CA 92705  
USA
24. Manufacturing & Consulting  
Services  
3195A Airport Loop Drive  
Costa Mesa, CA 92626
25. Lockheed, Burbank  
Building 67, Plant A-1  
Department 8034  
Burbank, CA 91501
26. Evans and Sutherland  
Computer Corp.  
580 Arapahoe Drive  
Salt Lake City, Utah 84108
27. Production Automation  
Project  
College of Engineering and  
Applied Science  
University of Rochester  
Rochester, NY 14627
28. MAGI  
3 Westchester Plaza  
Elmsford, NY 10523
29. MATRA-Datavision UK, Ltd.  
Systems Engineering  
Laboratories  
Rafferty House  
2-4 Sutton Court Road  
Sutton, Surrey SM1 4SY  
England
30. MCAUTO  
Dept. K507  
P.O. Box 516  
St. Louis, MO 63166
31. Technische Datenverarbeitung  
A-8010, Graz  
Luthergasse 4, Austria
32. Washington University  
Technology Associates  
8049 Litlinger Road  
St. Louis, MO 63144
33. SCIA  
Attenrodestraat 5  
3385 Meeneel-Kiezegam  
Belgium
34. Advanced Engineering  
Consultants AB  
Box 3044  
S-580 03 Linköping  
Sweden
35. Engineering Computer  
Services, Ltd.  
Piccadilly, Tamworth, Staffs  
B78 2ER, England
36. Computational Mechanics  
125 High Street  
Southampton, Hampshire  
SO1 0AA, England
37. SOCOTEC  
"Les Quadrants"  
3 Avenue du Centre  
78182 St Quentin en Yvelines  
Cedex, France
38. Dr. Edward L. Wilson  
1050 Leneve Place  
El Cerrito, CA 94530
39. IMSL, Inc.  
5th Floor NBC Building  
7500 Bellaire Blvd.  
Houston, TX 77036
40. A. D. Little, Inc.  
20 Acorn Park  
Cambridge, MA 02140
41. Quadrex Corporation  
1700 Dell Avenue  
Campbell, CA 95008

42. Structural Software Development  
1930 Shattuck Avenue  
Berkeley, CA 94704
43. MCAUTO  
Dept. K246  
P.O. Box 516  
St. Louis, MO 63166
44. AAA Technology and Specialities Co., Inc.  
P.O. Box 37189  
Houston, TX 77035
45. Fitech, Ltd.  
Mississippi State Univ.  
Drawer KJ  
Mississippi State, MS 39762
46. Mr. Ronald T. Bradshaw  
85 Central Street  
Waltham, MA 02154
47. Gulley Computer Associates  
2300 E. 14th  
Tulsa, OK 74104
48. Structural Members Users Group, Ltd.  
P.O. Box 3958  
Univ. of Virginia Station  
Charlottesville, VA 22903
49. Genesys Limited  
Lisle Street  
Loughborough, LE110AY  
England
50. ECOM Associates  
5678 W. Brown Deer  
Milwaukee, WI 53223
51. Synercom Technology  
P.O. Box 27  
Sugarland, TX 77478
52. CONCAP Computing Systems  
7700 Edgewater Drive  
Suite 700  
Oakland, CA 94621
53. Structural Programming, Inc.  
83 Boston Post Road  
Subury, MA 01776
54. Shabler Associates  
1959 Chalice Way  
Toledo, OH 43613
55. SysComp Corporation  
2042 Broadway  
Santa Monica, CA 90404
56. Kolguin and Associates, Inc.  
5822 Cromo Drive  
P.O. Box 12990  
El Paso, TX 79912
57. Zeiler-Pennock, Inc.  
2727 Bryant Street  
Denver, CO 80211
58. Stress Analysis Associates  
4529 Angeles Crest Highway  
Suite 104  
La Canada, CA 91011
59. Computer Mart  
568 West 14 Mile Road  
Clawson, MI 48017
60. Northern Research and Engineering Corp.  
39 Olympia Avenue  
Woburn, MA 01801

Software Referral Catalogs

1. HP 1000 Guide to OEMs and Software Suppliers  
OEM Market Development  
Hewlett-Packard Data Systems Division  
11000 Wolfe Road  
Cupertino, CA 95014
2. Engineering System Software Referral Catalog  
Digital Equipment Corp.  
Engineering Systems Group  
200 Forest Street  
Marlboro, MA 01752

Distribution Agencies for Software

1. ASIAC (Aerospace Structures Information and Analysis Center)  
AFFDL/FBR  
Wright Patterson Air Force Base  
Dayton, OH 45433
2. CEPA (Society for Computer Applications in Engineering,  
Planning and Architecture, Inc.)  
358 Hungerford Drive  
Rockville, MD 20850
3. COSMIC  
Suite 112, Barrow Hall  
The University of Georgia  
Athens, GA 30602
4. National Information Service-Earthquake Engineering Computer  
Applications  
519 Davis Hall  
The University of California, Berkeley  
Berkeley, CA 94720
5. National Technical Information Center  
5285 Port Royal Road  
Springfield, VA 22161
6. NESC (National Energy Software Center)  
9700 South Cass Avenue  
Argonne, IL 60439



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA**

**APLICACIONES: ANALISIS ESTATICOS**

Jorge Angeles Alvarez  
Profesor de Ingeniería Mecánica  
División de Estudios de Posgrado  
Facultad de Ingeniería, UNA.

MARZO, 1984.

El MEF es particularmente útil en el proceso de diseño para localizar puntos en los que pueda presentarse falla por un esfuerzo excesivo. Esto requiere el uso de un programa de elemento finito. El programa, a su vez, requiere que el usuario le suministre información respecto a la geometría y a la constitución material del elemento de máquina que va a analizarse, así como respecto a los apoyos y las cargas aplicadas. Estos dos últimos conceptos constituyen lo que se conoce como condiciones de frontera. Una vez realizado el análisis mediante el programa utilizado, los resultados son arrojados en forma numérica mediante un listado, o bien en forma gráfica. El suministro de datos al programa constituye lo que se conoce como preprocesamiento, mientras que el suministro de resultados, posprocesamiento. Tanto para el pre- como para el posprocesamiento se requiere contar con sistemas de cómputo (programas y subprogramas) que constituyen lo que se llama software, además de equipo (graficadores, digitalizadores, tubos de rayos catódicos, interfaces), que constituye lo que se llama hardware. En la Fig 6.1 se muestra el equipo básico requerido por el MEF.

El análisis estático de elementos de máquina se presenta mediante un ejemplo de diseño de máquinas. En la Fig 6.2 se muestra el eslabón de una cadena de transmisión que en operación ha fallado en el punto 1. El fabricante supone que se trata de un problema de concentración de esfuerzo, por lo que ha pedido un análisis mediante elemento finito. Se conoce el material de que está compuesto el eslabón, por lo que se conoce su módulo de elasticidad,  $E$ , y se supondrá que presenta un comportamiento linealmente elástico. Dada la doble simetría del eslabón con respecto a los ejes  $y-y'$  y  $z-z'$ , y de las cargas aplicadas, bastará con analizar un cuarto de él, según se muestra en la Fig 6.2 (c). La malla de esta figura consiste de elementos triangulares constantes, esto es, que se supone tienen una distribución uniforme de esfuerzo. Esta malla se genera automáticamente de la siguiente forma :

- i) Con ayuda del digitalizador se proporcionan las coordenadas de los puntos  $P_1, P_2, P_3, \dots$  etc. de la Fig 6.3, seleccionados con un espaciamiento adecuado sobre un dibujo constructivo.
- ii) El generador automático de mallas (software) produce el contorno de la Fig 6.3 mediante interpolación lineal entre los puntos dados. Este generador requiere una partición de toda la pieza en las partes señaladas en esa figura como 1, 2, 3 y 4, que contienen aproximadamente la misma área.
- iii) Mediante una instrucción, el generador automático de mallas produce una malla bien de elementos triangulares, como la de la Fig 6.4, o bien una de elementos cuadriláteros, como la de la Fig 6.5.
- iv) Mediante un minimizador de banda, se numeran los nodos en forma tal que se produzca una matriz de rigidez de banda mínima. En la Fig 6.6 se muestran diferentes formas de numeración de elementos en una viga rectangular, que producen diferentes anchos de banda.
- v) Mediante un balanceador de mallas se eliminan los elementos de lados muy desiguales. En el ejemplo del eslabón de la cadena de transmisión (Figs 6.4 y 6.5), los elementos están bastante balanceados ; pero en una pieza de geometría más complicada, como una carcasa de bomba, los elementos de la malla generada automáticamente pueden ser muy desbalanceados. En la Fig 6.7 se muestra la malla de una carcasa de bomba con elementos triangulares muy desbalanceados, mientras que en la Fig 6.8 se muestra esa misma malla una vez que ha sido balanceada.

- vi) Una vez que se ha minimizado la banda de la matriz de rigidez y que se ha disminuido su condición mediante el balanceo de su malla, se procede al cálculo propiamente dicho de elemento finito. Este produce valores de desplazamiento, de deformación y de esfuerzo en los nodos de la malla. La distribución del esfuerzo normalmente presenta discontinuidades "de salto" en los bordes de cada elemento, como se muestra en la Fig 6.9(a). Mediante un procedimiento de posprocesamiento se puede "suavizar" esa distribución, obteniéndose la de la Fig 6.9(b).
- vii) Una vez "suavizada" la distribución de esfuerzo se procede a representarla bien sea en forma bidimensional como se muestra en la Fig 6.10, o bien en forma tridimensional como en las Figs 6.11(a) y (b).

El programa utilizado para obtener los resultados de la Fig 6.11 es el llamado ELAN, desarrollado en el Laboratorio de Máquinas Herramienta del Instituto Tecnológico Renano-Westfálico de Aquisgrán, R.F.A. El cálculo corresponde a la malla de la Fig 6.5, de elementos cuadriláteros isoparamétricos. En ese mismo Laboratorio se ha desarrollado otro programa, el llamado FINEL, que cuenta con elementos de esfuerzo constante, que, sin embargo, produce resultados satisfactorios. Con este programa se obtuvo la distribución del esfuerzo en una placa infinita sujeta a cargas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  en dos direcciones perpendiculares, con una perforación elíptica, como se muestra en la Fig 6.12. Los resultados se muestran en la Fig 6.13.

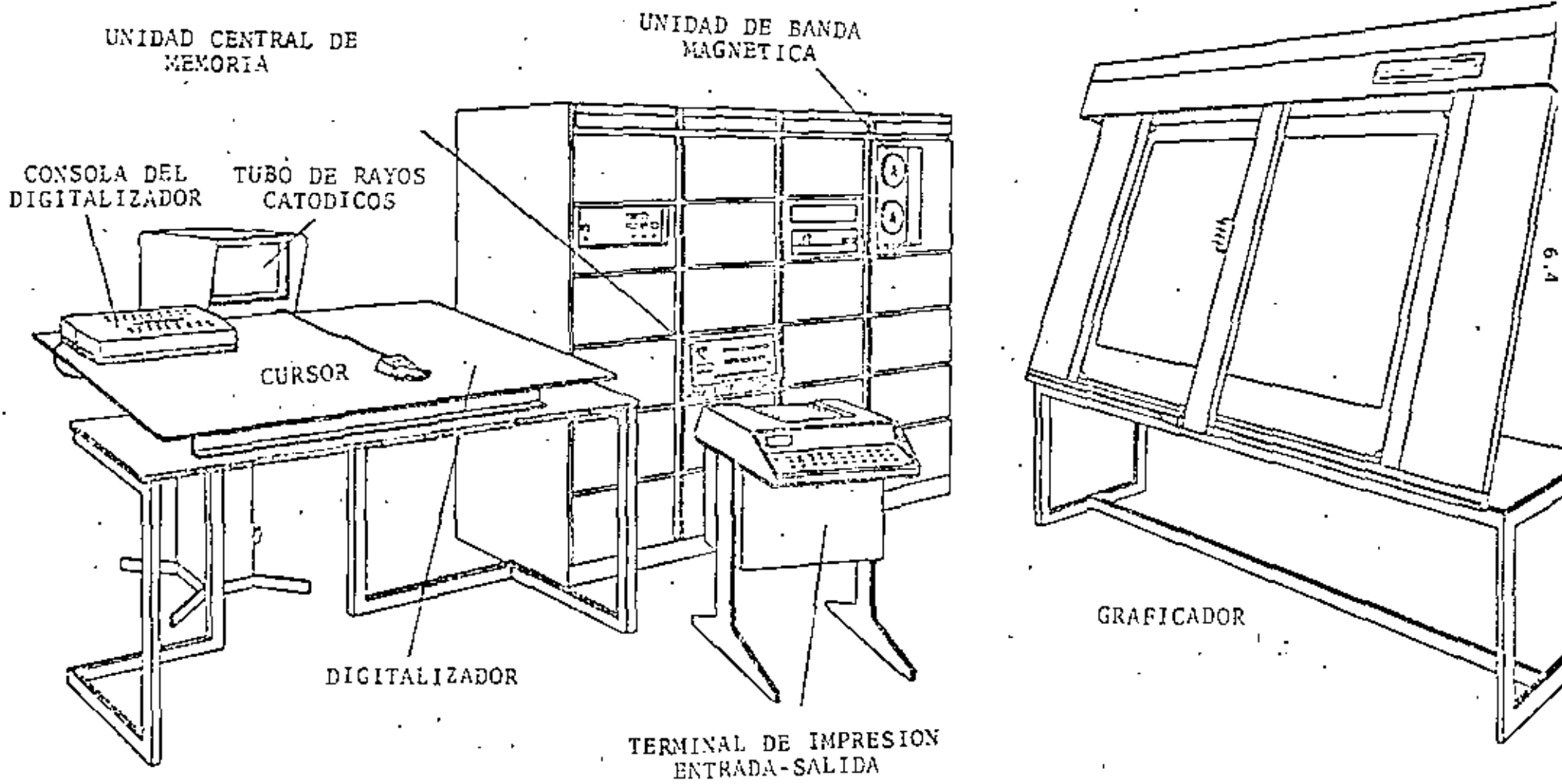


Fig. 6.1 Equipo básico requerido para el MEF (Laboratorio de Máquinas Herramienta de Aquisgrán, RFA)



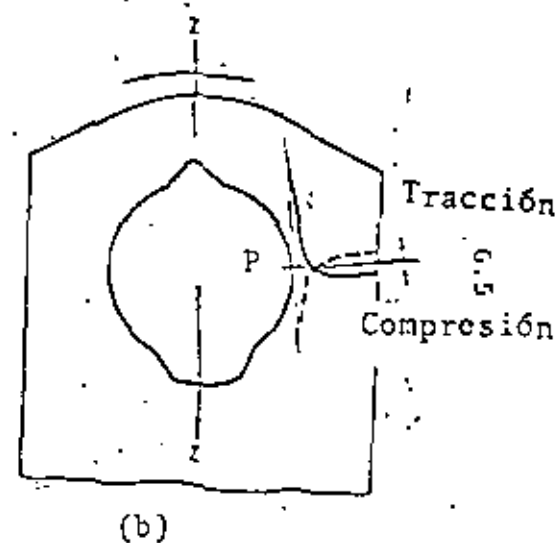
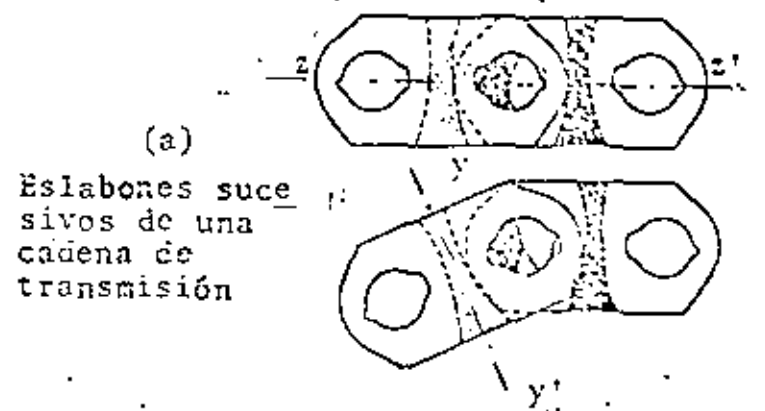
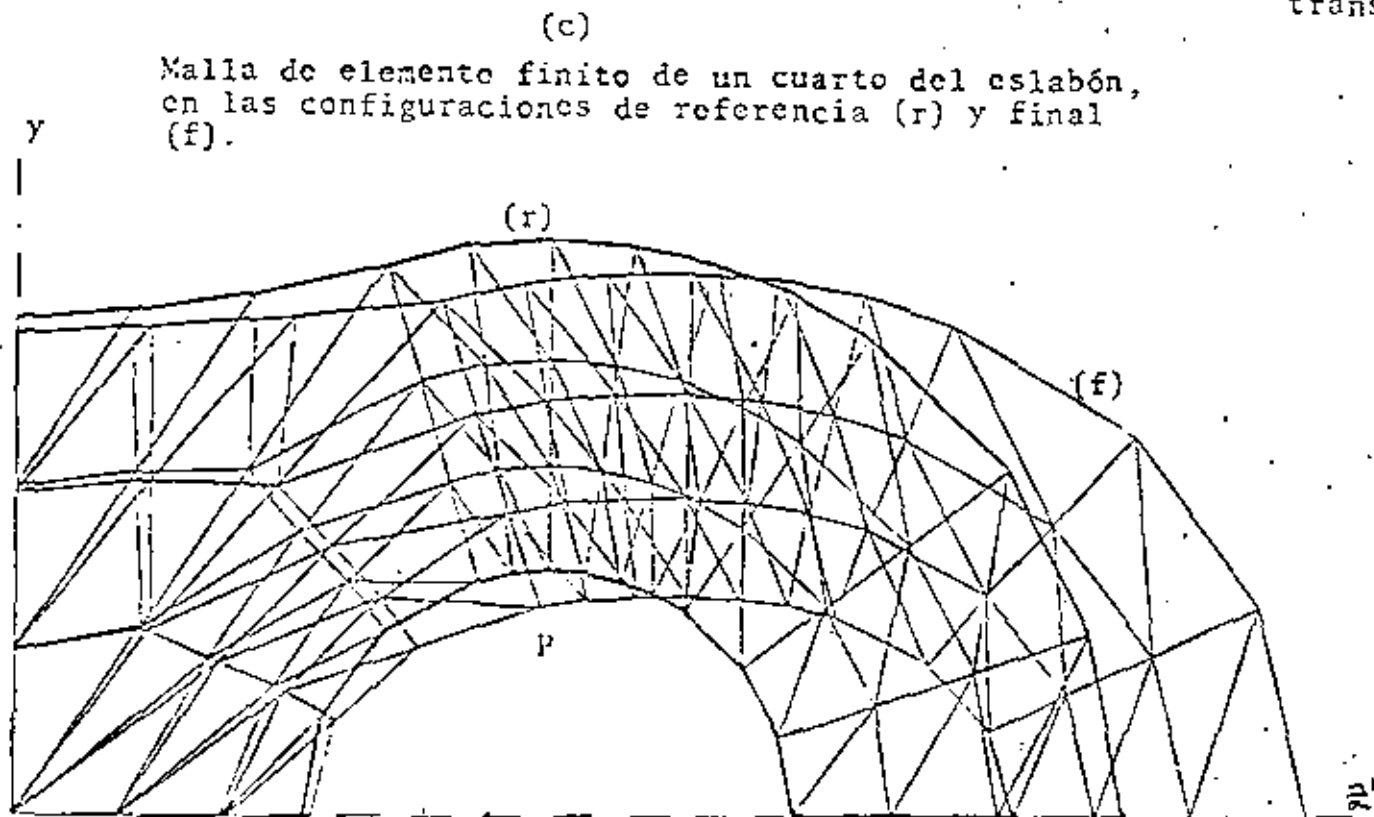


Fig. 6.2 Eslabón de una cadena de transmisión, que presenta concentración de esfuerzos en el punto P, y su modelo de elemento finito.

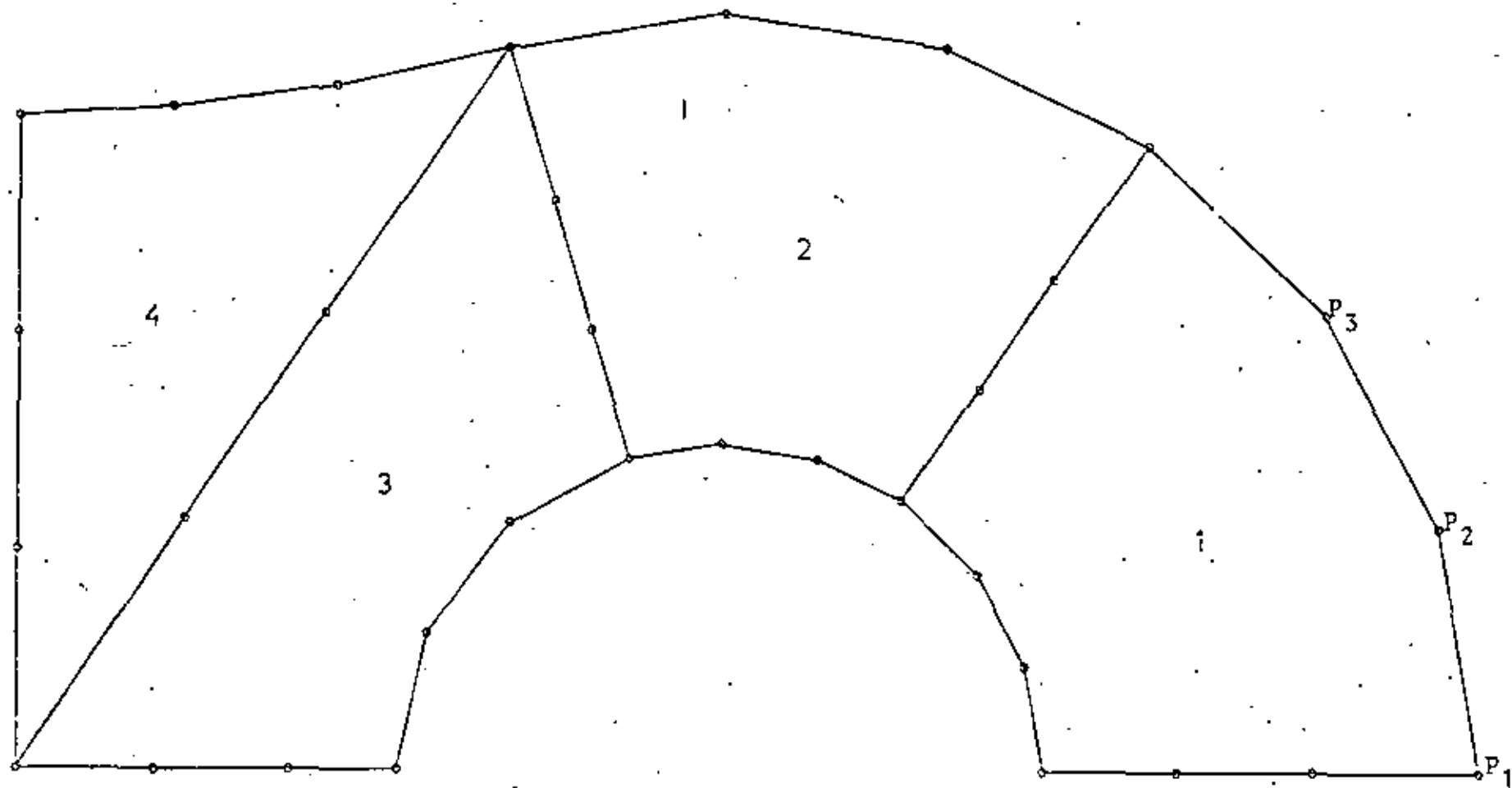


Fig. 6.3 Reproducción automática del contorno de la pieza de máquina y partición para la malla de elemento finito.

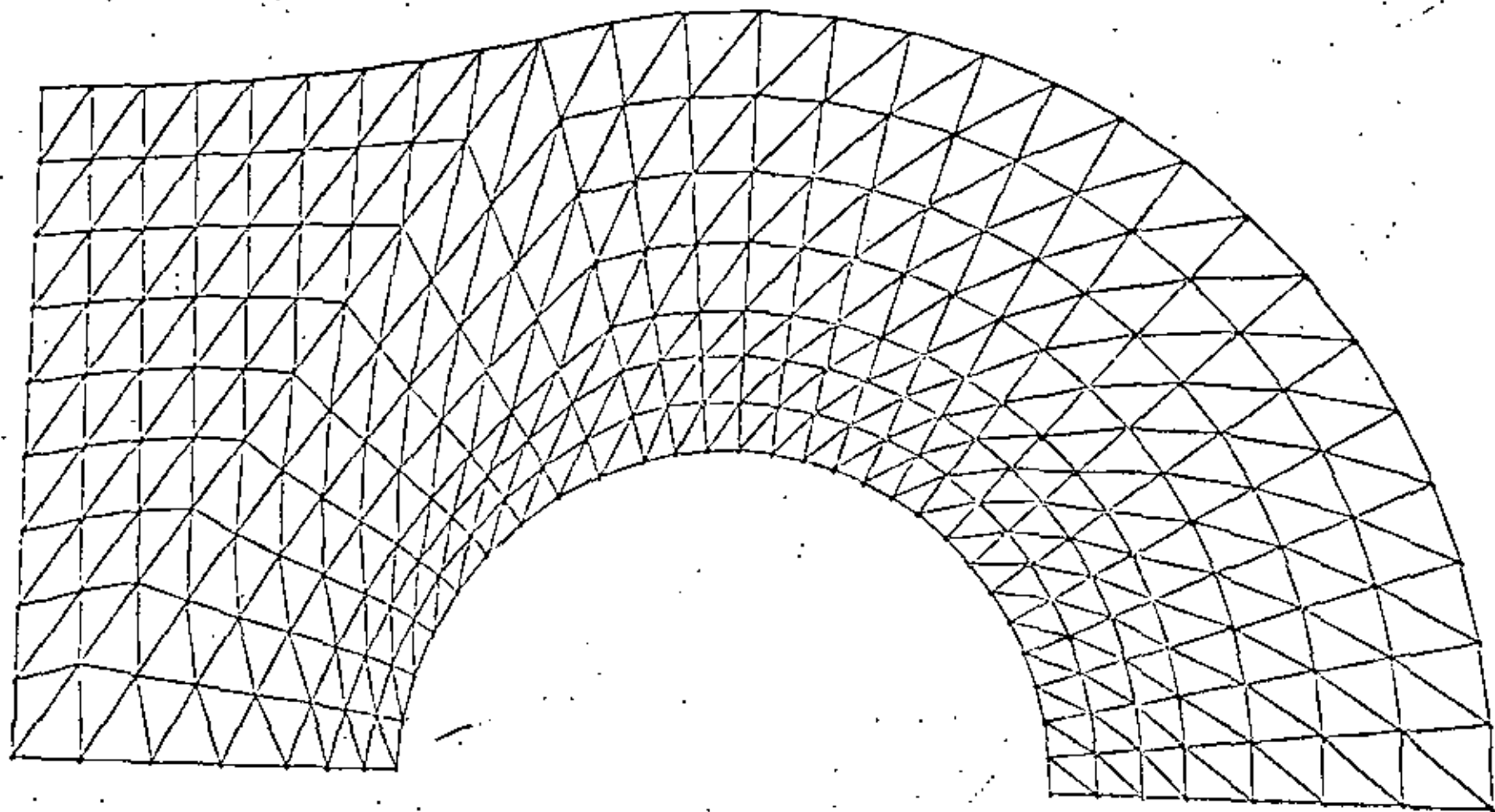


Fig. 6.4 Malla de elementos finitos triangulares, generada automáticamente, con distribución uniforme del esfuerzo en cada elemento.

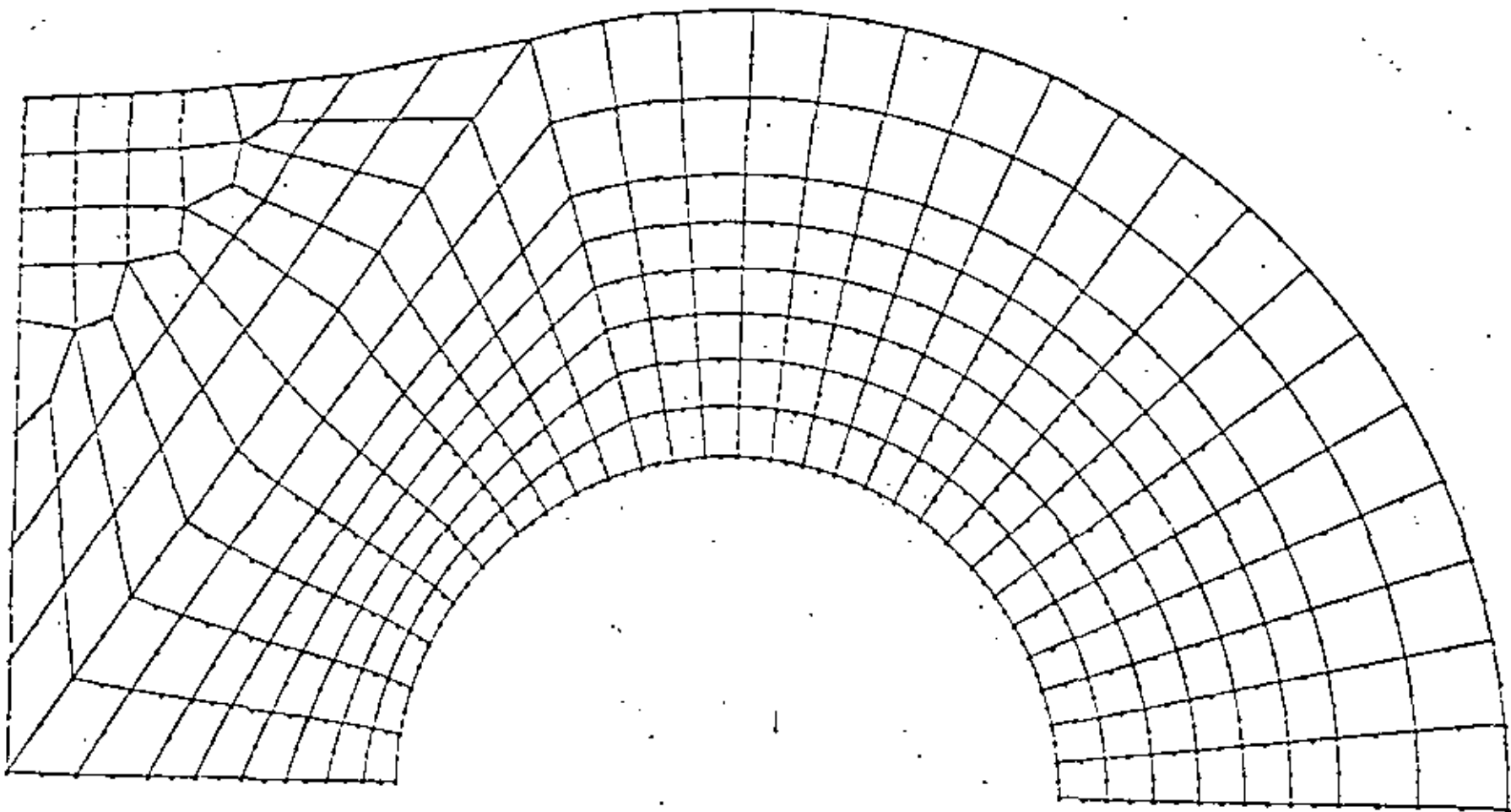


Fig. 6.5 Malla de elementos finitos (isoparamétricos) cuadriláteros, generada automáticamente.



Fig. 6.6 Minimización del ancho de banda de la matriz de rigidez de una viga, con diferente numeración de nodos. Los anchos de banda,  $d$ , obtenidos son: a)  $d=5$ ; b)  $d=11$ ; c)  $d=5$ .

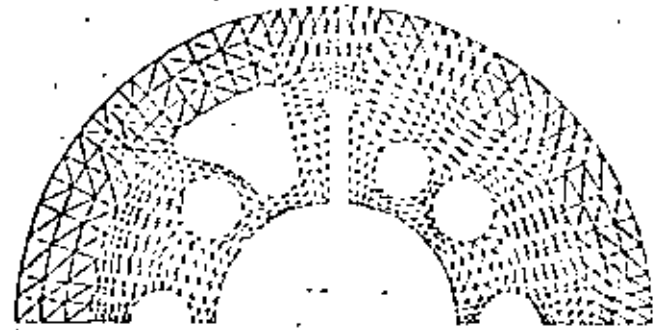
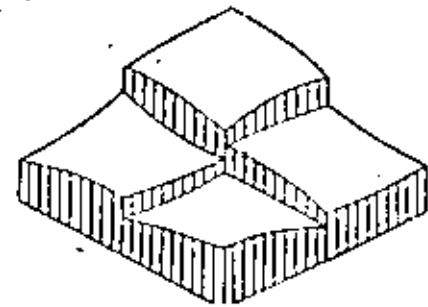
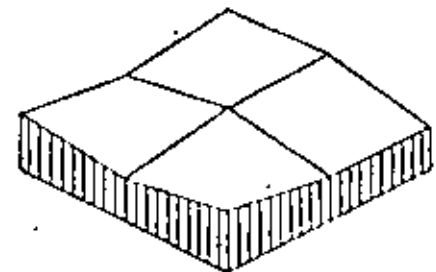


Fig. 6.7 Malla de elementos triangulares, generada automáticamente, de la carcasa de una bomba, que muestra elementos muy desbalanceados.



(a)



(b)

Fig. 6.8 Malla de elementos triangulares de la Fig. 6.7 con elementos balanceados

Fig. 6.9 Distribución del esfuerzo en elementos vecinos. (a) discontinua; (b) "suavizada".

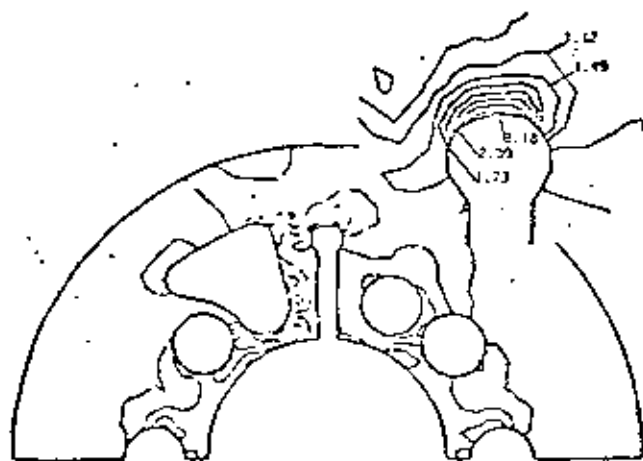
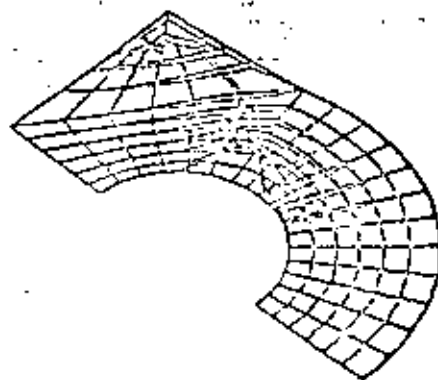
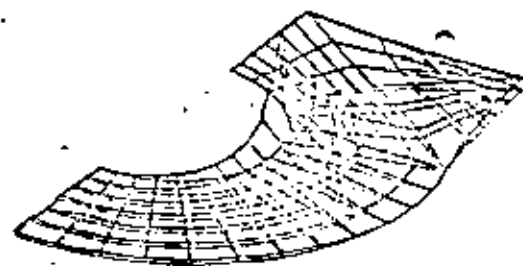


Fig. 6.10 Representación bidimensional de la distribución del esfuerzo en la carcasa de bomba de la Fig. 6.7



(a)



(b)

Fig. 6.11 Representación tridimensional de la distribución del esfuerzo en el eslabón de una cadena de transmisión, de la Fig. 6.2.

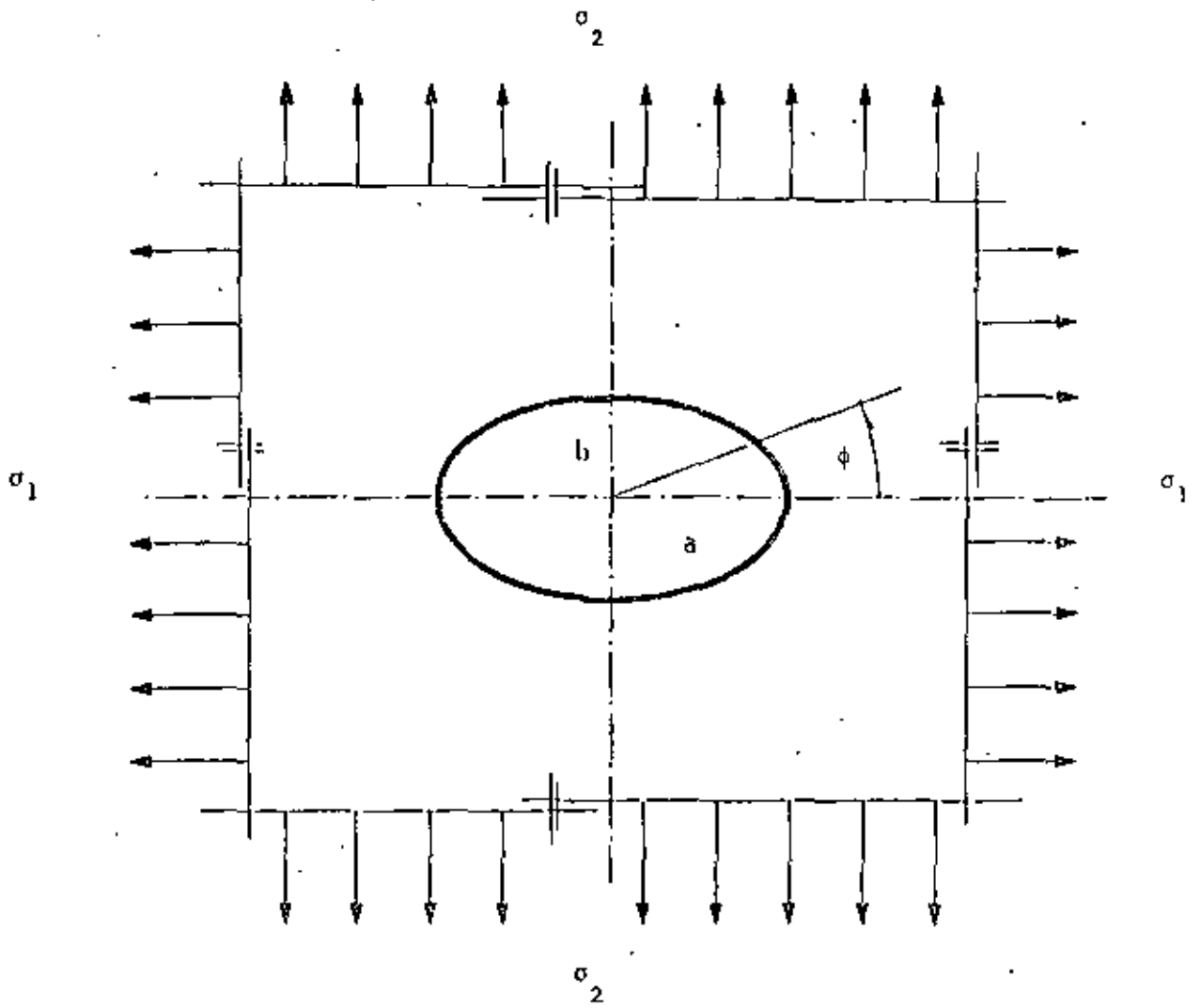


Fig 6.12 Placa cargada en dos direcciones con una perforación

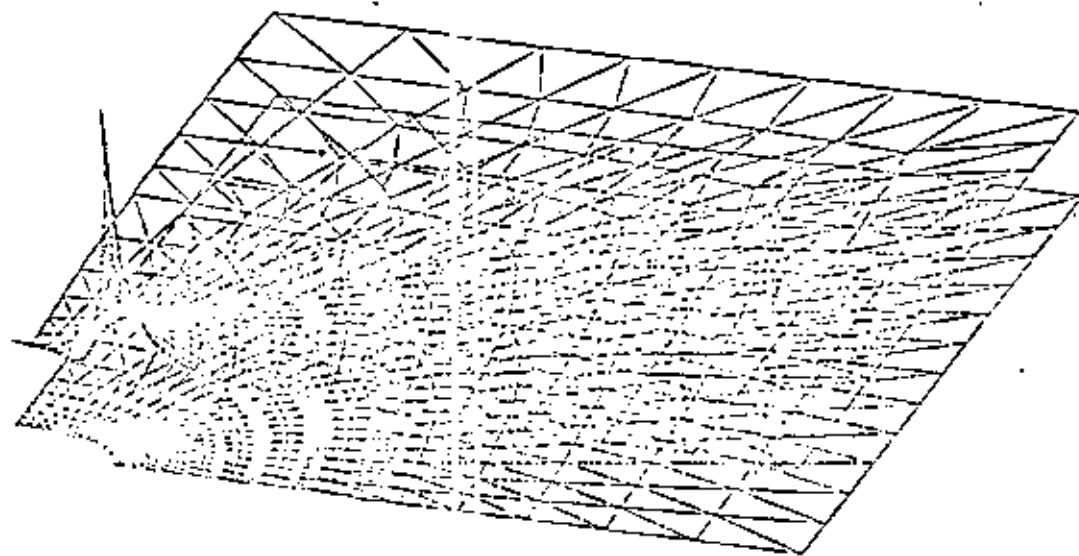


Fig. 6.1 3 Representación tridimensional de la distribución del esfuerzo en la placa de la Fig. 6.12.





DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

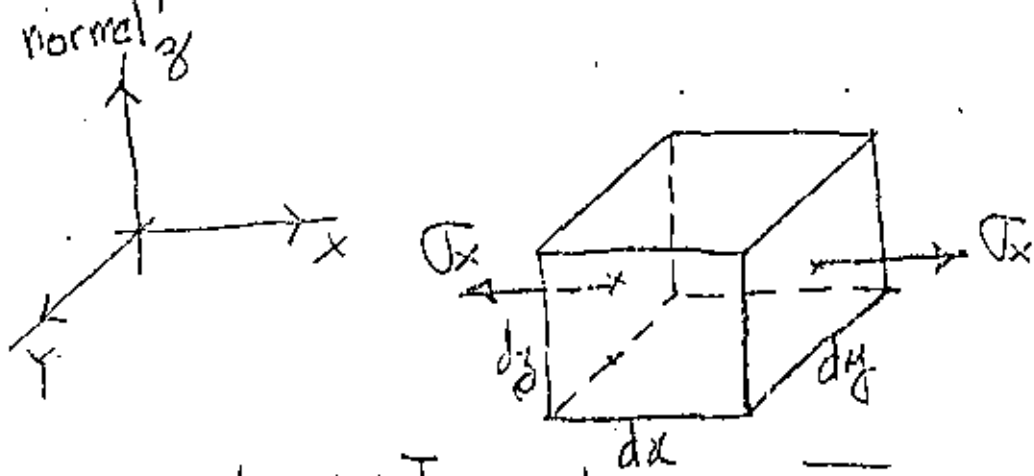
EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA

ENERGIA ELASTICA DE DEFORMACION POR ESFUERZO

Dr. Porfirio Ballesteros

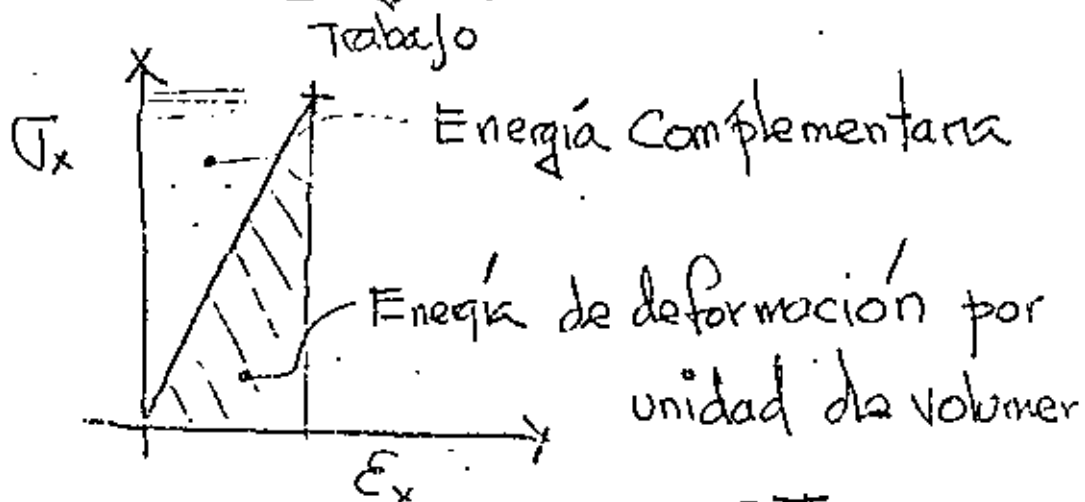
MARZO, 1984.

# Energía Elástica de Deformación por est.



$U$  energía elástica interna

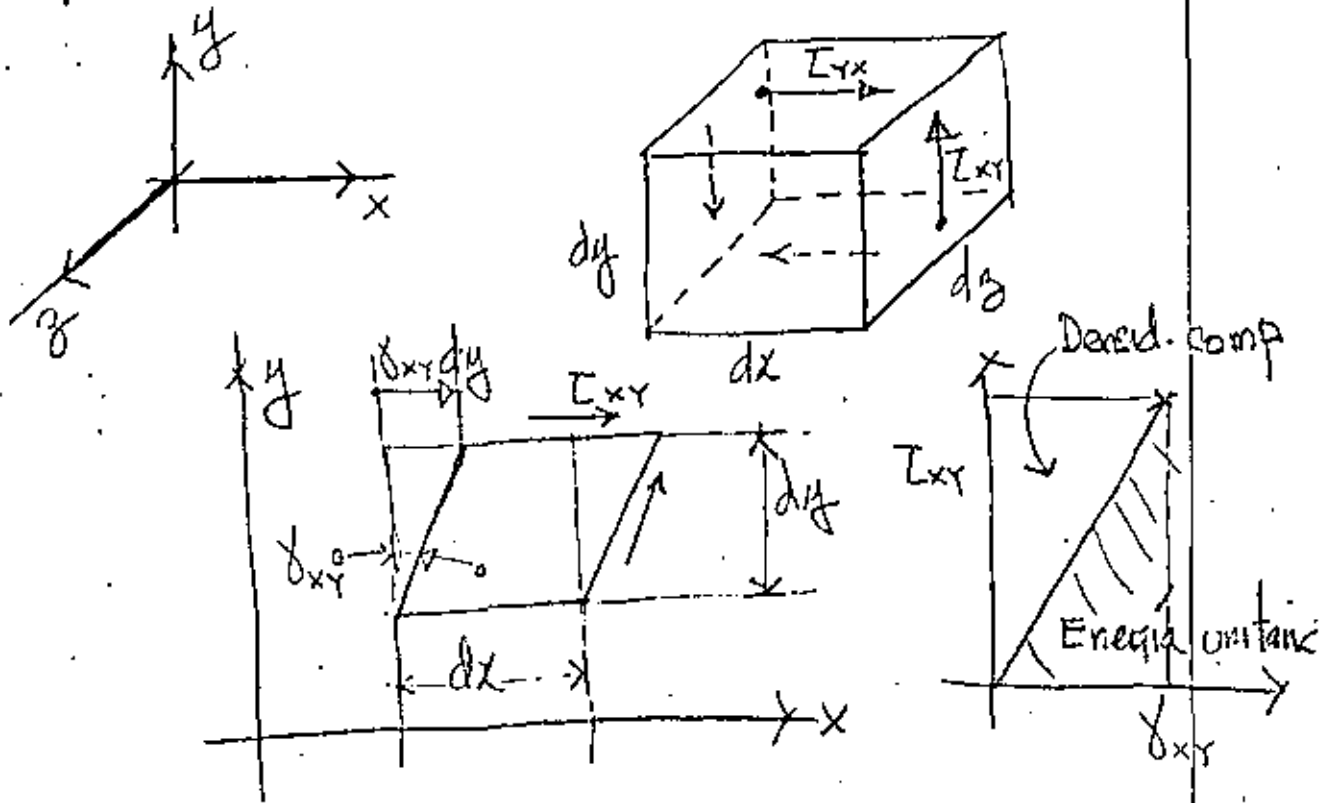
$$dU = \underbrace{\frac{1}{2} \sigma_x dy dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{e_x dx}_{\text{distancia}} = \frac{1}{2} \sigma_x e_x dx dy dz \quad (1)$$



Para un cuerpo elástico perfecto no hay disipación de energía, y el trabajo hecho por un elemento es almacenado como energía de deformación interna recuperable. De (1) la densidad de energía

$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{\sigma_x e_x}{2}$$

# Energía elástica de deformación por esfuerzos cortantes



$$dU_{\text{corte}} = \underbrace{\frac{1}{2} T_{xy} dx dz}_{\text{Fuerza promedio}} \times \underbrace{\gamma_{xy} dy}_{\text{distancia}} = \frac{1}{2} T_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (3)$$

Trabajo

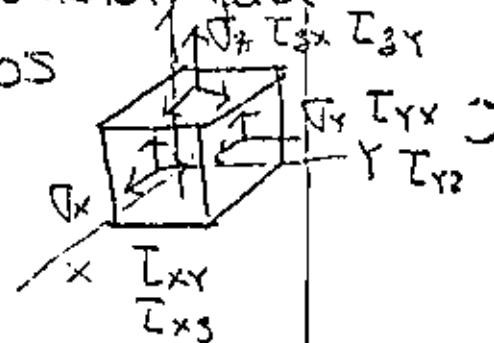
la densidad de energía por esfuerzo de corte es

$$\left(\frac{dU}{dV}\right)_{\text{corte}} = \frac{1}{2} T_{xy} \gamma_{xy} \quad (4)$$

Aceptando el principio de superposición para un estado multi axial de esfuerzos

la densidad de energía de deformación es

$$[U_{ij}]$$



$$\frac{dU}{dV} = U_0 = \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x + \frac{1}{2} \sigma_y \epsilon_y + \frac{1}{2} \sigma_z \epsilon_z + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{yz} \gamma_{yz} + \frac{1}{2} \tau_{zx} \gamma_{zx} \quad (5)$$

Expresando (5) matricialmente se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2} [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [D] \{ \epsilon \} \quad (6)$$

Substituyendo en (5) la ley generalizada de Hooke (7)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \epsilon_y &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \epsilon_z &= -\nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned} \quad (7)$$

se obtiene

$$U_0 = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (8)$$

Para materiales elásticos lineales homogéneos e isotrópicos se puede obtener una expresión similar a (8)

en términos de las deformaciones en lugar de los esfuerzos, la energía total se obtiene de

$$U = \iiint_V U_0 dx dy dz \quad (9)$$

la ecuación (5) es importante al establecer las leyes de Plasticidad y (8) es importante en análisis de esfuerzos por métodos energéticos. Substituyendo (6) en (9) se obtiene

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_V L \sigma_i \{\epsilon\} dx dy dz$$

Para barras axialmente cargadas, con flexión y cortante (10) queda

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \epsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx dy dz \quad (11)$$

Para materiales elásticos lineales

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad \text{y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (12)$$

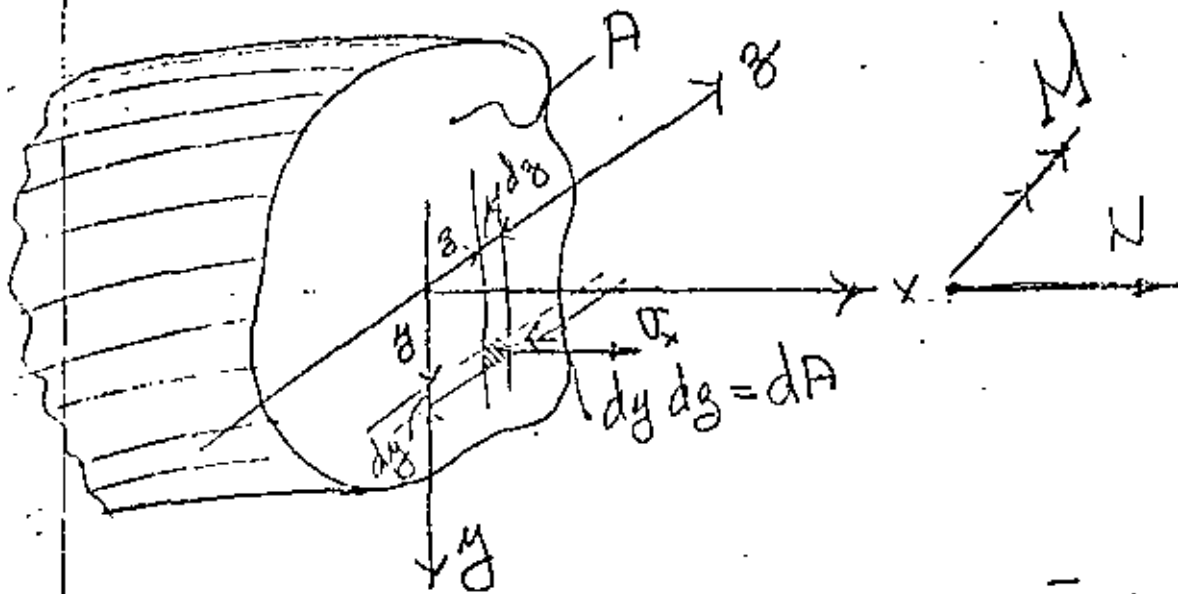
De (12) y (11) se obtiene

$$U = \underbrace{\iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dx dy dz}_{\text{Para carga axial y Flexión de vigas}} + \underbrace{\iiint_V \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dx dy dz}_{\text{Para Corte en Vigas}} \quad (13)$$

## Energía de deformación para barras cargadas axialmente

$$\sigma_x = \frac{N}{A} = \frac{\text{carga axial}}{\text{sección transversal}}, \quad A = \iint_A dy dz \quad (14)$$

$N$  y  $A$  son funciones de  $x$  solamente



Por lo tanto (13) se reduce a [(de (14) y (13))]

$$\begin{aligned} U_N &= \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint \frac{N^2}{2A^2 E} dx dy dz \\ &= \int_L \frac{N^2}{2A^2 E} \left[ \iint_A dy dz \right] dx = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx \end{aligned}$$

$$U_N = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx$$

(15)

Energía de deformación en Flexión, en este caso

$$\sigma_x = \frac{M}{I} y \quad (16)$$

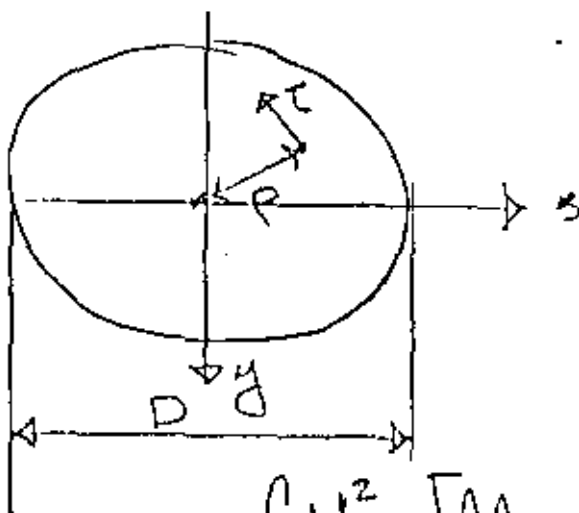
De (16) y (13) se obtiene

$$\begin{aligned} U_M &= \iiint_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \iiint_V \frac{1}{2E} \left( -\frac{My}{I} \right)^2 dx dy dz \\ &= \int_L \frac{M^2}{2EI^2} \left[ \iint_A y^2 dy dz \right] dx = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx \end{aligned}$$

$$U_M = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx \quad (17)$$

Energía de Deformación para secciones circulares en torsión

en este caso  $\tau = \frac{M_T}{J} \rho \quad (18)$



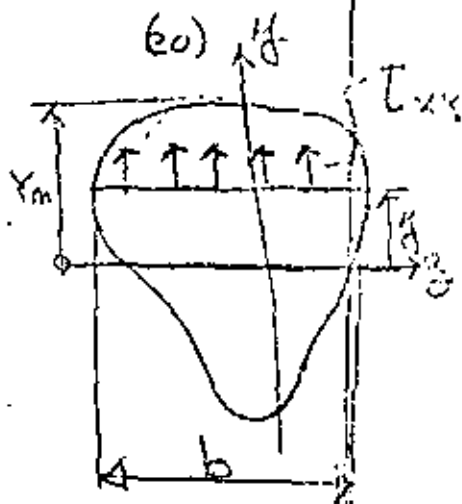
Subst. (18) en (13)

$$\begin{aligned} U_T &= \iiint_V \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz \\ &= \iiint_V \frac{1}{2G} \left( \frac{M_T}{J} \rho \right)^2 dx dy dz \\ U_T &= \int_L \frac{M_T^2}{2GJ^2} \left[ \iint_A \rho^2 dy dz \right] dx = \int_L \frac{M_T^2}{2GJ} dx \quad (19) \end{aligned}$$

## Energía de Deformación por Cortante

En este caso  $T_{xy} = \frac{V Q_y^{r_m}}{b I}$

$V =$  Cortante en la sección  
 $Q_y^{r_m} = \int_y^{r_m} y dA =$  momento estático de  $y$  a  $y_m$ .



$b =$  ancho a la altura  $y$  de los ejes centroidales  $x$  y  $y$

$I =$  Momento de Inercia de la sección

Subst (20) en (13)

$$U_v = \int \int \int \frac{1}{2G} \left( \frac{V Q_y^{r_m}}{b I} \right)^2 dx dy dz = \int \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \int \int \left( \frac{Q_y^{r_m}}{b} \right)^2 dy dz \right] dx$$

$$U_v = \int_L \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \int \int \left( \frac{Q_y^{r_m}}{b} \right)^2 dy dz \right] dx \quad (21)$$

La expresión total de la energía de deformación

Sea:  $U = U_N + U_M + U_T + U_v$  o sea

$$U = \int_L \left\{ \frac{N^2}{2EA} + \frac{M^2}{2EI} + \frac{M_T^2}{2GJ} + \frac{V^2}{2GI^2} \left[ \int \int \left( \frac{Q_y^{r_m}}{b} \right)^2 dy dz \right] \right\} dx \quad (22)$$



## Desplazamientos

El principio de conservación de energía (La energía no puede ser creada o destruida), puede adoptarse para calcular deformaciones en sistemas elásticos debidos a las cargas aplicadas. La primera Ley de la Termodinámica expresa este principio como

$$\text{TRABAJO REALIZADO} = \text{Cambio en Energía}$$

Para un proceso adiabático (No se agrega o sustrae calor al sistema) y cuando no se genera calor en el sistema, y cuando las fuerzas aplicadas se aplican en forma estática (Las fuerzas se aplican tan lentamente que se desprecia la energía cinética  $\frac{1}{2} m v^2$ ), el caso especial de esta ley para sistemas conservativos se reduce a

$$W_e = U \quad (23)$$

Donde  $W_e$  = Trabajo hecho por las fuerzas externas durante el proceso de carga.

$U$  = Energía total de deformación almacenada en el sistema.

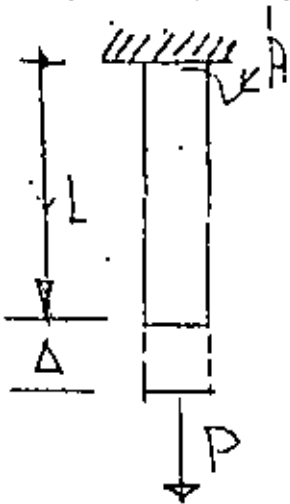
Similar a decir que la suma del Trabajo externo  $W_e$  y el interno  $W_i$  deben ser cero

$$W_e + W_i = 0 \quad (24)$$

$U = -W_i$  las deformaciones siempre se oponen a las fuerzas internas. Es importante considerar la aplicación gradual de las cargas de cero a su valor total por lo tanto  $W_e$  será:  $\frac{1}{2}$  Fuerza total por el desplazamiento

### Ejemplos

a) Determine la deflexión de la viga mostrada



$$W_e = \frac{1}{2} P \Delta \quad \text{y de (22)}$$

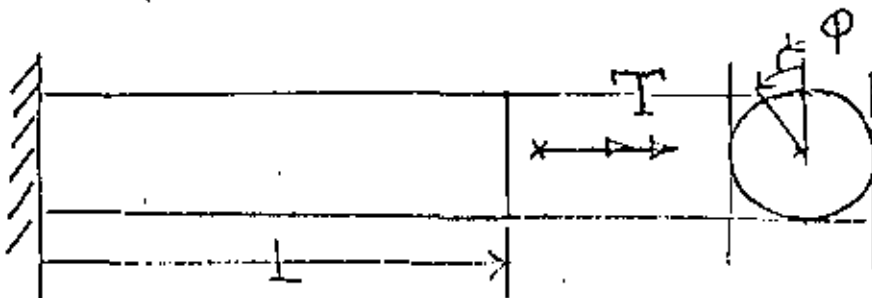
$$U = \frac{1}{2EA} \int_0^L N^2 dx$$

$$= \frac{P^2}{2EA} \int_0^L dx = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\text{De (23)} \quad \frac{1}{2} P \Delta = \frac{P^2 L}{2EA}$$

$$\Delta = \frac{PL}{AE} \quad \text{Ley de Hooke}$$

b) Determine la rotación en el extremo de una flecha de sección circular



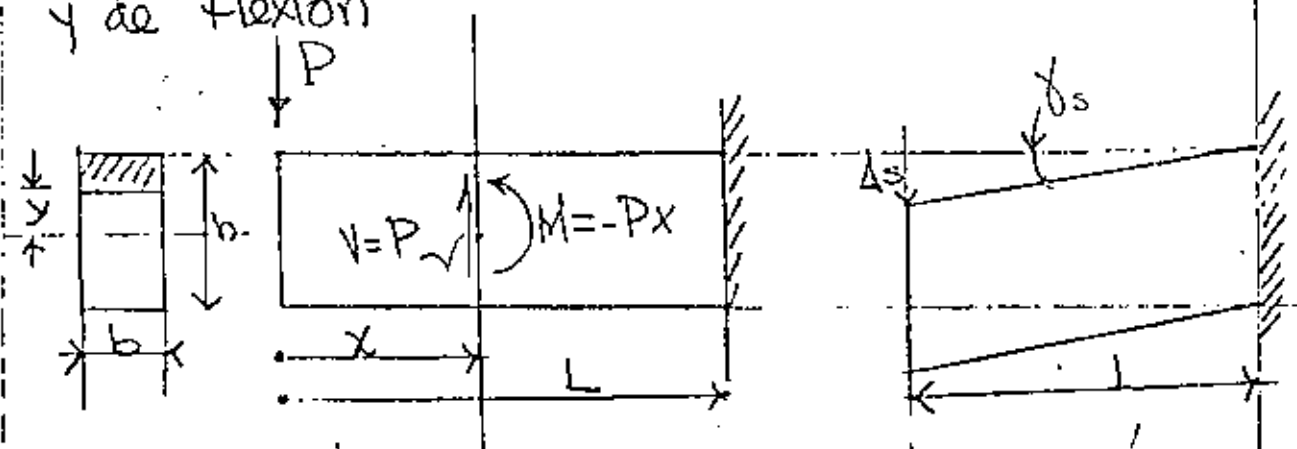
El trabajo externo  $W_e = \frac{1}{2} T \phi$  y el interno de (22)

$$U = \frac{I^2}{2GJ} \int_0^L dx = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de (23)}$$

$$\frac{1}{2} T \phi = \frac{T^2 L}{2GJ} \quad \text{de donde } \phi = \frac{TL}{GJ} \quad \text{que}$$

coincide con los valores de los textos de Mecánica de Materiales.

c) Determinar la deflexión máxima en la viga mostrada considerando el efecto del cortante y de Flexión



Trabajo externo  $W_e = \frac{1}{2} P \Delta$ , la energía interna consta de dos partes una debida a los esfuerzos de flexión y otra a los esfuerzos de corte de (11) y (13)

$$U_{\text{flexion}} = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (-Px)^2 dx = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

El esfuerzo de corte:  $\tau = \frac{V Q_y^m}{b I} = \frac{P}{2I} \left[ \left(\frac{b}{2}\right)^2 - y^2 \right]$   
 que substituyendo en la ecuación (13) se

obtiene

$$U_{\text{corte}} = \iiint_V \frac{\tau^2}{2G} dx dy dz = \frac{1}{2G} \int_0^L \left\{ \frac{P}{2I} \left[ \left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2 \right] \right\}^2 L b dy$$

$$= \frac{P^2 L b}{8GI^2} \times \frac{h^5}{30} = \frac{P^2 L b h^5}{240G} \left(\frac{12}{bh^3}\right)^2 = \frac{3P^2 L}{5AG}$$

donde  $A = bh$  sección transversal. Entonces

$$W_e = U = U_{\text{FLEXION}} + U_{\text{CORTE}}$$

$$\frac{P\Delta}{2} = \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{3P^2 L}{5AG} \quad \text{de donde}$$

$$\Delta = \underbrace{\frac{PL^3}{3EI}}_{\text{Flexión}} + \underbrace{\frac{6PL}{5AG}}_{\text{Corte}} \quad (24)$$

El término debido al cortante se puede interpretar

$$\tau_{\text{av}} = \frac{P}{A} = \frac{V}{A} \quad \text{corte promedio}$$

puesto que  $\tau$  varía parabólicamente  $\frac{6}{5}$  representa un factor de corrección numérico por lo tanto

$$\Delta_{\text{corte}} = \gamma_s L = \alpha \frac{\tau_{\text{av}}}{G} L = \alpha \frac{VL}{AG} = \frac{6}{5} \frac{PL}{AG}$$

el valor  $\alpha$  depende de la forma de la sección en general  $V$  puede variar con  $x$ . De (24)

$$\Delta = \frac{PL^3}{3EI} \left( 1 + \frac{3E}{10G} \frac{h^2}{L^2} \right) \quad (25)$$

suponiendo acero estructural

$$\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \doteq 2.5 \quad \text{Y (25) queda}$$

$$\Delta = \left(1 + 0.75 \frac{h^2}{L^2}\right) \Delta_{\text{FLEXIÓN}} \quad (26)$$

De (26) se observa que para una viga corta sea  $h=L$  La deflexión total es  $\Delta = 1.75 \Delta_{\text{FLEXIÓN}}$  por lo cual la deformación de corte es muy importante para una viga flexible se  $L=10h$

$$\Delta = \left(1 + 0.75 \frac{h^2}{(10h)^2}\right) \Delta_{\text{FLEXIÓN}}$$

$$\Delta = 1.0075 \Delta_{\text{FLEXIÓN}}$$

La deflexión debida al corte se puede despreciar no siempre es posible considerar lo anterior

Comparando las expresiones (1.1.6.1c) (1.1.6.2c) y (1.1.6.2c) para un claro  $l = 5.00 \text{ m}$  y un fuste  $h = 30 \text{ cm}$  se obtiene:

$$U_V = 0.00286 U_M$$

$$U_N = 0.0009 U_M$$

(a)

En la mayoría de los problemas estructurales elásticos lineales la energía de deformación debida a la carga normal  $N$  y cortante  $V$  es despreciable respecto a la energía de deformación debida al momento flexionante  $M$ .

Cuando existe momento torsionante  $M_T$  (vigas en balcón, etc.), su energía de deformación es considerable y debe tomarse en cuenta su valor.

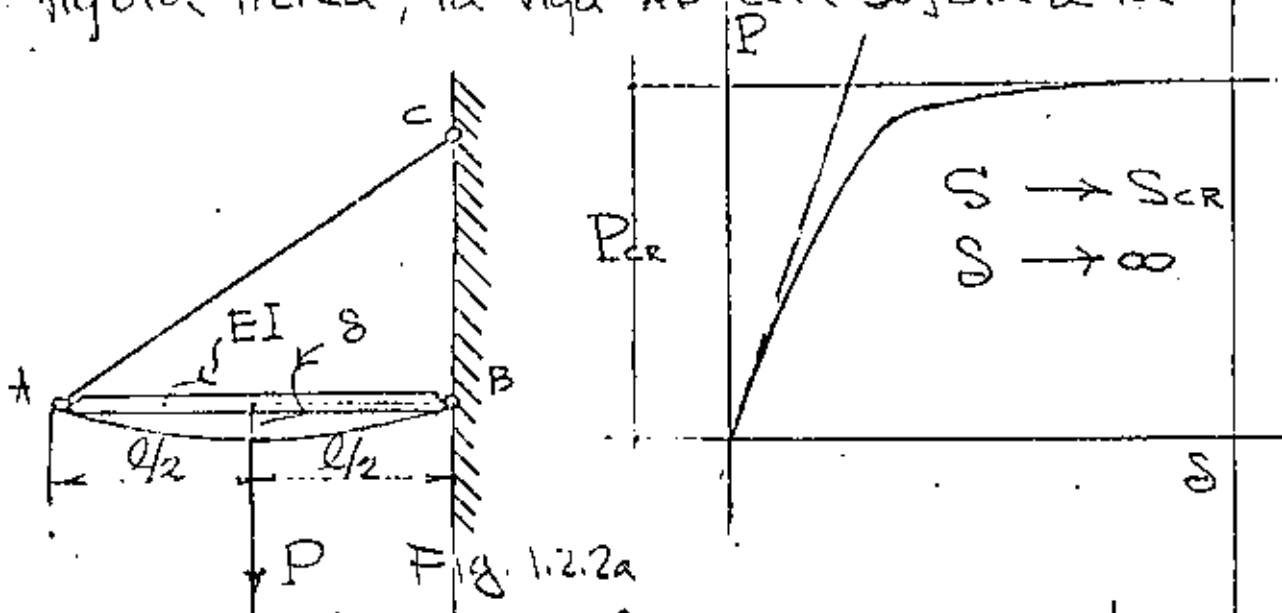
## 1.2 Principio de Superposición

## 1.2.1.- Introducción

En los sistemas de cargas en los que las deflexiones son funciones lineales de las cargas, se puede obtener la deflexión en un punto cualquiera, mediante la suma de las deflexiones producidas individualmente en dicho punto por cada una de las cargas.

## 1.2.2.- Casos en que no rige el principio.

Considerando el ejemplo mostrado en la figura 1.2.2a, la viga AB está sujeta a la



acción simultánea de fuerzas axiales y laterales, se concluye que  $S$  no es función lineal de  $P$  y puede ser representada por la fórmula

$$S = \frac{Pl^3}{48EI} \frac{1}{1 - S/S_{cr}} \quad (1.27.a)$$

donde,  $S_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ ,  $S$  carga axial en AB debida a  $P$ .

Otro ejemplo en el cual el principio de superposición no rige, sería el sistema mostrado en la figura 1.2.2.b, formado por dos barras articuladas, bajo la acción de pequeñas deformaciones ( $\tan \alpha \approx \alpha$ )

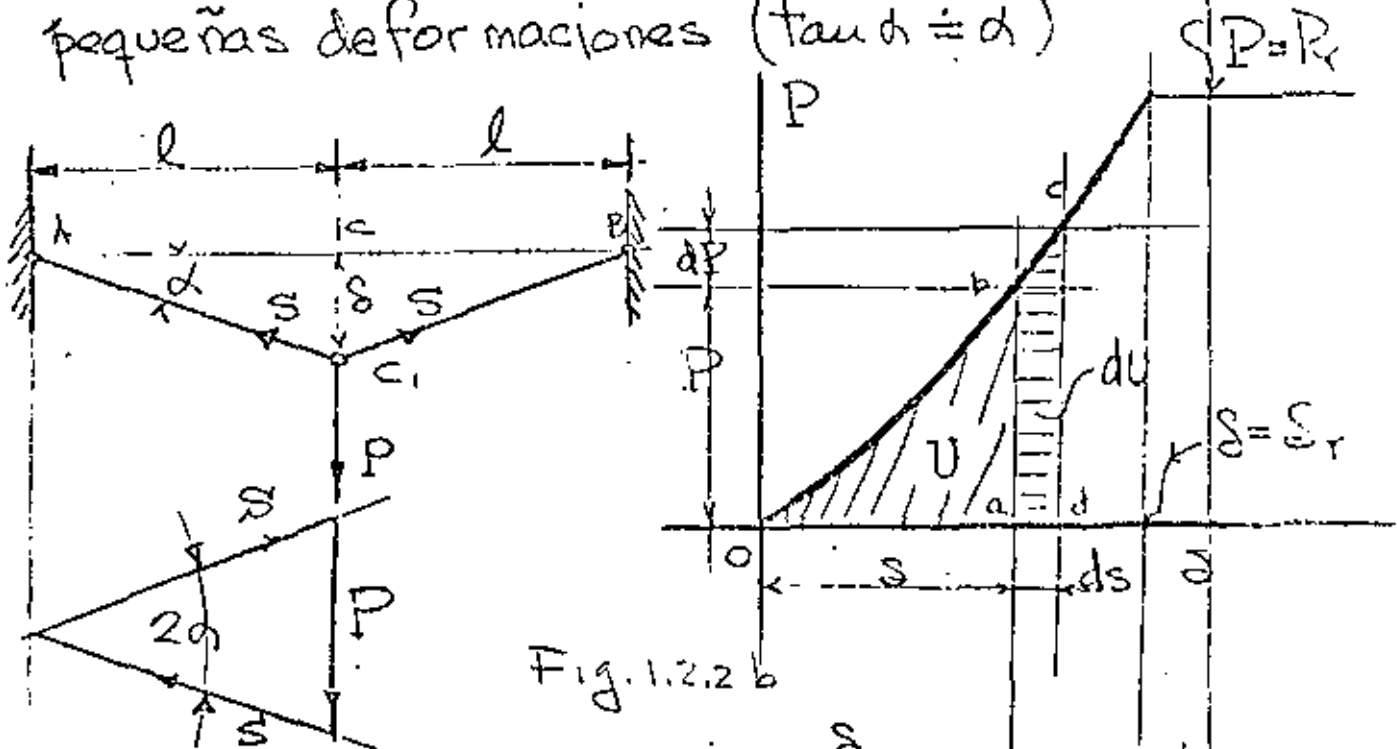


Fig. 1.2.2 b

pequeñas deformaciones:  $d \approx \frac{S l^2 \alpha}{P}$  1.2.2b

Equilibrio:  $S = \frac{P l}{2\alpha}$  1.2.2c

Compatibilidad geométrica: la deformación axial unitaria es

$$\epsilon = \frac{\sqrt{l^2 + S^2} - l}{l} \approx \frac{1}{2} \frac{S^2}{l^2} \quad 1.2.2d$$

Ley de Hooke:  $\epsilon = \frac{S}{AE}$  1.2.2e

de 1.2.2 c, d y e se obtiene

$$\left\{ S = l \sqrt[3]{\frac{P}{AE}}, P = \frac{S^3 AE}{l^3} \right\} \quad 1.2.2 f$$



De nuevo se observa que la deflexión  $\delta$  no es función lineal de  $P$  aunque el material cumple internamente con la ley de Hooke y la relación entre  $\delta$  y  $P$  es representada por la curva de la figura 1.2.2 b. El área  $0ab$  representa el trabajo efectuado por  $P$  durante la deflexión  $\delta$  y es igual a la energía de deformación almacenada en las barras AC y CB, la cual es igual a

$$U = \int_0^{\delta} P d\delta = \frac{AE}{l^3} \int_0^{\delta} \delta^3 d\delta = \frac{AE\delta^4}{4l^3} \quad 1.2.2 g$$

$$U = \frac{lP^{4/3}}{4\sqrt[3]{AE}} \quad 1.2.2 h$$

Es muy importante observar que en los ejemplos anteriores  $U$  no es función de segundo grado de  $\delta$  ó  $P$ , como se obtiene en los casos que el principio de superposición rige.

En los ejemplos anteriores, se observa que la acción de las fuerzas externas es considerablemente afectada por las pequeñas deformaciones del sistema, en el primer ejemplo hay una flexión adicional  $\delta\delta$  a la compresión  $\delta$  y la barra trabaja en flexo compresión.

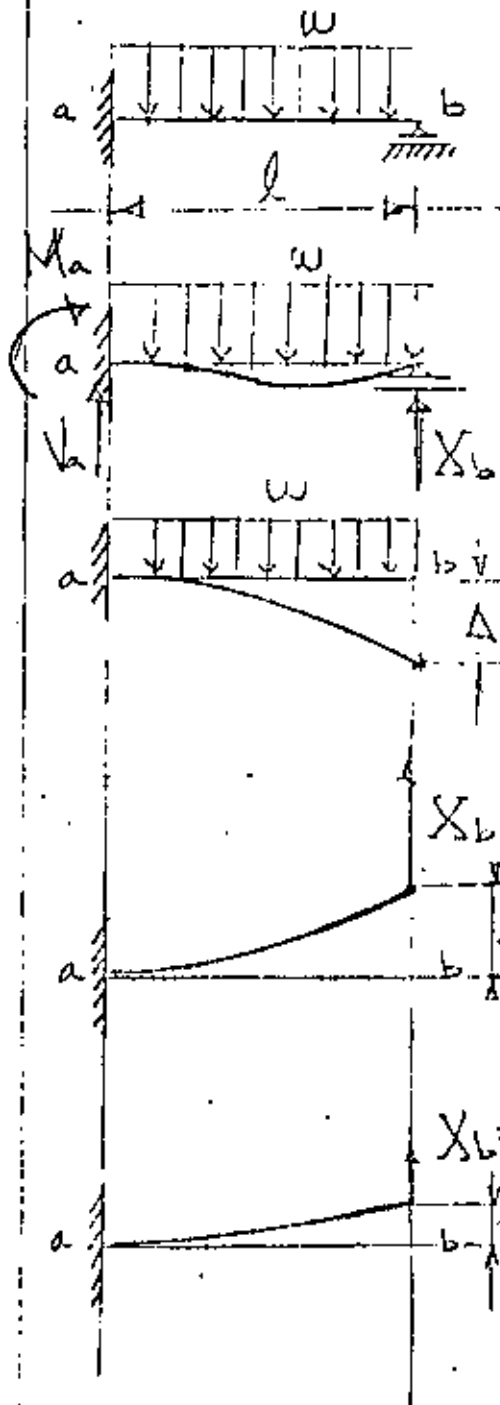
## 1.2.3 Ecuaciones generales de Superposición \*

### 1.2.3.1. Introducción

En el análisis de esfuerzos en estructuras estáticamente indeterminadas no solamente hay que considerar la geometría y estática, si no también las propiedades elásticas tales como módulo de elasticidad, momento de inercia, etc., Generalmente para llegar al dimensionamiento final de la estructura, se suponen dimensiones preliminares de los miembros y se efectúa su análisis correspondiente, ciclo que puede repetirse en algunos casos hasta llegar al diseño final. En general los esfuerzos desarrollados en estructuras hiperestáticas son debidos no solo a las cargas, si no también a cambios de temperatura, asentamiento de apoyos, errores de fabricación, etc. Es importante observar que la estructura este en condiciones de equilibrio estable. Con el propósito de ilustrar el uso de las ecuaciones generales de superposición de causas y efectos, consideraremos el siguiente ejemplo, viga con carga uniforme  $w$

\* En ambos métodos de rigidez y flexibilidad debe regir el principio de superposición

empotrada en a y libremente apoyada en b.



Estructura actual.

$\Delta_b$  = Deflexión de el punto b en la estructura debida a todas las causas.

Estructura primaria.

Selección de redundante,  $X_b$

Condición de equilibrio  $X_b = 0$

$\Delta_{b0}$  = Deflexión en dirección de la redundante con  $X_b = 0$

$\Delta_{bb}$  = Deflexión en dirección de la redundante debida a  $X_b$  con  $w = 0$

$S_{bb}$  = Deflexión en dirección de la redundante debido a una fuerza unitaria  $X_b = 1$

La ecuación de superposición si el principio es válido:

$$\Delta_b = \Delta_{b0} + \Delta_{bb} = \Delta_{b0} + X_b S_{bb} = 0 \quad (a)$$

de donde: 
$$X_b = -\frac{\Delta_{b0}}{S_{bb}} \quad (b)$$

( $S_{bb}$  es llamada coeficiente de flexibilidad)

### 1.2.3.2 Ecuaciones generales de superposición en analisis de estructuras estaticamente indeterminadas de grado n.

Suponiendo que la estructura es hiperestatica de grado n, se seleccionan las redundantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , en una forma tal que la estructura primaria en condicion de equilibrio  $X_i = 0$  sea estable e isostatica, aceptando la siguiente notacion:

$\Delta_i$  = Deflexion total del punto i debida a todas las cargas y efectos.

$\Delta_{i0}$  = Deflexion del punto i en direccion de la redundante  $X_i$  en condiciones de equilibrio estable isostatico  $X_i = 0$ .

$\Delta_{iT}$  = Deflexion del punto i debida a un cambio de temperatura  $\Delta T$ .

$\Delta_{iA}$  = Deflexion del punto i debida a asentamientos de apoyo.

$\Delta_{iE}$  = Deflexion en el punto i debida a errores de fabricacion.

$S_{i1}$	=	Deflexion en el punto i	debida a la condicion	$X_1 = 1$
$S_{i2}$	=	" " " " " "	" " " "	$X_2 = 1$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$S_{in}$	=	" " " " " "	" " " "	$X_n = 1$

Cualquier redundante puede suponerse que actúa arbitrariamente en cierto sentido. Cualquier deflexión del punto de aplicación de la redundante deberá ser medida a lo largo de su línea de acción y será positiva cuando el sentido es el mismo que el supuesto para la redundante.

Por lo tanto usando la notación y convención de signos mencionada, las ecuaciones generales de superposición en sistemas estructurales coplanares y espaciales son:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{10} + \Delta_{1T} + \Delta_{1A} + \Delta_{1E} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + \dots + X_n \delta_{1n} \\ \Delta_2 &= \Delta_{20} + \Delta_{2T} + \Delta_{2A} + \Delta_{2E} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + \dots + X_n \delta_{2n} \\ &\vdots \\ \Delta_n &= \Delta_{n0} + \Delta_{nT} + \Delta_{nA} + \Delta_{nE} + X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + \dots + X_n \delta_{nn} \end{aligned} \right\} (a)$$

Expresando (a) matricialmente se tiene

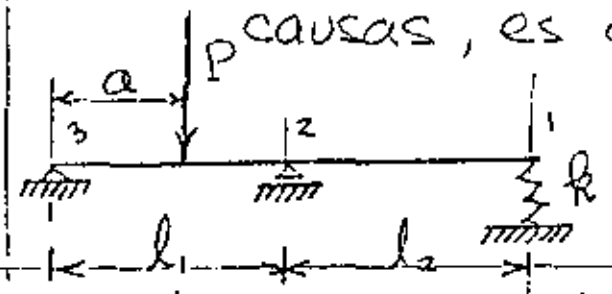
$$\underbrace{[\delta_{ij}]} \{X\} = \{q\} \quad (b)$$

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Delta_1 - \Delta_{10} - \Delta_{1T} - \Delta_{1A} - \Delta_{1E}) \\ (\Delta_2 - \Delta_{20} - \Delta_{2T} - \Delta_{2A} - \Delta_{2E}) \\ \vdots \\ (\Delta_n - \Delta_{n0} - \Delta_{nT} - \Delta_{nA} - \Delta_{nE}) \end{bmatrix}$$

1.2.3.3.- Ejemplos que ilustran el uso de las ecuaciones de superposición.

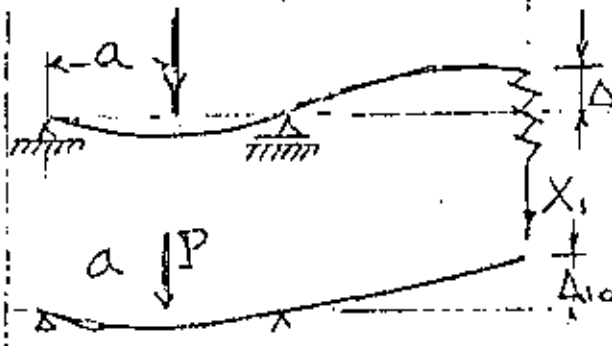
Antes de estudiar los ejemplos es conveniente observar lo siguiente:

- 1- Nunca seleccionar como redundante una reacción estáticamente determinada, ello conduciría a una estructura primaria en equilibrio inestable en condición  $X_i = 0$
- 2- El sentido positivo de la redundante se puede seleccionar arbitrariamente, y su deflexión será positiva si tiene el mismo sentido.
- 3- Debe observarse que  $\Delta_i$ , deflexión total del punto de aplicación de la redundante  $X_i$  debida a todas las causas, es casi siempre cero.



Estructura actual

$k^{-1}$  constante elástica resorte  $[\frac{L}{F}]$



Estructura primaria

$$\Delta_i = X_i \cdot k^{-1} \quad (c)$$

Condición  $X_i = 0$

Condición  $X_i = 1$

De Ec. (a) se tiene

$$\Delta_i = \Delta_{10} - X_i S_{11} \quad (d)$$

de (c) y (d) se obtiene

$$X_i = \frac{\Delta_{10}}{S_{11} + k^{-1}} \quad (e)$$

Estructura actual:

Arco coplanar con un tirante AB bajo un sistema de cargas  $P_n$

Estructura primaria

Selección como redundante la tensión en el cable,  $X$ .

Condición  $X=0$ Condición  $X=1$ 

$$\Delta_{AB} = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} \quad (f)$$

$$\Delta_A = \Delta_{A0} + X S_{A1} \quad (g)$$

$$\Delta_B = \Delta_{B0} + X S_{B1} \quad (h)$$

Sumando (g) y (h)

$$\Delta_A + \Delta_B = \Delta_{A0} + \Delta_{B0} + X(S_{A1} + S_{B1}) = 0$$

de donde despejando la redundante  $X$  se tiene

$$X = - \frac{\Delta_{A0} + \Delta_{B0}}{S_{A1} + S_{B1}} \quad (i)$$

BARRA PLANA EMPOTRADA

Problema hiperestático de orden 3

Estructura Primaria

Selección de redundantes  $X_1, X_2, X_3$  y condición de empotramiento  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$

Condición  $X=0$

Condición  $X_1=1$

Condición  $X_2=1$

Condición  $X_3=1$

Las ecuaciones aplicando

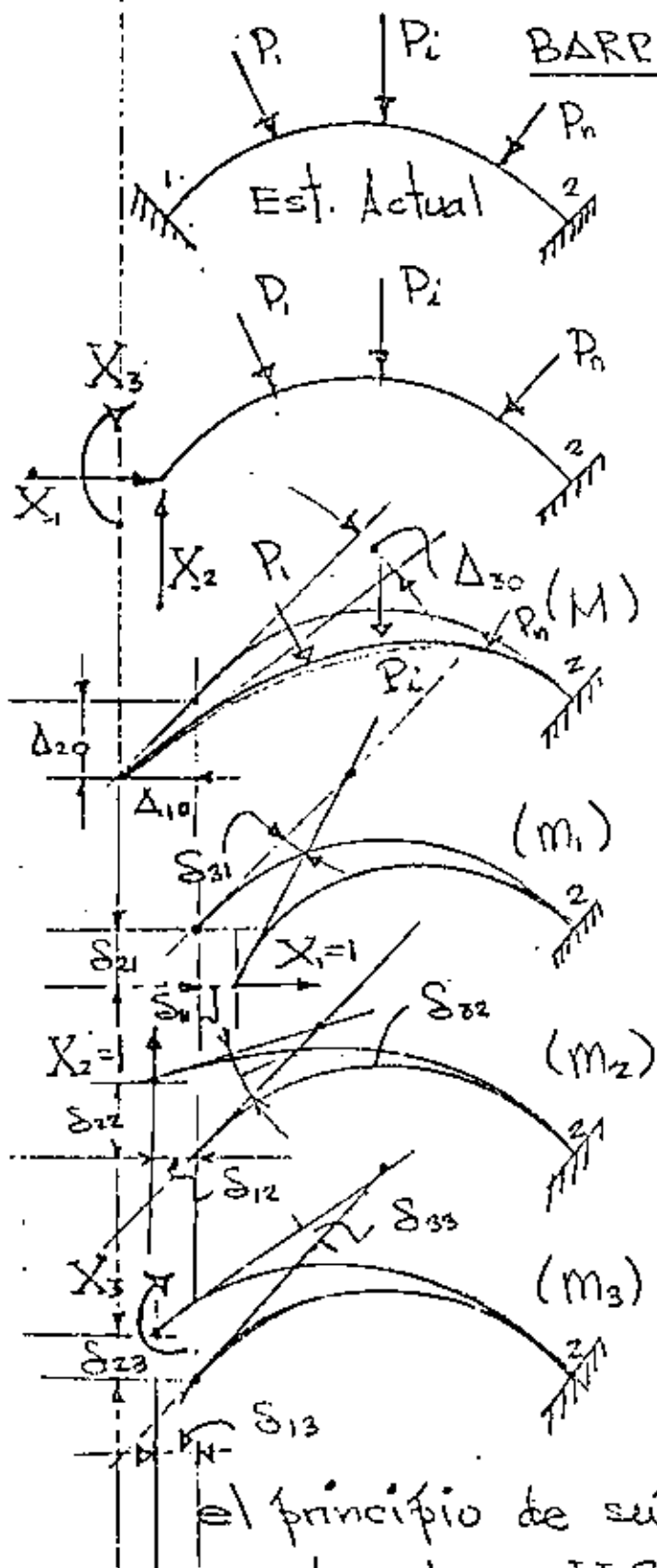
el principio de superposición son

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23}$$

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33}$$

(3)





expresando (1) en forma matricial se tiene

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

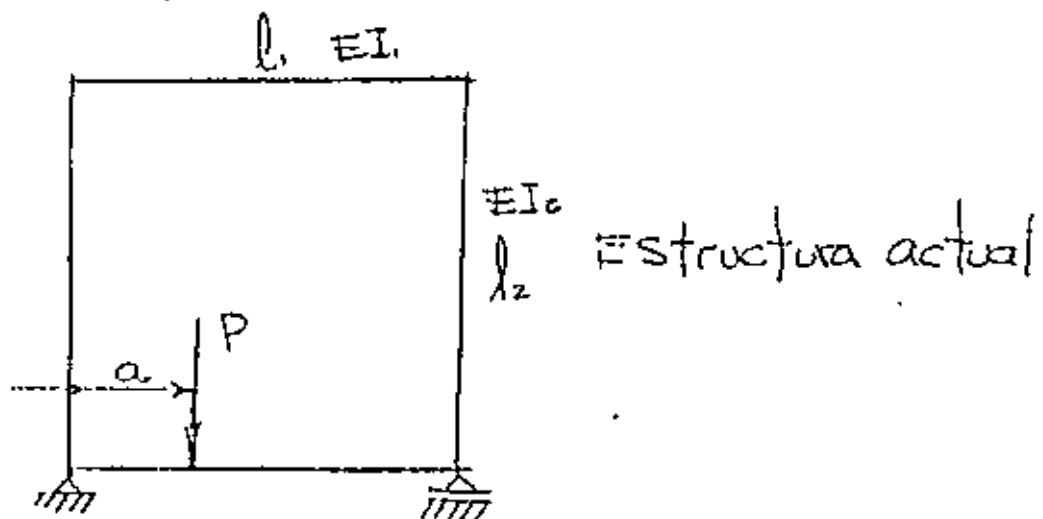
Aplicando el Teorema de Castigliano y la expresión de la energía de deformación por flexión, los coeficientes de flexibilidad  $S_{ij}$  son igual a

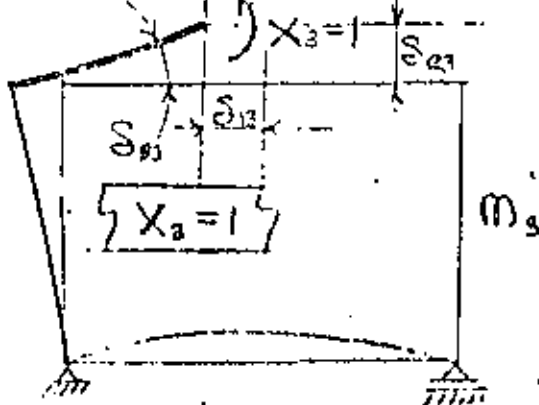
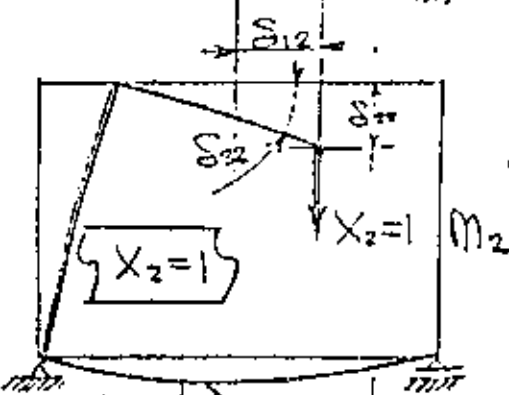
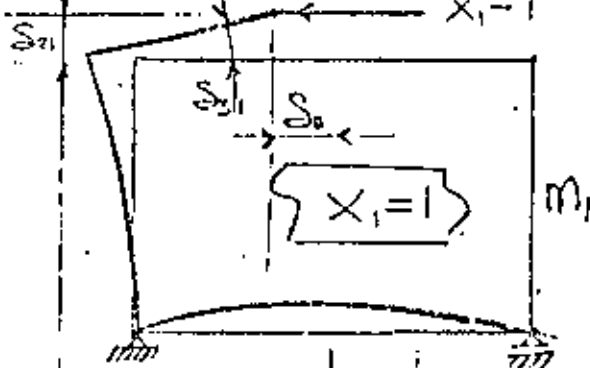
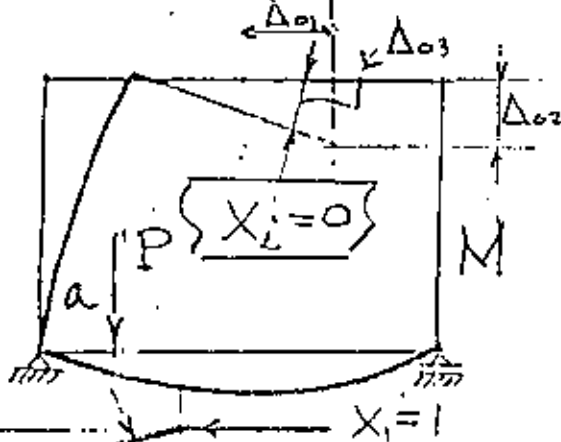
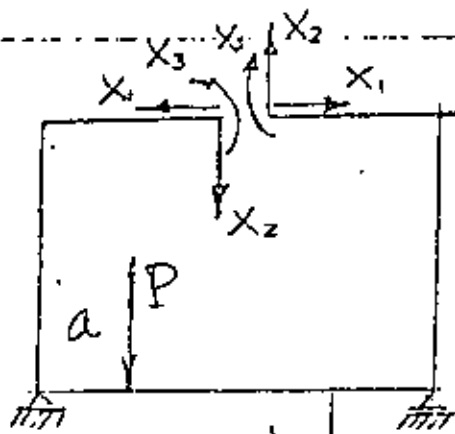
$$\Delta_{10} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{20} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{30} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

$$S_{11} = \int \frac{m_1^2 ds}{EI}, \quad S_{22} = \int \frac{m_2^2 ds}{EI}, \quad S_{33} = \int \frac{m_3^2 ds}{EI}$$

$$S_{12} = S_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad S_{13} = S_{31} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad S_{23} = S_{32} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

MARCO CONTINUO RECTANGULAR BAJO LA ACCION DE UNA CARGA P





### Estructura primaria:

Selección de redundantes

En este caso las ecuaciones de superposición son:

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} = 0$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} = 0 \quad (m)$$

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1 \delta_{31} + X_2 \delta_{32} + X_3 \delta_{33} = 0$$

$$\text{ó } \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Delta_{10} \\ \Delta_{20} \\ \Delta_{30} \end{Bmatrix} \quad (n)$$

Del Teorema de Castigliano y la energía elástica de de formación se obtienen los coeficientes de flexibilidad  $S_{ij}$  y  $\Delta_{oi}$ .

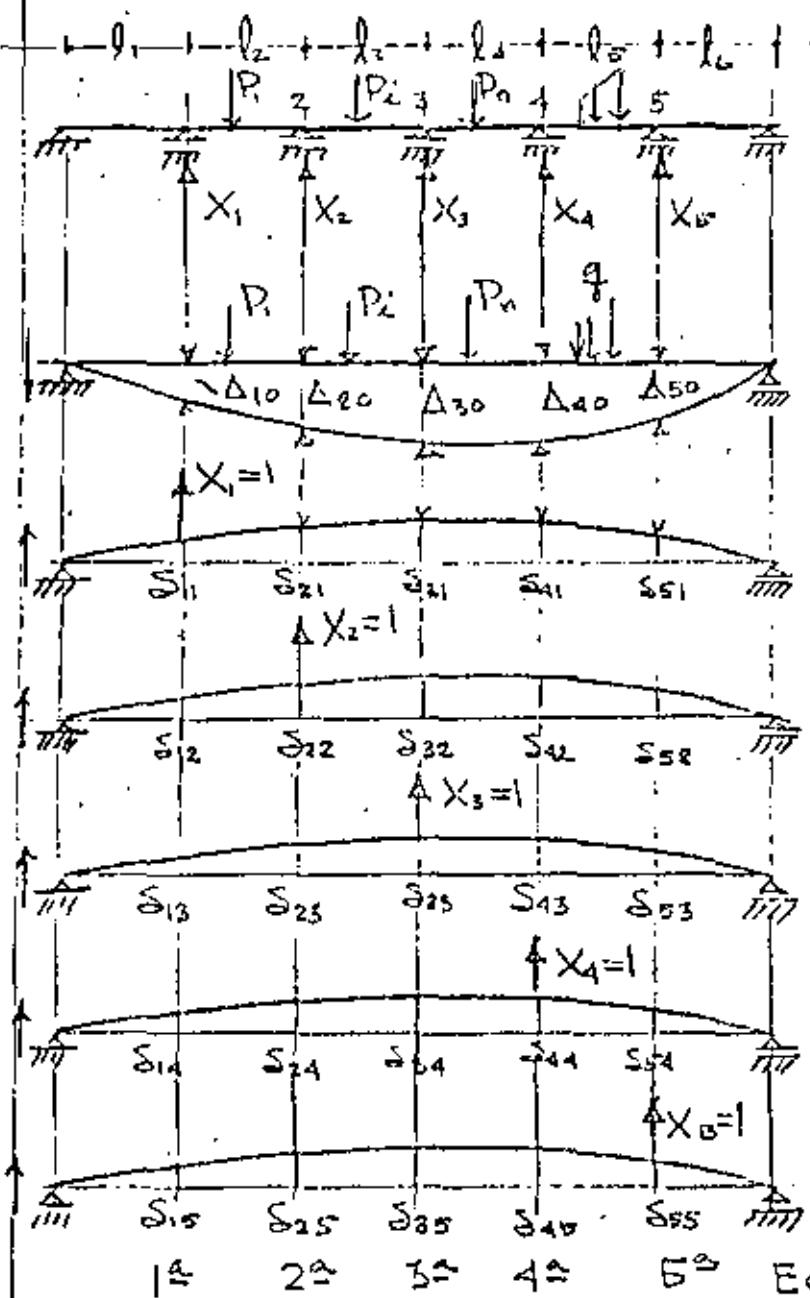
$$\Delta_{01} = \int \frac{M m_1}{EI} ds, \quad \Delta_{02} = \int \frac{M m_2}{EI} ds, \quad \Delta_{03} = \int \frac{M m_3}{EI} ds$$

$$S_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} ds, \quad S_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} ds, \quad S_{33} = \int \frac{m_3^2}{EI} ds$$

$$S_{12} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} ds, \quad S_{13} = \int \frac{m_1 m_3}{EI} ds, \quad S_{23} = \int \frac{m_2 m_3}{EI} ds$$

$$S_{12} = S_{21}, \quad S_{13} = S_{31}, \quad S_{23} = S_{32}$$

# Viga continua de 7 apoyos



ESTRUCTURA ACTUAL  
Y PRIMARIA

Condición  $X_i = 0$

Condición  $X_1 = 1$

Condición  $X_2 = 1$

Condición  $X_3 = 1$

Condición  $X_4 = 1$

Condición  $X_5 = 1$

1<sup>a</sup> 2<sup>a</sup> 3<sup>a</sup> 4<sup>a</sup> 5<sup>a</sup> Ecuación

$$\Delta_1 = \Delta_{10} + X_1 S_{11} + X_2 S_{12} + X_3 S_{13} + X_4 S_{14} + X_5 S_{15} = 0 \quad 1^a \text{ Ecuación}$$

$$\Delta_2 = \Delta_{20} + X_1 S_{21} + X_2 S_{22} + X_3 S_{23} + X_4 S_{24} + X_5 S_{25} = 0 \quad 2^a \text{ Ecuación}$$

$$\Delta_3 = \Delta_{30} + X_1 S_{31} + X_2 S_{32} + X_3 S_{33} + X_4 S_{34} + X_5 S_{35} = 0 \quad 3^a \text{ Ecuación}$$

$$\Delta_4 = \Delta_{40} + X_1 S_{41} + X_2 S_{42} + X_3 S_{43} + X_4 S_{44} + X_5 S_{45} = 0 \quad 4^a \text{ Ecuación}$$

$$\Delta_5 = \Delta_{50} + X_1 S_{51} + X_2 S_{52} + X_3 S_{53} + X_4 S_{54} + X_5 S_{55} = 0 \quad 5^a \text{ Ecuación}$$

$$[S_{ij}] \{X_j\} + \{\Delta_{j0}\} = 0$$

### 1.3 Generalización de la energía de deformación

La energía de deformación de una barra elástica puede representarse como una función de segundo grado de la carga o la deformación. La misma conclusión es válida para cualquier estructura dentro del régimen elástico, siempre y cuando el principio de superposición pueda aplicarse, en la Fig. 1.3.1 suponiendo que las fuerzas se aplican simultáneamente e incrementan gradualmente hasta su valor final. Si

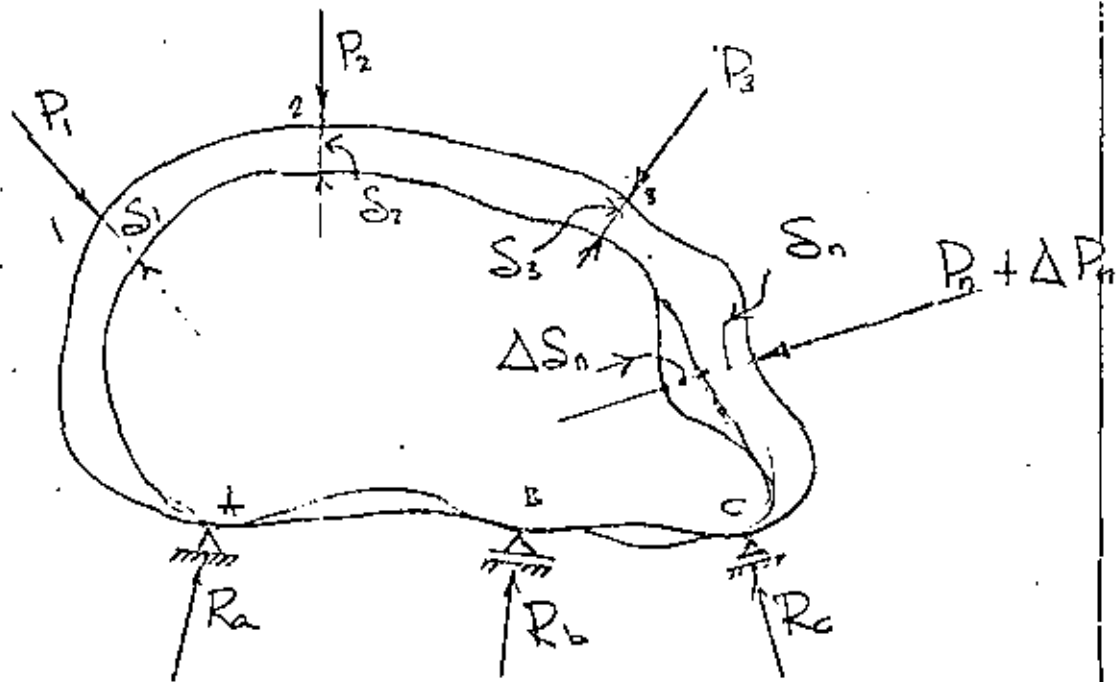


Fig. 1.3.1

el principio de superposición rige, los desplazamientos serán funciones lineales de las cargas. El trabajo elástico de todas

las fuerzas externas es igual a la energía interna de deformación almacenada en el cuerpo elástico de la figura 1.3.1 y será

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i = \frac{1}{2} (P_1 \delta_1 + P_2 \delta_2 + \dots + P_n \delta_n) \quad (1.3.1)$$

1.3.1.- Ejemplo, viga libremente apoyada cargada como se indica en la Fig. 1.3.1a

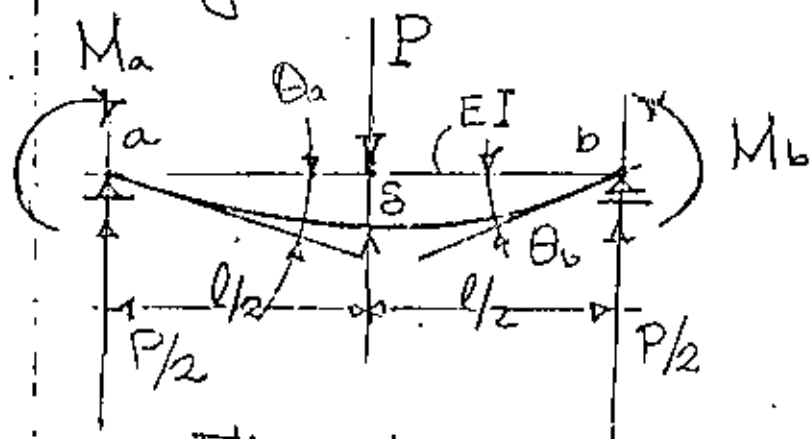


Fig. 1.3.1a

La energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2} (P\delta + M_a\theta_a + M_b\theta_b) \quad (a)$$

De la curva elástica de la viga se demuestra que:

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{Mal^2}{16EI} + \frac{Mbl^2}{16EI} \\ \theta_a &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Mal}{3EI} + \frac{Mbl}{6EI} \\ \theta_b &= \frac{Pl^2}{16EI} + \frac{Mal}{6EI} + \frac{Mbl}{3EI} \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Substituyendo (b) en (a) se obtiene

$$U = \frac{l^3}{96EI} \left( P^2 + \frac{6}{l} PM_a + \frac{6}{l} PM_b + \frac{16}{l^2} M_a^2 + \frac{16}{l^2} M_b^2 + \frac{16}{l^2} M_a M_b \right) \quad (c)$$

en (c) se observa que U es una función de segundo grado de las fuerzas y momentos P, M<sub>a</sub> y M<sub>b</sub>.

Tarea

En el ejemplo de la viga de la Fig 13.1a

demostrar:

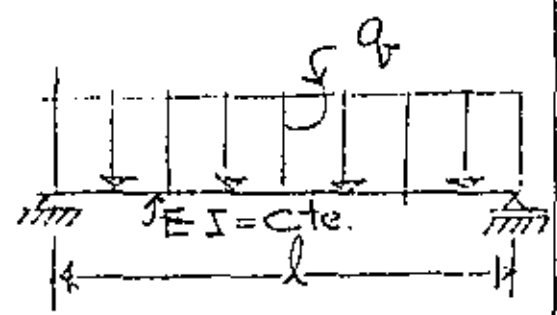
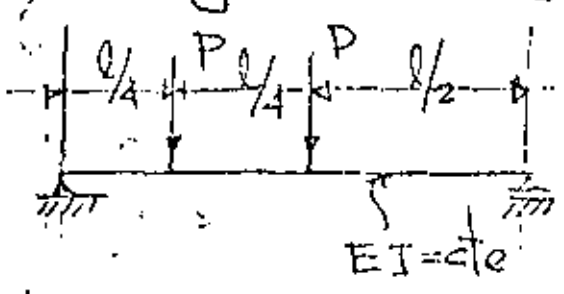
a)  $\frac{\partial U}{\partial P} = \delta, \quad \frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a, \quad \frac{\partial U}{\partial M_b} = \theta_b$

b) De (a) y (b) obtener U en función de los desplazamientos  $\delta, \theta_a, \theta_b$ .

c) Demostrar que.

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_a} = M_a, \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_b} = M_b$$

Calcular la energía de deformación de las siguientes vigas de sección transversal b h



## 1.4 Teorema de Castigliano.

Suponiendo que el principio de superposición rige, y que  $U$  se expresa en función de las fuerzas externas se tiene que: LA DERIVADA DE LA ENERGIA DE DEFORMACION CON RESPECTO A UNA DE LAS FUERZAS O MOMENTOS EXTERNOS DA EL DESPLAZAMIENTO O EL GIRO DE LA FUERZA O MOMENTO CORRESPONDIENTE.

$$\frac{\partial U}{\partial P_n} = S_n \quad (1.4.1)$$

Considerando el cuerpo elástico bajo la aplicación de  $P_1, P_2, \dots, P_n$ . Durante la aplicación de  $P_i$  se producen deformaciones  $S_i$  y se almacena cierta energía de deformación dentro del cuerpo (Fig. 1.3.1)

Si subsecuentemente a  $P_n$  se aplica un incremento  $\Delta P_n$ , la energía  $U$  incrementará

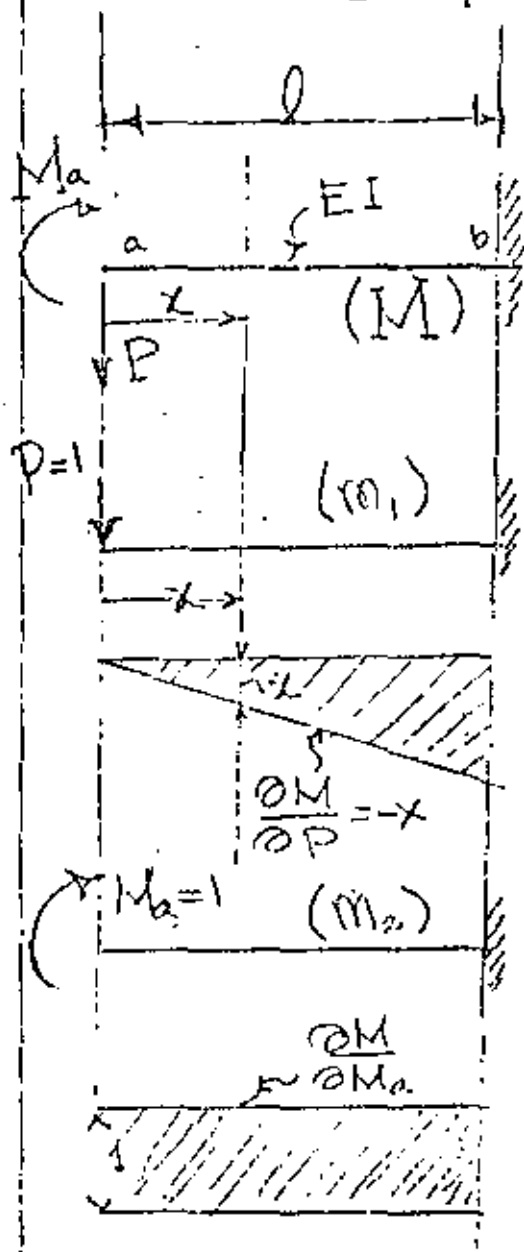
$$U + \Delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_n} \Delta P_n \quad (1.4.2)$$

Si en vez de aplicar  $\Delta P_n$  después de las cargas se aplica antes se tiene

$$U + \Delta U = U + \Delta P_n (S_n + \Delta S_n) = U + \Delta P_n S_n \quad (1.4.3)$$

igualando (1.4.2) con (1.4.3) se demuestra (1.4.1)

## 1.4.1 Ejemplos de aplicación



La variación de  $M(x)$  es  
 $M = M_a - Px$  (a)

La energía de deformación por flexión.

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (b)$$

Del Teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \delta_a = \int \frac{M \frac{\partial M}{\partial P}}{EI} ds$$

$$\delta_a = \int_0^l \frac{M m_1}{EI} ds \quad (c)$$

Substituyendo (a) en (c)

$$\delta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(-x) dx$$

$$\delta_a = \frac{Pl^3}{EI} - \frac{M_a l^2}{2EI} \quad (d)$$

De nuevo del teorema de Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial M_a} = \theta_a = \int_0^l \frac{M \frac{\partial M}{\partial M_a}}{EI} dx = \int_0^l \frac{M m_2}{EI} dx \quad (e)$$

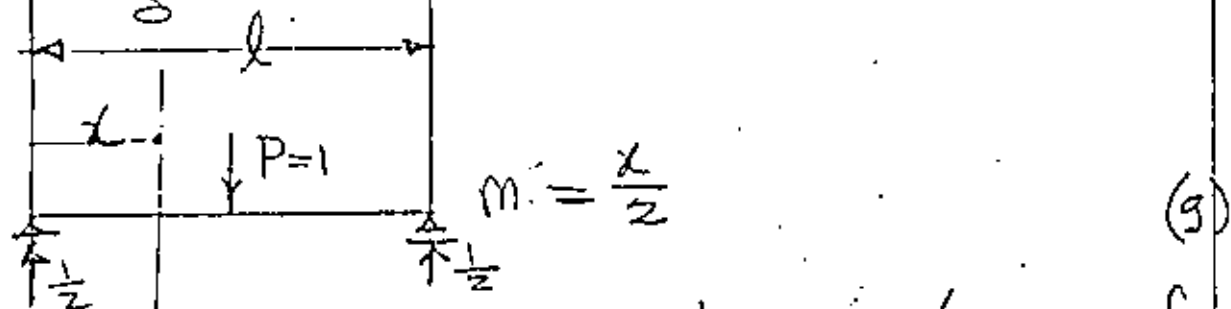
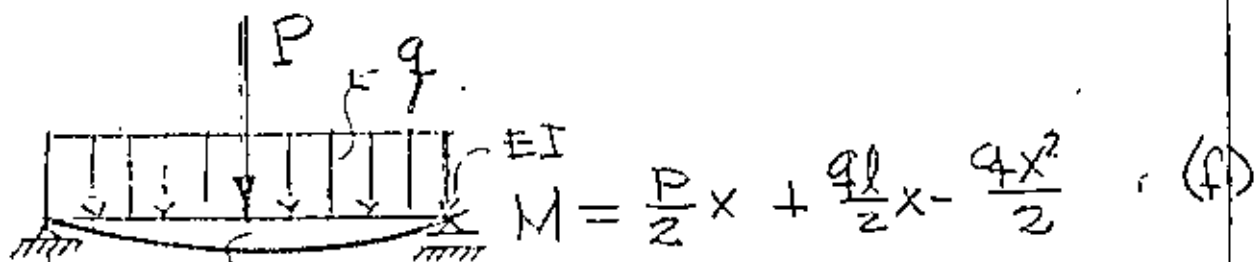
Substituyendo (a) en (e) se obtiene

$$\theta_a = \frac{1}{EI} \int_0^l (M_a - Px)(1) dx = \frac{M_a l}{EI} - \frac{Pl^2}{2EI}$$



En el ejemplo anterior no se calculó  $U$  en función de las fuerzas externas, sino se utilizó la energía de deformación por flexión y se derivó bajo el signo integral.

Es importante observar que las derivadas corresponden a la variación de momento flector debido a causas unitarias  $P$  y  $M_u$ .



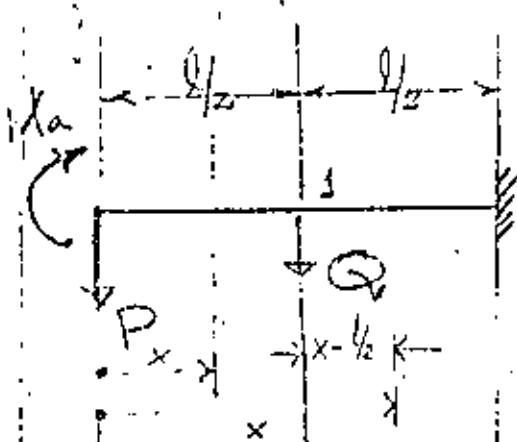
De la energía de deformación por flexión y el Teorema de Castigliano.

$$\delta = 2 \int_0^{l/2} \frac{Mm}{EI} dx \quad (h)$$

Substituyendo (f) y (g) en (h) se obtiene

$$\delta = 2/EI \int_0^{l/2} \left( \frac{P}{2}x + \frac{q}{2}x - \frac{q}{2}x^2 \right) \left( \frac{x}{2} \right) dx = \frac{Pl^3}{48EI} + \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI}$$

En los casos en los cuales es necesario determinar los desplazamientos en un lugar donde no hay fuerzas o momentos, se agrega al sistema actual de fuerzas una fuerza ficticia de magnitud infinitesimal, tal que no afecta al sistema actual de fuerzas y se obtiene el desplazamiento derivando con respecto a ella.



$$M = M_a - Px \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (i)$$

$$M = M_a - Px - Q \left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (j)$$

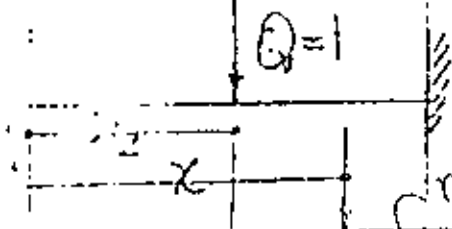
para  $\frac{l}{2} \leq x \leq l$

$$\frac{\partial M}{\partial Q} = m = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad (k)$$

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = (\text{energía de def. por flexión})$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_1 = \int \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial Q} dx = - \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{1}{EI} (M_a - Px) \left(x - \frac{l}{2}\right) dx$$

$$\delta_1 = \frac{5Pl^3}{48EI} - \frac{M_a l^2}{8EI} \quad (l)$$



$$m = -\left(x - \frac{l}{2}\right) \quad \delta = \int_0^l \frac{Mm}{EI} dx \quad (m)$$

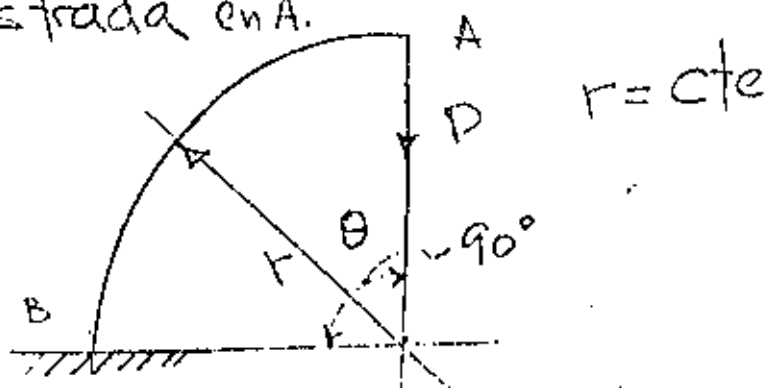
$$\left\{ \text{en este caso } \frac{\partial U}{\partial P} = 0 \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \right\}$$

En conclusión se observa que la derivación del Teorema de Castigliano, fue basada en el principio de superposición. De allí que la energía de deformación  $U$  debe ser una función de segundo grado de las fuerzas actuantes. Si el principio de superposición no rige y  $U$  no es función de segundo grado de las fuerzas, el Teorema de Castigliano no es aplicable, lo anterior se ilustró mediante ejemplos.

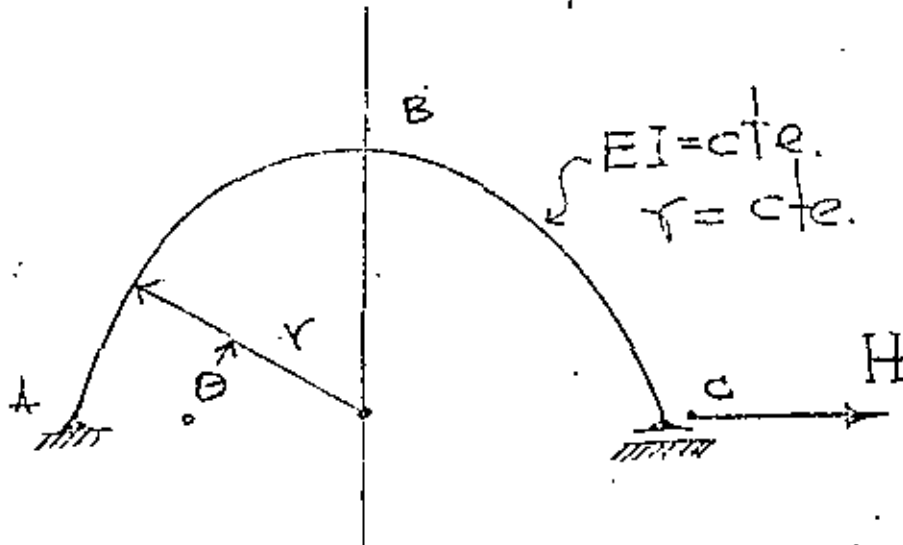
### Ejemplos de Tarea

a) Utilizando el teorema de Castigliano determinar los ángulos en los extremos de una viga libremente apoyada con carga uniforme  $q$ , claro  $l$ , y rigidez flexionante  $EI = \text{constante}$ .

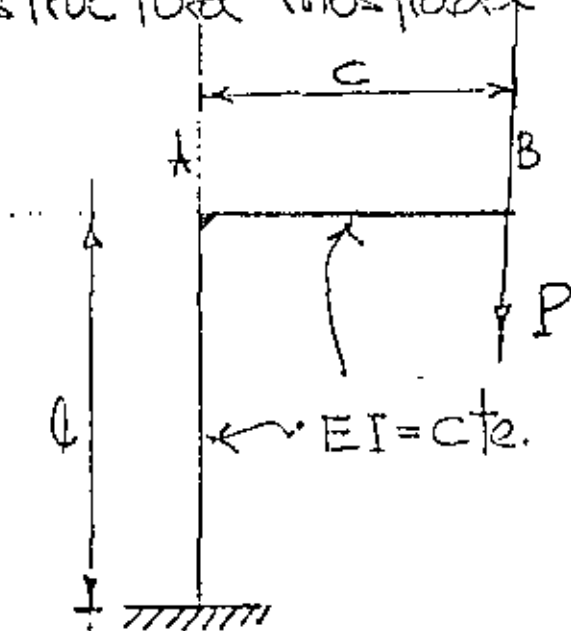
b) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de la viga curva mostrada en A.



c) Determinar el desplazamiento horizontal en c y el vertical en B en la estructura mostrada.



d) Determinar los desplazamientos horizontal y vertical de A y B en la estructura mostrada



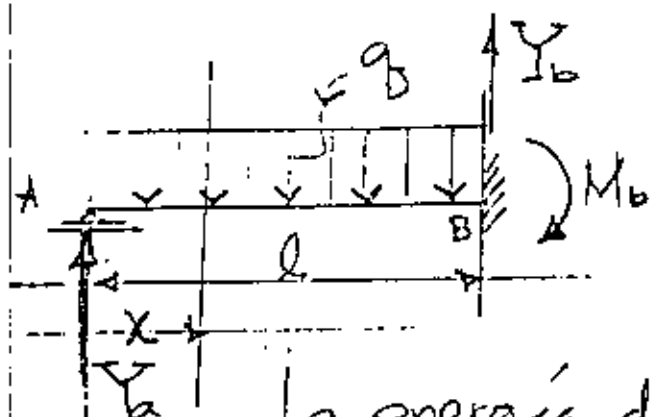
## 1.5 Teorema del Trabajo mínimo

Se han considerado aplicaciones del teorema de Castiglione a sistemas de fuerzas estáticamente determinados. Aplicándolo a sistemas estáticamente indeterminados se concluye que la derivada de la energía de deformación con respecto a cual quier redundante deberá ser cero si su acción es la de prevenir desplazamientos en su punto de aplicación, de allí que las magnitudes de las reacciones redundantes en sistemas hiperestáticos serán tal que la energía de deformación del sistema en dicho punto sea máxima o mínima, lo anterior es el método del trabajo mínimo para calcular redundantes. En una estructura hiperestática de grado "n" se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0 \quad (1.5.1)$$

## 1.5.1 Ejemplos

a) Viga empotrada en un extremo con carga uniforme. (grado  $n=1$ ).



La energía de deformación del sistema por flexión es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} \quad (a)$$

Del teorema del Trabajo mínimo

$$\frac{\partial U}{\partial Y_a} = 0 = \frac{\partial}{\partial Y_a} \left[ \int \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial Y_a} dx \quad (b)$$

$$M = Y_a x - \frac{q x^2}{2} \quad (c)$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y_a} = x \quad (d)$$

Substituyendo (c) y (d) en (b) se obtiene

$$\int_0^l \left( Y_a x - \frac{q x^2}{2} \right) x dx = \frac{l^3}{3} Y_a - \frac{q l^4}{8} = 0$$

de donde  $Y_a = \frac{3}{8} q l$  (e)

En el sistema se tienen 3 reacciones  $Y_a, Y_b, M_b$  y 3 ecuaciones dos de estática y una del Teorema de Castigliano.

en el ejemplo anterior,  
si se considera como redundante  $M_b$   
se tiene.

$$\frac{\partial U}{\partial M_b} = \frac{\partial}{\partial M_b} \left[ \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \right] = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\partial M}{\partial M_b} dx = 0 \quad (f)$$

el momento flector es

$$M = \left( \frac{q_l}{2} - \frac{M_b}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \quad (g)$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_b} = -\frac{x}{l} \quad (h)$$

substituyendo (g) y (h) en (f) se obtiene

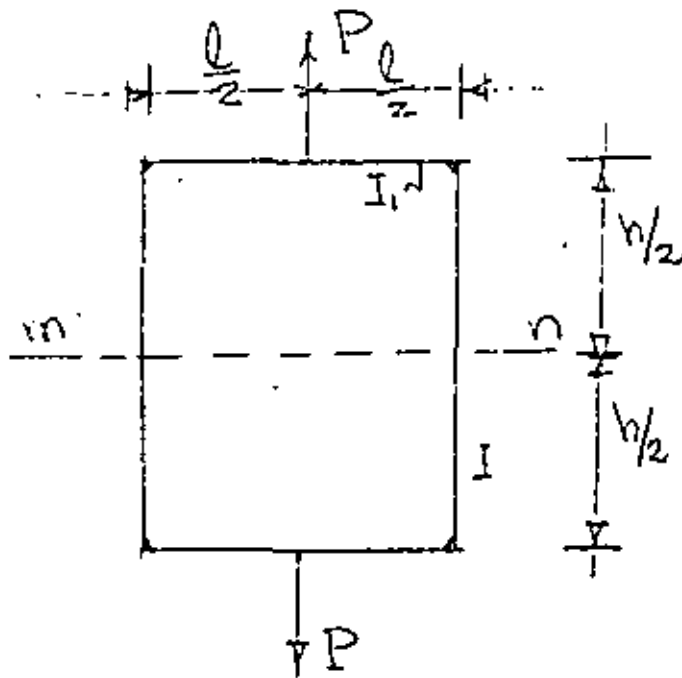
$$\int_0^l \left[ \left( \frac{q_l}{2} - \frac{M_b}{l} \right) x - \frac{qx^2}{2} \right] \frac{x}{l} dx = 0 \quad (i)$$

integrando (i) y despejando  $M_b$  se  
obtiene

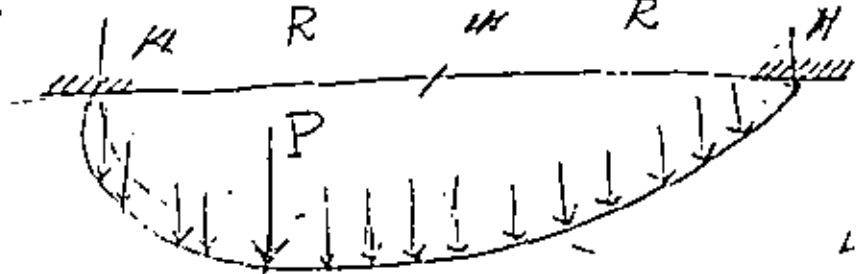
$$M_b = \frac{q_l^2}{8} \quad (j)$$

Ejemplos de tarea:

1- Determinar los momentos en la sección m-n en la estructura mostrada



2- En la viga en cabalón mostrada, determinar las reacciones en los apoyos, considere el trabajo elástico por flexión y torsión, para una carga P



y para una carga distribuida  $\frac{q}{l}$

$$\begin{cases} GI_p = G = cte \\ EI = cte \end{cases}$$



## 2.- METODOS MATRICIALES DE ANALISIS ESTRUCTURAL

### 2.1 Métodos de Fuerzas y Deformación

En los métodos de análisis de sistemas estáticamente indeterminados, primero se seleccionaban las redundantes, y sus magnitudes se determinan mediante el teorema del Trabajo mínimo, considerando la energía de deformación del sistema. Este procedimiento general es llamado el método de las fuerzas.

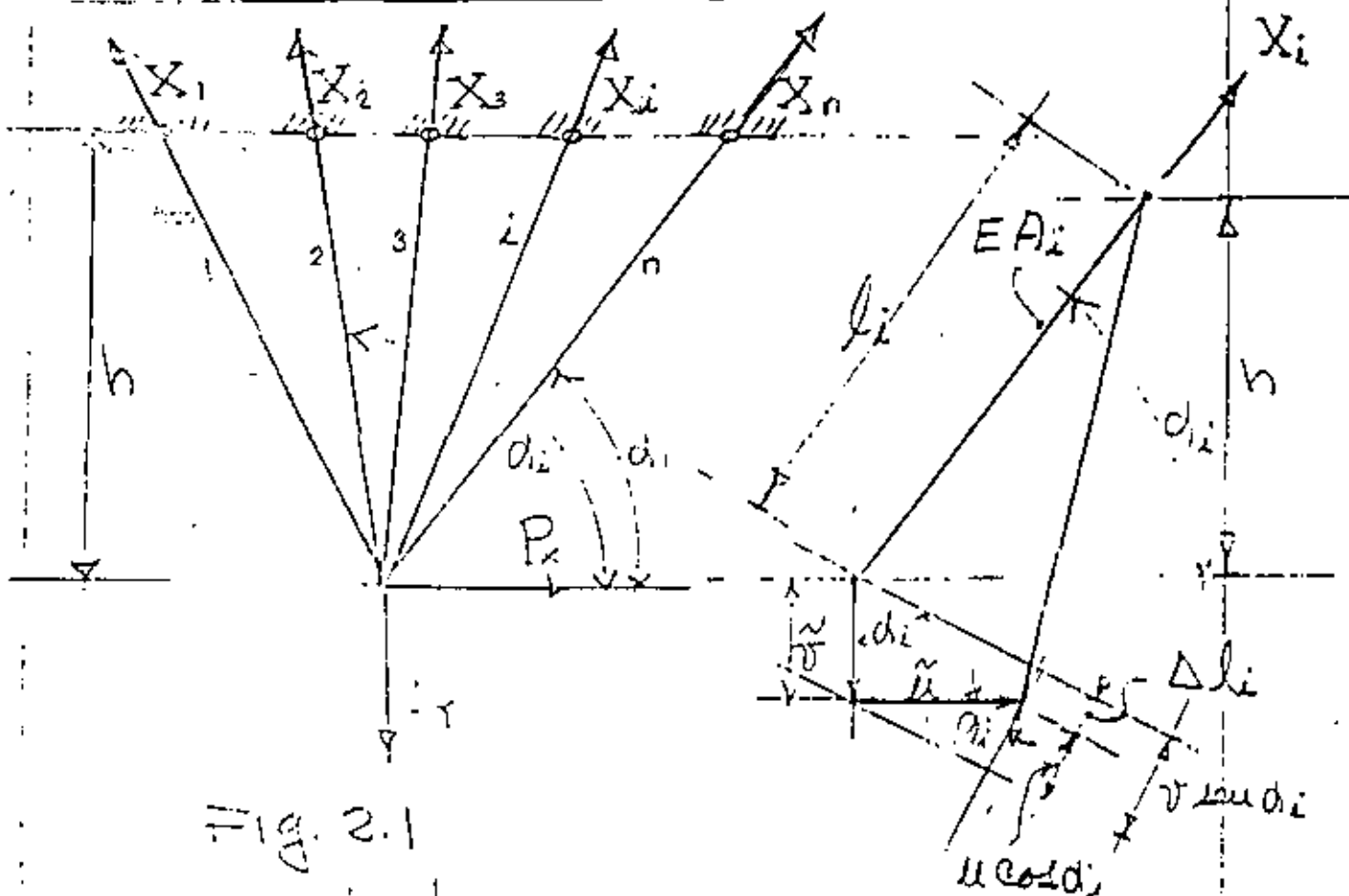


Fig. 2.1

Para ilustrar en un mismo ejemplo

la distinción entre los dos métodos, consideremos la estructura estáticamente indeterminada coplanar mostrada en la figura 2.1 bajo la acción de dos fuerzas aplicadas  $P_x$  y  $P_y$  con  $n$  barras, el número de redundantes sea  $n-2$ . En tonces para determinar las redundantes  $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ , se determina la energía de deformación del sistema en función de las fuerzas y usando el Teorema del trabajo mínimo se obtienen las ecuaciones necesarias

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial x_{n-2}} = 0 \quad (a)$$

lo anterior es el método de las fuerzas. Para resolver el mismo problema, Navier sugirió el método de desplazamientos. La deformación del sistema de la figura 2.1 estará completamente determinado si conocemos las componentes horizontal y vertical  $u$  y  $v$  respectivamente. Suponemos que los desplazamientos son pequeños

la deformación axial de cualquier barra  $i$  será

$$\Delta l_i = v \operatorname{sen} d_i - u \operatorname{cos} d_i \quad (b)$$

de la ley de Hooke su fuerza axial correspondiente será

$$X_i = \frac{E A_i}{l_i} (v \operatorname{sen} d_i - u \operatorname{cos} d_i) \quad (c)$$

de la figura 2.1

$$l_i = \frac{h}{\operatorname{sen} d_i} \quad (d)$$

substituyendo (d) en (c) se obtiene

$$X_i = \frac{E A_i}{h} (v \operatorname{sen} d_i - u \operatorname{cos} d_i) \operatorname{sen} d_i \quad (e)$$

De las condiciones de equilibrio se obtiene

$$\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{cos} d_i = P_x \quad (f)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i \operatorname{sen} d_i = P_y \quad (g)$$

substituyendo (e) en (f) y (g) se obtiene

$$v \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}^2 d_i \operatorname{cos} d_i - u \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{cos}^2 d_i \operatorname{sen} d_i = \frac{P_x h}{E} \quad (h)$$

$$v \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}^3 d_i - u \sum_{i=1}^n A_i \operatorname{sen}^2 d_i \operatorname{cos} d_i = \frac{P_y h}{E} \quad (i)$$

de (h) y (i) se determinan  $u$  y  $v$  las

cuales substituidas en (e) obtenemos la fuerza  $X_i$  en cualquier barra del sistema. Se observa en este caso que la consideración de las deformaciones directas del sistema resulta en una simplificación substancial, especialmente si el número de barras  $n$  es grande, puesto que solo tenemos que resolver dos ecuaciones con dos incógnitas que son las deformaciones  $u$  y  $v$ . En el caso del método de las fuerzas tendremos que resolver  $n-2$  ecuaciones con  $n-2$  incógnitas. Es conveniente observar que el método de las deformaciones involucra 3 etapas básicas que son

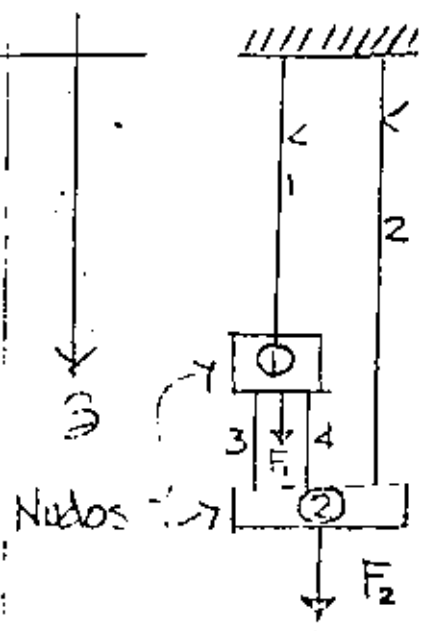
ecuación (b): Compatibilidad geométrica de deformaciones,  $u, v, \Delta l$

ecuación (e): Ley de Hooke.

ecuaciones (f) y (g): Equilibrio

Notacion: Livsky

S.J. Fenves 1965



barras

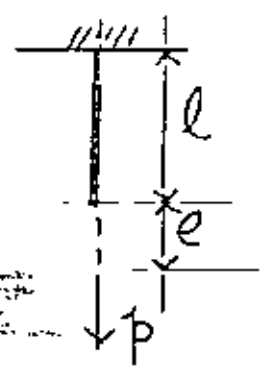
$n_B = \text{número de barras} = 4$

$n_N = \text{nodos} = 2$

$p = \text{fuerzas axiales (P)}$

$e = \text{alargamiento } (\delta)$

Rigidez de barra  $k_i = \frac{p}{e} = \frac{\text{fuerza axial}}{\text{alargamiento}} = \frac{EA_i}{l_i}$



A) Continuidad:

$\{e\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} \equiv \begin{cases} \text{Def. o alarg. de las} \\ \text{cuatro barras} \end{cases} \begin{cases} + \text{ Alarg.} \\ - \text{ Acort.} \end{cases}$

$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{cases} \text{desplazamientos nodales} \\ \begin{cases} + \downarrow \\ - \uparrow \end{cases} \end{cases}$

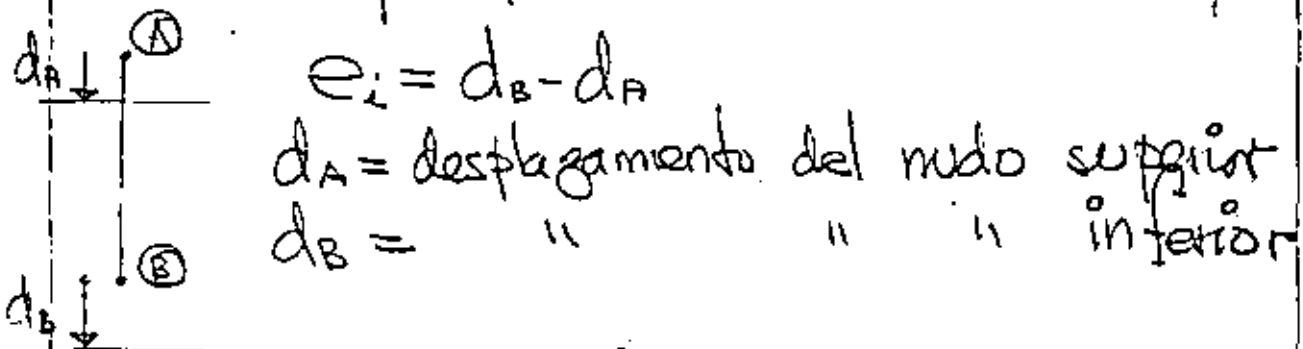
De la figura:

$e_1 = d_1$   
 $e_2 = +d_2$   
 $e_3 = -d_1 + d_2$   
 $e_4 = -d_1 + d_2$

$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} ; \Rightarrow \boxed{\{e\} = [a]\{d\}} \quad (1)$

donde  $[a] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  matriz de continuidad

observar que para una barra  $i$  cualquiera



B) Ley de Hooke

Sea  $\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix}$  fuerzas axiales en las barras  
 + Tensión, - compresión

$$p_1 = k_1 e_1 \quad k_i = \frac{EA_i}{l_i} \text{ rigidez de barra } i$$

$$p_2 = k_2 e_2$$

$$p_3 = k_3 e_3$$

$$p_4 = k_4 e_4$$

o'

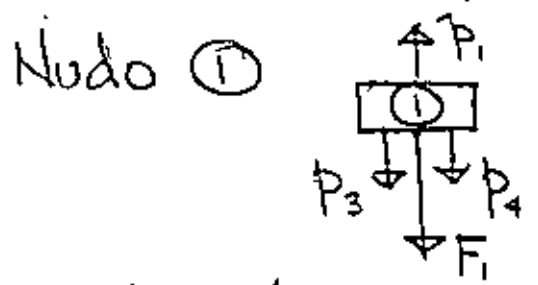
$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}; \quad \text{o'} \quad \boxed{\{p\} = [k] \{e\}} \quad (2)$$

$$\{p\} = [k] \{e\}$$

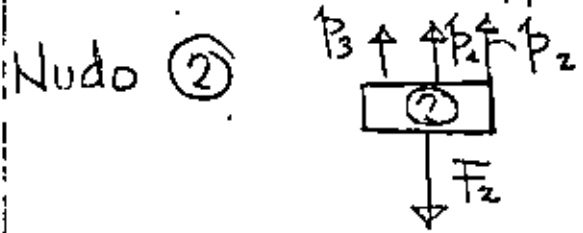
$[k]$  matriz de rigidez de los barras

c) Equilibrio  $\sum F_s = 0$  en cada nudo

Sea:  $\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$



$$F_1 = p_1 + 0 - p_3 - p_4$$



$$F_2 = 0 + p_2 + p_3 + p_4$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} \quad \text{ó} \quad \boxed{\{F\} = [a]^T \{p\}} \quad (3)$$

donde:  $[a]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  matriz de equilibrio

observar: matriz de equilibrio es la transpuesta de la matriz de continuidad

Solución del problema anterior por el método de desplazamientos (rigideces).

Incógnitas:  $\{e\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{p\}$

Datos:  $[a]$ ,  $[a]^T$ ,  $[k]$ ,  $\{F\}$

Subst. (1) en (2)

$$\{p\} = [k][a]\{d\} \quad (4)$$

Subst. (4) en (3)

$$\{F\} = [a]^T [k] [a] \{d\} \quad (5)$$

$$\text{ó} \quad \{F\} = [K] \{d\} \quad (5a)$$

La matriz  $[a]^T [k] [a]$  es cuadrada

Ejemplo; Suponiendo

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1 \text{ Ton/cm}, \quad F_1 = 10 \text{ Ton}$$

$$F_2 = 5 \text{ Ton.}$$

$$[K] = [a]^T [k] [a]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

efectuando operaciones:

$$[K] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

observar que  $[K]$  es simétrica de  $(5a)$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

inspejando  $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \end{Bmatrix}$       subst. en (1)

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ cm} \\ 7 \text{ cm} \\ -1 \text{ cm} \\ -1 \text{ cm} \end{Bmatrix}$$

Subst. en (2)

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \text{ Ton} \\ 7 \text{ Ton} \\ -1 \text{ Ton} \\ -1 \text{ Ton} \end{Bmatrix}$$

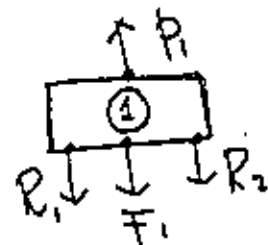
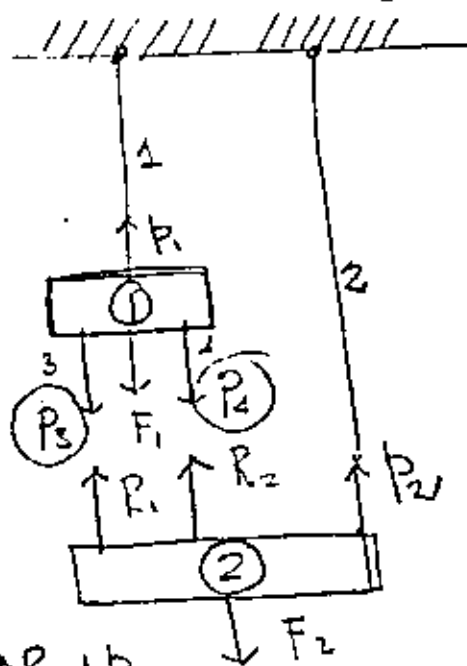
comprobación de equilibrio: de (3)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \text{ Ton} \\ 5 \text{ Ton} \end{Bmatrix} \quad \checkmark \checkmark$$



# Método de las Fuerzas (Flexibilidad)

Usando los tres principios fundamentales en el orden inverso Equilibrio, Ley de Hooke, Continuidad.



a) Equilibrio

$$F_1 = P_1 - R_1 - R_2$$

$$F_2 = P_2 + R_1 + R_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^T & a_R^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{p}_0 \\ R \end{Bmatrix}$$

$$= a_0^T \tilde{p}_0 + a_R^T R$$

despejando a  $\tilde{p}_0$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_0 \end{Bmatrix} = [a_0^T]^{-1} \{F\} - [a_0^T]^{-1} [a_R^T] [R]$$

en nuestro ejemplo

$$[a_0^T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[a_0^T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \tilde{p}_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [R]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [F] - \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} R$$

o bien

H. Pallesteros

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix}$$

además se tiene

$$p_3 = R_1$$

$$p_4 = R_2$$

Por consiguiente

$$\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{b_0} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{b_R} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= F_1 + R_1 + R_2 \\ p_2 &= F_2 - R_1 - R_2 \\ p_3 &= R_1 \\ p_4 &= R_2 \end{aligned} \right\}$$

(10) se puede escribir

$$\{p\} = [b_0] \{F\} + [b_2] \{R\} \quad (11)$$

$$b_0 = \begin{bmatrix} (a_0^T)^{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$b_R = \begin{bmatrix} (-a_0^T)^{-1} a_e^T \\ I \end{bmatrix}$$

## Ley de Hooke

437

$$\{f\} = [k] \{e\}$$

$$\boxed{\{e\} = [k]^{-1} \{f\}} \quad \textcircled{c}$$

$$[f] = [k]^{-1} \text{flex.}$$

subst  $\textcircled{b}$  en  $\textcircled{c}$

$$\{e\} = [f] [b_0] \{F\} + [f] [b_R] \{R\} \quad \textcircled{d}$$

CONTINUIDAD = Considerando los desplazamientos relativos de  $R_1$  y  $R_2$  llamados  $u_1, u_2$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$d_1 = e_1$$

$$d_2 = e_2$$

$$u_1 = e_1 - e_2 + e_3$$

$$u_2 = e_1 - e_2 + e_4$$

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{Bmatrix}$$

$$\text{para } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [b_0]^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [b_R]^T$$

Por lo tanto

$$\{f\} = [b_0^T] \{e\} \quad \textcircled{a}$$

$$\{u\} = [b_R^T] \{e\} \quad \textcircled{b}$$

{los valores de  $\{u\}$  deber ser anularse}

se sustituye  $\textcircled{a}$  en  $\textcircled{b}$

$$\{u\} = [b_R^T] [f] [b_0] \{F\} + [b_R^T] [f] [b_R] \{R\} \quad \textcircled{c}$$

Como  $\{u\} = 0$  se despeja  $\{R\}$

$$\{R\} = - [b_R^T f b_R]^{-1} [b_R^T f b_0] \{F\} \quad \textcircled{d}$$

h) nos da las redundantes  $\{R\}$

se sustituye  $\textcircled{d}$  en  $\textcircled{c}$  se obtiene  $\{f\}$

$$\begin{aligned} \{f\} &= b_0 F - b_R (b_R^T f b_R)^{-1} (b_R^T f b_0) F \\ &= [b_0 - b_R (b_R^T f b_R)^{-1} b_R^T f b_0] \{F\} \\ &= [b] \{F\} \quad \textcircled{e} \end{aligned}$$

se sustituye  $\textcircled{e}$  en  $\textcircled{a}$  se obtiene  $\{e\}$

$$\{e\} = [f] [b] \{F\} \quad \textcircled{f}$$

se sustituye  $\textcircled{f}$  en  $\textcircled{b}$  se obtiene

$$\{d\} = [b_0^T] [P] [b] \{F\}$$

(k)

439

Demostrar que

$$[b_0^T f b] = [K]^{-1} = [f]$$

$$b_0^T f b = b^T f b$$

En nuestro ejemplo calc. valores num.

$$k_1 = k_2 = k_3 = 1 \text{ ton/cm} \quad f_2$$

$$A_1 = \dots = 1 \text{ cm}^2$$

2.3 Aplicaciones de métodos matriciales a armaduras planas. 61

Para ilustrar el uso de métodos matriciales en el análisis de armaduras articuladas en los nudos, comensaremos considerando un problema de deflexiones. En la Fig. 2.3.1 se tiene una armadura con  $m$  miembros sujeta de un sistema externo de cargas  $P_i$ , y se requiere determinar la deflexión vertical del nudo  $j$  debida al sistema de cargas  $P_i$ . Si  $X_i$  representa las fuerzas axiales en la estructura real y  $x_{ij}$  las fuerzas axiales en la estructura bajo la condición de carga unitaria en  $j$ .

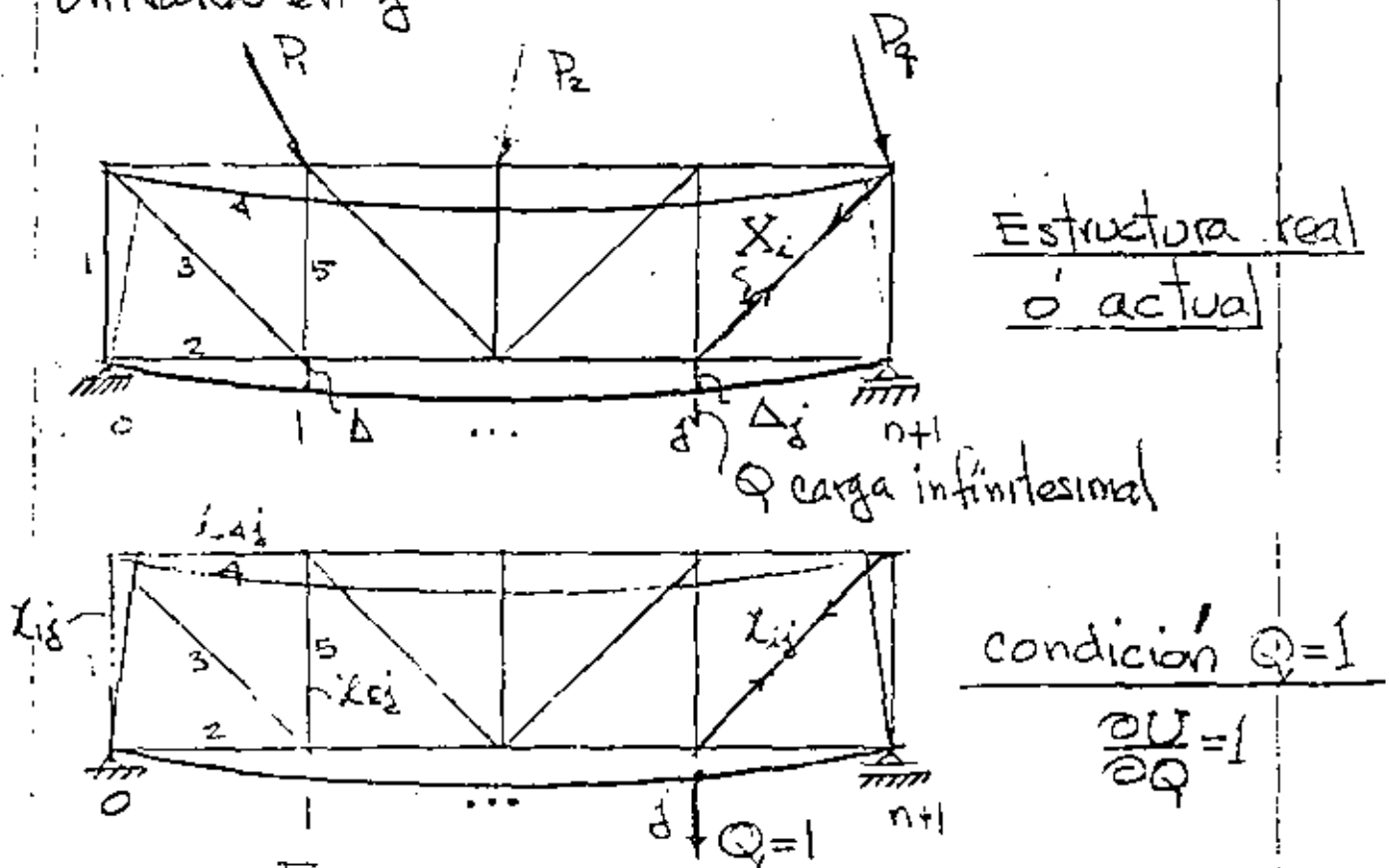


Fig. 2.3.1

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = 1$$

Del teorema de Castigliano y la energía de deformación por carga normal se tiene

$$U = \sum_{i=1}^m \frac{X_i^2 l_i}{2AE} \quad (a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \Delta_i = \sum_{i=1}^m \frac{X_i X_{ij} l_i}{EA_i} = \sum_{i=1}^m X_i X_{ij} P_i \quad (b)$$

donde  $P_i = \frac{l_i}{EA_i}$  es el factor de flexibilidad de la barra  $i$ .

Si se desean calcular las  $n$  deflexiones verticales de nudos seleccionados debemos calcular los valores  $X_{ij}$  para una fuerza vertical unitaria aplicada en cada uno de los nudos. Supongamos que han sido calculados y que acomodamos los números de influencia en la forma de una matriz de orden  $m \times n$  como sigue:

$$[X_{ij}] = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix} \quad (c)$$

(c) se denomina matriz de geometría de la armadura. Acomodando los factores de flexibilidad  $P_i$  en forma de una matriz diagonal de orden  $m \times m$

$$[P_i] = \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{mm} \end{bmatrix} \quad (d)$$

la cual es llamada matriz de flexibilidad de la armadura.

Finalmente, suponiendo que las fuerzas axiales  $X_i$  producidas por el sistema de cargas  $P_i$  han sido calculadas, y son arrojadas en la forma de una matriz vector columna

$$[X_i] = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (e)$$

la cual es llamada matriz de carga. Ahora de acuerdo con las reglas de multiplicación de matrices las  $m$  ecuaciones (b) pueden expresarse matricialmente

$$\begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \quad (f)$$

o sea con notación indicial

$$[\Delta_i] = [\lambda_{ij}] [P_i] [X_i] \quad (g)$$



Como un ejemplo numérico, se considera la armadura mostrada en la Fig. 2.3.2 la cual tiene  $m=9$  miembros. Supongase que se requiere determinar la deflexión vertical de los nudos superiores  $a$  y  $b$ , bajo la acción de dos condiciones separadas de carga como se indica. La numeración de los miembros se muestra en la figura, así como sus dimensiones. Cada barra tiene una sección transversal  $A_i = 1 \text{ pulg}^2$  y un módulo de elasticidad  $E = 30 \times 10^3 \text{ kips/pulg}^2$

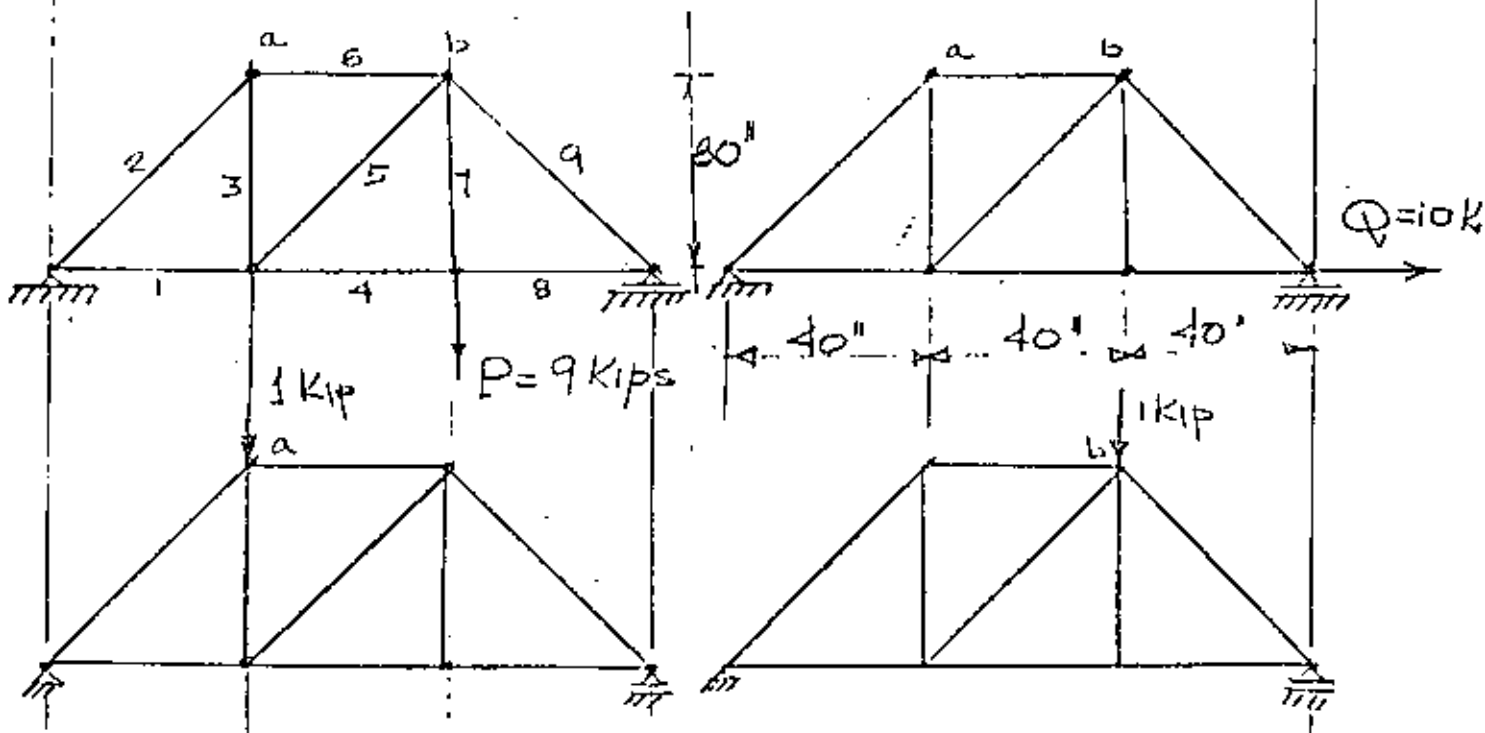


Fig. 2.3.2

El procedimiento a seguir es el siguiente:

a) Se calculan las fuerzas axiales en los nueve miembros bajo las dos condiciones de carga obteniendo la matriz de fuerzas

$$[X_i] = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ -8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

b) Similarmen se calculan las fuerzas axiales debido a las condiciones de fuerzas unitarias verticales en los puntos a y b respectivamente obteniendo la matriz

$$[X_{ij}] = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -10 & -5 \\ -3 & 0 \\ 4 & 10 \\ -5 & -5 \\ -8 & -4 \\ 4 & 0 \\ -5 & -10 \end{bmatrix} \quad (1)$$

c) Se calculan los coeficientes de flexibilidad  $f_{ij} = \frac{Q_i}{K_{ij} E}$  obteniendo la matriz de flexibilidad escrita diagonalmente

$$[f_{ij}] = \frac{10}{EI} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Substituyendo  $(k)$ ,  $(i)$  y  $(j)$  en  $(g)$  se obtiene

$$[\Delta_i] = [k_{ij}] [P_i] [X_i] \quad (g)$$

$$[\Delta_i] = \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 8 & -10 & -3 & 4 & 5 & -8 & 0 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 3 & 8 & -5 & -4 & 0 & 8 & -10 \end{bmatrix} \times$$

$$X \begin{bmatrix} 4 & & & & & & & & & \\ & 5 & & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & & \\ & & & 4 & & & & & & \\ & & & & 5 & & & & & \\ & & & & & 4 & & & & \\ & & & & & & 3 & & & \\ & & & & & & & 4 & & \\ & & & & & & & & 5 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad (h)$$

$$= \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 82 & -50 & -9 & 16 & 25 & -32 & 0 & 16 & -25 \\ 16 & -25 & 9 & 32 & -25 & -16 & 0 & 32 & -50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -5 & 0 \\ 3 & 0 \\ 8 & 10 \\ -5 & 0 \\ -4 & 0 \\ 9 & 0 \\ 8 & 10 \\ -10 & 0 \end{bmatrix} \quad (l)$$

$$= \frac{10}{9E} \begin{bmatrix} 860 & 640 \\ 1417 & 800 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318'' & 0.0525'' \\ 0.0237'' & 0.0296'' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ap} & \Delta_{Lp} \\ \Delta_{Lg} & \Delta_{Lg} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0318 & 0.0525 \\ 0.0237 & 0.0296 \end{bmatrix} \quad (m)$$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA

APPENDIX - DATA INPUT TO SAP IV

MARZO, 1984.

I. HEADING CARD (12AG)

notes columns variable entry

- (1) 1 - 72 HED(12) Enter the heading information to be printed with the output

NOTES/

- (1) Begin each new data case with a new heading card.

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NUMNP	Total number of nodal points (joints) in the model
(2)	6 - 10	NELTYP	Number of element groups
(3)	11 - 15	LL	Number of structure load cases: GE.1; static analysis EQ.0; dynamic analysis
(4)	16 - 20	NF	Number of frequencies to be found in the eigenvalue solution; EQ.0; static analysis GE.1; dynamic analysis
(5)	21 - 25	NDYN	Analysis type code: EQ.0; static analysis EQ.1; eigenvalue/vector solution EQ.2; forced dynamic response by mode superposition EQ.3; response spectrum analysis EQ.4; direct step-by-step integration
(6)	26 - 30	MODEX	Program execution mode: EQ.0; problem solution EQ.1; data check only
(7)	31 - 35	NAD	Total number of vectors to be used in a SUBSPACE ITERATION solution for eigenvalues/vectors: EQ.0; default set to: MIN{2*NF,NF+8}
(8)	36 - 40	REQB	Number of degrees of freedom (equations) per block of storage: EQ.0; calculated automatically by the program

## NOTES

- (1) Nodes are labeled with integers ranging from "1" to the total number of nodes in the system, "NUMNP". The program exits with no diagnostic message if NUMNP is zero (0). Thus, two blank cards are used to end the last data case in a run; i.e., one blank heading card (Section I) and one blank card for this section.
- (2) For each different element type (TRUSS, BEAM, etc.) a new element group need be defined. Elements within groups are assigned integer labels ranging from "1" to the total number of elements in the group. Element groups are input in Section IV, below.

Element numbering must begin with one (1) in each different group. It is possible to use more than one group for an element type. For example, all columns (vertical beams) of a building may be considered one group and the girders (horizontal beams) may be considered another group.

- (3) At least one (1) load condition must be specified for a static (NDYN.EQ.0) analysis. If the data case calls for one of the dynamic analysis options (NDYN.EQ.1, 2, 3, or 4), no load cases can be requested (i.e., LL is input as "0"). The program always processes Sections V (Concentrated load/Mass Data) and VI (Element Load Multipliers) and expects to read some data. For the case of a dynamic analysis (NDYN.EQ.1) only mass coefficients can be input in Section V, and one (1) blank element load multiplier card is expected in Section VI.
- (4) For a static analysis, NF.EQ.0. If NDYN.EQ.1, 2 or 3, the lowest NF eigenvalues are determined by the program. Note that a dynamic solution may be re-started after eigenvalue extraction (providing a previous eigenvalue solution for the model was saved on tape as described in Appendix A). NF for the original and re-start runs must be the same.
- (5) If NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.3 the program first solves for NF eigenvalues/vectors and then performs the forced response solution (or the response spectrum analysis). Thus, the program expects to read the control card governing the eigensolution (Section VII.A) before reading data in either Sections VII.B or VII.C. For the case NDYN.EQ.1, the program solves for NF eigenvalues/vectors, prints the results and proceeds to the next data case. The results for the eigenvalue solution phase (NDYN.EQ.1) may be saved for later use in automatic re-start (Appendix A lists the control cards that are required to affect this save operation), i.e. a dynamic solution may be restarted without repeating the solution for modes and frequencies. If this data case is a re-start job, set NDYN.EQ.-2 for a forced response solution, or set NDYN.EQ.-3 for a response spectrum analysis. Note that the solution may be re-started a multiple of times (to run different ground spectra or different time-dependent forcing functions) because the program does not destroy the contents of the re-start tape.  
  
If NDYN.EQ.4 the program performs the response solution by direct step-by-step integration and no eigenvalue solution control card should be provided.

## 11. MASTER CONTROL CARD (continued)

- (6) In the data-check-only mode (MODEX,EQ.1), the program writes only one file, "TAPE8", and this file may be saved for use as input to special purpose programs such as mesh plotters, etc. TAPE8 contains all data input in its completely generated form. If MODEX,EQ.1, most of the expensive calculations required during normal (MODEX,EQ.0) execution are passed. TAPE8, however, is not written during normal problem solution.

Note that a negative value for NDYN ("-2" or "-3"), when executing in the data-check-only mode, does not cause the program to read the re-start tape which contains the eigensolution information; instead, the program jumps directly from this card to Section VII.B (or Section VII.C) and continues reading and checking data cards without performing the solution.

- (7) If the program is to solve for eigenvalues using the SUBSPACE ITERATION algorithm, the entry in cc 31-35 can be used to change the total number of iteration vectors to be used from the default minimum of  $2 \cdot NF$  or  $NF+8$  (whichever is smaller) to the value "NAD". The effect of increasing NAD over the default value is to accelerate convergence in the calculations for the lowest NF eigenvalues. NAD is principally a program testing parameter and should normally be left blank.
- (8) KEQB is a program testing parameter which allows the user to test multiple equation block solutions using small data cases which would otherwise be one block problems. KEQB is normally left blank.



notes	columns	variable	entry
(1)	1	CT	Symbol describing coordinate system for this node: EQ. ; (blank) cartesian (X,Y,Z) EQ.C; cylindrical (R,Y, $\theta$ )
(2)	2 - 5	N	Node number
(3)	6 - 10 11 - 15 16 - 20 21 - 25 26 - 30 31 - 35	IX(N,1) IX(N,2) IX(N,3) IX(N,4) IX(N,5) IX(N,6)	X-translation boundary condition code Y-translation boundary condition code Z-translation boundary condition code X-rotation boundary condition code Y-rotation boundary condition code Z-rotation boundary condition code EQ.0; free (loads allowed) EQ.1; fixed (no load allowed) GT.1; master node number (beam nodes only)
(4)	36 - 45 46 - 55 56 - 65	X(N) Y(N) Z(N)	X (or R) -ordinate Y -ordinate Z (or $\theta$ ) -ordinate (degrees)
(5)	66 - 70	KN	Node number increment
(6)	71 - 80	T(N)	Nodal temperature

## NOTES/

- (1) A special cylindrical coordinate system is allowed for the global description of nodal point locations. If a "C" is entered in card column one (1), then the entries given in cc 36-65 are taken to be references to a global (R,Y, $\theta$ ) system rather than to the standard (X,Y,Z) system. The program converts cylindrical coordinate references to cartesian coordinates using the formulae:

$$X = R \sin \theta$$

$$Y = Y$$

$$Z = R \cos \theta$$

Cylindrical coordinate input is merely a user convenience for locating nodes in the standard (X,Y,Z) system, and no other references to the cylindrical system are implied: i.e., boundary condition specifications, output displacement components, etc. are referenced to the (X,Y,Z) system.

- (2) Nodal point data must be defined for all (SUMSP) nodes: Node data may be input directly (i.e., each node on its own individual card) or the generation option may be used if applicable (see note 5, below).

Admissible nodal point numbers range from "1" to the total number of nodes "NUNP". Illegal references are: N, I.E. 0 or N.GT. NUNP.

- (3) Boundary condition codes can only be assigned the following values ( $M = 1, 2, \dots, 6$ ):

$IX(N,M) = 0$ ; unspecified (free) displacement (or rotation) component  
 $IX(N,M) = 1$ ; deleted (fixed) displacement (or rotation) component  
 $IX(N,M) = K$ ; node number "K" ( $1 \leq K \leq NUNP$  and  $K \neq N$ ) is the "master" node to which the Mth degree of freedom at node "N" is a "slave"

An unspecified ( $IX(N,M) = 0$ ) degree of freedom is free to translate or rotate as the solution dictates. Concentrated forces (or moments) may be applied (Section V, below) in this degree of freedom. One (1) system equilibrium equation is required for each unspecified degree of freedom in the model. The maximum number of equilibrium equations is always less than six (6) times the total number of nodes in the model.

Deleted ( $IX(N,M) = 1$ ) degrees of freedom are removed from the final set of equilibrium equations. Deleted degrees of freedom are fixed (points of reaction), and any loads applied in these degrees of freedom are ignored by the program. Nodes that are used for geometric reference only (i.e., nodes not assigned to any element) must have all six (6) degrees of freedom deleted. Nodal degrees of freedom having undefined stiffness (such as rotations in an all TRUSS model, out-of-plane components in a two-dimensional planar model, etc.) should be deleted. Deletions have the beneficial effect of reducing the size of the set of equations that must be solved. The table below lists the types of degrees of freedom that are defined by each different element type. The table was prepared assuming that the element has general orientation in (X,Y,Z) space.

## DEGREES OF FREEDOM WITH DEFINED STIFFNESS

ELEMENT TYPE	SX	SY	SZ	$\epsilon\theta_x$	$\epsilon\theta_y$	$\epsilon\theta_z$
1. TRUSS	x	x	x			
2. BEAM	x	x	x	x	x	x
3. MEMBRANE	x	x	x			
4. 2D/QUADRILATERAL		x	x			
5. 3D/BRICK	x	x	x			
6. PLATE/SHELL	x	x	x	x	x	x
7. BOUNDARY	x	x	x	x	x	x

## DEGREES OF FREEDOM WITH DEFINED STIFFNESS

ELEMENT TYPE	$\delta X$	$\delta Y$	$\delta Z$	$\delta \theta_X$	$\delta \theta_Y$	$\delta \theta_Z$
8. THICK SHELL	x	x	x			
9. 3D/PIPE	x	x	x	x	x	x

Hence, for an all 3D/BRICK model, only the X,Y,Z translations are defined at the node, and the number of equations can be cut in half by deleting the three (3) rotational components at every node. If a node is common to two or more different element types, then the non-trivial degrees of freedom are found by combination. For example, all six (6) components are possible at a node common to both BEAM and TRUSS elements; i.e., the BEAM governs.

A "master/slave" option is allowed to model rigid links in the system. For this case,  $IX(N,M) = K$  means that the Mth degree of freedom at node "N" is "slave" to (dependent on) the same (Mth) degree of freedom at node "K"; node "K" is said to be the master node to which node N is slave. Note that no actual beam need to run from node K to node N, however the following restrictions hold:

- (a) Node one (1) cannot be a master node; i.e.,  $K \neq 1$ .
- (b) Nodes "N" and "K" must be beam-only nodes; i.e., no other element type may be connected to either node N or K.
- (c) A node "N" can be slave to only one master node, "K"; multiple nodes, however, can be slave to the same master.
- (d) If the beam from "N" to "K" is to be a rigid link arbitrarily oriented in the X,Y,Z space, then all six (6) degrees of freedom at node "N" must be made slaves to node "K"

Displacement/rotation components for slave degrees of freedom at node "N" are not recovered for printing; i.e., zeroes appear as output for slave degrees of freedom.

- (4) When CT (Col. 1) is equal to the character "C", the values input in CC 36-65 are interpreted as the cylindrical (R,Y, $\theta$ ) coordinates of node "N". Y is the axis of symmetry. R is the distance of a point from the Y-axis. The angle  $\theta$  is measured clockwise from the positive Z-axis when looking in the positive Y direction. The cylindrical coordinate values are printed as entered on the card, but immediately after printing the

global cartesian values are computed from the input entries. Note that boundary condition codes always refer to the the (X,Y,Z) system even if the node happens to be located with cylindrical coordinates.

- (5) Nodal point cards need not be input in node-order sequence; eventually, however, all nodes in the integer set  $\{1, \text{NUMNP}\}$  must be defined. Joint data for a series of nodes

$$\{N_1, N_1+1 \times KN_2, N_1+2 \times KN_2, \dots, N_2\}$$

may be generated from information given on two (2) cards in sequence:

CARD 1 /  $N_1, IX(N_1,1), \dots, IX(N_1,6), X(N_1), \dots, KN_1, T(N_1)$  /

CARD 2 /  $N_2, IX(N_2,1), \dots, IX(N_2,6), X(N_2), \dots, KN_2, T(N_2)$  /

$KN_2$  is the mesh generation parameter given on the second card of a sequence. The first generated node is  $N_1+1 \times KN_2$ ; the second generated node is  $N_1+2 \times KN_2$ , etc. Generation continues until node number  $N_2 - KN_2$  is established. Note that the node difference  $N_2 - N_1$  must be evenly divisible by  $KN_2$ . Intermediate nodes between  $N_1$  and  $N_2$  are located at equal intervals along the straight line between the two points. Boundary condition codes for the generated data are set equal to the values given on the first card. Node temperatures are found by linear interpolation between  $T(N_1)$  and  $T(N_2)$ . Coordinate generation is always performed in the (X,Y,Z) system, and no generation is performed if  $KN_2$  is zero (blank).

- (6) Nodal temperatures describe the actual (physical) temperature distribution in the structure. Average element temperatures established from the nodal values are used to select material properties and to compute thermal strains in the model (static analysis only).

## IV. ELEMENT DATA

TYPE 1 - THREE-DIMENSIONAL TRUSS ELEMENTS

Truss elements are identified by the number 1. Axial forces and stresses are calculated for each member. A uniform temperature change and inertia loads in three directions can be considered as the basic element load conditions. The truss elements are described by the following sequence of cards:

A. Control Card (3I5)

Columns 1 - 5 The number 1  
 6 - 10 Total number of truss elements  
 11 - 15 Number of material property cards

B. Material Property Cards (15,5F10.0)

There need be as many of the following cards as are necessary to define the properties listed below for each element in the structure.

Columns 1 - 5 Material identification number  
 6 - 15 Modulus of elasticity  
 16 - 25 Coefficient of thermal expansion  
 26 - 35 Mass density (used to calculate mass matrix)  
 36 - 45 Cross-sectional area  
 46 - 55 Weight density (used to calculate gravity loads)

C. Element Load Factors (4F10.0) Four cards

Three cards specifying the fraction of gravity (in each of the three global coordinate directions) to be added to each element load case.

Card 1: Multiplier of gravity load in the +X direction

Columns 1 - 10 Element load case A  
 11 - 20 Element load case B  
 21 - 30 Element load case C  
 31 - 40 Element load case D

Card 2: As above for gravity in the +Y direction

Card 3: As above for gravity in the +Z direction

Card 4: This indicates the fraction of the thermal load to be added to each of the element load cases.

D. Element Data Cards (4I5,F10.0,15)

One card per element in increasing numerical order starting with one.

Columns 1 - 5 Element number

Columns	6 - 10	Node number I
	11 - 15	Node number J
	16 - 20	Material property number
	21 - 30	Reference temperature for zero stress
	31 - 35	Optional parameter k used for automatic generation of element data.

## NOTES/

- (1) If a series of elements exist such that the element number,  $N_i$ , is one greater than the previous element number (i.e.  $N_i = N_{i-1} + 1$ ) and the nodal point number can be given by

$$I_i = I_{i-1} + k$$

$$J_i = J_{i-1} + k$$

then only the first element in the series need be provided. The element identification number and the temperature for the generated elements are set equal to the values on the first card. If k (given on the first card) is input as zero it is set to 1 by the program.

- (2) The element temperature increase  $\Delta T$  used to calculate thermal loads is given by

$$\Delta T = (T_i + T_j)/2.0 - T_r$$

where  $(T_i + T_j)/2.0$  is the average of the nodal temperatures specified on the nodal point data cards for nodes i and j; and  $T_r$  is the zero stress reference temperature specified on the element card. For truss elements it is generally more convenient to set  $T_i = T_j = 0.0$  such that  $\Delta T = -T_r$  (note the minus sign). Other types of member loadings can be specified using an equivalent  $\Delta T$ . If a truss member has an initial lack of fit by an amount d (positive if too long) then  $\Delta T = d/(\alpha L)$ . If an initial prestress force P (positive if tensile) is applied to the member ends that is released after the member is connected to the rest of the structure then  $\Delta T = -P/(\alpha A E)$ . In the above formulas A = cross section area, L = member length and  $\alpha$  = coefficient of thermal expansion.

T2

**TYPE 2 - THREE-DIMENSIONAL BEAM ELEMENTS**

Beam elements are identified by the number 2. Forces (axial and shear) and moments (bending and torsion) are calculated (in the beam local coordinate system) for each beam. Gravity loadings in each coordinate direction and specified fixed end forces form the basic element load conditions.

The beam elements are described by the following sequence of cards:

**A. Control Card (5I5)**

Columns	1 - 5	The number 2
	6 - 10	Total number of beam elements
	11 - 15	Number of element property cards
	16 - 20	Number of fixed end force sets
	21 - 25	Number of material property cards

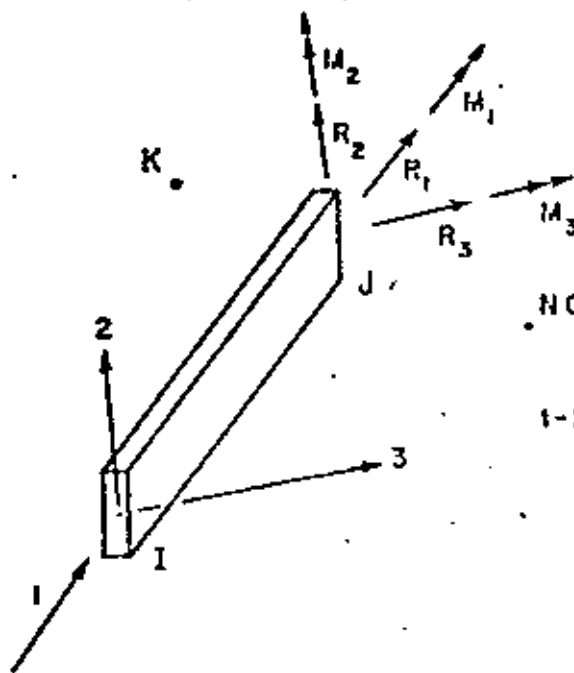
**B. Material Property Cards (15,3F10.0)**

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 15	Young's modulus
	16 - 25	Poisson's ratio
	26 - 35	Mass density (used to calculate mass matrix)
	36 - 45	Weight density (used to calculate gravity loads)

**C. Element Property Cards (15,6F10.0)**

Columns	1 - 5	Geometric property number
	6 - 15	Axial area
	16 - 25	Shear area associated with shear forces in local 2-direction
	26 - 35	Shear area associated with shear forces in local 3-direction
	36 - 45	Torsional inertia
	46 - 55	Flexural inertia about local 2-axis
	56 - 65	Flexural inertia about local 3-axis

One card is required for each unique set of properties. Shear areas need be specified only if shear deformations are to be included in the analysis.



## NOTE:

K IS ANY NODAL POINT WHICH LIES IN THE LOCAL 1-2 PLANE (NOT ON THE 1-AXIS)

## LOCAL COORDINATE SYSTEM FOR BEAM ELEMENT

D. Element Load Factors (4F10.0).

Nodal point loads (no moments) due to gravity are computed. Three cards need be supplied which specify the fraction of these loads (in each of the three global coordinate directions) to be added to each element load case.

Card 1: Multiplier of gravity load in the +X direction

Columns	1 - 10	Element load case A
	11 - 20	Element load case B
	21 - 30	Element load case C
	31 - 40	Element load case D

Card 2: As above for gravity in the +Y direction

Card 3: As above for gravity in the +Z direction

E. Fixed-End Forces (15,6F10.0/15,6F10.0)

Two cards are required for each unique set of fixed-end forces occurring in the analysis. Distributed loads and thermal loads can be specified using the fixed-end forces.

Card 1:

Columns	1 - 5	Fixed-end force number
	6 - 15	Fixed-end force in local 1-direction at Node 1
	16 - 25	Fixed-end force in local 2-direction at Node 1
	26 - 35	Fixed-end force in local 3-direction at Node 1
	36 - 45	Fixed-end moment about local 1-direction at Node 1
	46 - 55	Fixed-end moment about local 2-direction at Node 1
	56 - 65	Fixed-end moment about local 3-direction at Node 1



IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2:

Columns	1 - 5	Blank
	6 - 15	Fixed-end force in local 1-direction at Node J
	16 - 25	Fixed-end force in local 2-direction at Node J
	26 - 35	Fixed-end force in local 3-direction at Node J
	36 - 45	Fixed-end moment about local 1-direction at Node J
	46 - 55	Fixed-end moment about local 2-direction at Node J
	56 - 65	Fixed-end moment about local 3-direction at Node J

Note that values input are literally fixed-end values. Corrections due to hinges and rollers are performed within the program. Directions 1, 2 and 3 indicate principal directions in the local beam coordinates

F. Beam Data Cards (1015,216,18)

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node number I
	11 - 15	Node number J
	16 - 20	Node number K - see accompanying figure
	21 - 25	Material property number
	26 - 30	Element property number
	31 - 35	A
	36 - 40	B
	41 - 45	C
	46 - 50	D
	51 - 56	End release code at node I
	57 - 62	End release code at node J
	63 - 70	Optional parameter k used for automatic generation of element data. This option is described below under a separate heading. If the option is not used, the field is left blank.

The end release code at each node is a six digit number of ones and/or zeros. The 1st, 2nd, . . . . 6th digits respectively correspond to the force components R1, R2, R3, M1, M2, M3 at each node.

If any one of the above element end forces is known to be zero (hinge or roller), the digit corresponding to that component is a one.

NOTES/

(1) If a series of elements occurs in which each element number  $NE_i$  is one greater than the previous number  $NE_{i-1}$

i.e.,  $NE_i = NE_{i-1} + 1$

only the element data card for the first element in the series need be given as input, provided

(1) The end nodal point numbers are  $NI_1 = NI_{1-1} + k$

$$NJ_1 = NJ_{1-1} + k$$

and the

- (2) material property number
- (3) element property number
- (4) fixed-end force identification numbers for each element load case
- (5) element release code
- (6) orientation of local 2-axis

are the same for each element in the series.

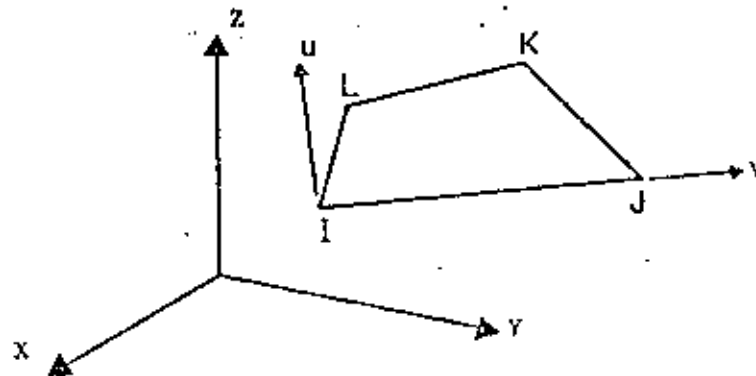
The value of  $k$ , if left blank, is taken to be one. The element data card for the last beam element must always be given.

- (2) When successive beam elements have the same stiffness, orientation and element loading, the program automatically skips recomputation of the stiffness. Note this when numbering the beams to obtain maximum efficiency.

TYPE 3 - PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS

Quadrilateral (and triangular) elements can be used for plane stress membrane elements of specified thickness which are oriented in an arbitrary plane. All elements have temperature-dependent orthotropic material properties. Incompatible displacement modes can be included at the element level in order to improve the bending properties of the elements.

A general quadrilateral element is shown below:



A local element coordinate system is defined by a u-v system. The v-axis coincides with the I-J side of the element. The u axis is normal to the v-axis and is in the plane defined by nodal points I, J and L. Node K must be in the same plane if the element stiffness calculations are to be correct. The following sequence of cards define the input data for a set of TYPE 3 elements.

A. Control Card (615)

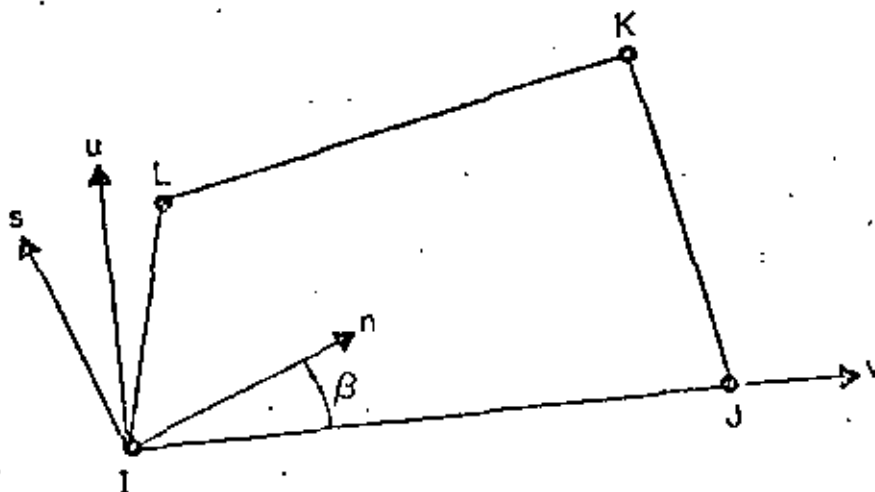
Columns	1 - 5	The number 3
	6 - 10	Total number of plane stress elements
	11 - 15	Number of material property cards
	16 - 20	Maximum number of temperature points for any one material; see Section B below.
	30	Non-zero numerical punch will suppress the introduction of incompatible displacement modes.

B. Material Property Information

Orthotropic, temperature-dependent material properties are possible. For each different material, the following group of cards must be supplied.

1. Material Property Card (215,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 10	Number of different temperatures for which properties are given. If this field is left blank, the number is taken as one.
	11 - 20	Weight density of material (used to calculate gravity loads)
	21 - 30	Mass density (used to calculate mass matrix)
	31 - 40	Angle $\beta$ in degrees, measured counter-clockwise from the v-axis to the n-axis.



The n-s axes are the principal axes for the orthotropic material. Weight and mass densities need be listed only if gravity and inertia loads are to be considered.

2. Two cards for each temperature:

Card 1: (8F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature
	11 - 20	Modulus of Elasticity - $E_n$
	21 - 30	Modulus of Elasticity - $E_s$
	31 - 40	Modulus of Elasticity $E_t$
	41 - 50	Strain Ratio - $\nu_{ns}$
	51 - 60	Strain Ratio - $\nu_{nt}$
	61 - 70	Strain Ratio - $\nu_{st}$
	71 - 80	Shear Modulus - $G_{ns}$

## Card 2: (3F10.0)

Columns	1 - 10	Coefficient of thermal expansion - $\alpha$
	11 - 20	Coefficient of thermal expansion - $\alpha_n^n$
	21 - 30	Coefficient of thermal expansion - $\alpha_t$

All material constants must always be specified. For plane stress, the program modifies the constitutive relations to satisfy the condition that the normal stress  $\sigma_t$  equals zero.

C. Element Load Factors (5F10.0)

Four cards are used to define the element load cases A, B, C and D as fraction of the basic thermal, pressure and acceleration loads.

First card, load case A: Second card, load case B, etc.

Columns	1 - 10	Fraction of thermal load
	11 - 20	Fraction of pressure load
	21 - 30	Fraction of gravity in X-direction
	31 - 40	Fraction of gravity in Y-direction
	41 - 50	Fraction of gravity in Z-direction

D. Element Cards (6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

One card per element must be supplied (or generated) with the following information:

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L (Node L must equal Node K for triangular elements)
	26 - 30	Material identification number
	31 - 40	Reference temperature for zero stresses within element
	41 - 50	Normal pressure on I-J side of element
	51 - 55	Stress evaluation option "n"
	56 - 60	Element data generator "k"
	61 - 70	Element thickness

## NOTES/

- (1) Element Data Generation - Element cards must be in element number sequence. If cards are omitted, data for the omitted elements will be generated. The nodal numbers will be generated with respect to the first card in the series as follows:

$$I_n = I_{n-1} + k$$

$$J_n = J_{n-1} + k$$

$$K_n = K_{n-1} + k$$

$$L_n = L_{n-1} + k$$

All other element information will be set equal to the information on the last card read. The data generation parameter "k" is specified on that card.

- (2) Stress Print Option - See element type 4
- (3) Thermal Data - See element type 4
- (4) Use of Triangles - See element type 4
- (5) Use of Incompatible Modes - See element type 4

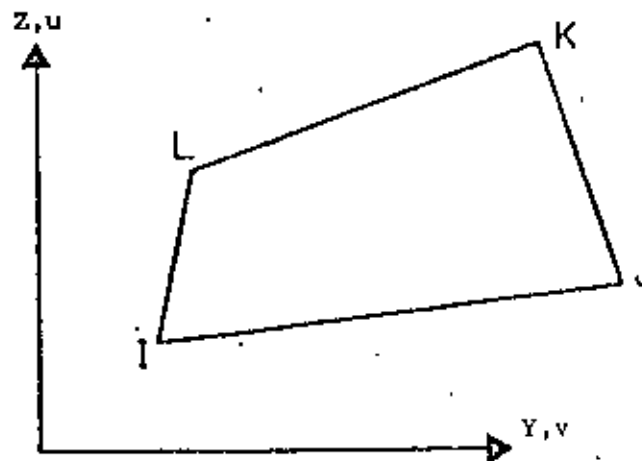
TYPE 4 - TWO-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

Quadrilateral (and triangular) elements can be used as:

- (i) Axisymmetric solid elements symmetrical about the Z-axis. The radial direction is specified as the Y-axis. Care must be exercised in combining this element with other types of elements.
- (ii) Plane strain elements of unit thickness in the Y-Z plane.
- (iii) Plane stress elements of specified thickness in the Y-Z plane.

All elements have temperature-dependent orthotropic material properties. Incompatible displacement modes can be included at the element level in order to improve the bending properties of the element.

A general quadrilateral element is shown below:

A. Control Card (615)

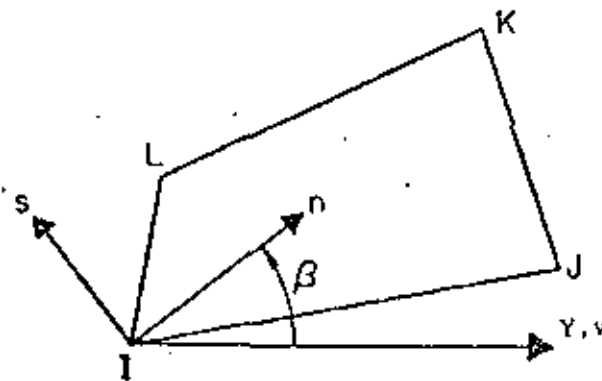
Columns	1 - 5	The number 4
	6 - 10	Total number of elements
	11 - 15	Number of different materials
	16 - 20	Maximum number of temperature cards for any one material - see Section B below.
	25	{ 0 for axisymmetric analysis 1 for plane strain analysis 2 for plane stress analysis
	30	Non-zero numerical punch will suppress the introduction of incompatible displacement modes. Incompatible modes cannot be used for triangular elements and are automatically suppressed.

B. Material Property Information

Orthotropic, temperature-dependent material properties are possible. For each different material the following group of cards must be supplied.

1. Material Property Card (2I5,3F10.0)

Columns	1 - 5	Material identification number
	6 - 10	Number of different temperature for which properties are given. If this field is left blank, the number is taken as one.
	11 - 20	Weight density of material (used to calculate gravity loads)
	21 - 30	Mass density (used to calculate mass matrix)
	31 - 40	Angle $\beta$ in degrees, measured counter-clockwise from the y-axis to the n-axis.



## PRINCIPAL MATERIAL AXES

The n-s axes are the principal axes for the orthotropic material. Weight density is needed only if gravity and inertia loads are to be considered.

2. Two cards for each temperature:

Card 1: (8F10.0)

Columns	1 - 10	Temperature	
	11 - 20	Modulus of elasticity	- $E_n$
	21 - 30	Modulus of elasticity	- $E_s$
	31 - 40	Modulus of elasticity	- $E_t$
	41 - 50	Strain ratio	- $\nu_{ns}$
	51 - 60	Strain ratio	- $\nu_{nt}$
	61 - 70	Strain ratio	- $\nu_{st}$
	71 - 80	Shear modulus	- $G_{ns}$



Card 2: (3F10.0)

Columns 1 - 10 Coefficient of thermal expansion -  $\alpha_n$   
 11 - 20 Coefficient of thermal expansion -  $\alpha_s$   
 21 - 30 Coefficient of thermal expansion -  $\alpha_t$

All material constants must always be specified. In plane stress, the program modifies the constitutive relations to satisfy the condition that the normal stress  $\sigma_t$  equals zero.

C. Element Load Factors

Four cards are used to define the element load cases A, B, C and D as fraction of the basic thermal, pressure and acceleration loads.

First card, load case A; Second card, load case B; etc.

Columns 1 - 10 Fraction of thermal load  
 11 - 20 Fraction of pressure load  
 21 - 30 Fraction of gravity in X-direction  
 31 - 40 Fraction of gravity in Y-direction  
 41 - 50 Fraction of gravity in Z-direction

D. Element Cards (6I5,2F10.0,2I5,F10.0)

One card per element must be supplied (or generated) with the following information:

Columns 1 - 5 Element number  
 6 - 10 Node I  
 11 - 15 Node J  
 16 - 20 Node K  
 21 - 25 Node L (Node L must equal Node K for triangular elements)  
 26 - 30 Material identification number  
 31 - 40 Reference temperature for zero stresses within element  
 41 - 50 Normal pressure on I-J side of element  
 51 - 55 Stress evaluation option "n"  
 56 - 60 Element data generator "k"  
 61 - 70 Element thickness (For plane strain set equal to 1.0 by program)

NOTES/

- (1) Element Data Generation - Element cards must be in element number sequence. If cards are omitted the omitted element data will be generated. The nodal numbers will be generated with respect to the first card in the series as follows:

$$I_n = I_{n-1} + k$$

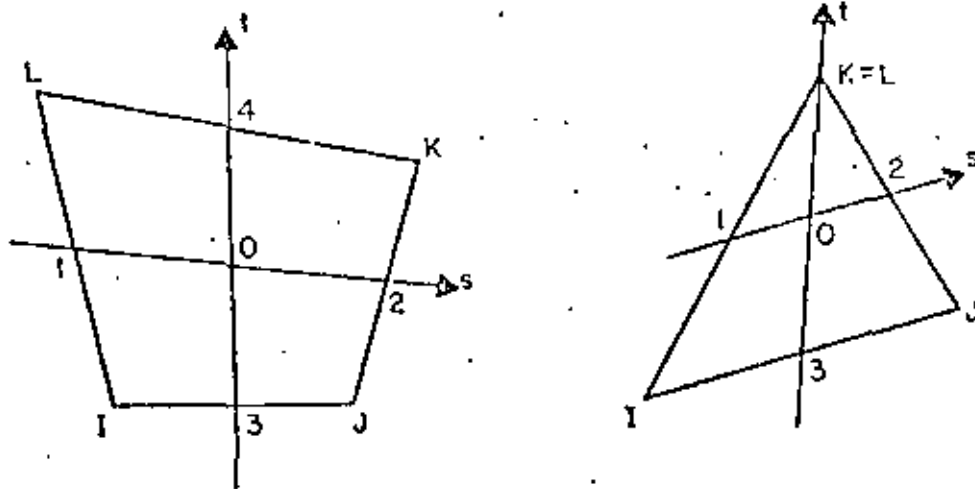
$$J_n = J_{n-1} + k$$

$$K_n = K_{n-1} + k$$

$$L_n = L_{n-1} + k$$

All other element information will be set equal to the information on the last card read. The data generation parameter  $k$  is given on that card.

- (2) Stress Print Option - The following description of the stress print option applies to both element types 3 and 4. The value of the stress print option "n" can be given as 1, 0, 8, 16 or 20.

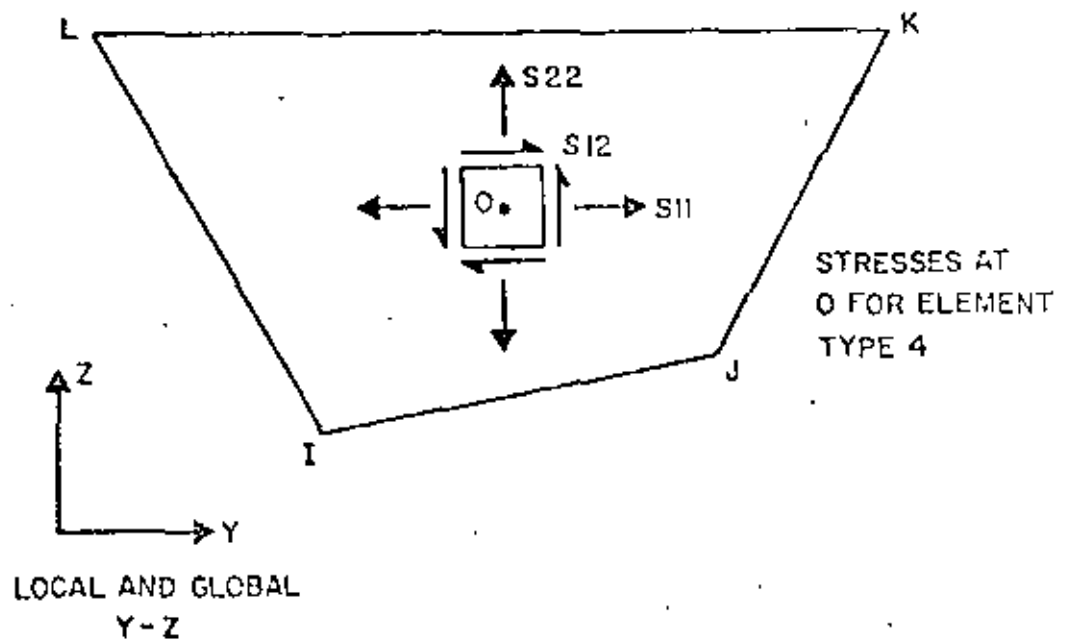
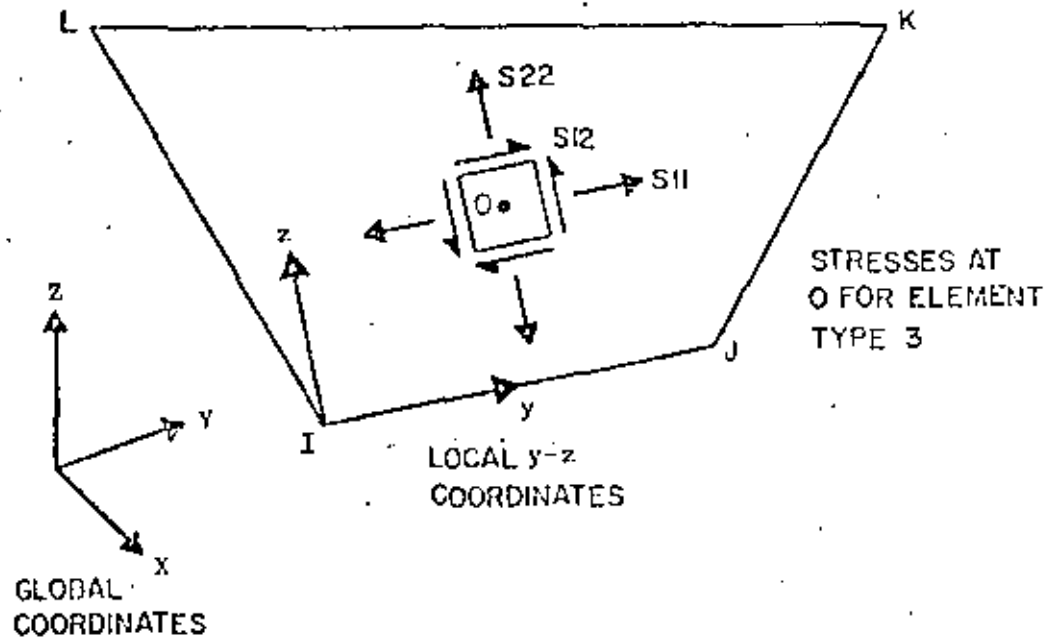


O = origin of natural s-t coordinates (Fig. 5-2). Points 1, 2, 3 and 4 are midpoints of sides. The points at which stresses are output depend on the value of n as described in the following table.

n	Stresses output at
1	None
0	0
8	0, 1
16	0, 1, 2, 3
20	0, 1, 2, 3, 4

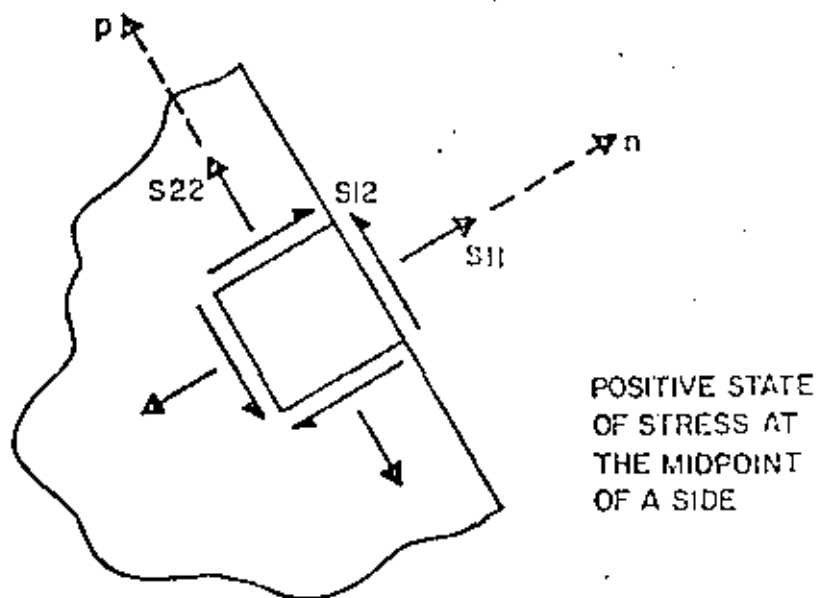
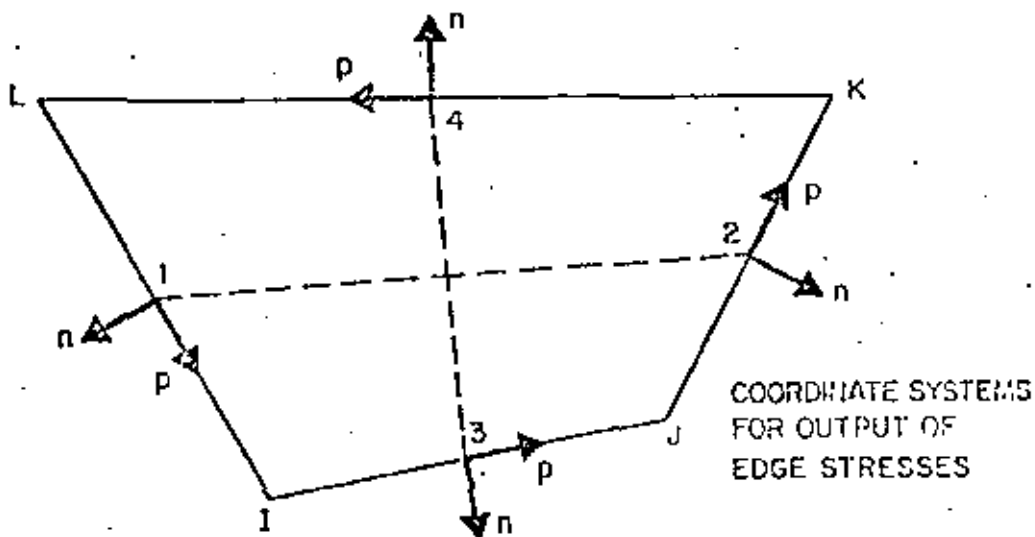
IV. ELEMENT DATA (continued)

The stresses at 0 are printed in a local y-z coordinate system. For element type 3, side I-J defines the local y-z axes in the plane of the element. For element type 4 the local y-z axes are parallel to the global Y-Z axes.



## IV. ELEMENT DATA (continued)

For both element types 3 and 4 the stresses at each edge midpoint are output in a rectangular  $n$ - $p$  coordinate system defined by the outward normal to the edge ( $n$  axis) and the edge ( $p$  axis). The positive  $p$  axis for points 1, 2, 3 and 4 is from L to I, J to K, I to J and K to L respectively (positive direction is counterclockwise about element).



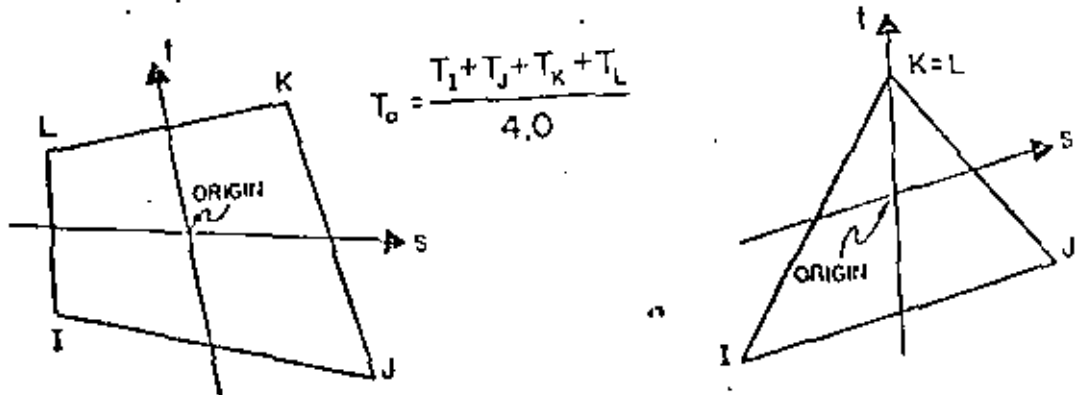
#### IV. ELEMENT DATA (continued)

The stresses for an element are output under the following headings: S11, S22, S12, S33, S-MAX, S-MIN, ANGLE. The normal stresses S11 and S22 and the shear stress S12 are as described above. S-MAX and S-MIN are the principal stresses in the plane of the element and S33 is the third principal stress acting on the plane of the element. ANGLE is the angle in degrees from (1) the local y axis at point 0, or (2) the n axis at the midpoints, to the axis of the algebraically largest principal stress.

For triangular elements the stress print option is as described above except that n=20 is not valid. If n=20 is input, n will be set to 16 by the program.

- (3) Thermal Data - Nodal temperatures as specified on the nodal point data cards are used by element types 3 and 4 in the following two ways:

- (1) Temperature-dependent material properties are approximated by interpolating (or extrapolating) the input material properties at the temperature  $T_0$  corresponding to the origin of the local s-t coordinate system (see Fig. 5.2 for description of local element coordinates). The material properties throughout the element are assumed constant: corresponding to this temperature.



- (2) For computation of nodal loads due to thermal strains in the element a bilinear interpolation expansion for the temperature change  $\Delta T(s, t)$  is used.

$$\Delta T(s, t) = \sum_{i=1}^4 h_i(s, t) T_i - T_r$$

where  $T_i$  are the nodal temperatures specified on the joint data cards,  $T_r$  is the reference stress free temperature and  $h_i(s, t)$  are the interpolation functions given by Eq. 5.7.

- (4) Use of Triangles - In general, the elements are most effective when they are rectangular, i.e. the elements are not distorted. Therefore, regular and rectangular element mesh layouts should be used as much as possible. In particular, the triangle used is the constant strain triangle; and it should be avoided, since its accuracy is not satisfactory.
- (5) Use of Incompatible Modes - Incompatible displacement modes have been found to be effective only when used in rectangular elements. They should always be employed with care. Since incompatible modes are used for all elements of a group it is recommended to use separate element groups for elements with incompatible modes and elements without incompatible modes, respectively. (See Section II, note (2)).

described in note (5) for uniformly distributed loads and can be only faces 2, 4 or 6 for hydrostatically varying pressures.

D. Acceleration due to gravity (F10.2)

Columns 1 - 10 Acceleration due to gravity (for calculation of mass matrix)

E. Element Load Case Multipliers (5 cards of 4F10.2)

Multipliers on the element load cases are scaling factors in order to provide flexibility in modifying applied loads.

Card 1:	Columns	1 - 10	PA	} Pressure load multipliers
		11 - 20	PB	
		21 - 30	PC	
		31 - 40	PD	

PA is a factor used to scale the complete set of distributed surface loads. This scaled set of loads is assigned to element load case A. Note that zero is a valid multiplier. PB, PC and PD are similar to PA except that scaled loads are assigned to element load cases B, C and D respectively. For the majority of applications these factors should be 1.0.

Card 2:	Columns	1 - 10	TA	} Thermal load multipliers
		11 - 20	TB	
		21 - 30	TC	
		31 - 40	TD	

TA is a factor used to scale the complete set of thermal loads. The scaled set of loads are then assigned to element load case A. TB, TC and TD are similar and refer to element load cases B, C and D respectively.

Card 3:	Columns	1 - 10	GXA	} Gravity load multipliers for + X global direction
		11 - 20	GXB	
		21 - 30	GXC	
		31 - 40	GXD	

Card 4:	Columns	1 - 10	GYA	} Gravity load multipliers for + Y global direction
		11 - 20	GYB	
		21 - 30	GYC	
		31 - 40	GYD	

Card 5:	Columns	1 - 10	GZA	} Gravity load multipliers for + Z global direction
		11 - 20	GZB	
		21 - 30	GZC	
		31 - 40	GZD	

Gravity loads are computed from the weight density of the material and from the geometry of the element. GXA is a multiplier which reflects the location of the gravity axis and any load factors used. The program computes the weight of the element, multiplies it by GXA and assigns the resulting loads to the + X direction of element load case A. Consequently GXA is the product of the component of gravity along the + X global axis (from - 1.0 to 1.0) and any desired load factor. GXB, GXC and GXD are similar to GXA and refer to element load cases B, C and D respectively. GYA and GZA refer to the global Y and Z directions respectively.

F. Element Cards (1215,412,211,F10.2)

Columns	1 - 5	Element number	
	6 - 10		
	11 - 15	Global node point numbers corresponding to element nodes (See note (3))	1 2 3 4 5 6 7 8
	16 - 20		
	21 - 25		
	26 - 30		
	31 - 35		
	36 - 40		
	41 - 45		
	46 - 50	Integration Order	
	51 - 55	Material Number	
	56 - 60	Generation Parameter (INC)	
	61 - 62	LSA	LSA is the distributed surface load set identification number of the distributed load acting on this element to be assigned to element load case A. LSB, LSC and LSD refer to element load cases B, C and D respectively
	63 - 64	LSB	
	65 - 66	LSC	
	67 - 68	LSD	
	69 - 70	Face numbers for stress output	
	71 - 80	Stress-free element temperature	

NOTES/

(1) Element Generation

1. Element cards must be in ascending order
2. Generation is possible as follows:
  - a. If a series of element cards are omitted, Nodal point numbers are generated by adding INC to those of the preceding element. (If omitted, INC is set equal to 1.)
  - b. Same material properties are used as for the preceding element.
  - c. Same temperature is used for succeeding elements.



- d. If on first card for the series the integration order is:
- >0 Same value is used for succeeding elements.
  - = 0 A new element stiffness is not formed. Element stiffness is assumed to be identical to that of the preceding element.
  - <0 Absolute value is used for the first element of the series, and the same element stiffness is used for succeeding elements.
- e. If on first card for the series, the distributed load number (for any load case) is:
- >0 Same load is applied to succeeding elements.
  - <0 The load case is applied to this element but not to succeeding elements in the series.

3. Element card for the last element must be supplied.

(2) Integration Order

Computation time (for element stiffness) increases with the third power of the integration order. Therefore, the smallest satisfactory order should be used. This is found to be:

2 for rectangular element

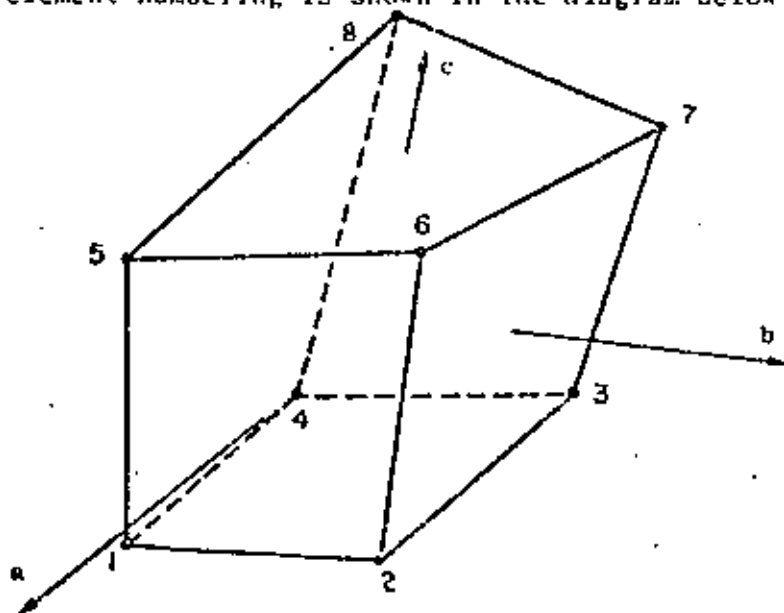
3 for skewed element

4 may be used if element is extremely distorted in shape, but not recommended.

Mesh should be selected to give "rectangular" elements as far as possible.

(3) Element Coordinate System

Local element coordinate system is a natural system for this element in which the element maps onto a cube. Local element numbering is shown in the diagram below:



IV.5.4

T 5

(4) Identification of Element Faces

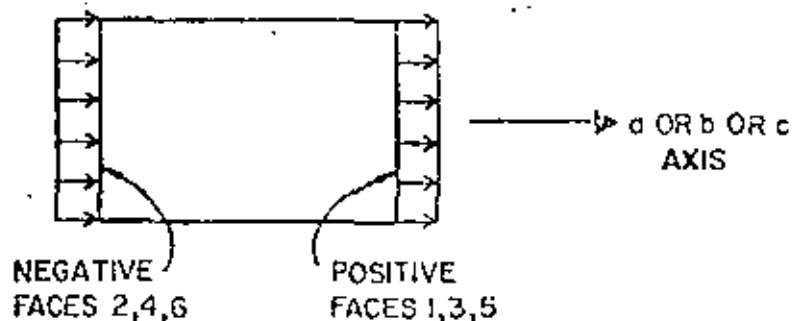
Element faces are numbered as follows:

Face 1 corresponds to + a direction	} Faces 1,3,5 are positive faces	
2 corresponds to - a direction		
3 corresponds to + b direction		
4 corresponds to - b direction		} Faces 2,4,6 are negative faces
5 corresponds to + c direction		
6 corresponds to - c direction		
0 corresponds to the center of the element		

(5) Distributed Surface Loads

Two types of surface loadings may be specified; load type 1 (LT = 1), uniformly distributed surface load and load type 2 (LT = 2), hydrostatically varying surface pressure (but not surface tension). Both loading types are for loads normal to the surface and do not include surface shears. Surface loadings that do not fall into these categories must be input as nodal loads on the concentrated load data cards (see Section V).

(1) LT = 1: A positive surface load acts in the direction of the outward normal of a positive element face and along the inward normal of a negative element face as shown in the following diagram.



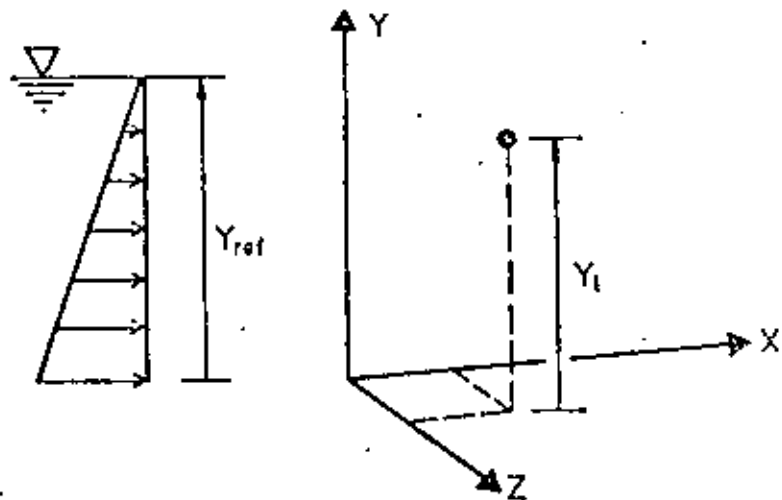
POSITIVE SURFACE LOADING P

If the uniformly distributed surface loading P is input as a positive quantity then it describes pressure loading on faces 2, 4 or 6 and tensile loading on faces 1, 3 or 5. If P is input as a negative quantity then it describes tensile loading on faces 2, 4 or 6 and pressure on faces 1, 3 or 5.

(2)  $LT = 2$ : A hydrostatically varying surface pressure on element faces 2, 4 or 6 can be specified by a reference fluid surface and a fluid weight density  $\gamma$  as input. Only one hydrostatic surface pressure card need be input in order to specify a hydrostatic loading on the complete structure. The consistent nodal loads are calculated by the program as follows. At each numerical integration point "i" on an element surface the pressure  $P_i$  is calculated from

$$P_i = \gamma (Y_i - Y_{ref})$$

where  $Y_i$  is the global Y coordinate of the point in question and  $Y_{ref}$  specifies the fluid surface assuming gravity acts along the -Y axis



If  $P_i > 0$ , corresponding to surface tension, the contribution is ignored. If an element face is such that  $Y_i > Y_{ref}$  for all i (16 integration points are used by program) then nodal loads will be applied to the element. If some  $P_i > 0$  and some  $P_i < 0$  for a particular face, then approximate nodal loads are obtained for the partially loaded surface.

(6). Thermal Loads

Thermal loads are computed assuming a constant temperature increase  $\Delta T$  throughout the element.

$$\Delta T = T_{avg} - T_0$$

$T_{avg}$  = the average of the 8 nodal point temperatures specified on nodal point data cards

$T_0$  = stress free element temperature specified on the element card.

(7). Element Load Cases

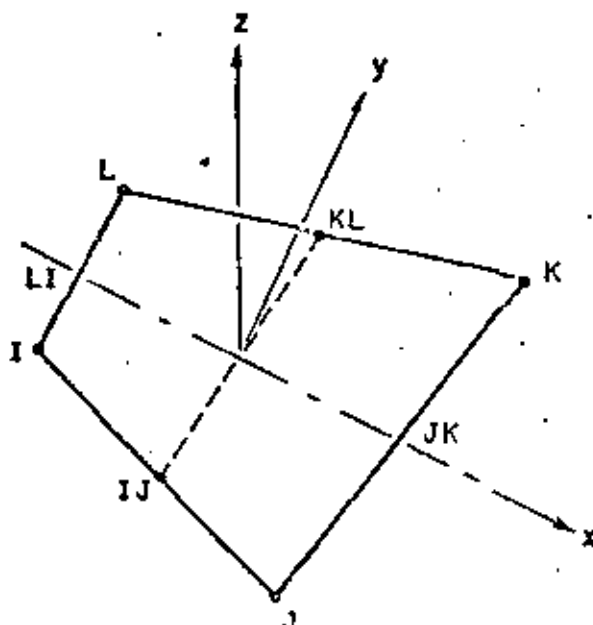
Element load case A consists of all the contributions from distributed loadings, thermal loadings and gravity loading for all the elements taken collectively.

$$\begin{aligned} \text{Load case A} = \Sigma & \text{ (PA x pressure loading} \\ & + \text{TA x thermal loading} \\ & + \text{GXA x gravity X loading} \\ & + \text{GYA x gravity Y loading} \\ & + \text{GZA x gravity Z loading)} \end{aligned}$$

Element load case A for the set of three dimensional solid elements is added to element load case A for the other element types in the analysis. The treatment of element load cases B, C and D is analogous to that of element load case A. The loading cases for the structure are obtained by adding linear combinations of element load cases A, B, C and D to the nodal loads specified on the joint data cards.

(8). Output of Element Stresses

1. At the centroid of the element, stresses are referred to the global axes. Three principal stresses are also presented.
2. At the center of an element face, stresses are referred to a set of local axes (x,y,z). These local axes are individually defined for each face as follows: Let nodal points I, J, K and L be the four corners of the element face. Then
  - x is specified by LI - JK, where LI and JK are midpoints of sides L-I and J-K,
  - z is normal to x and to the line joining midpoints IJ and KL.
  - y is normal to x and z, to complete the right-handed system.



The corresponding nodal points 1, J, K and L in each face are given in the table.

FACE	NODAL POINTS			
	I	J	K	L
1	1	2	6	5
2	1	3	7	8
3	3	7	6	2
4	4	8	5	1
5	8	5	6	7
6	1	1	2	3

Two surface principal stresses and the angle between the algebraically largest principal stress and the local x axis are printed with the output. It is optional to choose one or two locations of an element where stresses are to be computed. In the output, "face zero" designates the centroid of the element.

## IV. ELEMENT DATA (continued)

TYPE 6 - PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL)A. Control Card (3I5)

Columns 1 - 5 The number 6  
 6 - 10 Number of shell elements  
 11 - 15 Number of different materials

B. Material Property Information

Anisotropic material properties are possible. For each different material, two cards must be supplied.

Card 1: (1I0,20X,4F10.0)

Columns 1 - 10 Material identification number  
 31 - 40 Mass density  
 41 - 50 Thermal expansion coefficient  $\alpha$   
 51 - 60 Thermal expansion coefficient  $\alpha^x$   
 61 - 70 Thermal expansion coefficient  $\alpha^y$   
 $\alpha_{xy}$

Card 2: (6F10.0)

Columns 1 - 10 Elasticity element  $C$   
 11 - 20 Elasticity element  $C^{xx}$   
 21 - 30 Elasticity element  $C^{xy}$   
 31 - 40 Elasticity element  $C^{xs}$   
 41 - 50 Elasticity element  $C^{yy}$   
 51 - 60 Elasticity element  $C^{ys}$   
 $C_{xy}$

Elements in plane stress material matrix [C]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{xs} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{ys} \\ C_{xs} & C_{ys} & C_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$
C. Element Load Multipliers (5 cards)

Card 1: (4F10.0)

Columns 1 - 10 Distributed lateral load multiplier for load case A  
 11 - 20 Distributed lateral load multiplier for load case B  
 21 - 30 Distributed lateral load multiplier for load case C  
 31 - 40 Distributed lateral load multiplier for load case D

Card 2: (4F10.0)

Columns 1 - 10 Temperature multiplier for load case A  
 11 - 20 Temperature multiplier for load case B  
 21 - 30 Temperature multiplier for load case C  
 31 - 40 Temperature multiplier for load case D

Card 3: (4F10.0)

Columns 1 - 10 X-direction acceleration for load case A  
 11 - 20 X-direction acceleration for load case B  
 21 - 30 X-direction acceleration for load case C  
 31 - 40 X-direction acceleration for load case D

Card 4: (4F10.0) Same as Card 3 for Y-direction

Card 5: (4F10.0) Same as Card 3 for Z-direction

D. Element Cards (8I5,F10.0)

One card for each element

Columns	1 - 5	Element number
	6 - 10	Node I
	11 - 15	Node J
	16 - 20	Node K
	21 - 25	Node L
	26 - 30	Node O
	31 - 35	Material identification (if left blank, taken as one)
	36 - 40	Element data generator $K_n$
	41 - 50	Element thickness
	51 - 60	Distributed lateral load (pressure)
	61 - 70	Mean temperature variation $T$ from the reference level in undeformed position
	71 - 80	Mean temperature gradient $df/dz$ across the shell thickness (a positive temperature gradient produces a negative curvature).

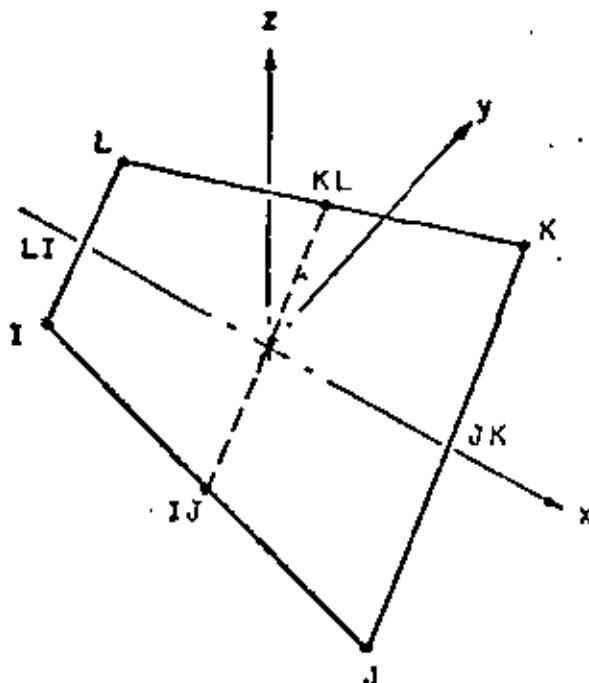
NOTES/

(1) Nodal Points and Coordinate Systems

The nodal point numbers I, J, K and L are in sequence in a counter-clockwise direction around the element. The local element coordinate system (x, y, z) is defined as follows:

- x Specified by LI - JK, where LI and JK are midpoints of sides L-I and J-K.
- z Normal to x and to the line joining midpoints IJ and KL.
- y Normal to x and z to complete the right-handed system.

This system is used to express all physical and kinematic shell properties (stresses, strains, material law, etc.), except that the body force density is referred to the global coordinate system (X, Y, Z).



For the analyses of shallow shells, rotational constraints normal to the surface may be imposed by the addition of boundary elements at the nodes (element type =7).

(2) Node 0

When columns 26 - 30 are left blank, mid-node properties are computed by averaging the four nodes.

(3) Element Data Generation

Element cards must be in element number sequence. If element cards are omitted, the program automatically generates the omitted information as follows:

The increment for element number is one

$$\text{i.e. } NE_{i+1} = NE_i + 1$$

The corresponding increment for nodal number is  $K_n$

$$\text{i.e. } NI_{i+1} = NI_i + K_n$$

$$NJ_{i+1} = NJ_i + K_n$$

$$NK_{i+1} = NK_i + K_n$$

$$NL_{i+1} = NL_i + K_n$$

Material identification, element thickness, distributed lateral load, temperature and temperature gradient for generated elements are the same. Always include the complete last element card.



(4) Element Stress Calculations

Output are moments per unit length and membrane stresses.

## IV. ELEMENT DATA (continued)

TYPE 7 - BOUNDARY ELEMENTS

This element is used to constrain nodal displacements to specified values, to compute support reactions and to provide linear elastic supports to nodes. If the boundary condition code for a particular degree of freedom is specified as 1 on the structure nodal point data cards, the displacement corresponding to that degree of freedom is zero and no support reactions are obtained with the printout. Alternatively, a boundary element can be used to accomplish the same effect except that support reactions are obtained since they are equal to the member end forces of the boundary elements which are printed. In addition the boundary element can be used to specify non-zero nodal displacements in any direction which is not possible using the nodal point data cards.

The boundary element is defined by a single directed axis through a specified nodal point, by a linear extensional stiffness along the axis or by a linear rotational stiffness about the axis. The boundary element is essentially a spring which can have axial displacement stiffness and axial rotational stiffness. There is no limit to the number of boundary elements which can be applied to any joint to produce the desired effects. Boundary elements have no effect on the size of the stiffness matrix.

INPUT DATAA. Control Card (2I5)

Columns 1 - 5 The number 7.  
6 - 10 Total number of boundary elements.

B. Element Load Multipliers (4F10.0)

Columns 1 - 10 Multiplier for load case A  
11 - 20 Multiplier for load case B  
21 - 30 Multiplier for load case C  
31 - 40 Multiplier for load case D

C. Element Cards (8I5,3F10.0)

One card per element (in ascending nodal point order) except where automatic element generation is used.

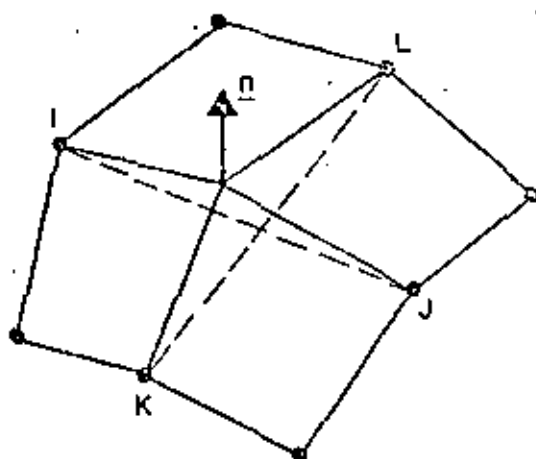
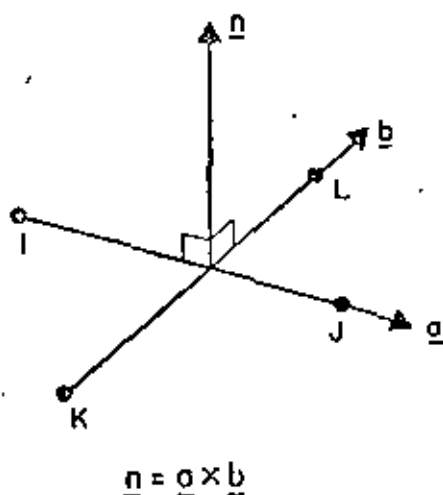
Columns 1 - 5 Node N, at which the element is placed  
6 - 10 Node I  
11 - 15 Node J } leave columns 11 - 25 blank  
16 - 20 Node K } if only node I is needed.  
21 - 25 Node L  
26 - 30 Code for displacement  
31 - 35 Code for rotation  
36 - 40 Data generator  $K_0$   
41 - 50 Specified displacement along element axis  
51 - 60 Specified rotation about element axis  
61 - 70 Spring stiffness (set to  $10^{10}$  if left blank)  
for both extension and rotation.

## NOTES/

(1) Direction of boundary element

The direction of the boundary element at node N is specified in one of two ways.

- (i) A second nodal point I defines the direction of the element from node N to node I.
- (ii) Four nodal points I, J, K and L specify the direction of the element as the normal to the plane defined by two intersecting straight lines (vectors  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$ , see Fig. below).



ROTATIONAL CONSTRAINT  
IN THIN SHELL ANALYSIS

The four points I, J, K and L need not be unique. A useful application for the analysis of shallow thin shells employs the boundary element to approximate rotational constraint about the surface normal as shown above.

$\underline{n}$  is given by the vector cross product  $\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b}$  and defines the direction of the boundary element.

Note that node I in case (i) and nodes I, J, K and L in case (ii) are used only to define the direction of the element and if convenient may be any nodes used to define other elements. However 'artificial nodes' may be created to define directions of boundary elements. These 'artificial nodes' are input on the nodal point data cards with their coordinates and with all the boundary condition codes specified as 1 (one).

#### IV. ELEMENT DATA (continued)

It should be noted that node  $N$  is the structure node to which the boundary element is attached. In case (i), a positive displacement moves node  $N$  towards node  $I$ . Correspondingly, a positive force in the element means compression in the element. In case (ii), a positive displacement moves node  $N$  into the direction  $\underline{n}$  (see Fig.).

##### (2) Displacement and rotation codes

Displacement code = 1: When this code is used, the displacement  $\delta$ , specified in columns 41-50, and the spring stiffness  $k$ , specified in columns 61-70, are used by the program in the following way. The load  $P$ , evaluated from  $P = k\delta$ , is applied to node  $N$  in the direction node  $N$  to node  $I$  in case (i) and into direction  $\underline{n}$  in case (ii), if  $\delta$  is positive. If  $k$  is much greater than the stiffness of the structure at node  $N$  without the boundary element, then the net effect is to produce a displacement very nearly equal to  $\delta$  at node  $N$ . If  $\delta = 0$ , then  $P = 0$  and the stiff spring approximates a rigid support. Note that the load  $P$  will contribute to the support reaction for nonzero  $\delta$ . The boundary condition codes specified on the structure nodal point data cards must be consistent with the fact that a load  $P$  is being applied to node  $N$  to effect the desired displacement (even when this displacement is zero).

Rotation code = 1: This case is analogous to the situation described above. A torque  $T$ , evaluated from  $T = k\theta$ , is applied to node  $N$  about the axis (direction) of the element. The rotation  $\theta$  is specified in columns 51-60.

##### (3) Data generator $K_n$

When a series of nodes are such that:

- (i) All have identical boundary elements attached
- (ii) All boundary elements have same direction
- (iii) All specified displacements and rotations are identical
- (iv) The nodal sequence forms an arithmetic sequence, i.e.,  $N, N + K_n, N + 2K_n$  etc.,

then only the first and last node in the sequence need be input. The increment  $K_n$  is input in columns 36-40 of the first card.

(4) Element load multipliers

Each of the four possible element load cases A, B, C and D associated with the boundary elements consists of the complete set of displacements as specified on the boundary element cards multiplied by the element load multiplier for the corresponding load case. As an example, suppose that displacement of node N is specified as 1.0, spring stiffness as  $10^{10}$  and no other boundary element displacements are specified. Let case A multiplier be 0.0 and case B multiplier be 2.0. For element load case A the specified displacement is  $0.0 \times 1.0 = 0.0$  while that for B is  $2.0 \times 1.0 = 2.0$ . Linear combinations of element load cases A, B, C and D for all types of elements collectively for a particular problem are specified on the structure element load multiplier cards. As far as the boundary element is concerned, this device is useful when a particular node has a support displacement in one load case but is fixed in others.

(5) Recommendations for use of boundary elements

If a boundary element is aligned with a global displacement direction, only the corresponding diagonal element in the stiffness matrix is modified. Therefore, no stiffness matrix ill-conditioning results. However, when the boundary element couples degrees of freedom, large off-diagonal elements introduce ill-conditioning into the stiffness matrix which can cause solution difficulties.

In the analysis of shallow shells boundary elements with stiffness a fraction of the element bending stiffness should be used (say less than or about 10%).

In dynamic analysis "artificially stiff" boundary elements should not be used. (See note (8) in Section VII.A).

## IV. ELEMENT DATA (continued)

## TYPE 8 - VARIABLE-NUMBER-NODES THICK SHELL AND THREE-DIMENSIONAL ELEMENTS

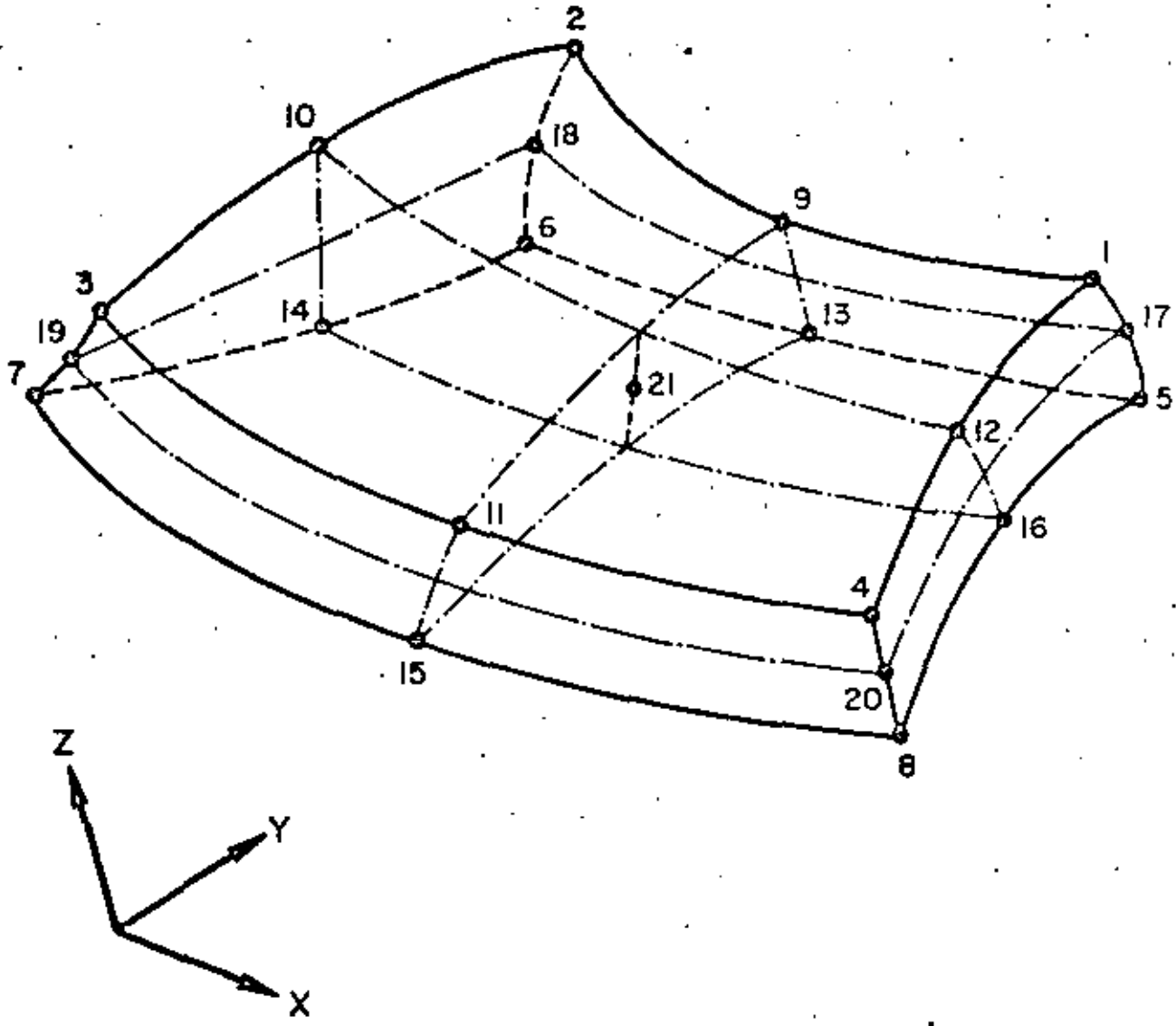
A minimum of 8 and a maximum of 21 nodes are used to describe a general three dimensional isoparametric element; the element is used to represent orthotropic, elastic media. The element type is identified by the number eight (8). Three translational degrees of freedom are assigned to each node, and at least the eight corner nodes must be input to define a hexahedron. Input of nodes 9 to 21 is optional; the figures below illustrate some of the most commonly used node combinations.

Element load cases (A,B,C,...) are formed from combinations of applied surface pressure, hydrostatic loads, inertia loads in the three directions X,Y,Z and thermal loads. Six global stresses are output at up to seven (7) locations within the element; these output locations are selected by means of appropriate data entries.

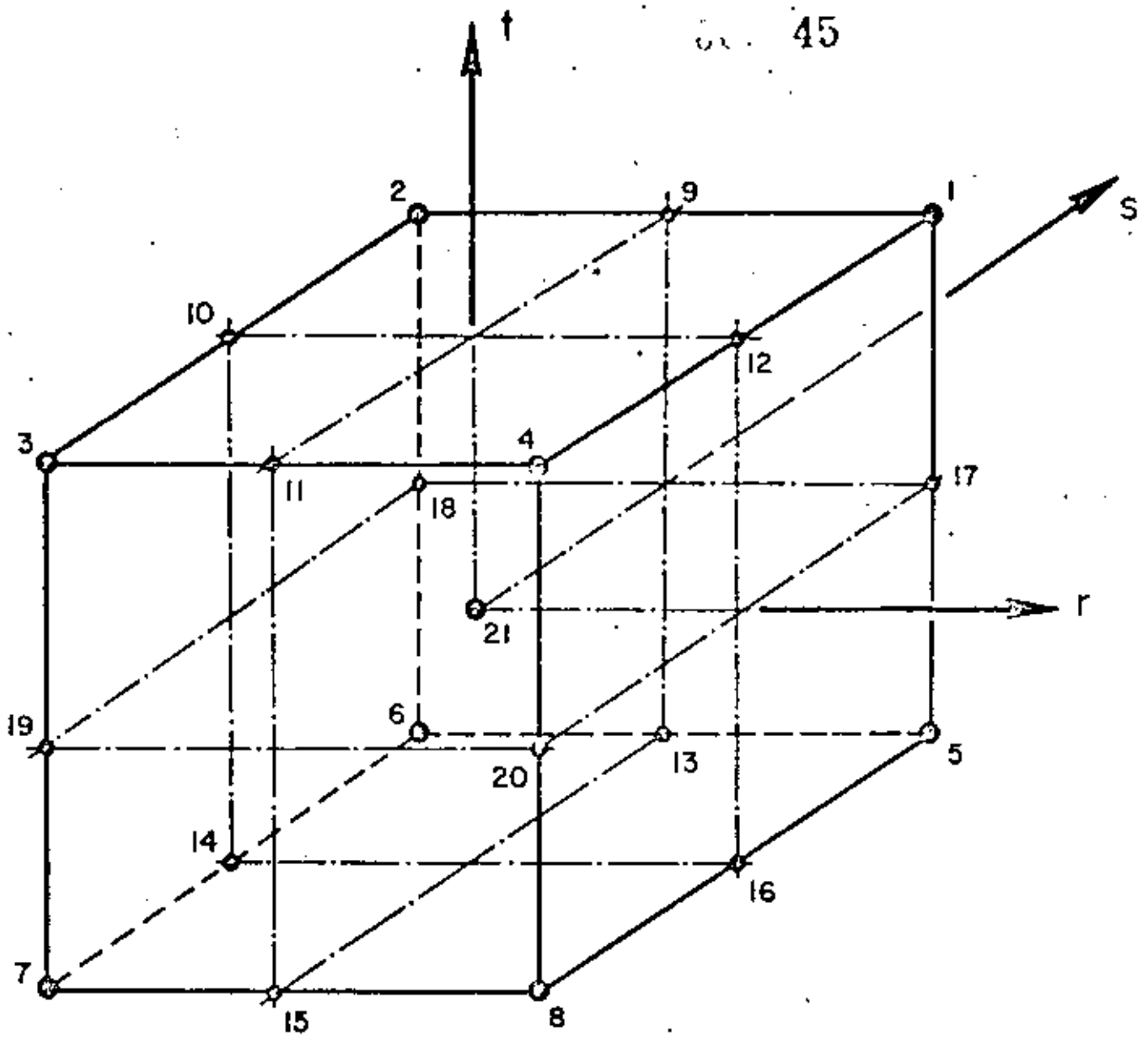
Node temperatures input in Section III are used to form an average element temperature, which is the basis of material property selection for the element. If thermal loads are applied, node temperatures are used to establish the temperature field within the element, and the temperature interpolation functions are the same as those assumed to represent element displacements.

1. Control Card (1015)

notes	columns	variable	entry
	5		Enter the number "8"
	6 - 10	NSOL21	Number of solid elements; GE.1
	11 - 15	NUMMAT	Number of different materials; GE.1
(1)	16 - 20	MAXTP	Maximum number of temperature points used in the table for any material; EQ.0; default set to "1"
(2)	21 - 25	NORTHO	Number of different sets of material axis orientation data; EQ.0; all properties are defined in the X,Y,Z, system
(3)	26 - 30	NDLS	Number of different distributed load (i.e., pressure) sets
(4)	31 - 35	MAXNOD	Maximum number of nodes used to describe any one element; GE.8 and IE.21 EQ.0; default set to "21"
(5)	36 - 40	NOPSET	Number of sets of data requesting stress output at various element locations; EQ.0; centroid output only

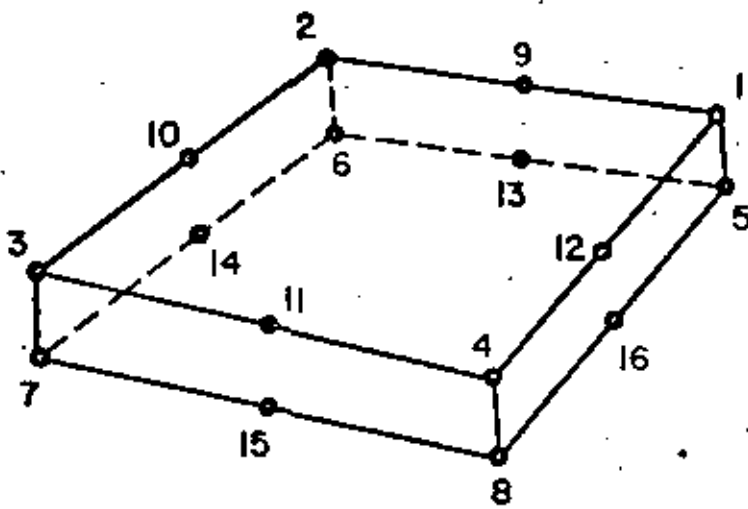


THREE DIMENSIONAL ISOPARAMETRIC ELEMENT

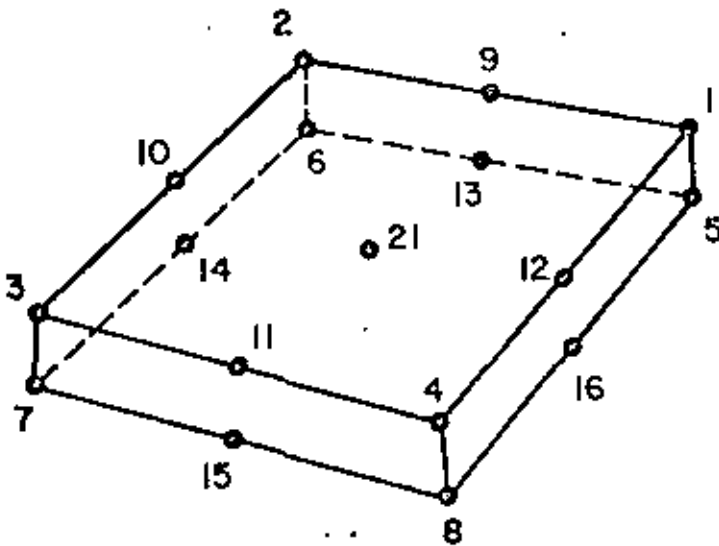


HEXAHEDRAL ELEMENT IN NATURAL COORDINATES

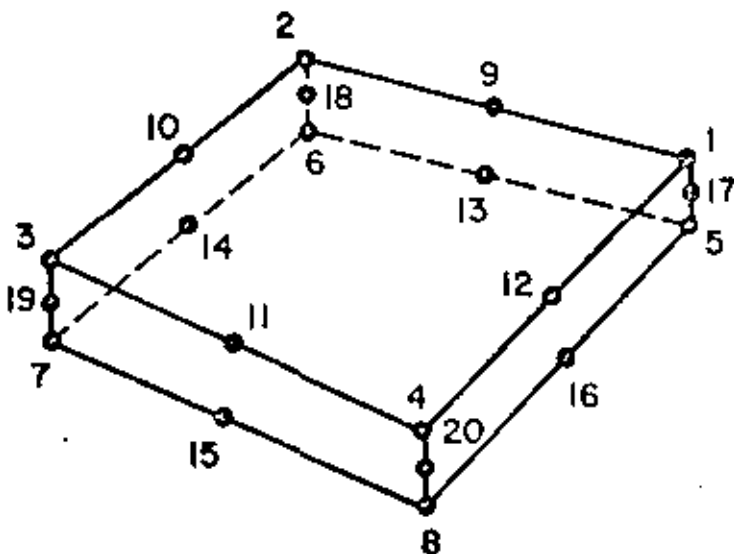




a. 16 - NODE ELEMENT



b. 17 - NODE ELEMENT



c. 20 - NODE ELEMENT

## COMMONLY USED ELEMENT GEOMETRIES

IV. ELEMENT DATA (continued)

1. Control Card (1015) (continued)

notes	columns	variable	entry
(6)	41 - 45	INTRS	Standard integration order for the natural (r,s) directions; GE.2 and LE.4 EQ.0; default set to "2"
	46 - 50	INTT	Standard integration order for the natural (t)-direction; GE.2 and LE.4 EQ.0; default set to "2"

NOTES/

- (1) The variable MAXTP limits the number of temperature points that can be input for any one of the NUMMAT material sets; i.e., the variable NTP in Section 2 cannot exceed the value of MAXTP.
- (2) NORTH0 specifies the number of cards to be read in Section 3, and if omitted, all orthotropic material axes are assumed to coincide with the global cartesian axes X,Y,Z.
- (3) NDLS specifies the number of card pairs to be read in Section 4. NDLS must be a positive integer if any pressure loads are to be applied to solid element faces.
- (4) MAXNOD specifies the maximum number of non-zero node numbers assigned to any one of the NSOL21 elements input in Section 7. Locations of the element's 21 possible nodes are shown in the figure below in which the element is shown mapped into its natural r,s,t coordinate system. The eight corner nodes must be input for every element, and nodes 9 to 21 are input optionally. If MAXNOD is 9 or greater, all 21 node entries are read for each element (Cards 2 and 3, Section 7), but only the first MAXNOD non-zero entries encountered when reading in sequence from 1 to 21 will be used for element description. As an example, for the 16-17- and 20-node elements MAXNOD has values of 16, 17, 20, respectively.
- (5) As a means of controlling the amount of solution output, stress output location sets are defined in Section 5, and the total number of these output requests is specified by the variable NOPSET. For the case of NOPSET.EQ.0, no data is input in Section 5, and the only stress output produced by the program is at the element centroid. Otherwise, stress output can be requested at up to seven (7) locations (selected from a table of 27 possible locations) by means of the data entries given in Section 5.

## IV. ELEMENT DATA (continued)

## NOTES (continued)

- (6) The entries INTRS and INTT control the number of integration points to be used in numerical evaluation of integrals over volumes in the (r,s) and (t)-coordinate directions, respectively. When solid elements are used to represent shell structures, the through-the-thickness integrations (i.e., in the natural t-axis direction) can be evaluated less accurately than those in-plane (i.e., in the r,s plane). For this case INTRS might be 3 and INTT would be chosen typically as 2. The entries INTRS and INTT are standard or reference values and are used if the integration order entries on the element cards (Card 1, Section 7) are omitted. Non-zero entries for integration order(s) given on the element cards over-ride the standard values posted on this card.

2. Material Property Cards

Orthotropic, temperature dependent material properties are allowed. For each different material that is requested on the Control Card, the following set of data must be supplied (i.e., NUCCAT sets total):

a. Material identification card (215,2F10.0,6A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Material identification number; GE,1 and LE,NUCCAT
	6 - 10	NTP	Number of different temperatures at which properties are given; LE,MAXTP EQ.0; default set to "1"
(2)	11 - 20	WDEN	Weight density of the material used to computed static gravity loads
	21 - 30	MASSDN	Mass density of the material used to compute the mass matrix in a dynamic analysis; EQ.0; default set to "WDEN/386.4"
	31 - 66		Material description used to label the output.

## NOTES:

- (1) Material numbers (M) must be input in ascending sequence beginning with "1" and ending with "NUMBLAT"; omissions or repetitions are illegal.
- (2) Weight density is used to compute static node forces due to applied gravity loads; mass density is used to calculate element mass matrices for use in connection with a dynamic analysis.

IV. ELEMENT DATA (continued)

b. Material cards (7F10.0,6F10.0)

NTP pairs of cards are input in order of algebraically increasing value of temperature.

First Card

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10		Temperature, $T_n$
(2)	11 - 20		$E_{11}$ at $T_n$
	21 - 30		$E_{22}$ at $T_n$
	31 - 40		$E_{33}$ at $T_n$
	41 - 50		$\nu_{12}$ at $T_n$
	51 - 60		$\nu_{13}$ at $T_n$
	61 - 70		$\nu_{23}$ at $T_n$

Second Card

notes	columns	variable	entry
	1 - 10		$G_{12}$ at $T_n$
	11 - 20		$G_{13}$ at $T_n$
	21 - 30		$G_{23}$ at $T_n$
	31 - 40		$\alpha_1$ at $T_n$
	41 - 50		$\alpha_2$ at $T_n$
	51 - 60		$\alpha_3$ at $T_n$

NOTES/

- (1) The 12 entries following the temperature value  $T_n$  are physical properties known at  $T_n$ . When two or more temperature points describe a material, interpolation based on average element temperature is performed to establish a property set for the element. Hence, the range of temperature points for a material table must span the expected range of average element temperatures for all elements associated with the material.
- (2) The 12 constants ( $E_{11}, E_{22}, \dots, \alpha_3$ ) are defined with respect to a set of axes ( $X_1, X_2, X_3$ ) which are the principal material directions for an orthotropic, elastic medium. The stress-strain relations with respect to the ( $X_1, X_2, X_3$ ) system is written as follows :

## IV. ELEMENT DATA (continued)

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\nu_{12}/E_{22} & -\nu_{13}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_{11} & 1/E_{22} & -\nu_{23}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_{11} & -\nu_{32}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix}$$

$$- [\Delta T \alpha_1 \quad \Delta T \alpha_2 \quad \Delta T \alpha_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

where  $\epsilon_{ij}$  and  $\sigma_{ij}$  are normal strains and stresses in the  $X_i$  directions;  $\gamma_{ij}$  and  $\tau_{ij}$  are shear strains and stresses on the principal material planes;  $\alpha_i$  are the coefficients of thermal expansion, and  $\Delta T$  is the increase in temperature from stress free distributed over the element volume.

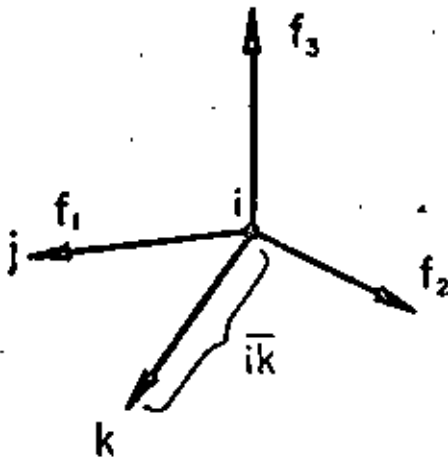
### 3. Material Axes Orientation Sets (415)

If NORTH0 is zero on the Control Card, skip this data section, and all material axes ( $X_1, X_2, X_3$ ) will be assumed to coincide with the global cartesian system  $X, Y, Z$ . Otherwise, NORTH0 cards must be input as follows:

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Identification number; GE.1 and LE.NORTH0
(2)	6 - 10	NI	Node number for point "i"
	11 - 15	NJ	Node number for point "j"
	16 - 20	NK	Node number for point "k"

#### NOTES/

- (1) Identification numbers (M) must be input in increasing sequence beginning with "1" and ending with "NORTH0".
- (2) Orthotropic material axes orientations are specified by means of the three node numbers NI, NJ, NK. For the special case where orthotropic material axes coincide with the global axes ( $X, Y, Z$ ), it is not necessary to input data in this section; see Section 7, note (4). Let  $\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$  be the three orthogonal vectors which define the axes of material orthotropy, then their directions are as shown below:



$$\underline{f}_1 = \vec{ij}$$

$$\underline{f}_3 = \vec{ij} \times \vec{ik}$$

$$\underline{f}_2 = \underline{f}_3 \times \underline{f}_1$$

Node numbers NI,NJ,NK are only used to locate points i,j,k, respectively, and any convenient nodes may be used.

#### 4. Distributed Surface Load Data

NDLS pairs of cards are to be input in this section in order of increasing set number (N). These data describe surface loads acting on element faces and may be prescribed directly in terms of face corner node pressures or indirectly by means of a hydrostatic pressure field.

##### \*. Control Card (315)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Load set identification number; GE.1 and LE,NDLS
(2)	6 - 10	NFACE	Element face number on which this distributed load is acting; GE.1 and IE.6
(3)	11 - 15	LT	Load type code: EQ.1: prescribed normal pressure intensities EQ.2: hydrostatically varying pressure field EQ.0: default set to "1"

## NOTES/

- (1) The surface load data sets established in this section are assigned to the elements in Section 7.
- (2) Hexahedra have six quadrilateral faces each uniquely described by four node numbers at the corners of the face. The face number convention established for elements is given in the Table below.
- (3) Two types of surface pressure loads may be applied to faces of the elements. If LT.EQ.0 (or 1), a normal pressure distribution is prescribed directly by means of pressure intensities at the face corner nodes. If LT.EQ.2, the face is exposed to hydrostatic pressure due to fluid head.

FACE NUMBER	NATURAL COORDINATES	CORNER NODE NUMBERS			
		N <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	N <sub>3</sub>	N <sub>4</sub>
1	(+1, s, t)	1	4	8	5
2	(-1, s, t)	2	3	7	6
3	(r, +1, t)	1	5	6	2
4	(r, -1, t)	4	8	7	3
5	(r, s, +1)	1	2	3	4
6	(r, s, -1)	5	6	7	8

TABLE Corner Node Numbers for the Solid Element Faces

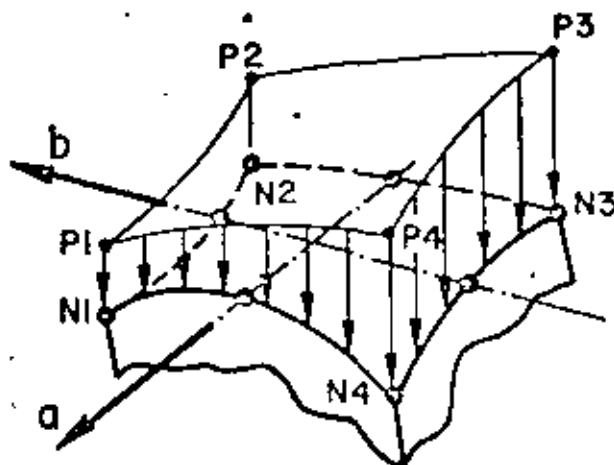
b. Normal Pressure Data (4F10.0) (LT.EQ.1, only)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	P1	Pressure at face node N <sub>1</sub>
(2)	11 - 20	P2	Pressure at face node N <sub>2</sub> ; EQ.0; default set to "P1"
	21 - 30	P3	Pressure at face node N <sub>3</sub> ; EQ.0; default set to "P1"
	31 - 40	P4	Pressure at face node N <sub>4</sub> ; EQ.0; default set to "P1"

## IV. ELEMENT DATA (continued)

## NOTES/

- (1) The pressure distribution acting on an element face is defined by specifying intensities  $P_1, P_2, P_3, P_4$  at the face corner nodes as shown below:



The face corner node numbers are given in the Table and positive pressure tends to compress the volume of the element.

The variation of pressure over the element face,  $p(a,b)$ , is given as:

$$p(a,b) = P_1 x_{h_1} + P_2 x_{h_2} + P_3 x_{h_3} + P_4 x_{h_4}$$

where

$$\begin{aligned} h_1 &= (1/4) (1+a) (1+b) \\ h_2 &= (1/4) (1-a) (1+b) \\ h_3 &= (1/4) (1-a) (1-b) \\ h_4 &= (1/4) (1+a) (1-b) \end{aligned}$$

in quadrilateral natural face coordinates  $(a,b)$ .

- (2) If any of the entries  $P_2, P_3, P_4$  are omitted, these values are re-set to the value of  $P_1$ ; i.e., for a uniformly distributed pressure ( $p$ ), we have  $P_1.EQ.p$  and cc 11-40 blank. If  $P_2$  is zero specify a small number.

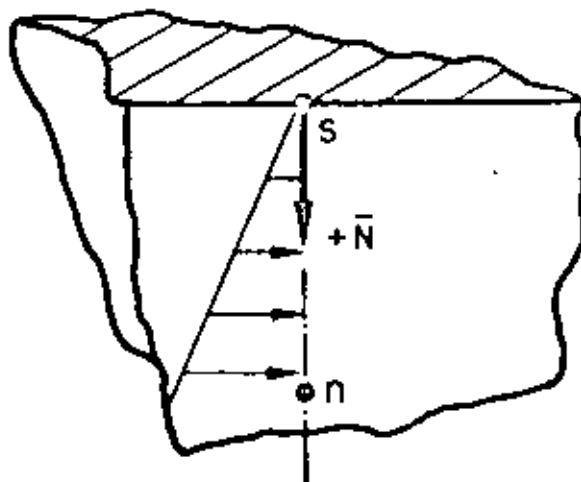
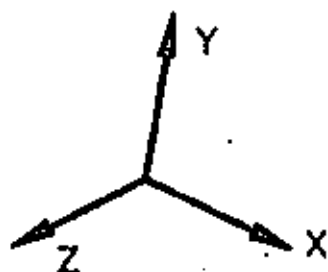


c. Hydrostatic Pressure Data (7F10.0) (LT.EQ.2, only)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	GAMMA	Weight density of the fluid, $\gamma$ ; GT.0
(2)	11 - 20	XS	X-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	21 - 30	YS	Y-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	31 - 40	ZS	Z-ordinate of point s in the free surface of the fluid
	41 - 50	XN	X-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface
	51 - 60	YN	Y-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface
	61 - 70	ZN	Z-ordinate of a point n on the normal to the fluid surface

## NOTES/

- (1) GAMMA is the weight density (i.e., units of force per unit of fluid volume) of the fluid in contact with element face number NFACE.
- (2) Point "s" is any point in the free surface of the fluid, and point "n" is located such that the direction from s to n is normal to the free surface and is positive with increasing depth.



Hydrostatic pressure in contact with an element face causes element compression; i.e., pressure resultant acts toward the element centroid. Nodes located above the fluid surface are automatically assigned zero pressure intensities if an element face is not (or only partially) submerged in the fluid.

#### 5. Stress Output Request Location Sets (715)

If NOPSET is zero on the Control Card, skip this section, and global stresses will be computed and output at the element centroid only. Otherwise, NOPSET cards must be input as follows:

notes	column	variable	entry
(1)	1 - 5	LOC1	Location number of output point 1
	6 - 10	LOC2	Location number of output point 2
	11 - 15	LOC3	Location number of output point 3
	16 - 20	LOC4	Location number of output point 4
	21 - 25	LOC5	Location number of output point 5
	26 - 30	LOC6	Location number of output point 6
	31 - 35	LOC7	Location number of output point 7
			LE, 27

#### NOTES/

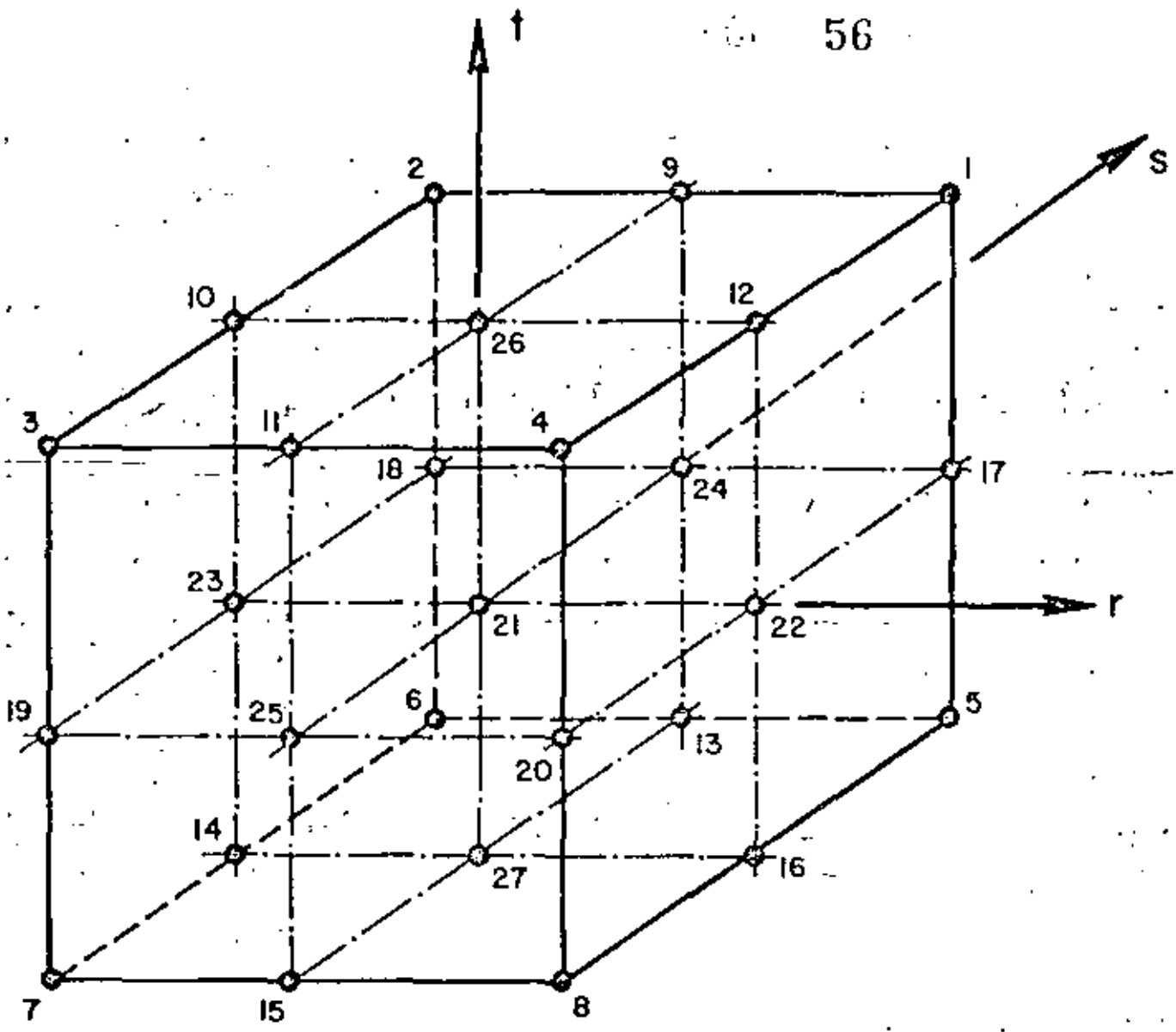
- (1) 27 element locations are assigned numbers as shown in the Figure below. Locations 1 to 21 correspond to node numbers 1 to 21, respectively. Locations 22 to 27 are element face centroids. The first zero (or blank) entry on a location card terminates reading of location numbers for the output set; hence, fewer than seven locations can be requested in an output set. Location numbers must be input in order of increasing magnitude; i.e., LOC2 is greater than LOC1, LOC3 is greater than LOC2, etc. In dynamic analysis, FACE 1, FACE 2, ..., FACE 6 correspond to output locations 22, 23, ..., 27 respectively. (See Table VII.1).

#### 6. Element Load Case Multipliers

Five (5) cards must be input in this section specifying the fraction of gravity (X,Y,Z), the fraction of thermal loads and the fraction of pressure loads to be added to each of the element loading combinations (A,B,...). Load case multiplier data affect static analysis calculations only.

Card 1 X-direction gravity (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	GXA	Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case A
			. . .
	31 - 40	GXD	Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case D



ELEMENT STRESS OUTPUT LOCATION NUMBERS

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2 Y-direction gravity (4F10.0)

Card 3 Z-direction gravity (4F10.0)

Card 4 Thermal loads (4F10.0)

notes columns variable entry

(2) 1 - 10 TA Fraction of thermal loads to be applied in element load case A

31 - 40 TD Fraction of thermal loads to be applied in element load case D

Card 5 Pressure loads (4F10.0)

notes columns variable entry

(3) 1 - 10 PA Fraction of pressure loads to be applied in element load case A

31 - 40 PD Fraction of pressure loads to be applied in element load case D

NOTES/

- (1) Gravity loads on the structure due to static body forces are computed from the weight density of element materials and the element geometry. These loads are assigned to the element load combinations by means of the entries on Cards 1, 2 and 3 for forces in the X, Y, Z directions, respectively.
- (2) Thermal loads are computed knowing the node temperatures input in Section III, the stress free reference temperature ( $T_0$ ) input in Section 7 and the element's material properties and node coordinates. The temperature distribution within the element is described using the same interpolation functions which describe the variation of displacements within the element.
- (3) Pressure loads are first assigned to element load cases (A, B, ...) by means of the entries (scale factors) on Card 5, and the distributed load sets which were input in Section 4 are then applied to the elements individually for cases (A, B, ...) by means of load set references given in Section 7.

7. Element Cards

Two cards (if MAXNOD.EQ.8) or three cards (if MAXNOD.GT.8) must be prepared for each element that appears in the input, and the

format for these cards is as follows:

Card 1 (615,F10.,415,412)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Element number; GE.1 and LE.NSOI21
(2)	6 - 10	NDIS	Number of nodes to be used in describing the element's displacement field; EQ.0; default set to "MAXNOD"
(3)	11 - 15	NXYZ	Number of nodes to be used in the description of element geometry; EQ.0; default set to "NDIS" EQ.NDIS → isoparametric element LT.NDIS → subparametric element
	16 - 20	NMAT	Material identification number; GE.1 and LE.SUBMAT
(4)	21 - 35	MAXES	Identification number of the material axis orientation set; GE.1 and LE.NORTH0 EQ.0; material axes default to the global X,Y,Z system
(5)	26 - 30	IOP	Identification number of the stress output location set; GE.1 and LE.NOPSET EQ.0; centroid output only
	31 - 40	TZ	Stress free reference temperature, $T_0$
(6)	41 - 45	KG	Node number increment for element data generation; EQ.0; default set to "1"
	46 - 50	NRSINT	Integration order for natural coordinate (r,s) directions; EQ.0; default set to "INTRS"
	51 - 55	NTINT	Integration order for natural coordinate (t) direction; EQ.0; default set to "INTT"
(7)	56 - 60	IREUSE	Flag indicating that the stiffness and mass matrices for this element are the same as those for the preceding element; EQ.0; no EQ.1; yes
(8)	61 - 62	LSA	Pressure set for element load case A
	63 - 64	LSB	Pressure set for element load case B
	65 - 66	LSC	Pressure set for element load case C
	67 - 68	LSD	Pressure set for element load case D; LE.NDIS

IV. ELEMENT DATA (continued)

Card 2 (1615)

notes	columns	variable	entry
(9)	1 - 5		Node 1 number
	6 - 10		Node 2 number
	11 - 15		Node 3 number
	16 - 20		Node 4 number
	21 - 25		Node 5 number
	26 - 30		Node 6 number
	31 - 35		Node 7 number
	36 - 40		Node 8 number
(10)	41 - 45		Node 9 number
	46 - 50		Node 10 number
	51 - 55		Node 11 number
	56 - 60		Node 12 number
	61 - 65		Node 13 number
	66 - 70		Node 14 number
	71 - 75		Node 15 number
	76 - 80		Node 16 number

59

Card 3 (515) (required if MAXNOD.GT.8)

note	columns	variable	entry
	1 - 5		Node 17 number
	6 - 10		Node 18 number
	11 - 15		Node 19 number
	16 - 20		Node 20 number
	21 - 25		Node 21 number

NOTES/

- (1) Element cards must be input in ascending element number order beginning with "1" and ending with "NSOL21". Repetition of element numbers is illegal, but element cards may be omitted, and missing element data are generated according to the procedure described in note (7).
- (2) NDIS is a count of the node numbers actually posted on Cards 2 and 3 which must immediately follow Card 1. NDIS must be at least eight (8), but must be less than or equal to the limit (MAXNOD) which was given on the Control Card, Section 1. Element displacements are assigned at the NDIS non-zero nodes, and thus, the order of the element matrices is three (i.e., translations X,Y,Z) times NDIS. The eight corner nodes of the hexahedron must be input, but nodes 9 to 21 are optional, and any or all of these optional nodes may be used to describe the element's displacement field.

- (3) When element edges are straight it is unnecessary computationally to include side nodes in the numerical evaluation of coordinate derivatives, the Jacobian matrix, etc., and since regular element shapes are common, an option has been included to use fewer nodes in these geometric calculations than are used to describe element displacements. The first NXYZ non-zero nodes posted on Cards 2 and 3 are used to evaluate those parameters which pertain to element geometry only. NXYZ must be at least eight (8), and if omitted is re-set to NDIS. A common application might be a 20 node element (i.e., NDIS.EQ.20) with straight edges in which case NXYZ would be entered as "8".
- (4) MAXES (unless omitted) refers to one of the material axes set defined in Section 3. If omitted, the material (NMAT) orientation is such that the  $(X_1, X_2, X_3)$  axes coincide with the  $(X, Y, Z)$  axes, respectively.
- (5) IOP (unless omitted) refers to one of the output location sets given in Section 5. If IOP.EQ.0, stress output is quoted at the element centroid only. Stress output at a point consists of three normal and three shear components referenced to the global  $(X, Y, Z)$  axes.
- (6) When element cards are omitted, element data are generated automatically as follows:
- (a) all data on Card 1 for generated elements is taken to be the same as that given on the first element card in the sequence;
  - (b) non-zero node numbers (given on Cards 2 and 3 for the first element) are incremented by the value "KG" (which is given on Card 1 of the first element) as element generation progresses; zero (or blank) node number entries are generated as zeroes.

The last element cannot be generated.

- (7) The flag IREUSE allows the program to bypass stiffness and mass matrix calculations providing the current element is identical to the preceding element; i.e., the preceding and current elements are identical except for a rigid body translation. If IREUSE.EQ.0, new matrices are computed for the current element. If IREUSE.EQ.1 it is also assumed that the node temperatures of the element (for calculation of thermal loads) are the same as those of the preceding element.

- (8) Pressure loads are assigned (i.e., applied) to the element by means of load set references in cc 61-62 for combination A, cc 63-64 for B, etc. A zero entry means that no pressure acts on the element for that particular element load combination.
- (9) The first eight node numbers establish the corners or vertices of a general hexahedron and must be all non-zero, (see Figure in Section 1 on control cards). Node numbers must be input in the sequence indicated otherwise volume and surface area integrations will be indefinite.
- (10) The number of cards required as input for each element depends on the variable MAXNOD. For the case of MAXNOD.EQ.8, only Card 2 is required. If MAXNOD.GT.8, Cards 2 and 3 are required for all elements.

Nodes 9 to 21 are optional, and only those nodes actually used to describe the element are input. The program will read all 21 entries if MAXNOD was given as 9 or greater, but only NDIS non-zero values are expected to be read on Cards 2 and 3. If for example one element is described by 10 nodes, then cc 1-10 on Card 2 would be the eight corner node numbers, and the remaining two node numbers would be posted somewhere on Cards 2 and 3.



## TYPE 9 - THREE-DIMENSIONAL STRAIGHT OR CURVED PIPE ELEMENTS

Pipe elements are identified by the number twelve (12). Axial and shear forces, torque and bending moments are calculated for each member. Gravity loadings in the global (X,Y,Z) directions, uniform temperature changes (computed from input nodal temperatures), and extensional effects due to internal pressure form the basic member loading conditions. Pipe element input is described by the following sequence of cards:

notes	columns	variable	entry
	1. <u>Control Card</u> (1415)		
	4 - 5		Enter the number "12"
(1)	6 - 10	NPIPE	Number of pipe elements
	11 - 15	NUMMAT	Number of material sets
	16 - 20	MAXTP	Maximum number of temperature points used in the table for any material GE.1; at least one point
	21 - 25	NSECT	Number of section property sets; GE.1
(2)	26 - 30	NBRP	Number of branch point nodes at which output is required; EQ.0; no branch point output is produced
	31 - 35	MAXTAN	Maximum number of tangent elements common to any one branch point node; EQ.0; default set to "4"
	36 - 40	NPAR(8)	Blank
	41 - 45	NPAR(9)	Tangent stiffness load matrix dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing
	46 - 50	NPAR(10)	Bend stiffness load matrix dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing
	51 - 55	NPAR(11)	Element parameters dump flag EQ.1; Print EQ.0; Suppress printing

## NOTES/

- (1) The number of pipe elements ("NPIPE") counts both tangent and bend geometries, and both the material and section property tables can reference either the bend or tangent element types.
- (2) A branch point is defined as a nodal location where at least three (3) tangent pipe elements connect. The two input parameters "NBRP" and "MAXTAN" reserve storage for an index array created during the processing of pipe element data; posting a larger number of maximum common tangents than actually exist is not considered a fatal error condition. Branch point data is read if requested, but not currently used; i.e. to be used in future program versions.

2. Material Property Cards

Temperature-dependent Young's modulus (E), Poisson's ratio ( $\nu$ ) and thermal expansion coefficient ( $\alpha$ ) are allowed. If more than one (1) temperature point is input for a material table, then the program selects properties using linear interpolation between input temperature values. The temperature used for property selection is the average element temperature which is denoted as  $T_a$ :

$$T_a = (T_i + T_j)/2$$

where  $T_i$  and  $T_j$  are the input nodal temperatures for ends "i" and "j" of the pipe. For each different material, the following set of cards must be input:

a. material identification card (215,6A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	M	Material identification number; GE,1 and LE,NUMMAT
	6 - 10	NT	Number of different temperatures at which properties are given; EQ,0; one temperature point is assumed to be input
	11 - 46		Material description used to label the output for this material

## NOTES/

- (1) Material identification number must be input between one ("1") and the total number of materials specified ("NUMMAT")

b. material cards (4F10.0)

notes	columns	variable.	entry
(1)	1 - 10	T(N)	Temperature, $T_n$
	11 - 20	E(N)	Young's modulus, $E_n$
	21 - 30	XNU(N)	Poisson's ratio, $\nu_n$
	31 - 40	ALP(N)	Thermal expansion coefficient, $\alpha_n$

## NOTES/

- (1) Supply one card for each temperature point in the material table; at least one card is required. Temperatures must be input in increasing (algebraic) order. If two or more points are used, care must be taken to insure that the table covers the expected range of average temperatures existing in the elements to which the material table is assigned.

3. Section Property Cards (IS,5F10.0.3A6)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Section property identification number; GE.1 and LE,NSECT
(2)	6 - 15		Outside diameter of the pipe, $d_o$
	16 - 25		Pipe wall thickness, $t$
	26 - 35		Shape factor for shear distortion, $\alpha_v$
(3)	36 - 45		Weight per unit length of section, $\gamma_1$
(4)	46 - 55		Mass per unit length of section, $\rho_1$
	56 - 73		Section description (used to label the output)

## NOTES/

- (1) Section property identification numbers must be input in an ascending sequence beginning with one ("1") and ending with the total number of section specified ("NSECT").
- (2) Assuming that (y,z) are the section axes and that the x-axis is normal to the section, the properties for the section are computed from the input parameters [ $d_o$ ,  $t$  and  $\alpha_v$ ] as follows:

- (a) inner and outer pipe radii;

$$r_o = d_o/2$$

$$r_i = r_o - t$$

- (b) cross-sectional area (axial deformations);

$$A_x = \pi(r_o^2 - r_i^2)$$

- (c) principal moments of inertia (bending);

$$I_y = (\pi/4) (r_o^4 - r_i^4)$$

$$I_z = I_y$$

- (d) polar moment of inertia (torsion);

$$J_x = 2I_y$$

- (e) effective shear areas (shear distortions);

$$A_y = A_x/\alpha_v$$

$$A_z = A_y$$

Note that the shape factor for shear distortion ( $\alpha_v$ ) may be input directly. If the entry is omitted, the shape factor is computed using the equation:

$$\alpha_v = (4/3) (r_o^3 - r_i^3) / [(r_o^2 + r_i^2) (r_o - r_i)]$$

$$\approx 2.0$$

## IV. ELEMENT DATA (continued)

An input value for  $\alpha_v$  greater than one hundred (100.) causes the program to neglect shear distortions entirely. If used, the same shape factor is applied to both in and out-of-plane shear distortions.

- (3) The weight per unit length of section ( $\gamma_1$ ) is used to compute gravity loadings on the elements. Fixed end shears, moments, torques, etc. are computed automatically and applied as equivalent nodal loads. These forces will not act on the structure unless first assigned to one of the element load cases (A,B,C,D) in Section IV.L.5. below.
- (4) The mass per unit length is only used to form the lumped mass matrix for a dynamic analysis case. If no entry is input, then the program will re-define the mass density from the weight density using:

$$\rho_1 = \gamma_1 / 386.4$$

Either a non-zero weight density or mass density will cause the program to assign masses to all pipe element nodes.

4. Branch Point Node Numbers

If the number of output branch point nodes has been omitted from the control card (i.e., cc 26-30 blank), skip this section of input, and no branch point data will be read. Otherwise, supply node numbers for a total number of branch points requested on the control card, ten (10) nodes per card:

first card (1015)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5		Node number at branch point 1
	6 - 10		Node number at branch point 2
	...		...
	45 - 50		Node number at branch point 10

second card (1015) -- if required

notes	columns	variable	entry
	1 - 5		Node number at branch point 11
	...		...

## NOTES/

- (1) A node does not define a branch point unless at least three (3) tangent elements are common to the node. Branch point output is only produced for static analysis cases.

5. Element Load Case Multipliers

Five (5) cards must be input in this section specifying the fraction of gravity (in each of the X,Y,Z coordinate directions), the fraction of thermal loading and the fraction of internal pipe pressure loading to be added to each of four (4) possible element loading combinations (A,B,C,D).

Card 1 X-direction gravity (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of X-direction gravity to be applied in element load case D

Card 2 Y-direction gravity (4F10.0)

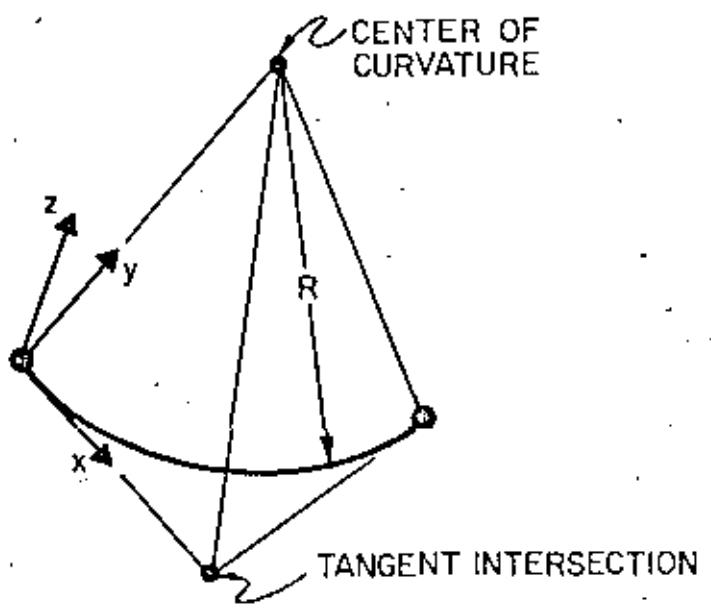
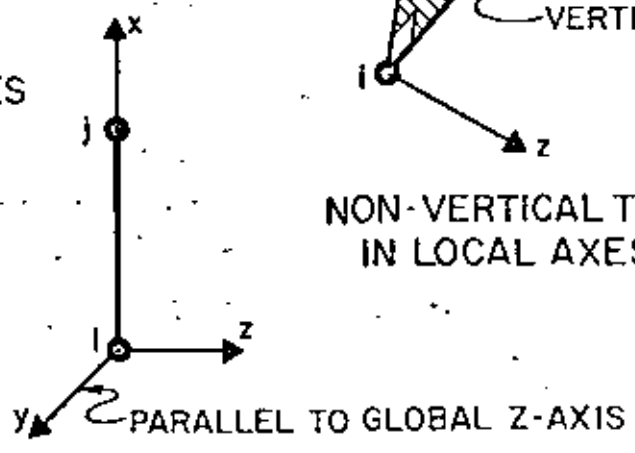
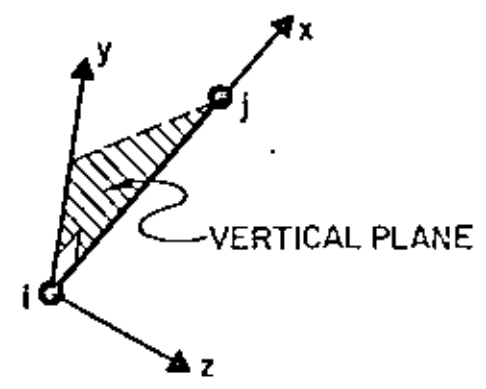
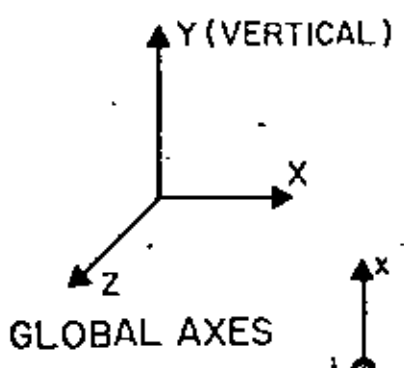
Card 3 Z-direction gravity (4F10.0)

Card 4 Thermal loads (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(2)	1 - 10		Fraction of thermal loading to be applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of thermal loading to be applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of thermal loading to be applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of thermal loading to be applied in element load case D

Card 5 Internal pressure (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(3)	1 - 10		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case A
	11 - 20		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case B
	21 - 30		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case C
	31 - 40		Fraction of pressure-induced loading applied in element load case D



LOCAL COORDINATE SYSTEMS FOR PIPE ELEMENTS

5. Element Load Case Multipliers (continued)

## NOTES/

- (1) No gravity loads will be produced if the weight per unit length was input as zero on all section property cards. Otherwise, a multiplier of 1.0 input for an element load case means that 100% of deadweight will be assigned to that load combination.
- (2) No thermal loading will result if the coefficient of thermal expansion has been omitted from all the material cards. Otherwise, thermal loads are computed for each element using the  $\Delta T$  between the average element temperature ( $T_a$ ) and the stress-free temperature ( $T_0$ ) given with each pipe element card (Section IV.L.6, below).
- (3) Element distortions are computed for each element due to internal pressure, and these loads are combined into element load cases by means of appropriate non-zero entries in Card 5.

Gravity, thermal or pressure induced loads cannot act on the structure unless first combined in one or more of the element load sets (A,B,C,D). Once defined, element load cases are assigned (via scale factors) to the structure load cases by means of Element Load Multipliers given in Section VI. An element load case combination may be used a multiple number of times when defining the various structure loading conditions.

6. Pipe Element Cards

## a. card type 1

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 4	N	Pipe element number; GE.1 and LE.NPIPE
	5		Geometric type code: "T" (or blank); tangent section "B" ; bend (circular) section
	6 - 10	I	Node I number
	11 - 15	J	Node J number
	16 - 20	MAT	Material identification number; GE.1 and LE.NUMMAT
	21 - 25	ISECT	Section property identification number; GE.1 and LE.NSECT
(2)	26 - 35		Stress-free temperature, $T_0$
(3)	36 - 45		Internal pressure, p
(4)	46 - 55		Positive projection of a local y- vector on the global X-axis; A(yX)

## IV. ELEMENT DATA (continued)

6. Pipe Element Cards (continued)

notes	columns	variable	entry
	56 - 65		Positive projection of a local y-vector on the global Y-axis; A(:Y)
	66 - 75		Positive projection of a local y-vector on the global Z-axis A (:Z)
(5)	76 - 80	KG	Node number increment for tangent element generation; EQ.0; default set to "1"

## NOTES/

- (1) Card type 1 is used for both tangent and bend elements; a second card (card type 2, below) must be input immediately following card type 1 if the pipe element is a bend (i.e., "B" in cc 5). Note that element cards must be input in ascending sequence beginning with one ("1") and ending with the total number of pipe elements. If tangent elements are omitted, generation of the intermediate elements will occur; the generation algorithm is described below. An attempt to generate bend type elements is considered to be an error.
- (2) The stress-free temperature,  $T_0$ , is subtracted from the average element temperature,  $T_a$ , to compute the uniform temperature difference acting on the element:

$$\Delta T = T_a - T_0$$

The entire element is assumed to be at this uniform value of temperature difference.

- (3) The value of pressure is used to compute a set of self-equilibrating joint forces arising from member distortions due to pressurization; i.e., the mechanical equivalent of thermal loads. For bend elements, the pressure is also used to compute the bend flexibility factor,  $k_p$ . The curved pipe subjected to bending is more flexible than elementary beam theory would predict. The ratio of "actual" flexibility to that predicted by beam theory is denoted by  $k_p$ , where

$$k_p = (1.65/h) / [1 + (6p/Eh)(R/t)^{4/3}] \geq 1$$

in which

$$h = 1R/r^2$$

$$r = (d_0 - 1)/2$$



6. Pipe Element Cards (continued)

and

- t = pipe wall thickness
- R = radius of the circular bend
- r = mean radius of the pipe cross section
- $d_o$  = outside diameter of the pipe
- E = Young's modulus
- p = internal pressure

The flexibility factor is computed and applied to all bend elements; pressure stiffening is neglected if the entry for internal pressure ("p") is omitted.

- (4) The global projections of the local y-axis for a tangent member may be omitted (cc 46-75 blank); for this case, the following convention for the local system is assumed:

- (a) tangents parallel to the global Y-axis (vertical axis) have their local y-axes directed parallel to and in the same direction as the global Z-axis;
- (b) tangents not parallel to the global Y-axis have their local y-axes contained in a vertical (global) plane such that local y projects positively on the positive global Y-axis.

For bend elements, the global projections of the local y-axis are not used; instead, the local axis convention is defined as follows:

- (a) the local y-axis is directed positively toward and intersects the center of curvature of the bend (i.e., radius vector);
- (b) the local x-axis is tangent to the arc of the bend and is directed positively from node I to node J.

Note that for all elements, the local x, y, z system is a right-handed set (see figure).

- (5) If a tangent element sequence exists such that each element number ( $NE_i$ ) is one (1) greater than the previous number ( $NE_{i-1}$ ); i.e.,

$$NE_i = NE_{i-1} + 1$$

only the element card for the first tangent in the

6. Pipe Element Cards (continued)

series need be input. The node numbers for the missing tangents are computed using the formulae:

$$NI_1 = NI_{i-1} + KG$$

$$NJ_1 = NJ_{i-1} + KG$$

where "KG" is the node number increment input in cc 76-80 for the first element in the series, and the

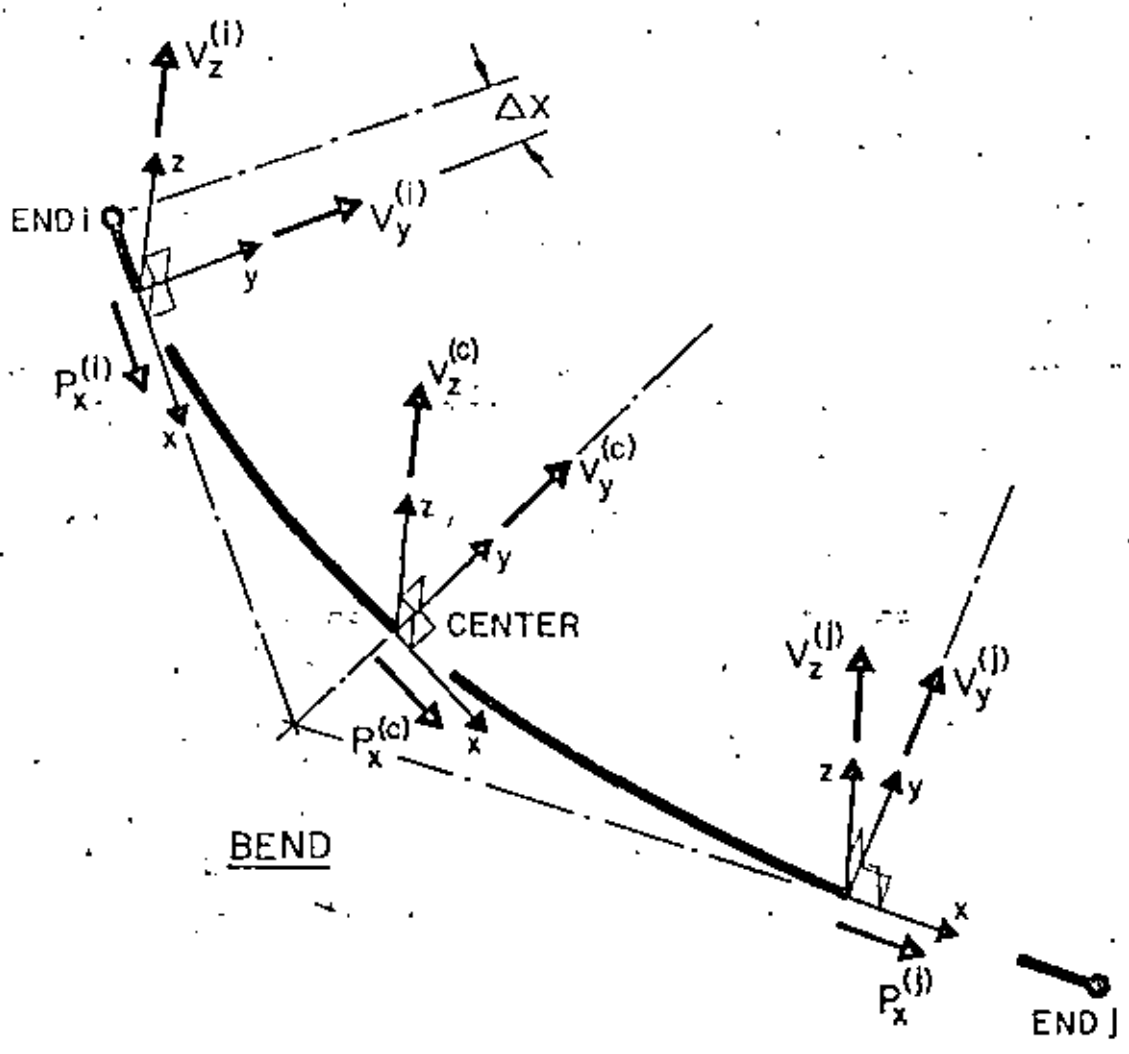
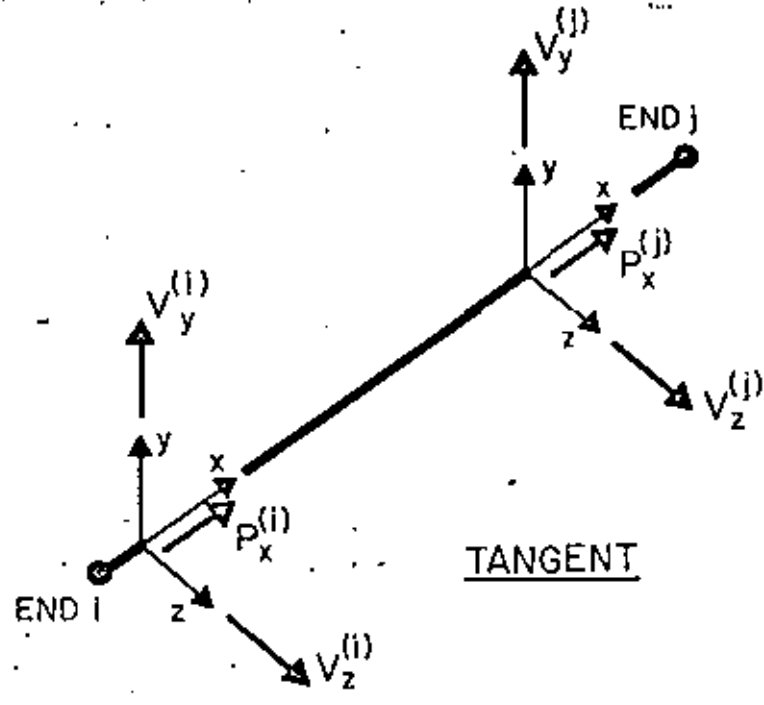
- (a) material identification number
- (b) section property identification number
- (c) stress-free temperature ...
- (d) internal pressure
- (e) y-axis global projections

for each tangent in the generation sequence are taken to be the same as those input on the first card in the series. The node number increment ("KG") is reset to one (1) if left blank on the first card in the series. The last (highest) element cannot be generated; i.e., it must be input.

Bend element data cannot be generated because two input cards are required for each bend. Also, the element just prior to a bend element must appear on an input card. Several bends may be input in a sequence, but each bend must appear (on two cards) in the input stream.

b. card type 2 (F10.0,3X,A2.4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	R	Radius of the bend element, R
(2)	14 - 15		Third point type code: "TI" (or blank); third point is the tangent intersection point "CC" ; third point is the center of curvature
	16 - 25		X-ordinate of the third point, X <sub>3</sub>
	26 - 35		Y-ordinate of the third point, Y <sub>3</sub>
	36 - 45		Z-ordinate of the third point, Z <sub>3</sub>
	46 - 55		Fraction of wall thickness to be used for dimensional tolerance tests; EQ.0; default set to "0.1"



FORCE SIGN CONVENTION FOR PIPE ELEMENT OUTPUT

6. Pipe Element Cards (continued)

## NOTES/

- (1) The radius of the bend ("R") must be input regardless of the method ("TI" or "CC") used to define the third point for the bend.
- (2) If the tangent intersection point is used, the program computes a radius for the bend and compares the computed value with the input radius. An error condition is declared if the two radii are different by more than the specified fraction (or multiple) of the section wall thickness. The lengths of the two tangent lines (I to TI and J to TI) are compared for equality, and an error will be flagged if the two values are discrepant by more than the dimensional tolerance.

If the center of curvature is input, the distances from the third point to nodes I and J are compared to the input radius; discrepancies larger than the user defined tolerance are noted as errors.

This second element card is only to be input for the bend type element.

Element Stress Output

Stress output for pipe elements consists of forces and moments acting in the member cross sections at the ends of each member and at the midpoints of the arcs in bend elements. Output quantities act on the element segment connecting the particular output station and end  $i$ ; i.e.,  $j$  to  $i$ , center to  $i$ , or  $\Delta X$  to  $i$  (where  $\Delta X \rightarrow 0$ ). Positive force/moment vectors are directed into the positive local  $(x,y,z)$  directions, as shown in the accompanying figure.

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	N	Nodal point number
(2)	6 - 10	L	Structure load case number; GE.1; static analysis EQ.0; dynamic analysis
	11 - 20	FX(N,L)	X-direction force (or translational mass coefficient)
	21 - 30	FY(N,L)	Y-direction force (or translational mass coefficient)
	31 - 40	FZ(N,L)	Z-direction force (or translational mass coefficient)
	41 - 50	MX(N,L)	X-axis moment (or rotational inertia)
	51 - 60	MY(N,L)	Y-axis moment (or rotational inertia)
	61 - 70	MZ(N,L)	Z-axis moment (or rotational inertia)

## NOTES/

- (1) For a static analysis case (NDYN.EQ.0), one card is required for each nodal point ("N") having applied (non-zero) concentrated forces or moments. All structure load cases must be grouped together for the node ("N") before data is entered for the next (higher) node at which loads are applied. Only the structure load cases for which node N is loaded need be given, but the structure load case numbers ("L") which are referenced must be supplied in ascending order. Node loadings must be defined (input) in increasing node number order, but again, only those nodes actually loaded are required as input. The static loads defined in this section act on the structure exactly as input and are not scaled, factored, etc. by the element load case (A,B,C,D) multipliers (Section VI, below). Nodal forces arising from element loadings are combined (additively) with any concentrated loads given in this section. Applied force/moment vectors act on the structure, positive in the positive global directions. Only one card is allowed per node per load case.

For a dynamic analysis case (NDYN.EQ.1,2, 3 or 4), structure load cases have no meaning, but the program expects to read data in this section nonetheless. In place of concentrated loads, lumped mass coefficients for the nodal degrees of freedom may be input for any (or all) nodes. The mass matrix is automatically constructed by the program from element geometry and associated material densities; the mass coefficients read in this section are combined (additively) with the existing element-based lumped mass matrix. For mass input, a node may only be specified once, and the load case number ("L") must be zero (or blank).

## V. CONCENTRATED LOAD/MASS DATA (215,6F10.4) (continued)

The program terminates reading loads (or mass) data when a zero (or blank) node number ("N") is encountered; i.e., terminate this section of input with a blank card. For the special case of a static analysis with no concentrated loads applied, input only one (1) blank card in this section. Similarly, a dynamic analysis in which the mass matrix is not to be augmented by any entries in this section requires only one (1) blank card as input.

- (2) For a static analysis, structure load case numbers range from "1" to the total number of load cases requested on the Master Control Card ("LL"); thus,  $1 \leq L \leq LL$ , NDYN.EQ.0. For a dynamic analysis, only zero (0) references are allowed; thus,  $L = 0$ , NDYN.EQ.1,2,3, or 4.

## VI. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS (4F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1,2)	1 - 10	EM(1)	Multiplier for element load case A
	11 - 20	EM(2)	Multiplier for element load case B
	21 - 30	EM(3)	Multiplier for element load case C
	31 - 40	EM(4)	Multiplier for element load case D

## NOTES/

- (1) One card must be given for each static (NDYN.EQ.0) structure load case requested on the Master Control Card ("LL"). The cards must reference load case numbers in ascending order. The four (4) element load sets (A,B,C,D), if created during the processing of element data (Section IV, above), are combined with any concentrated loads specified in Section V for the structure load cases. For example, suppose an analysis case calls for seven (7) static structure loading conditions (i.e., LL = 7), then the program expects to read seven (7) cards in this section. Further, suppose card number three (3) in this section contains the entries:

$$[EM(1), EM(2), EM(3), EM(4)] = [-3.0, 0.0, 2.0, 0.0]$$

Structure load case three (3) will then be constructed using 100% of any concentrated loads specified in Section V minus (-) 300% of the loads in element set A plus (+) 200% of the loads in element set C. Load sets B and D will not be applied in structure load case 3. Element load sets may be referenced any number of times in order to construct different structure loading conditions. Element-based loads (gravity, thermal, etc.) can only be applied to the structure by means of the data entries in this section.

- (2) If this case calls for one of the dynamic analysis options, supply only one blank card in this section. If the job is a dynamic re-start case (NDYN.EQ.-2 or -3), skip this section.

Static analysis input is complete with this section. Begin a new data case with a new Heading Card (see Section I).

Four (4) types of dynamic analysis can be performed by the program. The type of analysis is indicated by the number "NDYN" specified in card columns 21-25 of the Master Control Card (Section II). If

- NDYN.EQ.1; Determination of system mode shapes and frequencies only  
(complete input Section VII.A, only)
- NDYN.EQ.2; Dynamic Response Analysis for arbitrary time dependent loads using mode superposition  
(complete both Sections VII.A and B below)
- NDYN.EQ.3; Response Spectrum Analysis  
(complete both Sections VII.A and C, below)
- NDYN.EQ.4; Dynamic Response Analysis for arbitrary time dependent loads using step-by-step direct integration  
(complete Section VII.B below)

In any given dynamic analysis case only one (1) value of NDYN will be considered. However, if NDYN.EQ.2 or 3, the program must first solve the eigenvalue problem for structure modes and frequencies. These eigenvalues/vectors are then used as input to either the Forced Response Analysis (NDYN.EQ.2) or to the Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.3). Hence, options 1, 2 or 3 all require that the control parameters for eigenvalue extraction be supplied in Section VII.A, below.

In case of a direct step-by-step integration analysis (NDYN.EQ.4) do not provide the eigenvalue solution control card of Section VII.A.

For the special case of dynamic analysis re-start (NDYN.EQ.-2 or -3), data input consists of the Heading Card (Section I), the Master Control Card (Section II), and either of Sections VII.B (-2) or VII.C (-3), below. Re-starting is possible only if a previous solution using the same model was performed with NDYN.EQ.1, and the results from this eigenvalue solution were saved on the re-start file. (See Appendix A.)

Up to this section the program processes (i.e., expects to read) essentially the same blocks of data for either the static or dynamic analysis cases; certain of these preceding data cards, however, are read by the program but are not used in the dynamic analysis phase. In general, the purpose of the preceding data sections is to provide information leading to the formation of the system stiffness and mass matrices (appropriately modified for displacement boundary conditions). For example, element load sets (A,B,C,D) may be constructed as though a static case were to be considered, but these data are not used in a dynamic analysis; i.e., the same data deck through Section IV can be used for either type of analysis. The concept of structure loading conditions is not defined for the dynamic case, and input for Sections V and VI must be prepared specially.



A diagonal (lumped) mass matrix is formed automatically using element geometry and assigned material density or densities. The mass matrix so defined contains only translational mass coefficients calculated from tributary element volumes common to each node. Known rotational inertias must be input for the individual nodal degrees of freedom in Section V, above.

Non-zero impressed displacements (or rotations) input by means of the BOUNDARY element (type "7") are ignored; instead the component is restrained against motion during dynamic motion of the structure.

The program does not change the order of the system by performing a condensation of those nodal degrees of freedom having no (zero) mass coefficients; i.e., a zero-mass reduction is not performed. No distinction is made between static and dynamic degrees of freedom; i.e., they are identical in sequence, type and total number.

## VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

## A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (NDYN, EQ. 1, 2 or 3) (315, 2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	IFPR	Flag for printing intermediate matrices, norms, etc. calculated during the eigenvalue solution; EQ.0; do not print EQ.1; print
(2)	6 - 10	IFSS	Flag for performing the STURM SEQUENCE check; EQ.0; check to see if eigenvalues were missed EQ.1; pass on the check.
(3)	11 - 15	NITEM	Maximum number of iterations allowed to reach the convergence tolerance; EQ.0; default set to "16"
(4)	16 - 25	RTOL	Convergence tolerance (accuracy) for the highest ("NF") requested eigenvalue; EQ.0; default set to "1.0E-5"
(5)	26 - 35	COPQ	Cut-off frequency (cycles/unit time) EQ.0; NF eigenvalues will be extracted GT.0; extract only those values below COPQ
(6)	36 - 40	NFO	Number of starting iteration vectors to be read from TAPE10

## NOTES/

- (1) Extra output produced by the eigenvalue solutions can be requested; output produced by this option can be quite voluminous. Normal output produced by the program consists of an ordered list of eigenvalues followed by the eigenvectors for each mode. The number of modes found and printed is specified by the variable "NF" given in card columns 16-20 of the Master Control Card.
- (2) The program performs the solution for eigenvalues/vectors using either of two (2) distinct algorithms:
- (a) the DETERMINANT SEARCH algorithm requires that the upper triangular band of the system stiffness matrix fit into high speed memory (core); i.e., one equation "block".
  - (b) the SUBSPACE ITERATION algorithm is used if only portions (fractions) of the system matrix can be retained in core; i.e., the matrix (even though in band form) must be manipulated in blocks.

## A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

The program will automatically select the SUBSPACE ITERATION procedure for eigenvalue solution if the model is too large for the in-core algorithm.

The entries "IFSS", "NITEM" and "RTOL" are ignored if the program can use the DETERMINANT SEARCH to find eigenvalues. Whether or not a model is too large for the DETERMINANT SEARCH depends on the amount of core allocated (by the programmer and not the user) for array storage. The program variable "MTOT" equals the amount of working storage available.

Define:

MBAND = maximum equation bandwidth (coefficients)  
 ≈ (maximum element node number difference)  
 × (average number of degrees of freedom per node)  
 NEQ = total number of degrees of freedom in the model  
 = (6) × (total number of nodes) - [number of fixed (deleted) degrees of freedom]  
 NEQB = number of equations per block of storage  
 ≈ MTOT / MBAND / 2 (for large systems)

If NEQB is less than NEQ, the model is too large for the DETERMINANT SEARCH algorithm, and the SUBSPACE ITERATION procedure will be used.

If the SUBSPACE ITERATION algorithm is used the user may request that the STURM SEQUENCE check be performed. By experience the algorithm has always produced the lowest NF eigenvalues, but there is no formal mathematical proof that the calculated NF eigenvalues will always be the lowest ones. The STURM SEQUENCE check can be used to verify that the lowest NF eigenvalues have been obtained. It should be noted that the computational effort expended in performing the STURM SEQUENCE check is not trivial. A factorization of the complete system matrix is performed at a shift just to the right of the NFth eigenvalue.

If during the SUBSPACE ITERATION the NFth eigenvalue fails to converge to a tolerance of "RTOL" (normally 1.0E-5, or 5 significant figures) within "NITEM" (normally "16") iterations, then the STURM SEQUENCE flag ("IFSS") is ignored.

## VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

## A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

- (3) The maximum number of iterations to reach convergence ("NITEM") applies only to the SUBSPACE ITERATION algorithm. If cc 11-15 are left blank, a default value of "16" for NITEM is assumed.
- (4) The convergence tolerance ("RTOL") is applicable only if the SUBSPACE ITERATION algorithm is used. This tolerance test applies to the NFth eigenvalue, and all eigenvalues lower than the NFth one will be more accurate than RTOL. The lowest mode is found most accurately with precision decreasing with increasing mode number until the highest requested mode ("NF") is accurate to a tolerance of RTOL. Iteration is terminated after cycle number (k+1) if the NFth eigenvalue ( $\lambda$ , say) satisfies the inequality:

$$[ |\lambda(k+1) - \lambda(k)| / \lambda(k) ] < RTOL$$

If the determinant search algorithm is used, the eigenpairs are obtained to a high precision, which is indicated by the "physical error bounds"

$$e_i = \|r_i\|_2 / \|K\phi_i\|_2$$

where

$$r_i = (K - \omega_i^2 M) \phi_i$$

and  $(\omega_i^2, \phi_i)$  are the i'th eigenvalue and eigenvector obtained in the solution.

- (5) The cut-off ; ("COFQ") ; all other value  
algorithms to ; all eigenvalues  
below the specified ; have been found.

The DETERMINANT SEARCH algorithm computes eigenvalues in order from "1" to "NF". If the Nth eigenvalue ( $1 \leq N < NF$ ) has a frequency greater than "COFQ", the remaining (NF-N) eigenvalues are not computed.

## A. MODE SHAPES AND FREQUENCIES (continued)

The SUBSPACE ITERATION algorithm terminates calculation when the Nth eigenvalue is accurate (i.e., does not change with iteration) to a tolerance of RTOL. As before, the Nth eigenvalue is the nearest eigenvalue higher than COFQ. If the SUBSPACE ITERATION solution determines N eigenvalues less than COFQ (where,  $N < NF$ ), the STURM SEQUENCE check (if requested) is performed using the Nth (rather than the NFth) eigenvalue as a shift.

Only those modes whose frequencies are less than COFQ will be used in the TIME HISTORY or RESPONSE SPECTRUM analyses (Sections VII.B and C, below).

- (6) The starting iteration vectors, together with control information, must be written onto TAPE10 before the program execution is started. Appendix B describes the creation of TAPE10 and gives the required control cards.
- (7) The program does not calculate rigid body modes, i.e. the system must have been restraint so that no rigid body modes are present. In exact arithmetic the element  $d_{nn}$  of the matrix D in the triangular factorization of the stiffness matrix, i.e.  $K = LDL^T$ , is zero if a rigid body mode is present. In computer arithmetic the element  $d_{nn}$  is small when compared with the other elements of the matrix D. If this condition occurs the program stops with a message.

Note: If many "artificially" stiff boundary elements are used, the average of the elements of D will be artificially large. Consequently,  $d_{nn}$  may be small in comparison, and although no rigid body modes may be present, the program will stop. In a dynamic analysis it is recommended not to use very stiff boundary elements.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.1)

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.4)

The NDYN.EQ.2 option uses the ("NF") mode shapes and frequencies computed in the preceding Section (VII.A) to perform a mode superposition solution for forced response. The NDYN.EQ.4 option initiates a direct step-by-step integration of the coupled system equations, i.e. no eigenvalue solution has been performed and no transformation to the eigenvector basis is now carried out. The data input is identical to the case NDYN.EQ.2 except for the definition of damping. Dynamic response can be produced by two (2) general types of forcing function:

- (1) ground acceleration input in any (or all) of the three (3) global (X,Y,Z) directions;
- and/or
- (2) time varying loads (forces/moments) applied in any (or all) nodal degrees of freedom (except - "slave" - degrees of freedom)

Time dependent forcing functions (whether loads or ground acceleration components) are described in two steps. First, a number (1 or more are possible) of non-dimensional time functions are specified tabularly by a set of discrete points:  $[f(t_i), t_i]$ , where  $i = 1, 2, \dots, k$ . Each different time function may have a different number of definition points ( $k$ ). A particular forcing function applied at some point on the structure is then defined by a scalar multiplier (" $\beta$ ", say) and reference to one of the input time functions (" $f(t)$ ", say). The actual force (or acceleration) at any time (" $\tau$ ", say) equals  $\beta \times f(\tau)$ ;  $f(\tau)$  is found by linear interpolation between two of the input-time-points -  $\{t_i, t_{i+1}\}$ , where  $t_i \leq \tau \leq t_{i+1}$ .

Assuming that the solution begins at time zero (0), an independent arrival time ( $t_a$ , where  $t_a \geq 0$ ) may be assigned to each forcing function. The forcing function is not applied to the system until the solution time (" $\tau$ ", say) equals the arrival time,  $t_a$ . Interpolation for function values is based on relative time within the function table; i.e.,  $g(\tau) = f(\tau - t_a)$ .

The structure is assumed to be at rest at time zero; i.e., zero initial displacements and velocities are assumed at time of solution start.

The following data are required for a Forced Dynamic Response Analysis:

## 1. Control Card (515,2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NFN	Number of different time functions; GE.1

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

notes	columns	variable	entry
(2)	6 - 10	NGM	Ground motion indicator; EQ.0; no ground motion is input EQ.1; read ground motion control card (Section VII.B.3)
(3)	11 - 15	NAT	Number of different arrival times for the forcing functions; EQ.0; all arrival times are zero
(4)	16 - 20	NT	Total number of solution time steps; GE.1
(5)	21 - 25	NOT	Output print interval for stresses, displacements, etc. GE.1 and LE.NT
(4)	26 - 35	DT	Solution time step, $\Delta t$ ; GT.0
(6)	36 - 45	DAMP	Damping factor to be applied to all NF modes (fraction of critical); GE.0

In case of NDYN.EQ.4 use

(6)	36 - 45	ALPHA	Damping factor $\alpha$
(7)	46 - 55	BETA	Damping factor $\beta$

## NOTES/

- (1) At least one (1) time function must be input.
- (2) If no ground acceleration acts on the structure, set "NGM" to zero and skip Section VII.B.3, below. Both ground acceleration and nodal force input are allowed.
- (3) If no arrival time values are input, all forcing functions begin acting on the structure at time zero. The same arrival time value may be referenced by different forcing functions. "NAT" determines the number of non-zero entries that the program expects to read in Section VII.B.4, below.
- (4) The program performs a step-by-step integration of the equations of motion using a scheme which is unconditionally stable with respect to time step size,  $\Delta t$ . In case NDYN.EQ.2 the modal uncoupled equations of motion are integrated. In case NDYN.EQ.4 the coupled system equations are integrated. If "T" is the period of the highest numbered mode (normally the NFth mode) that is to be included in the response calculation,  $\Delta t$  should be chosen such that  $\Delta t/T < 0.1$ . A

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

larger time step (i.e.,  $\Delta t > 0.1T$ ) will not cause failure (instability), but participation of the higher modes is "filtered" from the predicted response. In general, with increasing time step size the solution is capable of capturing less of the higher frequency participation.

- (5) The program computes system displacements at every solution time step, but printing of displacements and recovery of element stresses is only performed at solution step intervals of "NOT". NOT must be at least "1" and is normally selected in the range of 10 to 100.
- (6) The damping factor ("DAMP") is applied to all NF modes. The admissible range for DAMP is between 0.0 (no damping) and 1.0 (100% of critical viscous damping).
- (7) In case NDYN, EQ.4 the damping matrix used is  $C = \alpha M + \beta K$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are defined in columns 36 to 55.



VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

86

2. Time-Varying Load Cards (415,F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NP	Nodal point number where the load component (force or moment) is applied; GE.1 and LE.NUMNP EQ.0 last card only
(2)	10	IC	Degree of freedom number; GE.1 and LE.6 ( $\delta X=1, \delta Y=2, \delta Z=3, \delta X=4, \delta Y=5, \delta Z=6$ )
(3)	11 - 15	IFN	Time function number; GE.1 and LE.NTFN
(4)	16 - 20	IAT	Arrival time number; EQ.0; load applied at solution start GE.1; non-zero arrival time
(5)	21 - 30	P	Scalar multiplier for the time function; EQ.0; no load applied

NOTES/

- (1) One card is required for each nodal degree of freedom having applied time varying loads. Cards must be input in ascending node point order. This sequence of cards must be terminated with a blank card. A blank card must be supplied even if no loads are applied to the system.
- (2) The same node may have more than one degree of freedom loaded; arrange degrees of freedom references (" ") in ascending sequence at any given node.
- (3) A non-zero time function number ("IFN") must be given for each forcing function. IFN must be between 1 and NFN. The time functions are input tabularly in Section VII.B.5, below. Function values at times between input time points are computed with linear interpolation.
- (4) If "IAT" is zero (or blank), the forcing function is assumed to act on the system beginning at time zero. If IAT is input as a positive integer between 1 and NAT, the IATth arrival time (defined in Section VII.B.4, below) is used to delay the application of the forcing function; i.e., the forcing function begins acting on the structure when solution reaches the IATth arrival time value.
- (5) The actual magnitude of force (or moment) acting on the model at time,  $t$ , equals the product: ("P") x (value of function number "IFN" at time,  $t$ ).

## VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

87

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

## 3. Ground Motion Control Card (615)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NFNK	Time function number describing the ground acceleration in the X-direction
	6 - 10	NFNY	Time function number describing the ground acceleration in the Y-direction
	11 - 15	NFNZ	Time function number describing the ground acceleration in the Z-direction
(2)	16 - 20	NATX	Arrival time number, X-direction
	21 - 25	NATY	Arrival time number, Y-direction
	26 - 30	NATZ	Arrival time number, Z-direction

## NOTES/

- (1) This card must be input only if the ground motion indicator ("NGM") was set equal to one (1) on the Control Card (Section, VII.B.1, above). A zero time function number indicates that no ground motion is applied for that particular direction.
- (2) Zero arrival time references mean that the ground acceleration (if applied) begins acting on the structure at time zero (0). Non-zero references must be integers in the range 1 to NAT.

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

## 4. Arrival Time Cards

## a. card one (8F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	AT(1)	Arrival time number 1
	11 - 20	AT(2)	Arrival time number 2
		...	...
	71 - 80	AT(8)	Arrival time number 8

## b. card two (8F10.0) - (required if NAT.GT.8)

notes	columns	variable	entry
	1 - 10	AT(9)	Arrival time number 9
		etc.	etc.

## NOTES/

- (1) The variable "NAT" given in cc 11-15 on the Control Card in VII.B.1, above) specifies the total number of time entries to be read in this section. Input cards as are required to define "NAT" data are read eight (8) entries per card. If no entries are requested (NAT.EQ.0), supply one (1) blank card in this section.

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

## 5. Time Function Definition Cards

Supply one set (card 1 and card(s) 2) of input for each of the "NFN" time functions requested in cc 1-5 of the Control Card (Section VII.R.1, above). At least one set of time function cards is expected in this section. The card sets are input in ascending function number order.

## a. card 1 (I5,F10.0,I2A5)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NLP	Number of function definition points; GE.2
(2)	6 - 15	SFTR	Scale factor to be applied to $f(t)$ values; EQ.0; default set to "1.0"
	16 - 75	HED(12)	Label information (to be printed with output) describing this function table

## NOTES/

- (1) At least two points (i.e., 2 pairs:  $f(t_i), t_i$ ) must be specified for each time function. Less than two points would preclude linear interpolation in the table for  $f(t)$ .
- (2) The scale factor, "SFTR" is used to multiply function values only; i.e., input-time-values-are-not-changed. If the scale factor is omitted, SFTR is re-set by the program to "1.0" thereby leaving input function values unchanged.

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

## 5. Time Function Definition Cards (continued)

## b. card(s) 2 (12F6.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 6	T(1)	Time values at point 1, $t_1$
	7 - 12	F(1)	Function value at point 1, $f(t_1)$
	13 - 18	T(2)	Time value at point 2, $t_2$
	19 - 24	F(2)	Function value at point 2, $f(t_2)$
		etc.	etc.

## NOTES/

- (1) Input as many card(s) 2 as are required to define "NLP" pairs of  $t_i, f(t_i)$ , six (6) pairs per card. Pairs must be input in order of ascending time value. Time at point one must be zero, and care must be taken to ensure that the highest (last) input time value ( $t_{NLP}$ ) is at least equal to the value of time at the end of solution; i.e., the time span for all functions must cover the solution time period otherwise the interpolation for function values will fail. For the case of non-zero arrival times associated with a particular function, the shortest arrival time reference (" $t_A$ ", say) plus (+) the last function time (" $t_{NLP}$ ") must at least equal the time at the end of the solution period: ( $t_{END}$ , say); i.e.,  $t_A + t_{NLP} \geq t_{END}$ .

## 6. Output Definition Cards

To minimize the amount of output which would be produced by the program if all displacements, stresses, etc. were printed, output requests for specific components must be given in this section. Time histories for selected components appear in tables; the solution step output printing interval is specified as "NOT" which is given in cc 21-25 of the Control Card (Section VII.B.1, above).

## a. displacement output requests

(1) control card (215)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	KKK	Output type indicator; EQ.1; print histories and maxima EQ.2; printer plot histories and recovery of maxima EQ.3; recover maxima only
(2)	6 - 10	ISP	Printer plot spacing indicator

## NOTES/

(1) The type of output to be produced by the program applies to all displacement requests. KKK.EQ.0 is illegal.

(2) "ISP" controls the vertical (down-the page) spacing for printer plots. Output points are printed on every (ISP+1)th line. The horizontal (across the page) width of printer plots is a constant ten (10) inches (100 print positions). ISP is used only if KKK.EQ.2.

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

92

## 6. Output Definition Cards

## a. displacement output requests (continued)

## (2) node displacement request cards (715)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NP	Node number GE.1 and LE.NUMNP EQ.0 last card only
(2)	6 - 10	IC(1)	Displacement component, request 1
	11 - 15	IC(2)	Displacement component, request 2
	16 - 20	IC(3)	Displacement component, request 3
	21 - 25	IC(4)	Displacement component, request 4
	26 - 30	IC(5)	Displacement component, request 5
	31 - 36	IC(6)	Displacement component, request 6 GE.1 and LE.6 EQ.0 terminates requests for the node

## NOTES/

- (1) Only those nodes at which output is to be produced (or at which maxima are to be determined) are entered in this section. Cards must be input in ascending node number order. Node numbers may not be repeated. This section must be terminated with a blank card.
- (2) Displacement component requests ("IC") range from 1 to 6, where 1= $\delta X$ , 2= $\delta Y$ , 3= $\delta Z$ , 4= $\delta X$ , 5= $\delta Y$ , 6= $\delta Z$ . The first zero (or blank) encountered while reading IC(1), IC(2), ..., IC(6) terminates information for the card. Displacement components at a node may be requested in any order. As an example, suppose that  $\delta Y$ ,  $\delta X$  and  $\delta Z$  are to be output at node 34; the card could be written as /34,2,4,6,0/, or /34,6,4,2,0/, etc. but only four (4) fields would have non-zero entries.

## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

## 6. Output Definition Cards

## b. element stress component output requests

## (1) control card (215)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	KEK	Output type indicator; EQ.1; print histories and maxima EQ.2; printer plot of histories and recovery of maxima EQ.3; recover maxima only
	6 - 10	ISP	Plot spacing indicator

## NOTES/

(1) See Section VII.B.6.a.(1), above.

## (2) element stress component request cards (1315)

Requests are grouped by element type; "NELTYP" groups must be input. A group consists of a series of element stress component request cards terminated by a blank card. Element number references within an element type (TRUSS, say) grouping must be in ascending order. Element number references may be omitted but not repeated. The program processes element groups in the same order as originally input in the Element Data (Section IV, above). If no output is to be produced for an element type, then input one blank card for its group.

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 5	NEL	Element number GE.1
(2)	6 - 10	IS(1)	EQ.0; last card in the group only Stress component number for output, request 1
	11 - 15	IS(2)	Stress component number for output, request 2
	...	...	...
	61 - 65	IS(12)	Stress component number for output, request 12



## B. RESPONSE HISTORY ANALYSIS (continued)

## 6. Output Definition Cards

## b. element stress component output requests

## (2) request cards (continued)

## NOTES/

- (1) Terminate each different element output group (type) with a blank card. Elements within a group must be in element number order (ascending); element number repetitions are illegal.
- (2) The first zero (or blank) request encountered while reading IS(1), IS(2), ..., IS(12) terminates information for the card. No more than twelve (12) different components may be output for any one of the elements. Table VII.1 lists the stress component numbers and corresponding descriptions for the various element types. Some element types (TRUSS, for example) have fewer than 12 components defined; only the stress component numbers listed in Table VII.1 are legal references.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.2 or NDYN.EQ.4)

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
1. TRUSS	( 2 )	( 1 )	( P/A )	AXIAL STRESS
		( 2 )	( P )	AXIAL FORCE
* * * * *				
2. BEAM	( 12 )	( 1 )	( P1(I) )	1-FORCE AT END I
		( 2 )	( V2(I) )	2-SHEAR AT END I
		( 3 )	( V3(I) )	3-SHEAR AT END I
		( 4 )	( T1(I) )	1-TORQUE AT END I
		( 5 )	( M2(I) )	2-MOMENT AT END I
		( 6 )	( M3(I) )	3-MOMENT AT END I
		( 7 )	( P1(J) )	1-FORCE AT END J
		( 8 )	( V2(J) )	2-SHEAR AT END J
		( 9 )	( V3(J) )	3-SHEAR AT END J
		( 10 )	( T1(J) )	1-TORQUE AT END J
		( 11 )	( M2(J) )	2-MOMENT AT END J
		( 12 )	( M3(J) )	3-MOMENT AT END J
* * * * *				
3. PLANE-STRESS/ PLANE-STRAIN				
4. AXISYMMETRIC	( 20 )	( 1 )	( 11-S0 )	V- STRESS AT POINT 0
		( 2 )	( 22-S0 )	U- STRESS AT POINT 0
		( 3 )	( 33-S0 )	T- STRESS AT POINT 0
		( 4 )	( 12-S0 )	UV-STRESS AT POINT 0
		( 5 )	( 11-S1 )	V- STRESS AT POINT 1
		( 6 )	( 22-S1 )	U- STRESS AT POINT 1
		( 7 )	( 33-S1 )	T- STRESS AT POINT 1
		( 8 )	( 12-S1 )	UV-STRESS AT POINT 1
		( 9 )	( 11-S2 )	V- STRESS AT POINT 2
		( 10 )	( 22-S2 )	U- STRESS AT POINT 2
		( 11 )	( 33-S2 )	T- STRESS AT POINT 2
		( 12 )	( 12-S2 )	UV-STRESS AT POINT 2
		( 13 )	( 11-S3 )	V- STRESS AT POINT 3
		( 14 )	( 22-S3 )	U- STRESS AT POINT 3
		( 15 )	( 33-S3 )	T- STRESS AT POINT 3
		( 16 )	( 12-S3 )	UV-STRESS AT POINT 3

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
		(17)	(V-S4)	V-STRESS AT POINT 4
		(18)	(U-S4)	U-STRESS AT POINT 4
		(19)	(T-S4)	T-STRESS AT POINT 4
		(20)	(UV-S4)	UV-STRESS AT POINT 4
* * * * *				
5. EIGHT NODE BRICK	(12)	(1)	(XX-SL1)	XX-STRESS AT LOCATION 1
		(2)	(YY-SL1)	YY-STRESS AT LOCATION 1
		(3)	(ZZ-SL1)	ZZ-STRESS AT LOCATION 1
		(4)	(XY-SL1)	XY-STRESS AT LOCATION 1
		(5)	(YZ-SL1)	YZ-STRESS AT LOCATION 1
		(6)	(ZX-SL1)	ZX-STRESS AT LOCATION 1
		(7)	(XX-SL2)	XX-STRESS AT LOCATION 2
		(8)	(YY-SL2)	YY-STRESS AT LOCATION 2
		(9)	(ZZ-SL2)	ZZ-STRESS AT LOCATION 2
		(10)	(XY-SL2)	XY-STRESS AT LOCATION 2
		(11)	(YZ-SL2)	YZ-STRESS AT LOCATION 2
		(12)	(ZX-SL2)	ZX-STRESS AT LOCATION 2
* * * * *				
6. PLATE/SHELL	(6)	(1)	(XX-S/R)	XX-STRESS RESULTANT
		(2)	(YY-S/R)	YY-STRESS RESULTANT
		(3)	(XY-S/R)	XY-STRESS RESULTANT
		(4)	(XX-M/R)	XX-MOMENT RESULTANT
		(5)	(YY-M/R)	YY-MOMENT RESULTANT
		(6)	(XY-M/R)	XY-MOMENT RESULTANT
* * * * *				
7. BOUNDARY	(2)	(1)	(BDRY-F)	BOUNDARY FORCE
		(2)	(BDRY-M)	BOUNDARY MOMENT
* * * * *				
8. THICK SHELL AND 3-DIM.	(12)	(1)	(SXX(0))	XX-STRESS AT CENTROID (0)
		(2)	(SYY(0))	YY-STRESS AT CENTROID (0)
		(3)	(SZZ(0))	ZZ-STRESS AT CENTROID (0)
		(4)	(SXY(0))	XY-STRESS AT CENTROID (0)
		(5)	(SYZ(0))	YZ-STRESS AT CENTROID (0)
		(6)	(SZX(0))	ZX-STRESS AT CENTROID (0)
		(7)	(SXX(1))	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 1

ELEMENT TYPE	MAXIMUM NUMBER OF COMPONENTS	STRESS COMPONENT NUMBER	OUTPUT SYMBOL	DESCRIPTION
		( 8 )	{SYY(1)}	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		( 9 )	{SZZ(1)}	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(10)	{SXY(1)}	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(11)	{SYZ(1)}	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(12)	{SZX(1)}	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 1
		(13)	{SXX(2)}	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(14)	{SYY(2)}	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(15)	{SZZ(2)}	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(16)	{SXY(2)}	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(17)	{SYZ(2)}	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(18)	{SZX(2)}	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 2
		(19)	{SXX(3)}	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(20)	{SYY(3)}	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(21)	{SZZ(3)}	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(22)	{SXY(3)}	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(23)	{SYZ(3)}	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(24)	{SZX(3)}	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 3
		(25)	{SXX(4)}	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(26)	{SYY(4)}	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(27)	{SZZ(4)}	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(28)	{SXY(4)}	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(29)	{SYZ(4)}	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(30)	{SZX(4)}	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 4
		(31)	{SXX(5)}	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(32)	{SYY(5)}	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(33)	{SZZ(5)}	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(34)	{SXY(5)}	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(35)	{SYZ(5)}	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(36)	{SZX(5)}	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 5
		(37)	{SXX(6)}	XX-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(38)	{SYY(6)}	YY-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(39)	{SZZ(6)}	ZZ-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(40)	{SXY(6)}	XY-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(41)	{SYZ(6)}	YZ-STRESS AT CENTER OF FACE 6
		(42)	{SZX(6)}	ZX-STRESS AT CENTER OF FACE 6

9. PIPE

A. TANGENT (12)

- ( 1) (PX(I) ) X-FORCE AT END I
- ( 2) (VY(I) ) Y-SHEAR AT END I
- ( 3) (VZ(I) ) Z-SHEAR AT END I
- ( 4) (TX(I) ) X-TORQUE AT END I
- ( 5) (MY(I) ) Y-MOMENT AT END I
- ( 6) (MZ(I) ) Z-MOMENT AT END I
  
- ( 7) (PX(J) ) X-FORCE AT END J
- ( 8) (VY(J) ) Y-SHEAR AT END J
- ( 9) (VZ(J) ) Z-SHEAR AT END J
- (10) (TX(J) ) X-TORQUE AT END J
- (11) (MY(J) ) Y-MOMENT AT END J
- (12) (MZ(J) ) Z-MOMENT AT END J

B. BEND (18)

- ( 1) (PX(I) ) X-FORCE AT END I
- ( 2) (VY(I) ) Y-SHEAR AT END I
- ( 3) (VZ(I) ) Z-SHEAR AT END I
- ( 4) (TX(I) ) X-TORQUE AT END I
- ( 5) (MY(I) ) Y-MOMENT AT END I
- ( 6) (MZ(I) ) Z-MOMENT AT END I
  
- ( 7) (PX(C) ) X-FORCE AT CENTER OF ARC
- ( 8) (VY(C) ) Y-SHEAR AT CENTER OF ARC
- ( 9) (VZ(C) ) Z-SHEAR AT CENTER OF ARC
- (10) (TX(C) ) X-TORQUE AT CENTER OF ARC
- (11) (MY(C) ) Y-MOMENT AT CENTER OF ARC
- (12) (MZ(C) ) Z-MOMENT AT CENTER OF ARC
  
- (13) (PX(J) ) X-FORCE AT END J
- (14) (VY(J) ) Y-SHEAR AT END J
- (15) (VZ(J) ) Z-SHEAR AT END J
- (16) (TX(J) ) X-TORQUE AT END J
- (17) (MY(J) ) Y-MOMENT AT END J
- (18) (MZ(J) ) Z-MOMENT AT END J

\* \* \* \* \*

VII. DYNAMIC ANALYSES (continued)

C. RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (NDYN.EQ.3)

99

This option combines all (NF) mode shapes and frequencies computed during the eigenvalue solution (Section VII.A) to calculate R.M.S. stresses/deflections due to an input displacement (or acceleration) spectrum. The input spectrum is applied in varying proportions in the global X,Y,Z directions. For the case of a non-zero cut-off frequency "COFQ" (Section VII.A), only those modes whose frequencies are less than COFQ will be combined in the R.M.S. analysis.

1. Control Card (3F10.0,15)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	FX	Factor for X-direction input
	11 - 20	FY	Factor for Y-direction input
	21 - 30	FZ	Factor for Z-direction input
(2)	31 - 35	IST	Input spectrum type; EQ.0; displacement vs. period EQ.1; acceleration vs. period

NOTES/

(1) All three (3) direction factors may be non-zero in which case the entries represent the X,Y,Z components of the input direction vector.

(2) "IST" defines the type of spectrum table to be input immediately following. The spectral displacements ("S<sub>d</sub>") and accelerations ("S<sub>a</sub>") are assumed to be related as follows:  $S_a = (4\pi^2 f^2) (S_d)$ .

## C. RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (continued)

## 2. Spectrum Cards

## a. heading card (12A6)

notes	columns	variable	entry
	1 - 72	HED(12)	Heading information used to label the spectrum table

## b. control card (15,F10.0)

notes	columns	variable	entry
	1 - 5	NPTS	Number of definition points in the spectrum table; GE,2
	6 - 15	SFTR	Scale factor used to adjust the displacement (or acceleration) ordinates in the spectrum table EQ.1.0; no adjustment

## c. spectrum data (2F10.0)

notes	columns	variable	entry
(1)	1 - 10	T	Period (reciprocal of frequency)
(2)	11 - 20	S	Value of displacement (or acceleration) if IST.EQ.1)

## NOTES/

- (1) Input one definition point per card; "NPTS" cards are required in this section. Cards must be arranged in ascending value of period.
- (2) "S" is interpreted to be a displacement quantity if "IST" was input as zero. For IST.EQ.1, "S" is an acceleration value.

END OF DATA CASE INPUT (NDYN.EQ.3)

APPENDIX A - CONTROL CARDS AND DECK SET-UP FOR DYNAMIC ANALYSIS RE-START

The purpose of this appendix is to describe the procedure (including control cards and deck set-up) required for program re-start following an eigenvalue/eigenvector extraction analysis. The re-start option has been included in the program in order to make a repeated forced response or spectrum analysis possible without solving each time for the required eigensystem. For medium-to-large size models, eigenvalue solution is quite costly when compared to the forced response calculations; hence, excessive costs may be incurred if the entire job has to be re-run due to improper specification of forcing functions or input spectra, inadequate requests, etc. For small models (less than 100 nodes, say) the extra effort required for re-start is normally not justified.

A complete dynamic analysis utilizing the re-start feature requires that the job be run in two (2) steps:

- JOB(1): Eigenvalue extraction solution only, after which program files TAPE1, TAPE2, TAPE7, TAPE8, and TAPE9 are saved on the re-start tape.
- JOBS(2): Re-instatement of program files TAPE1, TAPE2, TAPE7, TAPE8, and TAPE9 from the re-start tape followed by a Dynamic Response Analysis (NDYN.EQ.-2) or a Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.-3).

For a given model, the first job [JOB(1)] creating the re-start tape is run only once. The re-start tape then contains all the initial information required by the program at the beginning of a forced response analysis. More than one second job [JOBS(2)] may be run using the re-start tape as initial input; i.e., the re-start tape is not destroyed.

Control cards and deck set-up for execution on the CDC 6400 computer at the University of California, Berkeley are given below:



## JOB(1) - EIGENVALUE SOLUTION, RE-START TAPE CREATION

Notes      Card Deck

- (1) Job number, 1, 200, 120000, 300. User Name  
 (2) REQUEST, TPI, 1. Reel No., Tape User Name  
 (3) COPYBF, TPI, SAP4  
 UNLOAD, TPI  
 (4) LGO, SAP4  
 REWIND, TAPE1, TAPE2, TAPE7, TAPE8, TAPE9  
 (5) REQUEST, RESTART, 1. Reel No., Tape User Name, OUTPUT  
 (6) { COPYBF, TAPE1, RESTART  
 COPYBF, TAPE2, RESTART  
 COPYBF, TAPE7, RESTART  
 COPYBF, TAPE8, RESTART  
 COPYBF, TAPE9, RESTART  
 (7) 7-8-9

## PROBLEM DATA DECK:

- I. HEADING CARD  
 II. MASTER CONTROL CARD with  
 (LL.EQ.0)  
 (NF.GE.1)  
 (NDYN.EQ.1)  
 (MODEX.EQ.0)  
 III. JOINT DATA  
 IV. ELEMENT DATA  
 V. CONCENTRATED MASS DATA  
 VI. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS  
 VII. DYNAMIC ANALYSIS  
 A. Mode Shapes and Frequencies  
 blank card  
 blank card

- (8) 6-7-8-9

## NOTES/

- (1) The job control card parameters are defined as follows:  
 "1" = Number of tape drives required for the job.  
 "200" = CPU time limit (in octal seconds).  
 "120000" = Central memory field length (in octal).  
 "300" = Page limit for printing.  
 (2) Tape containing binary version of program (TPI) is requested.  
 (3) Binary version of the program is copied onto a disk file (SAP4).  
 (4) Program is loaded and execution is initiated.  
 (5) A blank tape (RESTART) is requested.  
 (6) The contents of disk files TAPE1, TAPE2, etc. are copied onto tape RESTART.  
 (7) End-of-record card: 7,8,9 punched in column 1.  
 (8) End-of-file card: 6,7,8,9 punched in column 1.

JOB (2) - RE-START FOR RESPONSE HISTORY ANALYSIS (NDYN.EQ.-2)  
 or RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS (NDYN.EQ.-3)

Notes Card Deck

Job number, 1,200,120000,300. User Name  
 REQUEST, RESTART, I. Reel No., User Name  
 COPYBF, RESTART, TAPE1  
 COPYBF, RESTART, TAPE2  
 (1) COPYBF, RESTART, TAPE7  
 COPYBF, RESTART, TAPE8  
 COPYBF, RESTART, TAPE9  
 REWIND, TAPE1, TAPE2, TAPE7, TAPE8, TAPE9  
 UNLOAD, RESTART  
 REQUEST, TP1, I. Reel No., User Name  
 (2) COPYBF, TP1, SAP4  
 LGO, SAP4  
 7-8-9

PROBLEM DATA DECK

I. HEADING CARD  
 II. MASTER CONTROL CARD with  
 (LL.EQ.0)  
 (NF.GE.1)  
 (NDYN.EQ.-2 or -3)  
 (3) (MODEX.EQ.0)  
 VII. DYNAMIC ANALYSIS  
 B. Dynamic Response Analysis (NDYN.EQ.-2)  
 or  
 C. Response Spectrum Analysis (NDYN.EQ.-3)  
 blank card  
 blank card  
 6-7-8-9

NOTES/

- (1) The disk files TAPE1, TAPE2, etc. are re-created using the information saved on tape RESTORE.
- (2) The binary version of the program is again obtained from tape TP1.
- (3) Normally, the number of frequencies ("NF") entered on the MASTER CONTROL CARD for a re-start case has the same value as was specified earlier when the eigenvalue problem was solved in JOB(1). If a value for the cut-off frequency ("COFQ") was entered on the "Mode Shapes and Frequencies" control card (in JOB(1)) and the program extracted fewer than "NF" frequencies (eigenvalues), then only the actual number of eigenvalues computed by the program in JOB(1) is specified for "NF" in this re-start run.

ITERATION VECTORS

In the dynamic analysis of large-order systems, the solution of the required eigensystem is normally the most expensive phase. The option described in this appendix demonstrates how it is possible to use NFO previously calculated eigenvalues and vectors when the solution for  $NF \geq NFO$  eigenvalues and eigenvectors is required.

Assume that in Job(1), the solution for NFO eigenvalues and eigenvectors was performed. At the end of this job, TAPE2 and TAPE7 must have been saved on a physical tape, say "RESTART". Assuming that in JOB(2) the solution of NF eigenvalues and eigenvectors is required, then prior to the execution of this job, tape RESTART needs to be copied onto TAPE10.

This procedure was performed with the following control cards on the CDC 6400 of the University of California at Berkeley:

## JOB(1) - SOLUTION FOR NFO EIGENVALUES/RESTART TAPE CREATION

Notes      Card Deck

- |     |   |   |
|-----|---|---|
|     | { | Job No., 1,200,120000,500.    User Name               |
| (1) | { | REQUEST,TP1,1.    Reel No.,    Tape User Name         |
|     | { | COPYBF,TP1,SAP4                                       |
|     | { | UNLOAD,TP1  |
| (2) | { | REQUEST,TAPE2,NB                                      |
|     | { | REQUEST,TAPE7,NB                                      |
|     |   | LGO,SAP4  |
|     |   | REWIND,TAPE2,TAPE7                                    |
| (3) |   | REQUEST,RESTART,1.    Reel No.,Tape User Name, OUTPUT |
| (4) | { | COPYBR,TAPE2,RESTART,1                                |
|     | { | COPYBF,TAPE7,TP3                                      |
|     |   | 7-8-9   |
|     |   | PROBLEM DATA DECK                                     |
|     |   | 6-7-8-9   |

Notes/

- (1) See Notes (1) - (4) in Appendix A.
- (2) The computer is directed to write on disk files TAPE2 and TAPE7 in an unblocked format.
- (3) A blank tape (RESTART) is requested onto which the contents of files TAPE2 and TAPE7 are to be written.
- (4) The contents of files TAPE2 and TAPE7 are written as one file onto tape RESTART.

JOB(2) - SOLUTION FOR ADDITIONAL EIGENVALUES USING THE INFORMATION  
STORED ON TAPE "RESTART"

Notes Card Deck

Job No., 1,200,120000,500. User Name

(1) { REQUEST, RESTART, 1. Reel No., Tape User Name  
REQUEST, TAPE10, NB  
REQUEST, TAPE2, NB  
REQUEST, TAPE7, NB

(2) COPYBF, RESTART, TAPE10  
UNLOAD, RESTART

(3) { REWIND, TAPE10  
REQUEST, TP1, 1. Reel No., Tape User Name  
COPYBF, TP1, SAP4  
LGO, SAP4  
7-8-9  
PROGRAM DATA DECK  
6-7-8-9

Notes/

- (1) TAPE10 (as TAPE2 and TAPE7 if they are to be used for further restarts,) is requested to be an unblocked file.
- (2) The contents of tape RESTART are copied into TAPE10 as one file.
- (3) Program execution.

- EERC 69-9 "Seismic Response of Soil Deposits Underlain by Sloping Rock Boundaries", by H. Dezfulian and H. B. Seed - 1969 (PB 189 114)
- EERC 69-10 "Dynamic Stress Analysis of Axisymmetric Structures Under Arbitrary Loading", by S. Ghosh and E. L. Wilson - 1969 (PB 189 026)
- EERC 69-11 "Seismic Behavior of Multistory Frames Designed by Different Philosophies", by J. C. Anderson and V. V. Bertero - 1969 (PB 190 662)
- EERC 69-12 "Stiffness Degradation of Reinforcing Concrete Structures Subjected to Reversed Actions", by V. V. Bertero, B. Bresler and H. Ming Liao - 1969 (PB 202 942)
- EERC 69-13 "Response of Non-Uniform Soil Deposits to Travel Seismic Waves", by H. Dezfulian and H. B. Seed - 1969 (PB 191 023)
- EERC 69-14 "Damping Capacity of a Model Steel Structure", by D. Rea, R. W. Clough and J. G. Bouwkamp - 1969 (PB 190 663)
- EERC 69-15 "Influence of Local Soil Conditions on Building Damage Potential During Earthquakes", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1969 (PB 191 036)
- EERC 69-16 "The Behavior of Sands Under Seismic Loading Conditions", by M. L. Silver and H. B. Seed - 1969 (AD 714 982)
- EERC 70-1 "Earthquake Response of Concrete Gravity Dams", by A. K. Chopra - 1970 (AD 709 640)
- EERC 70-2 "Relationships Between Soil Conditions and Building Damage in the Caracas Earthquake of July 29, 1967", by H. B. Seed, I. M. Idriss and H. Dezfulian - 1970 (PB 195 762)
- EERC 70-3 "Cyclic Loading of Full Size Steel Connections", by E. P. Popov and R. M. Stephen - 1970 (PB 213 545)
- EERC 70-4 "Seismic Analysis of the Charaima Building, Caraballeda, Venezuela", by Subcommittee of the SEACRC Research Committee, V. V. Bertero, P. F. Fratessa, S. A. Mahin, J. H. Sexton, A. C. Scordelis, E. L. Wilson, L. A. Wyllie, H. B. Seed, and J. Penzien, Chairman - 1970 (PB 201 455)
- EERC 70-5 "A Computer Program for Earthquake Analysis of Dams", by A. K. Chopra and P. Chakrabarti - 1970 (AD 723 994)
- EERC 70-6 "The Propagation of Love Waves Across Non-Horizontally Layered Structures", by J. Lysmer and L. A. Drake - 1970 (PB 197 896)
- EERC 70-7 "Influence of Base Rock Characteristics on Ground Response", by J. Lysmer, H. B. Seed and P. B. Schnabel - 1970 (PB 197 897)
- EERC 70-8 "Applicability of Laboratory Test Procedures for Measuring Soil Liquefaction Characteristics Under Cyclic Loading", by H. B. Seed and W. H. Peacock - 1970 (B 198 016)

- EERC 67-1 "Feasibility Study Large-Scale Earthquake Simulator Facility", by J. Penzien, J. G. Bouwkamp, R. W. Clough and D. Rea - 1967 (PB 187 905)
- EERC 68-1 Unassigned
- EERC 68-2 "Inelastic Behavior of Beam-to-Column Subassemblages Under Repeated Loading", by V. V. Bertero - 1968 (PB 184 888)
- EERC 68-3 "A Graphical Method for Solving the Wave Reflection-Refraction Problem", by H. D. McNiven and Y. Mengi - 1968 (PB 187 943)
- EERC 68-4 "Dynamic Properties of McKinley School Buildings", by D. Rea, J. G. Bouwkamp and R. W. Clough - 1968 (PB 187 902)
- EERC 68-5 "Characteristics of Rock Motions During Earthquakes", by H. B. Seed, I. M. Idriss and F. W. Kiefer - 1968 (PB 188 338)
- EERC 69-1 "Earthquake Engineering Research at Berkeley" - 1969 (PB 187 906)
- EERC 69-2 "Nonlinear Seismic Response of Earth Structures", by M. Dibaj and J. Penzien - 1969 (PB 187 904)
- EERC 69-3 "Probabilistic Study of the Behavior of Structures During Earthquakes", by P. Ruiz and J. Penzien - 1969 (PB 187 886)
- EERC 69-4 "Numerical Solution of Boundary Value Problems in Structural Mechanics by Reduction to an Initial Value Formulation", by N. Distefano and J. Schujman - 1969 (PB 187 942)
- EERC 69-5 "Dynamic Programming and the Solution of the Biharmonic Equation", by N. Distefano - 1969 (PB 187 941)
- EERC 69-6 "Stochastic Analysis of Offshore Tower Structures", by A. K. Malhotra and J. Penzien - 1969 (PB 187 903)
- EERC 69-7 "Rock Motion Accelerograms for High Magnitude Earthquakes", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1969 (PB 187 940)
- EERC 69-8 "Structural Dynamics Testing Facilities at the University of California, Berkeley", by R. M. Stephen, J. G. Bouwkamp, R. W. Clough and J. Penzien - 1969 (PB 189 111)

---

Note: Numbers in parentheses are Accession Numbers assigned by the National Technical Information Service. Copies of these reports may be ordered from the National Technical Information Service, Springfield, Virginia, 22151. Either the accession number or a complete citation should be quoted on orders for the reports.

- EERC 70-9 "A Simplified Procedure for Evaluating Soil Liquefaction Potential", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1970 (PB 198 009)
- EERC 70-10 "Soil Moduli and Damping Factors for Dynamic Response Analysis", by H. B. Seed and I. M. Idriss - 1970 (PB 197 869)
- EERC 71-1 "Koyna Earthquake and the Performance of Koyna Dam", by A. K. Chopra and P. Chakrabarti - 1971 (AD 731 496)
- EERC 71-2 "Preliminary In-Situ Measurements of Anelastic Absorption in Soils Using a Prototype Earthquake Simulator", by R. D. Borcherdt and P. W. Rodgers - 1971 (PB 201 454)
- EERC 71-3 "Static and Dynamic Analysis of Inelastic Frame Structures", by F. L. Porter and G. H. Powell - 1971 (PB 210 135)
- EERC 71-4 "Research Needs in Limit Design of Reinforced Concrete Structures", by V. V. Bertero - 1971 (PB 202 943)
- EERC 71-5 "Dynamic Behavior of a High-Rise Diagonally Braced Steel Building", by D. Rea, A. A. Shah and J. G. Bouwkamp - 1971 (PB 203 584)
- EERC 71-6 "Dynamic Stress Analysis of Porous Elastic Solids Saturated With Compressible Fluids", by J. Ghaboussi and E. L. Wilson - 1971 (PB 211 396)
- EERC 71-7 "Inelastic Behavior of Steel Beam-to-Column Subassemblages", by H. Krawinkler, V. V. Bertero and E. P. Popov - 1971 (PB 211 335)
- EERC 71-8 "Modification of Seismograph Records for Effects of Local Soil Conditions" by P. Schnabel, H. B. Seed and J. Lysmer - 1971 (PB 214 450)
- EERC 72-1 "Static and Earthquake Analysis of Three Dimensional Frame and Shear Wall Buildings" by E. L. Wilson and H. H. Dovey - 1972 (PB 212 589)
- EERC 72-2 "Accelerations in Rock For Earthquakes in the Western United States", by P. B. Schnabel and H. B. Seed - 1972 (PB 213 100)
- EERC 72-3 "Elastic-Plastic Earthquake Response of Soil-Building Systems" by T. Minami and J. Penzien - 1972 (PB 214 868)
- EERC 72-4 "Stochastic Inelastic Response of Offshore Towers to Strong Motion Earthquakes", by M. K. Kaul and J. Penzien - 1972 (PB 215 713)
- EERC 72-5 "Cyclic Behavior of Three Reinforced Concrete Flexural Members With High Shear" by E. P. Popov, V. V. Bertero and H. Krawinkler - 1972 (PB 214 555)
- EERC 72-6 "Earthquake Response of Gravity Dams Including Reservoir Interaction Effects" by P. Chakrabarti and A. K. Chopra - 1972.
- EERC 72-7 "Dynamic Properties of Pine Flat Dam", by D. Rea, C. Y. Liaw and A. K. Chopra - 1972.

- EERC 72-8 "Three Dimensional Analysis of Building Systems", by E.L. Wilson and H.H. Dovey - 1972.
- EERC 72-9 "Rate of Loading Effects on Uncracked and Repaired Reinforced Concrete Members", by V.V. Bertero, D. Rea, S. Mahin and M. Atalay - 1973
- EERC 72-10 "Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Linear Structural Systems", by E.L. Wilson, K.J. Bathe, J.E. Peterson and H.H. Dovey - 1972.
- EERC 72-11 "Literature Survey - Seismic Effects on Highway Bridges" by T. Iwasaki, J. Penzien and R. Clough - 1972 (PB 215 613)
- EERC 72-12 "SHAKE, a Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites", by P.B. Schnabel and J. Lysmer - 1972.
- EERC 73-1 "Optimal Seismic Design of Multistory Frames", by V.V. Bertero and H. Kaml - 1973.
- EERC 73-2 "Analysis of the Slides in the San Fernando Dams During the Earthquake of February 9, 1971", by H.B. Seed, K.L. Lee, I.M. Idriss and F. Makdisi - 1973.
- EERC 73-3 "Computer Aided Ultimate Load Design of Unbraced Multistory Steel Frames", by M.B. El-Hafez and G.J. Powell - 1973.
- EERC 73-4 "Experimental Investigation into the Seismic Behavior of Critical Regions of Reinforced Concrete Components as Influenced by Moment and Shear", by M. Celebi and J. Penzien - 1973.(PB 215 884)
- EERC 73-5 "Hysteretic Behavior of Epoxy-Repaired Reinforced Concrete Beams", by M. Celebi and J. Penzien - 1973.
- EERC 73-6 "General Purpose Computer Program for Inelastic Dynamic Response of Plane Structures", by A. Kanaan and G.H. Powell - 1973.
- EERC 73-7 "A Computer Program for Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Reservoir Interaction", by P. Chakrabarti and A.K. Chopra - 1973.
- EERC 73-8 "Seismic Behavior of Spandrel Frames - A Review and Outline for Future Research", by R. Razani and J.G. Bouwkamp - 1973.
- EERC 73-9 "Earthquake Analysis of Structure-Foundation Systems", by A. K. Vaish and A. K. Chopra - 1973.
- EERC 73-10 "Deconvolution of Seismic Response for Linear Systems", by R. B. Reimer - 1973.
- EERC 73-11 "SAP IV Structure Analysis Program for Static and Dynamic Response of Linear Systems", by K. -J. Bathe, E. L. Wilson, and F. E. Peterson - 1973 (revised).



- EERC 73-12 "Analytical Investigations of the Seismic Response of Tall Flexible Highway Bridges", by W. S. Tseng and J. Penzien - 1973.
- EERC 73-13 "Earthquake Analysis of Multi-Story Buildings Including Foundation Interaction", by A. K. Chopra and J. A. Gutierrez - 1973 (PB 222 970).
- EERC 73-14 "ADAP A Computer Program for Static and Dynamic Analysis of Arch Dams", by R. W. Clough, J. M. Raphael and S. Mojtahedi - 1973 (PB 223 763/AS).
- EERC 73-15 "Cyclic Plastic Analysis of Structural Steel Joints", by R. B. Pinkney and R. W. Clough - 1973.
- EERC 73-16 "QUAD-4 A Computer Program for Evaluating the Seismic Response of Soil Structures by Variable Damping Finite Element Procedures" by I. M. Idriss, J. Lysmer, R. Hwang and H. G. Seed - 1973.
- EERC 73-17 "Dynamic Behavior of a Multi-Story Pyramid Shaped Building", by R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp - 1973.
- EERC 73-18 "Effect of Different Types of Reinforcing on Seismic Behavior of Short Concrete Columns", by V. V. Bertero, J. Hollings, O. Kustu, R. M. Stephen and J. G. Bouwkamp - 1973.
- EERC 73-19 "Olive View Medical Center Material Studies, Phase I", by B. Bresler and V. Bertero - 1973.
- EERC 73-20 "Linear and Nonlinear Seismic Analysis Computer Programs for Long Multiple-Span Highway Bridges", by W. S. Tseng and J. Penzien - 1973.
- EERC 73-21 "Constitutive Models for Cyclic Plastic Deformation of Engineering Materials", by J. M. Kelly and P. P. Gillis - 1973.
- EERC 73-22 "DRAIN-2D Users' Guide" by G. H. Powell - 1973.
- EERC 73-23 "Earthquake Engineering at Berkeley - 1973" by D. Rea - 1973.
- EERC 73-24 "Seismic Input and Structural Response During the 1971 San Fernando Earthquake" by R. B. Reimer, R. W. Clough, and J. M. Raphael - 1973.
- EERC 73-25 "Earthquake Response of Axisymmetric Tower Structures Surrounded by Water", by C. Y. Liaw and A. K. Chopra - 1973.
- EERC 73-26 "Investigation of the Failures of the Olive View Stairtowers During the San Fernando Earthquake and Their Implications on Seismic Design", by V. V. Bertero and Robert G. Collins - 1973.
- EERC 73-27 "Further Studies on Seismic Behavior of Steel Beam-Column Subassemblages" by V. V. Bertero, H. Krawinkler and E. P. Popov - 1973.



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

**EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA  
INGENIERIA**

**PRINCIPALES INSTRUCCIONES PARA CREAR UN ARCHIVO POR MEDIO  
DE TERMINAL Y PARA CORRER EN PROGRAMA SAP IV**

MARZO, 1984.

PRINCIPALES INSTRUCCIONES PARA CREAR UN ARCHIVO POR MEDIO DE  
TERMINAL Y PARA CORRER EL PROGRAMA SAP IV

1. Para crear un archivo de datos teclear MAKE FILENAME DATA
2. Para secuenciarlo teclear SEQ 100+100
3. Para salirse de secuencia oprimir dos veces la tecla RETURN
4. Para volver a secuenciarlo teclear SEQ No. de secuencia + 100
5. Para corregir una línea, teclear FIX No. de línea /lo que se quiere quitar/lo que se quiere poner.
6. Para revisar lo que se corrigió teclear L=
7. Para listar el programa teclear LIST
8. Para listar una línea teclear LIST No. de línea
9. Para guardar el archivo teclear SAVE
10. Para volver a llamar el archivo teclear GET FILE NAME
11. Para correr el programa SAP IV y que los resultados aparezcan en la pantalla teclear RUN\$SAPIV/CORR;FILE FILE5(TITLE="FILENAME")
12. Para correr el programa SAP IV y que los resultados aparezcan en la impresora teclear RUN\$SAPIV/CORR;FILE FILE5/TITLE="FILENAME"),FILE8(PRINTER)

\*Nota\* FILENAME puede ser cualquier nombre, pero tiene que ser el mismo en el archivo de datos y al correr el programa

B U E N A    S U E R T E

## SECTION I. - HEADING CARD

IDENTIFICATION "MED"

cols

1-72

FORMAT: ALPHANUMERIC

## SECTION II. - "MASTER CONTROL CARD"

ANALYSIS							
NUMNP	NELTYP	LL	NP	NDYN	MODEX	NAD	KEQB

cols 1-5

6-10

11-15

16-20

21-25

26-30

31-35

36-40

FORMAT(S15)

NUMNP - No. of nodes (if Eq. 0 use two blank cards)

NELTYP - No. of types of elements

LL - No. of structural load cases (Eq. 0 for dynamic analysis)

NP - Frequencies to be found in the eigenvalue solution (applies for LL = 0)

NDYN - Analysis type:

Enter 0 for static analysis

1 eigenvalue/vector sol

2 forced dynamic response by mode superposition

3 response spectrum analysis

4 direct step by step integration

MODEX - Execution mode:

Enter 0 for problem solution

1 for data check only

NAD - No. of vectors applies only for NDYN = 1

KEQB - No. of D. O. F. Eq. 0 for automatic calculation



## SECTION III - "NODAL POINT DATA"

4

## NODES DEFINITION

Coordinate System	Node Number	Translation Boundary Condition Code (X,Y,Z)			Rotation Boundary Condition Code (X,Y,Z)			Coordinates for Cylindrical (X=R,Z=θ)			Node No. Increment	Nodal Temperature
		IX(N,1)	IX(N,2)	IX(N,3)	IX(N,4)	IX(N,5)	IX(N,6)	X(N)	Y(N)	Z(N)		
GF	N											

cols 1 2-5 6-10 11-15 16-20 21-25 26-30 31-35 36-45 46-55 56-65 66-70 71-80

\*Use for node generation with Node No. increment = k(N)

FORMAT(A1,I4,6I5,3F10.0,15,F10.0)

00. 5

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

TYPE L TRUSS ELEMENT

A. Control Card		
TYPE	NUMEL	NMAT
1		

cols 1-5      6-10      11-15

FORMAT(3I5)

TYPE - SAP Element Code

NUMEL - No. of Elements of Type 1

NMAT - No. of Material Property Cards

B. Material Properties (*)					
IMAT	E	$\alpha$	$\rho$	A	W

cols 1-5    6-15    16-25    26-35    36-45    46-55

\*as many cards as NMAT

FORMAT(15,5F10.0)

IMAT - Material Identification Number

E - Young's Modulus

$\alpha$  - Coefficient of Thermal Expansion

$\rho$  - Mass Density

A - Cross Section Area

W - Weight Density

C. Element Load Factors Cards			
Element Load Case A	Element Load Case B	Element Load Case C	Element Load Case D

cols 1-10      11-20      21-30      31-40

FORMAT(4F10.0)

NOTE: Four cards are required even if values are zero

For Gravity in the X Direction

For Gravity in the Y Direction

For Gravity in the Z Direction

Fraction of Thermal Load for Each Case ABCE





SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 2 BEAM ELEMENTS

A. CONTROL CARD				
TYPE	NUMEL	NELP	NSETS	NNMAT
2				

cols 1-5      6-10      11-15      16-20      21-25

FORMAT(5I5)

- TYPE - SAP Element Code
- NUMEL - Total No. of Elements Type 2
- NELP - No. of Element Property Cards
- NSETS - No. of Fixed End Force Sets
- NNMAT - No. of Material Property Cards

B. MATERIAL PROPERTIES (*)				
IMAT	E	NU	$\rho$	W

cols 1-5      6-15      16-25      26-35      36-45

(\*) As Many Cards as NNMAT

FORMAT(15.4F10.0)

- IMAT - Material Identification Number
- E - Young's Modulus
- NU - Poisson's Coefficient
- $\rho$  - Mass Density
- W - Weight Density

C. ELEMENT PROPERTY CARDS (*)						
IEGON	AXA	SHEAR2 (+)	SHEAR3 (+)	TOR	FLEXU2	FLEXU3

cols 1-5      6-15      16-25      26-35      36-45      46-55      56-65

(\*) As Many Cards as NELP

(+) Specific Only if Shear Deformation is Included

- IEGON - Geometric Property Number
- AXA - Axial Area
- SHEAR2 - Shear Area in Local 2 - Direction
- SHEAR3 - Shear Area in Local 3 - Direction
- TOR - Torsional Inertia
- FLEXU2 - Flexural Inertia 2 - Axis
- FLEXU3 - Flexural Inertia 3 - Axis

FORMAT(15.6F10.0)

SAP INPUT DATA SHEET

000 8

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 2 BEAM ELEMENTS (CONT.)

D: ELEMENT LOAD FACTORS			
Element Load Case A	Element Load Case B	Element Load Case C	Element Load Case D

cols 1-10                  11-20                  21-30                  31-40

FORMAT(4F10.0)

NOTE: Three Cards are Required Even if Values are Zero

- FOR GRAVITY IN THE X DIRECTION
- FOR GRAVITY IN THE Y DIRECTION
- FOR GRAVITY IN THE Z DIRECTION

E. FIXED END FORCES (*)						
FEFN	FEF1I	FEF2I	FEF3I	FEM1I	FEM2I	FEM3I
BLANK	FEF1J	FEF2J	FEF3J	FEM1J	FEM2J	FEM3J

cols 1-5                  6-15                  16-25                  26-35                  36-45                  46-55                  56-65

} First Card

} Second Card

(\*) Two Cards Required for Each Set

FORMAT(15,6F10.0)

## SECTION IV - "ELEMENT DATA"

## Type 2 BEAM ELEMENTS (CONT.)

F. ELEMENT DATA CARDS												
ELNUM	NODEI	NODEJ	NODEK	IMAT	NELP	FEFA	FEFB	FEFC	FEFD	RELI	RELJ	K

cols 1-5

6-10

11-15

16-20

21-25

26-30

31-35

36-40

41-45

46-50

51-56

57-62

63-70

FORMAT(1015,216,18)

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 5 PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS

A. CONTROL CARD				
TYPE	NUMEL	NMAT	MTEMP	*
5				

cols 1-5      6-10      11-15      16-20      30

FORMAT(6I5)

- TYPE - SAP Element Code
- NUMEL - Total No. of Elements
- NMAT - No. of Material Property Cards
- MTEMP - Max. No. of Temp. Points for Any One Mat.
- \* - Non-zero Character to Suppress the Introduction of Incompatible Displacement Modes

B.1 MATERIAL PROPERTY CARDS				
IMAT	NTEMP	W	$\rho$	$\beta$

cols 1-5      6-10      11-20      21-30      31-40

- IMAT - Material Identification Number
- NTEMP - No. of Diff. Temperatures
- W - Weight Density
- $\rho$  - Mass Density
- $\beta$  - Angle, Counterclockwise+

B.2 MATERIAL PROPERTIES FOR NTEMP (2 CARD FOR EACH)							
T	$E_n$	$E_s$	$E_t$	$\nu_{ns}$	$\nu_{nt}$	$\nu_{st}$	$\sigma_{ns}$

cols 1-10    11-20    21-30    31-40    41-50    51-60    61-70    71-80

FORMAT(8F10.0)

- E - Young's Modulus
- $\nu$  - Strain Ratio
- $\sigma$  - Shear Modulus
- $\alpha$  - Thermal Expansion Coefficient

B.3		
$\alpha_n$	$\alpha_s$	$\alpha_t$

cols 1-10      11-20      21-30

FORMAT(3F10.0)

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 4 TWO DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

CONTROL CARD					
TYPE	NUMEL	NMAT	MTEMP	ANALYZ	*
4					

cols 1-5      6-10      11-15      16-20      25      30

- TYPE - SAP Element Code
- NUMEL - Total No. of Elements
- NMAT - No. of Material Property Cards
- MTEMP - Maximum No. of Temp. Cards for Any Mat.
- ANALYZ - ENTER 0 for Axisymmetric  
1 for Plane Strain  
2 for Plane Stress
- \* - Non-zero punch will suppress incompatible Displacement Modes

MATERIAL PROPERTY CARDS				
INAT	NTEMP	W	$\rho$	B

cols 1-5      6-10      11-20      21-30      31-40

FORMAT(2I5,3F10.0)

- INAT - Material Identification Number
- NTEMP - No. of Diff. Temperatures
- W - Weight Density
- $\rho$  - Mass Density
- B - Angle Counterclockwise+

MATERIAL PROPERTIES FOR NTEMP (2 CARDS FOR EACH)							
T	$E_n$	$E_s$	$E_t$	$\nu_{ns}$	$\nu_{nt}$	$\nu_{st}$	$\sigma_{ns}$

cols 1-10      11-20      21-30      31-40      41-50      51-60      61-70      71-80

FORMAT(8F10.0)

- E - Young's Modulus
- $\nu$  - Strain Ratio
- $\sigma$  - Shear Modulus
- $\alpha$  - Thermal Expansion Coefficient

$\alpha_n$	$\alpha_s$	$\alpha_t$

cols 1-10      11-20      21-30

FORMAT(3F10.0)

## SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 3-6 4 PLANE STRESS MEMBRANE ELEMENTS (CONT.)  
TWO DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

C. ELEMENT LOAD FACTORS				
THERMAL LOAD FRAC.	PRESSURE LOAD FRAC.	GRAVITY IN X DIRECTION	GRAVITY IN Y DIRECTION	GRAVITY IN Z DIRECTION

cols 1-10      11-20      21-30      31-40      41-50

FORMAT(5F10.0)

Element Load Case A

Element Load Case B

Element Load Case C

Element Load Case D

(Four Cards Required Even  
If Not Used)

## SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 5 & 4 PLANE STRESS MEMBRANE (CONT)  
TWO DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS

ELEMENT CARDS										
ELEMENT NO. N	NODE I	NODE J	NODE K	NODE L	IMAT	REFTEMP	PRESSURE I-J SIDE	EVALUATION OPTION n	MESH GENE- RATOR k	THICKNESS T

cols 1-5

6-10

11-15

16-20

21-25

26-30

31-40

41-50

51-55

56-60

61-70

FORMAT(615,2F10.0,215,F10.0)

TYPE 5 THREE DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS (8 NODES)

A. CONTROL CARD

TYPE	NUMEL	NMAT	LSETS
5			

COL 1-5 6-10 11-15 16-20  
 FORMAT (4I5)

B. MATERIAL PROPERTY CARDS  
 (ONE CARD FOR EACH MATERIAL)

IMAT	E	NU	W	α

COL 11-15 16-25 26-35 36-45  
 FORMAT (I5, 4F10.0)

C. DISTRIBUTED SURFACE LOADS

ISET	LT	P	Y	FACE

COL 1-5 6-10 11-20 21-30 31-35  
 FORMAT (2I5, 2F10.2, I5)

D. ACCELERATION DUE TO GRAVITY

G
---

COL 1-10  
 FORMAT (F10.2)

- TYPE SAP ELEMENT TYPE 5
- NUMEL NO OF ELEMENTS TYPE 5
- NMAT NO OF DIFFERENT MATERIALS
- LSETS NO OF LOAD SETS
- IMAT MATERIA IDENTIFICATION NUMBER
- E MODULUS OF ELASTICITY
- NU POISSON'S RATIO
- W WEIGHT DENSITY
- α COEFFICIENT OF THERMAL EXPANSION
- ISET LOAD SET ID NUMBER
- LT LOAD TYPE =1 UNIFORM PRESSURE  
 =2 HYDROSTATICALLY VARYING
- P MAGNITUDE OF PRESSURE IF LT=1  
 WEIGHT DENSITY OF FLUID IF LT=2
- Y BLANK IF LT=1  
 Y AXIS IF LT=2
- FACE FACE OF ELEMENT ON WHICH PRESSURE ACTS



SAP INPUT DATA SHEET

SHEET \_\_\_ OF \_\_\_

TYPE 5, THREE DIMENSIONAL SOLID ELEMENTS ( 8 NODES )  
 ( CONT. 1 )

E. ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS			
PRESSURE			
PA	PB	PC	PD
THERMAL			
TA	TB	TC	TD
GRAVITY + X			
GXA	GXB	GXC	GXD
GRAVITY + Y			
GYA	GYB	GYC	GYD
GRAVITY + Z			
GZA	GZB	GZC	GZD

COL 1-10      11-20      21-30      31-40  
 FORMAT ( 4 F10.2 )



TYPE 6. PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL)

A. CONTROL CARD		
TYPE	NUMEL	NMAT
6		

COL 1-5      6-10      11-15  
 FORMAT (3IS)

B. MATERIAL PROPERTY INFORMATION (TWO CARDS FOR EACH MATERIAL)						
IMAT	—	—	RO	$\alpha_x$	$\alpha_y$	$\alpha_{xy}$
$C_{xx}$	$C_{xy}$	$C_{yx}$	$C_{yy}$	$C_{yz}$	$C_{xy}$	

COL 1-10      11-20      21-30      31-40      41-50      51-60      61-70

FORMAT (I10, 20X, 4F10.0)  
 FORMAT (.6F10.0)

WHERE:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & C_{yx} \\ C_{xy} & C_{yy} & C_{yz} \\ C_{yx} & C_{yz} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

C. ELEMENT LOAD MULTIPLIERS (FIVE CARDS)			
LLM(A)	LLM(B)	LLM(C)	LLM(D)
TM(A)	TM(B)	TM(C)	TM(D)
GRX(A)	GRX(B)	GRX(C)	GRX(D)
GRY(A)	GRY(B)	GRY(C)	GRY(D)
GRZ(A)	GRZ(B)	GRZ(C)	GRZ(D)

DISTRIBUTED LOAD  
 TEMPERATURE  
 GRAVITY IN X  
 GRAVITY IN Y  
 GRAVITY IN Z

COL 1-10      11-20      21-30      31-40

FORMAT (4F10.10)

SAP INPUT DATA SHEET

SHEET \_\_\_ OF \_\_\_

TYPE 6. PLATE AND SHELL ELEMENTS (QUADRILATERAL).  
(CONT. 1)

D. ELEMENT CARDS											
ELNUM	NODE I	NODE J	NODE K	NODE L	NODE O	IMAT	Kn	THK	DLIP	MT	TGR

COL. 1-5 6-10 11-15 16-20 21-25 26-30 31-35 36-40 41-50 51-60 61-70 71-80

FORMAT( 8I5, 4 F10.0)

SAP INPUT DATA SHEET

Sheet 01

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 7 BOUNDARY ELEMENTS

CONTROL CARD		
TYPE	NUNEL	

cols 1-5            6-10

FORMAT(2I5)

ELEMENT LOAD FACTORS			
ELEMENT LOAD CASE A	ELEMENT LOAD CASE B	ELEMENT LOAD CASE C	ELEMENT LOAD CASE D

cols 1-10            11-20            21-30            31-40

FORMAT(4F10.0)

NOTE: At least one card for element load factor is required.

Combinations of conditions for element load cases ABC&D can be done with the Structure Load Multipliers (Section VI)

SAP INPUT DATA SHEET

SECTION IV - "ELEMENT DATA"

Type 7 BOUNDARY ELEMENTS (CONT.)

ELEMENT CARDS										
NODEN	NODEI	NODEJ	NODEK	NODEL	CDISP	CROT	K	DEAX	REAX	SS17

20



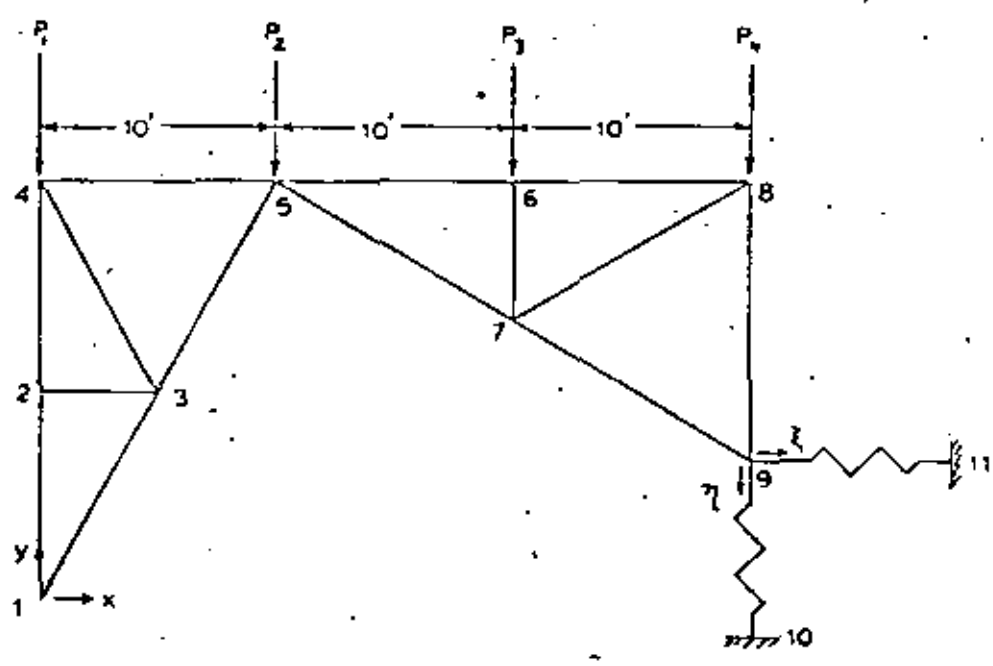




### PROBLEM 1.1 PLANE TRUSS

#### Problem Definition

Ref: Timoshenko, S. P. and Young, D. H., Theory of Structures, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, 1965, pp. 266-267.



Each truss member has  $A = 2 \text{ in}^2$ ,  $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ ,  $\alpha = 6.5 \times 10^6 \text{ in/in/}^\circ\text{F}$

This problem has two structure load cases:

1) Uniform temp. increase of  $70^\circ\text{F}$ ;  $P_1=P_2=P_3=P_4=0$ ;  $\eta = \epsilon = 0$ .

2) Uniform temp. decrease of  $40^\circ\text{F}$ ;  $P_1=P_2=P_3=P_4=10,000 \text{ lb}$ ;  
 $\eta = \epsilon = .01 \text{ ft}$ .

#### Problem Formulation

Since two different temperature cases are used, it is best to specify the nodal temperatures as  $0^\circ\text{F}$  and alter the zero stress reference temperature for each structure load case. The SAP IV manual, page IV.1.2, gives the temperature increase as

$$\Delta T = (T_i + T_j)/2.0 - T_r$$

where  $T_i$  and  $T_j$  are the nodal temperatures. Thus the zero stress reference temperature for each member is specified as  $-1^\circ\text{F}$ , and the thermal load multipliers are  $+70.0$  and  $-40.0$  for element load cases A and B. To understand the signs, note that the element load case A the zero stress reference temperature is  $(+70.0)(-1.0) = -70^\circ\text{F}$ . Since the nodal temperatures are  $0^\circ\text{F}$ , each member of the truss has experienced a rise of  $70^\circ\text{F}$  above the stress-free temperature, as required.

## Problem 1.1 (cont.)

The settlement of the foundation is produced by using the boundary element (type 7). The default stiffness of  $10^{10}$  is used, and the displacement specified is 0.12". For the first structural load case zero displacement is required, so the element load case multiplier for load case A is zero. For element load case B the multiplier is 1.0 to give the desired displacements.

The concentrated forces (section V) are all for structural load case 2, as required. The element load multipliers are such that structural load case 1 consists of element load case A, and structural load case 2 consists of element load case B.

Note that since no nodal generation is done, the printing of the generated nodal data is suppressed by coding "A" in column 6 of the first nodal card. This feature is not documented in the manual, but is incorporated in the program. (Other options available are B, which suppresses the printing of the ID array, and C, which combines the effect of A and B.)

Another feature not documented in the manual, but useful, is the coding of -1 for the boundary condition code where a series of nodes have a DOF suppressed. This is very useful for the elements with only translational DOF allowed.

Discussion of Results

Timoshenko gives only the  $y$  displacement of node 5:

	<u>Timoshenko</u>	<u>SAP IV</u>
load case 1	+0.158"	+0.15762"
load case 2	-0.223"	-0.22280"

PROBLEM 1.1 -- PLANE TRUSS

CARD 1 2 3 4 5 6 7 8  
 1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

LINE	1	2	3	4	5	6	7	8
1	PROBLEM 1.1 -- PLANE TRUSS							
2	11	2	2					
3	1A	1	1	-1	-1	-1	-1	
4	2							
5	1							103.921048
6	4							103.923048
7	5							207.846097
8	6							207.846097
9	7							120. 207.846097
10	8							240. 130.564065
11	9							360. 207.846097
12	10	1	1					360. 69.282032
13	11	1	1	1	1	1	1	360. -100.
14	1	1A	1					460. 69.282032.
15	1	30.0E+6	6.5E-6					2.
16								
17								
18								
19	70.		-40.					
20	1	1	2	1	-1.			
21	2	1	3	1	-1.			
22	3	2	4	1	-1.			
23	4	2	4	1	-1.			
24	5	3	4	1	-1.			
25	6	4	5	1	-1.			
26	7	3	5	1	-1.			
27	8	5	7	1	-1.			
28	9	5	6	1	-1.			
29	10	6	7	1	-1.			
30	11	6	8	1	-1.			
31	12	7	8	1	-1.			
32	13	8	9	1	-1.			
33	14	7	9	1	-1.			
34	7	2						
35			1.					
36	9	10		1		.12		
37	4	11		1		.12		
38	9	2						
39	5	2						
40	6	2						

25

1 2 3 4 5 6 7 8  
 1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

PROBLEM 1.1 -- PLANE TRUSS

CARD 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8

41 8 2 -10000.  
42  
43 1.  
44 1.

1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8 1 2 3 4 5 6 7 8

PROBLEM 1.1 -- PLANE TRUSS

CONTROL INFORMATION

NUMBER OF NODAL POINTS = 11  
 NUMBER OF ELEMENT TYPES = 2  
 NUMBER OF LOAD CASES = 2  
 NUMBER OF CONSTRAINTS = 0  
 ANALYSIS CODE (INDYN) = 0  
   EQ.0, STATIC  
   EQ.1, MODAL EXTRACTION  
   EQ.2, FORCED RESPONSE  
   EQ.3, RESPONSE SPECTRUM  
   EQ.4, DIRECT INTEGRATION  
 SOLUTION MODE (MODEX) = 0  
   EQ.0, EXECUTION  
   EQ.1, DATA CHECK  
 NUMBER OF SUBSPACE  
 ITERATION VECTORS (NAD) = 0  
 EQUATIONS PER BLOCK = 0  
 TAPE IO SAVE FLAG (MIO5V) = 0

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES			
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ	X	Y	Z	T
1	1	1	-1	-1	-1	-1	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0	0	0	0	0	0	0.0	103.923	0.0	0.0
3	0	0	0	0	0	0	60.000	103.923	0.0	0.0
4	0	0	0	0	0	0	0.0	207.846	0.0	0.0
5	0	0	0	0	0	0	120.000	207.846	0.0	0.0
6	0	0	0	0	0	0	240.000	207.846	0.0	0.0
7	0	0	0	0	0	0	240.000	138.564	0.0	0.0
8	0	0	0	0	0	0	360.000	207.846	0.0	0.0
9	0	0	0	0	0	0	360.000	69.282	0.0	0.0
10	1	1	0	0	0	0	360.000	-100.000	0.0	0.0
11	1	1	1	1	1	1	460.000	69.282	0.0	0.0

EQUATION NUMBERS

N	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0
3	3	4	0	0	0	0
4	5	6	0	0	0	0
5	7	8	0	0	0	0
6	9	10	0	0	0	0
7	11	12	0	0	0	0
8	13	14	0	0	0	0
9	15	16	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0

NUMBER OF JOBS MEMBERS= 14  
 NUMBER OF DIFF. MEMBERS= 1

TYPE            E            ALPHA            DEN            AREA            WT  
 1   0.3000000 08   0.6500000-05   0.0            0.2000000 01   0.0

ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

	A	B	C	D
X-DIR	0.0	0.0	0.0	0.0
Y-DIR	0.0	0.0	0.0	0.0
Z-DIR	0.0	0.0	0.0	0.0
TEMP	0.7000000 02	-0.4000000 02	0.0	0.0

N	J	K	TYPE	TEMP	SAND
1	1	2	1	-1.00	2
2	1	3	1	-1.00	2
3	2	3	1	-1.00	4
4	2	4	1	-1.00	6
5	3	4	1	-1.00	4
6	4	5	1	-1.00	4
7	3	5	1	-1.00	6
8	5	7	1	-1.00	6
9	5	6	1	-1.00	4
10	6	7	1	-1.00	4
11	6	8	1	-1.00	6
12	7	8	1	-1.00	4
13	8	9	1	-1.00	4
14	7	9	1	-1.00	6

BOUNDARY ELEMENTS

ELEMENT TYPE = 7  
 NUMBER OF ELEMENTS = 2

ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS

CASE(A)	CASE(B)	CASE(C)	CASE(D)
0.0	1.0000	0.0	0.0

ELEMENT NUMBER	NODE (N)	NODES OFFERING CONSTRAINT (NI)	CONSTRAINT DIRECTION (NJ)	DIRECTION (NK)	CODE KD	CODE KR	GENERATION CODE (KN)	SPECIFIED DISPLACEMENT	SPECIFIED ROTATION	SPRING RATE
1	9	10	0	0	1	0	0	0.12000 00	0.0	0.10000 11
2	9	11	0	0	1	0	0	0.12000 00	0.0	0.10000 11

EQUATION PARAMETERS

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS	=	16
BANDWIDTH	=	6
NUMBER OF EQUATIONS IN A BLOCK	=	16
NUMBER OF BLOCKS	=	1



NODAL LOADS (STATIC) OR MASSES (DYNAMIC)

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-AXIS FORCE	Y-AXIS FORCE	Z-AXIS FORCE	X-AXIS MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT
4	2	0.0	-0.100000 05	0.0	0.0	0.0	0.0
5	2	0.0	-0.100000 05	0.0	0.0	0.0	0.0
5	2	0.0	-0.100000 05	0.0	0.0	0.0	0.0
8	2	0.0	-0.100000 05	0.0	0.0	0.0	0.0

STRUCTURE LOAD CASE	ELEMENT		LOAD	MULTIPLIERS	
	A	B		C	D
1	1.000	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	1.000	0.0	0.0	0.0

NODE DISPLACEMENTS / ROTATIONS

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-TRANSLATION	Y-TRANSLATION	Z-TRANSLATION	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION
11	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	1	0.272360-21	-0.418550-21	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.120000 00	-0.120000 00	0.0	0.0	0.0	0.0
8	1	-0.546000-01	0.630470-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.601410-01	-0.190670 00	0.0	0.0	0.0	0.0
7	1	-0.273000-01	0.788080-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.107940 00	-0.247590 00	0.0	0.0	0.0	0.0
6	1	0.440860-10	0.110430 00	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.108660 00	-0.277150 00	0.0	0.0	0.0	0.0
5	1	-0.546000-01	0.157620 00	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.157180 00	-0.222800 00	0.0	0.0	0.0	0.0
4	1	-0.104200 00	0.945700-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.188380 00	-0.886810-01	0.0	0.0	0.0	0.0
3	1	-0.273000-01	0.788080-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.026100-01	-0.113720 00	0.0	0.0	0.0	0.0
2	1	-0.546000-01	0.472850-01	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.982100-01	-0.441410-01	0.0	0.0	0.0	0.0
1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

TRUSS MEMBER ACTIONS

MEMBER	LOAD	STRESS	FORCE
1	1	0.00000	0.000
1	2	-5000.00003	-10000.000
2	1	-0.00000	-0.000
2	2	-6495.19050	-12990.381
3	1	-0.00000	-0.000
3	2	0.00000	0.0
4	1	0.00000	0.000
4	2	-5000.00003	-10000.000
5	1	-0.00000	-0.000
5	2	-0.00003	0.000
6	1	-0.00000	-0.000
6	2	-0.00002	-0.000
7	1	0.00000	0.0
7	2	-6495.19052	-12990.381
8	1	0.00000	0.000
8	2	-1250.00000	-2500.000
9	1	-0.00000	-0.000
9	2	-4330.12701	-8660.254
10	1	-0.00000	0.0
10	2	-5000.00000	-10000.000
11	1	-0.00000	-0.000
11	2	-4330.12701	-8660.254
12	1	0.00000	0.000
12	2	-4999.99999	-10000.000
13	1	-0.00000	-0.000
13	2	-7499.99999	-15000.000
14	1	-0.00000	-0.000
14	2	-3750.00001	-7500.000

33

BOUNDARY ELEMENT FORCES / MOMENTS

ELEMENT NUMBER	LOAD CASE	FORCE	MOMENT
1	1	0.81855D-11	0.0
1	2	0.12000D 10	0.0
2	1	0.27285D-11	0.0
2	2	0.12000D 10	0.0

STATIC SOLUTION TIME LOG

EQUATION SOLUTION	=	0.30
DISPLACEMENT OUTPUT	=	0.21
STRESS RECOVERY	=	0.32

OVERALL TIME LOG

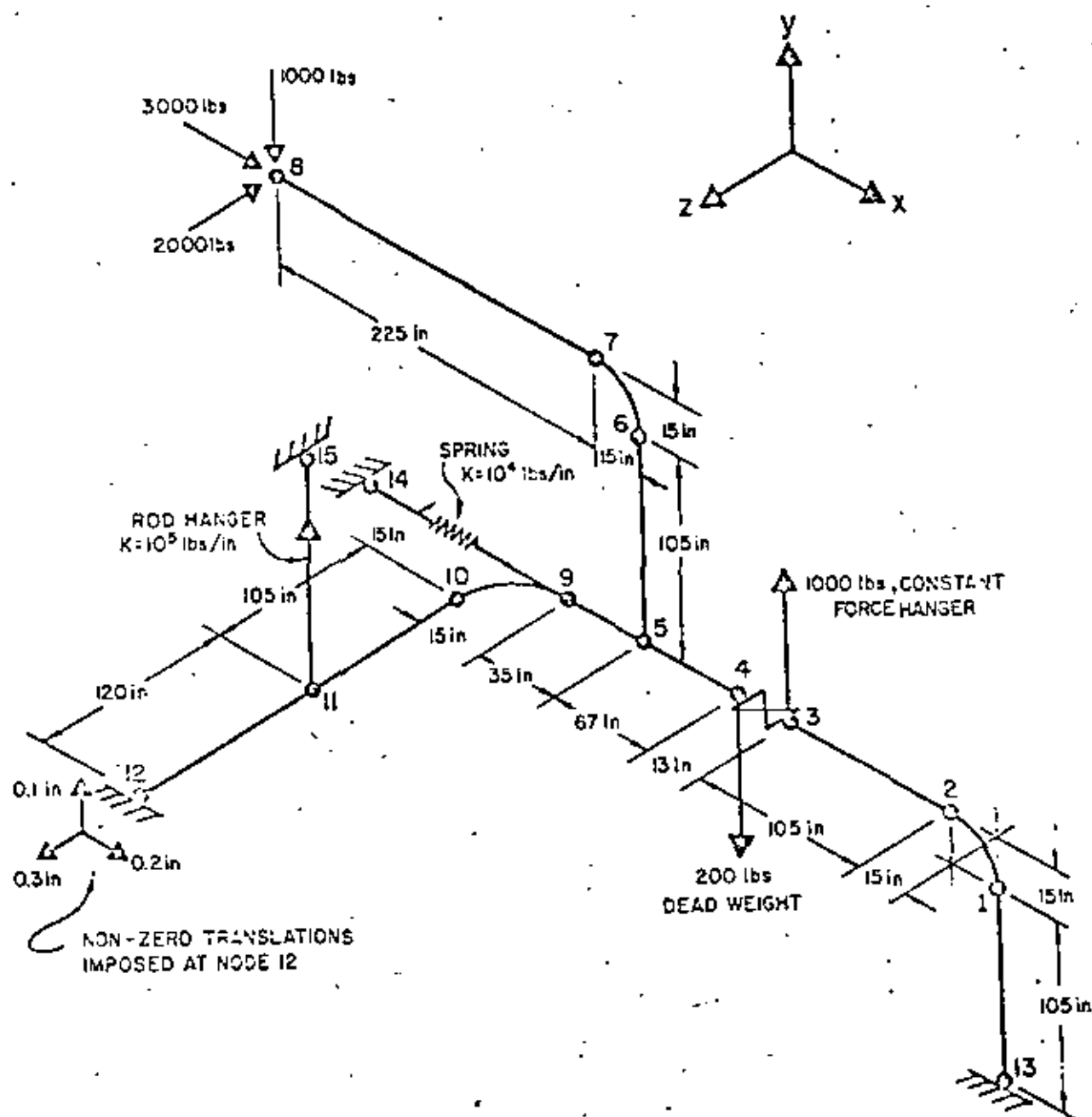
NODAL POINT INPUT	=	0.25
ELEMENT STIFFNESS FORMATION	=	0.39
NODAL LOAD INPUT	=	0.09
TOTAL STIFFNESS FORMATION	=	0.35
STATIC ANALYSIS	=	0.85
EIGENVALUE EXTRACTION	=	0.0
FORCED RESPONSE ANALYSIS	=	0.0
RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS	=	0.0
STEP-BY-STEP INTEGRATION	=	0.0
<b>TOTAL SOLUTION TIME</b>	<b>=</b>	<b>1.92</b>

## PROBLEM 12.1 PIPE NETWORK STATIC ANALYSIS

Problem Definition

Ref: SAP IV Manual, problem 1

35

Problem Formulation

The non-zero displacements at node 12 are created by using boundary elements connected to added nodes 16, 17 and 18.

Problem 12.1 (cont.)

Discussion of Results

The results as given in the SAP IV Manual are:

REACTIONS:						
Node	SAP			ADLPIPE		
	FX	FY	FZ	FX	FY	FZ
9	5643.51	--	--	5659.	--	--
11	--	-4044.59	--	--	-4052.	--
12	2350.08	4023.01	-4960.70	2361.	4026.	-4966.
13	-10993.59	4505.61	2960.70	-11021.	4509.	2966.
Total	-3000.00	4484.03	-2000.00	-3001.	4483.	-2000.

APPLIED LOADS:

Loading Type	Direction		
	X	Y	Z
Concentrated:			
at node 3	-	1000.00	-
at node 4	-	-200.00	-
at node 8	3000.	1000.00	2000.
.Distributed Weight		-6284.03	
TOTAL	3000.	-4484.03	2000.

CARD 1 2 3 4 5 6 7 8  
 123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

PROBLEM 12.1 -- PIPE NETWORK STATIC ANALYSIS												
1	18	?	1	0	0	0	0	40				
2	1	?	0	0	0	0	0	0.0	105.0	0.0	0	740.0
3	2	0	0	0	0	0	0	-15.0	120.0	0.0	0	740.0
4	3	0	0	0	0	0	0	-120.0	120.0	0.0	0	740.0
5	4	0	0	0	0	0	0	-133.0	120.0	0.0	0	740.0
6	5	0	0	0	0	0	0	-200.0	120.0	0.0	0	740.0
7	6	0	0	0	0	0	0	-200.0	225.0	0.0	0	740.0
8	7	0	0	0	0	0	0	-215.0	240.0	0.0	0	740.0
9	8	0	0	0	0	0	0	-440.0	240.0	0.0	0	740.0
10	9	0	0	0	0	0	0	-235.0	120.0	0.0	0	740.0
11	10	0	0	0	0	0	0	-250.0	120.0	15.0	0	740.0
12	11	0	0	0	0	0	0	-250.0	120.0	120.0	0	740.0
13	12	0	0	0	1	1	1	-250.0	120.0	240.0	0	740.0
14	13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0	740.0
15	14	1	1	1	1	1	1	-245.0	120.0	0.0	0	0.0
16	15	1	1	1	1	1	1	-250.0	130.0	120.0	0	0.0
17	16	1	1	1	1	1	1	-240.0	120.0	240.0	0	0.0
18	17	1	1	1	1	1	1	-250.0	130.0	240.0	0	0.0
19	18	1	1	1	1	1	1	-250.0	120.0	250.0	0	0.0
20	19	1	1	1	1	1	1	-250.0	120.0	250.0	0	0.0
21	7	5										
22		1.0		0.0		0.0		0.0				
23	9	14	0	0	0	1	0	0	0.0		1.0 4	
24	11	15	0	0	0	1	0	0	0.0		1.0 5	
25	12	16	0	0	0	1	0	0	0.2		1.0E13	
26	12	17	0	0	0	1	0	0	0.1		1.0E13	
27	12	18	0	0	0	1	0	0	0.3		1.0E13	
28	12	12	1	1	1	1	1	0	0			
29	1											
30												
31												
32												
33												
34												
35												
36												
37												
38	11	13	1	1	1	1	1					
39	20	1	2	1	1	1	1					
40		15.0	CC	15.0	105.0	0.0	0.0					

1 2 3 4 5 6 7 8  
 123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

37

LINE NO	1	2	3	4	5	6	7	8
CA7)	1234567890	1234567890	1234567890	1234567890	1234567890	1234567890	1234567890	1234567890
41	3T	2	3	1	1			
42	4T	3	4	1	2			
43	5T	4	5	1	1			
44	6T	5	6	1	1			
45	7D	6	7	1	1			
46		15.0	CC	-215.0	225.0	0.0		
47	8T	7	8	1	1			
48	9T	5	9	1	1			
49	10D	9	10	1	1			
50		15.0	CC	-235.0	120.0	15.0		
51	11T	10	11	1	1			
52	12T	11	12	1	1			
53	3	1			1000.0			
54	4	1			-200.0			
55	8	1	3000.0	1000.0	2000.0			
56								
57		1.0	0.0	0.0	0.0			

BLANK  
LAST

1234567890 1234567890 1234567890 1234567890 1234567890 1234567890 1234567890 1234567890

38

121



PROBLEM 12 -- PIPE NETWORK STATIC ANALYSIS

CONTROL INFORMATION

NUMBER OF NODAL POINTS = 18  
 NUMBER OF ELEMENT TYPES = 2  
 NUMBER OF LOAD CASES = 1  
 NUMBER OF FREQUENCIES = 0  
 ANALYSIS CODE (NDYN) = 0  
   EQ.0. STATIC  
   EQ.1. MODAL EXTRACTION  
   EQ.2. FORCED RESPONSE  
   EQ.3. RESPONSE SPECTRUM  
   EQ.4. DIRECT INTEGRATION  
 SOLUTION MODE (MODEX) = 0  
   CO.0. EXECUTION  
   EQ.1. DATA CHECK  
 NUMBER OF SUBSPACE ITERATION VECTORS (NAD) = 0  
 EQUATIONS PER BLOCK = 40  
 TAPEIO SAVE FLAG (NIOSV) = 0

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES				
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ	X	Y	Z	T	
1	0	0	0	0	0	0	0.0	105.000	0.0	0	740.000
2	0	0	0	0	0	0	-15.000	120.000	0.0	0	740.000
3	0	0	0	0	0	0	-170.000	120.000	0.0	0	740.000
4	0	0	0	0	0	0	-133.000	120.000	0.0	0	740.000
5	0	0	0	0	0	0	-200.000	120.000	0.0	0	740.000
6	0	0	0	0	0	0	-200.000	225.000	0.0	0	740.000
7	0	0	0	0	0	0	-215.000	240.000	0.0	0	740.000
8	0	0	0	0	0	0	-440.000	240.000	0.0	0	740.000
9	0	0	0	0	0	0	-235.000	120.000	0.0	0	740.000
10	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	15.000	0	740.000
11	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	120.000	0	740.000
12	0	0	0	1	1	1	-250.000	120.000	240.000	0	740.000
13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	0	740.000
14	1	1	1	1	1	1	-245.000	120.000	0.0	0	0.0
15	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	120.000	0	0.0
16	1	1	1	1	1	1	-240.000	120.000	240.000	0	0.0
17	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	240.000	0	0.0
18	1	1	1	1	1	1	-250.000	120.000	250.000	0	0.0

NUDAL DATA

NUMBER	BOUNDARY CONDITION			CODER			NUDAL POINT COORDINATES			
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ	X	Y	Z	T
1	0	0	0	0	0	0	0.0	105.000	0.0	740.000
2	0	0	0	0	0	0	-15.000	120.000	0.0	740.000
3	0	0	0	0	0	0	-120.000	120.000	0.0	740.000
4	0	0	0	0	0	0	-133.000	120.000	0.0	740.000
5	0	0	0	0	0	0	-200.000	120.000	0.0	740.000
6	0	0	0	0	0	0	-200.000	225.000	0.0	740.000
7	0	0	0	0	0	0	-215.000	240.000	0.0	740.000
8	0	0	0	0	0	0	-440.000	240.000	0.0	740.000
9	0	0	0	0	0	0	-235.000	120.000	0.0	740.000
10	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	15.000	740.000
11	0	0	0	0	0	0	-250.000	120.000	120.000	740.000
12	0	0	0	1	1	1	-250.000	120.000	240.000	740.000
13	1	1	1	1	1	1	0.0	0.0	0.0	740.000
14	1	1	1	1	1	1	-245.000	120.000	0.0	0.0
15	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	120.000	0.0
16	1	1	1	1	1	1	-240.000	120.000	240.000	0.0
17	1	1	1	1	1	1	-250.000	130.000	240.000	0.0
18	1	1	1	1	1	1	-250.000	120.000	250.000	0.0

LOCATION	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	1	2	3	4	5	6
2	7	8	9	10	11	12
3	13	14	15	16	17	18
4	19	20	21	22	23	24
5	25	26	27	28	29	30
6	31	32	33	34	35	36
7	37	38	39	40	41	42
8	43	44	45	46	47	48
9	49	50	51	52	53	54
10	55	56	57	58	59	60
11	61	62	63	64	65	66
12	67	68	69	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0

BOUNDARY ELEMENTS

ELEMENT TYPE = 7  
 NUMBER OF ELEMENTS = 5

ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS

CASE(I)      CASE(III)      CASE(C)      CASE(O)      I  
 1.0000      0.0      0.0      0.0

ELEMENT NUMBER	NODE (NI)	NODES DEFINING (NI)	CONSTRAINT (NJ)	DIRECTION (NK)	DIRECTION (NL)	CODE KD	CODE KR	GENERATION CODE (KNI)	SPECIFIED DISPLACEMENT	SPECIFIED ROTATION	SPRING RATE
1	9	14	J	0	0	1	0	0	0.0	0.0	0.10000 01
2	11	15	C	0	0	1	0	0	0.0	0.0	0.10000 01
3	12	15	0	0	0	1	0	0	0.20000 00	0.0	0.10000 14
4	12	17	0	0	0	1	0	0	0.10000 00	0.0	0.10000 14
5	12	18	0	0	0	1	0	0	0.30000 00	0.0	0.10000 14

PIPE ELEMENT INPUT DATA

CONTROL INFORMATION

NUMBER OF PIPE ELEMENTS = 12  
 NUMBER OF MATERIAL SETS = 1  
 MAXIMUM NUMBER OF MATERIAL TEMPERATURE INPUT POINTS = 1  
 NUMBER OF SECTION PROPERTY SETS = 2  
 NUMBER OF BRANCH POINT NODES = 0  
 MAXIMUM NUMBER OF TANGENTS COMMON TO A BRANCH POINT = 4  
 FLAG FOR NEGLECTING AXIAL DEFORMATIONS IN BEND ELEMENTS (EQ.1, NEGLECT) = 0

MATERIAL PROPERTY TABLES

MATERIAL NUMBER = ( 1 )  
 NUMBER OF TEMPERATURE POINTS = ( 1 )  
 IDENTIFICATION = (CARBON STEEL)

POINT NUMBER	TEMPERATURE	YOUNG'S MODULUS	POISSON'S RATIO	THERMAL EXPANSION
1	0.0	27900000.0	0.333	0.6810-05

## SECTION PROPERTY TABLE

SECTION NUMBER	OUTSIDE DIAMETER	WALL THICKNESS	SHAPE FACTOR FOR SHEAR	WEIGHT/ UNIT LENGTH	MASS/ UNIT LENGTH	DESCRIPTION
1	10.740	0.5000	0.0	0.66100 01	0.17110-01	NORMAL PIPE VALVE
2	10.740	2.3000	0.0	0.66100 01	0.17110-01	

## ELEMENT LOAD CASE MULTIPLIERS

	CASE A	CASE B	CASE C	CASE D
X-DIRECTION GRAVITY	0.0	0.0	0.0	0.0
Y-DIRECTION GRAVITY	-1.000	0.0	0.0	0.0
Z-DIRECTION GRAVITY	0.0	0.0	0.0	0.0
THERMAL DISTORTION	1.000	0.0	0.0	0.0
PRESSURE DISTORTION	0.0	0.0	0.0	0.0

ELEMENT NUMBER	ELEMENT TYPE	NODE I	NODE J	MATL. NUMBER	SECTION NUMBER	REFERENCE TEMPERATURE (BEND RADIUS)	INITIAL DISPLACEMENT (X, Y, Z)	DIRECTION COORDINATES (X1, Y1, Z1)	COORDINATES (X2, Y2, Z2)	INCLEMENT (CALL FACTOR)	INP TAG
1	TANGENT BEND	1	2	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	11
2		1	2	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	10
3	TANGENT	2	3	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	11
4	TANGENT	3	4	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	11
5	TANGENT	4	5	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	11
6	TANGENT	5	6	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	10
7	BEND	6	7	1	1	15.0000	0.0	0.0	0.0	1	11
8	TANGENT	7	8	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	10
9	TANGENT	8	9	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	10
10	BEND	9	10	1	1	15.0000	0.0	0.0	15.0000	1	11
11	TANGENT	10	11	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	11
12	TANGENT	11	12	1	1	0.0	0.0	0.0	0.0	1	11

EQUATION PARAMETERS

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS = 40  
 BANDWIDTH = 30  
 NUMBER OF EQUATIONS IN A BLOCK = 40  
 NUMBER OF BLOCKS = 2

NODAL LOADS (STATIC) OR MASSES (DYNAMIC)

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-AXIS FORCE	Y-AXIS FORCE	Z-AXIS FORCE	X-AXIS MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT
3	1	0.0	0.100000 04	0.0	0.0	0.0	0.0
4	1	0.0	-0.200000 03	0.0	0.0	0.0	0.0
8	1	0.300000 04	0.100000 04	0.200000 04	0.0	0.0	0.0

STRUCTURE LOAD CASE	ELEMENT A	LOAD B	MULTIPLIERS C	D
1	1.000	0.0	0.0	0.0



DISPLACEMENTS / ROTATIONS									
NODE NUMBER	LOAD CASE	X-TRANSLATION	Y-TRANSLATION	Z-TRANSLATION	X-ROTATION	Y-ROTATION	Z-ROTATION		
17	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
17	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
16	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
15	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
14	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
13	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
12	1	0.200000 00	0.100000 00	0.300000 00	0.0	0.0	0.0		
11	1	-0.237010 00	0.240360 00	-0.303340 00	0.242130-02	0.598670-02	-0.983730-03		
10	1	-0.876920 00	0.622120 00	-0.831270 00	0.464910-02	0.519140-02	-0.184450-02		
9	1	-0.852930 00	0.673570 00	-0.938160 00	0.568030-02	0.505480-03	-0.195570-02		
8	1	-0.123710 01	0.350370 01	0.561550 01	0.116000-01	0.266680-01	-0.105890-01		
7	1	-0.104690 00	0.132270 01	0.253960 00	0.116000-01	0.180810-01	-0.542420-02		
6	1	-0.141980 00	0.112820 01	-0.115760 00	0.873830-02	0.114260-01	-0.683450-02		
5	1	-0.676780 00	0.599320 00	-0.942200 00	0.633420-02	0.320050-04	-0.234640-02		
4	1	-0.340040 00	0.546230 00	-0.790280 00	0.395050-02	-0.409110-02	0.357350-03		
3	1	-0.274580 00	0.551740 00	-0.735630 00	0.377340-02	-0.429020-02	0.463050-03		
2	1	0.253150 00	0.623960 00	-0.183890 00	0.370260-04	-0.515430-02	0.613340-04		
1	1	0.292690 00	0.528340 00	-0.109140 00	-0.101410-02	-0.393550-02	-0.355860-02		

BOUNDARY ELEMENT FORCES / MOMENTS

ELEMENT NUMBER	LOAD CASE	FORCE	MOMENT
1	1	0.856340 00	0.0
2	1	0.241570 00	0.0
3	1	0.200000 13	0.0
4	1	0.100000 13	0.0
5	1	0.300000 13	0.0

ELEMENT NUMBER	ELEMENT TYPE	LOAD CASE	STATION	AXIAL FORCE	Y-Axis SHEAR	Z-Axis SHEAR	TORSIONAL MOMENT	Y-Axis MOMENT	Z-Axis MOMENT
1	TANGENT	1	END-I	-3735.024	-3174.927	6012.520	-165785.17	-515400.41	-223720.26
			END-J	-3040.974	-3174.927	6012.520	-165785.17	115474.22	107740.35
2	BEND	1	END-I	-3040.974	-4017.500	-3174.927	-160770.17	-106749.75	115036.27
			CENTER	-6340.724	-2150.000	-3174.927	-208774.67	5724.99	106749.75
			END-J	-6012.520	2885.000	-3174.927	-157364.25	118151.27	161800.65
3	TANGENT	1	END-I	-6012.520	-2085.000	3174.927	-157364.25	-118151.27	-161800.65
			END-J	-6012.520	-2191.000	3174.927	-157364.25	215204.04	104524.85
4	TANGENT	1	END-I	-6012.520	-3171.000	3174.927	-157364.25	215204.04	104524.85
			END-J	-6012.520	-3105.000	3174.927	-157364.25	256400.00	145501.65
5	TANGENT	1	END-I	-6012.520	-2505.000	3174.927	-157364.25	256400.00	145501.65
			END-J	-6012.520	-2462.000	3174.927	-157364.25	469200.17	323157.24
6	TANGENT	1	END-I	-1337.044	2000.000	3000.000	480000.00	-407576.71	240000.00
			END-J	-640.994	2000.000	3000.000	480000.00	-94526.71	30000.00
7	BEND	1	END-I	-640.994	-3000.000	2000.000	480000.00	-30000.00	-24576.71
			CENTER	-2530.922	-1721.719	2000.000	326000.00	-332411.25	-65366.15
			END-J	-3000.000	487.253	2000.000	-0.00	-450000.00	-57684.37
8	TANGENT	1	END-I	-3000.000	-497.250	-2000.000	0.00	450000.00	57684.38
			END-J	-3000.000	1000.000	-2000.000	0.00	-0.00	-0.00
9	TANGENT	1	END-I	-3012.520	-1125.000	5174.927	82635.75	-10720.43	-84157.46
			END-J	-3012.520	-893.000	5174.927	82635.75	170322.61	-48621.35
10	BEND	1	END-I	-3011.664	-5174.927	-493.089	82635.75	40821.35	170322.61
			CENTER	-5704.754	-1579.658	-810.113	89143.01	-32456.94	211272.55
			END-J	-5174.927	3011.664	-735.241	36260.48	-94558.29	202771.53
11	TANGENT	1	END-I	-5174.927	-735.241	-3011.664	36260.48	202771.55	94558.29
			END-J	-5174.927	-44.191	-3011.664	36260.48	-113453.17	135535.96
12	TANGENT	1	END-I	-5174.927	-44.191	-3011.664	36260.48	-113453.17	135535.96
			END-J	-5174.927	790.251	-3011.664	36260.48	-474892.00	93117.89

STATIC SOLUTION TIME LOG

EQUATION SOLUTION = 0.73  
DISPLACEMENT OUTPUT = 0.27  
STRESS RECOVERY = 0.60

OVERALL TIME LOG

NODAL POINT INPUT = 0.42  
ELEMENT STIFFNESS FORMATION = 1.82  
NODAL LOAD INPUT = 0.13  
TOTAL STIFFNESS FORMATION = 0.77  
STATIC ANALYSIS = 1.61  
EIGENVALUE EXTRACTION = 0.0  
FORCED RESPONSE ANALYSIS = 0.0  
RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS = 0.0  
STEP-BY-STEP INTEGRATION = 0.0

TOTAL SOLUTION TIME = 4.75

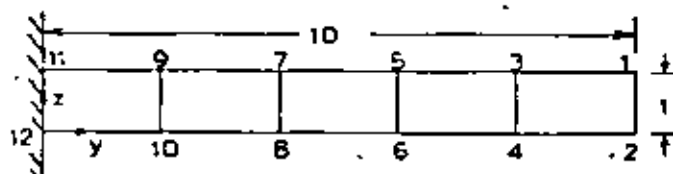
## PROBLEM 3.2 PLANE STRESS CANTILEVER BEAM EIGENVALUES

50

Problem Definition

Ref: Carnegie, W. and Thomas, J., "The Effects of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Lateral Frequencies of Cantilever Beams in Bending", ASME Journal of Engineering for Industry, February 1972, pp. 267-278.

See also problems 5.2 and 8.2.



$$E = 10^6 \text{ psi}$$

$$y = 0.3$$

$$\gamma = .386 \text{ lb/in}^3$$

$$t = 1.2''$$

Problem Formulation

Note that by placing the first two nodes at the tip only four nodal cards are required. Since the boundary condition code for the generated nodes are set equal to the values on the first card of a series, the nodal numbering should be such that the nodes with unique boundary condition codes occur last in a series.

Discussion of Results

The frequencies for the flexural vibrations of a cantilever beam are

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

while the extensional vibration frequencies are

$$f_i' = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

However, the flexural frequencies are too high because of neglecting shear and rotary inertia. This effect is more pronounced for the higher modes. The results for a Timoshenko beam were obtained by multiplying the Euler beam frequencies by a factor obtained from figure 1 in the article by Carnegie and Thomas.

Mode Number	Type	Euler Beam	Timoshenko Beam	SAP IV
1	flexural	55.96	55.6	50.01
2	flexural	350.7	332.	295.9
3	flexural	982.0	876.	788.5
4	extensional	790.6	--	791.5
5	flexural	1924.	1590.	1485.

CA97 1 2 3 4 5 6 7 8  
 1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

PROBLEM 3.2 -- PLANE STRESS CANTILEVER BEAM EIGENVALUES

1	17	1		5	1														
2	1	-1			-1	-1	-1		10.		1.								
3	11		1	1							1.		2						
4	12	1	1	1	1	1	1		10.				2						
5	12	1	1	1	1	1	1												
6	3	5	1	1															
7	1		.388		.001														
8			1.0E+6		1.0E+6		1.0E+6	0.3		0.3		0.3		384000.					
9																			
10																			
11																			
12																			
13																			
14																			
15	1	4	2	1	3	1						1.2							
16	5	12	10	9	11	1					2	1.2							
17																			
18																			
19																			

1 2 3 4 5 6 7 8  
 123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

CONTROL INFORMATION

NUMBER OF NODAL POINTS = 12  
 NUMBER OF ELEMENT TYPES = 1  
 NUMBER OF LOAD CASES = 0  
 NUMBER OF FREQUENCIES = 5  
 ANALYSIS CODE (NDYNI) = 1  
 EQ.0. STATIC  
 EQ.1. MODAL EXTRACTION  
 EQ.2. FORCED RESPONSE  
 EQ.3. RESPONSE SPECTRUM  
 EQ.4. DIRECT INTEGRATION  
 SOLUTION MODE (MIDLX) = 0  
 EQ.0. EXECUTION  
 EQ.1. DATA CHECK  
 NUMBER OF SUBSPACE  
 ITERATION VECTORS (NAD) = 0  
 EQUATIONS PER BLOCK = 0  
 TAPE10 SAVE FLAG (N10SV) = 0

NODAL POINT INPUT DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION			CODES		
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	-1	0	0	-1	-1	-1
11	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	1	1	1

NODAL POINT COORDINATES

X	Y	Z	T
0.0	10.000	1.000	0
0.0	0.0	1.000	2
0.0	10.000	0.0	0
0.0	0.0	0.0	2

GENERATED NODAL DATA

NODE NUMBER	BOUNDARY CONDITION CODES						NODAL POINT COORDINATES			
	X	Y	Z	XX	YY	ZZ	X	Y	Z	
1	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	10.000	1.000	0.0
2	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	10.000	0.0	0.0
3	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	8.000	1.000	0.0
4	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	9.000	0.0	0.0
5	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	6.000	1.000	0.0
6	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	6.000	0.0	0.0
7	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	4.000	1.000	0.0
8	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	4.000	0.0	0.0
9	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	2.000	1.000	0.0
10	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	2.000	0.0	0.0
11	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	0.0	1.000	0.0
12	-1	0	0	-1	-1	-1	0.0	0.0	0.0	0.0

EQUATION NUMBERS

N	X	Y	Z	XX	YY	ZZ
1	0	1	2	0	0	0
2	0	3	4	0	0	0
3	0	5	6	0	0	0
4	0	7	8	0	0	0
5	0	9	10	0	0	0
6	0	11	12	0	0	0
7	0	13	14	0	0	0
8	0	15	16	0	0	0
9	0	17	18	0	0	0
10	0	19	20	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0

PLANE STRESS ANALYSIS  
GENERAL CONDITIONS

NUMBER OF ELEMENTS = 4  
 NUMBER OF MATERIALS = 1  
 MAXIMUM TEMPERATURES PER MATERIAL = 1  
 ANALYSIS CODE = 2  
 CODE FOR INCLUSION OF BENDING NODES = 0  
 C.O.D. INCLUDE  
 C.T.O. SUPPRESS

MATERIAL I.D. NUMBER = 1  
 NUMBER OF TEMPERATURES = 1  
 WEIGHT DENSITY = 0.3846D 00  
 MASS DENSITY = 0.1000D-02  
 PLIA ANGLE = 0.0

TEMPERATURE	E(11)	E(5)	F(1)	NU(NS)	NU(INT)	NU(ST)	G(NS)	ALPHA(1)	ALPHA(5)	ALPHA(T)
0.0	0.1000D 07	0.1000D 07	0.1000D 07	0.3000	0.3000	0.3000	0.3846D 00	0.0	0.0	0.0

ELEMENT LOAD MULTIPLIERS

LOAD CASE	TEMPERATURE	PRESSURE	X-GRAVITY	Y-GRAVITY	Z-GRAVITY
A	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
B	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
D	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0



MEMBER	I	J	K	L	MAT TYPE	RELATIVE TEMPERATURE	I-J FACE PRESSURE	STIFFNESS OPTION	KG	THICKNESS
1	4	2	1	3	1	0.0	0.0	A	1	1.2000
2	6	4	3	5	1	0.0	0.0	A	1	1.2000
3	8	5	5	7	1	0.0	0.0	A	1	1.2000
4	10	7	7	9	1	0.0	0.0	A	1	1.2000
5	12	10	9	11	1	0.0	0.0	A	1	1.2000

### EQUATION PARAMETERS

TOTAL NUMBER OF EQUATIONS = 20  
 BANDWIDTH = 8  
 NUMBER OF EQUATIONS IN A BLOCK = 20  
 NUMBER OF BLOCKS = 1

### NODAL LOADS (STATIC) OR MASSES (DYNAMIC)

NODE NUMBER	LOAD CASE	X-AXIS FORCE	Y-AXIS FORCE	Z-AXIS FORCE	X-AXIS MOMENT	Y-AXIS MOMENT	Z-AXIS MOMENT
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		

STRUCTURE LOAD CASE      ELEMENT      LOAD      MULTIPLIERS

A      B      C      D

EIGENVALUE ANALYSIS

DETERMINANT SEARCH SOLUTION IS CARRIED OUT

CONTROL INFORMATION

FLAG FOR ADDITIONAL PRINTING = 0  
 EQ.0. SUPPRESS  
 EQ.1. PRINT

STURM SEQUENCE CHECK FLAG (+) = 0  
 EQ.0. PERFORM CHECK  
 EQ.1. PASS

MAXIMUM ITERATION CYCLES (\*) = 16

CONVERGENCE TOLERANCE (+) = 0.10000-04

CUT-OFF FREQUENCY (CPS) = 0.10000 09

NUMBER OF STARTING ITERATION  
 VECTORS TO BE READ FROM  
 TAPE10 (+) = 0

(+) APPLICABLE TO SUBSPACE  
 ITERATION SOLUTIONS ONLY

SOLUTION IS SOUGHT FOR FOLLOWING EIGENPROBLEM

NUMBER OF EQUATIONS = 20

HALF BANDWIDTH OF STIFFNESS MATRIX = 8

NUMBER OF EQUATION BLOCKS = 1

NUMBER OF EQUATIONS PER BLOCK = 20

NUMBER OF EIGENVALUES REQUIRED = 5

WE SOLVED FOR THE FOLLOWING EIGENVALUES

0.9873325832160 05 0.3456574940890 07 0.2454370471950 03 0.2473246051080 08 0.8707093459010 09

PRINT OF FREQUENCIES

MODE NUMBER	CIRCULAR FREQUENCY (RAD/SEC)	FREQUENCY (CYCLES/SEC)	PERIOD (SEC)
1	0.31320 03	0.50010 02	0.20000-01
2	0.18590 04	0.29590 03	0.33800-02
3	0.41590 04	0.74050 03	0.12680-02
4	0.49730 04	0.79150 03	0.12630-02
5	0.93310 04	0.14850 04	0.67340-03

PRINT OF EIGENVECTORS

N O D E      D I S P L A C E M E N T S / R O T A T I O N S

NODE NUMBER	EIGEN-VECTOR	TRANSLATION			ROTATION		
		X-	Y-	Z-	X-	Y-	Z-
12	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	1	0.0	-0.538960	00	-0.111420	01	0.0
	2	0.0	-0.200060	01	0.470530	01	0.0
	3	0.0	-0.305860	01	-0.896710	01	0.0
	4	0.0	-0.388740	01	-0.377610	00	0.0
	5	0.0	-0.211680	01	0.111970	02	0.0
9	1	0.0	0.538960	00	-0.111420	01	0.0
	2	0.0	-0.200060	01	0.470530	01	0.0
	3	0.0	-0.305860	01	-0.896710	01	0.0
	4	0.0	-0.388740	01	-0.377610	00	0.0
	5	0.0	-0.211680	01	0.111970	02	0.0
8	1	0.0	-0.912920	00	-0.405310	01	0.0
	2	0.0	0.106420	01	0.113700	02	0.0
	3	0.0	0.263390	01	-0.103740	02	0.0
	4	0.0	-0.756130	01	-0.227350	00	0.0
	5	0.0	-0.666680	01	-0.109530	01	0.0
7	1	0.0	0.912920	00	-0.405310	01	0.0
	2	0.0	-0.106420	01	0.113700	02	0.0
	3	0.0	-0.263390	01	-0.103740	02	0.0
	4	0.0	-0.756130	01	-0.227350	00	0.0
	5	0.0	-0.666680	01	-0.109530	01	0.0
6	1	0.0	-0.113390	01	-0.817780	01	0.0
	2	0.0	-0.143690	01	0.107500	02	0.0
	3	0.0	0.400810	01	0.500500	01	0.0
	4	0.0	-0.104420	02	-0.190370	00	0.0
	5	0.0	0.393620	01	-0.875520	01	0.0
5	1	0.0	0.113390	01	-0.817780	01	0.0
	2	0.0	-0.143690	01	0.107500	02	0.0
	3	0.0	0.400810	01	0.500500	01	0.0
	4	0.0	-0.104420	02	-0.190370	00	0.0
	5	0.0	-0.393620	01	-0.875520	01	0.0
4	1	0.0	-0.123030	01	-0.129290	02	0.0
	2	0.0	-0.356390	01	0.435510	00	0.0
	3	0.0	-0.250310	01	0.883030	01	0.0
	4	0.0	-0.122980	02	-0.864340	01	0.0
	5	0.0	0.226260	01	0.938850	01	0.0
1	1	0.0	0.123030	01	-0.129290	02	0.0
	2	0.0	0.356390	01	0.435510	00	0.0

2	0.0	0.156390	01	0.485510	00	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.257310	01	0.883030	01	0.0	0.0	0.0
4	0.0	-0.122040	02	0.864740	-01	0.0	0.0	0.0
5	0.0	-0.226260	01	-0.938450	01	0.0	0.0	0.0
2	1	0.0	-0.125230	01	-0.172930	02	0.0	0.0
	2	0.0	-0.429640	01	-0.155130	02	0.0	0.0
	3	0.0	-0.683240	01	-0.112830	02	0.0	0.0
	4	0.0	-0.129510	02	-0.241210	-01	0.0	0.0
	5	0.0	-0.862370	01	-0.613720	01	0.0	0.0
	1	0.0	0.175230	01	-0.179030	02	0.0	0.0
	2	0.0	0.420640	01	-0.155130	01	0.0	0.0
	3	0.0	0.643240	01	-0.112830	02	0.0	0.0
	4	0.0	-0.129510	02	-0.241210	-01	0.0	0.0
	5	0.0	0.862370	01	-0.613720	01	0.0	0.0

EIGENSOLUTION TIME LOG

EIGENSOLUTION = 0.03  
 PRINTING = 0.03

OVERALL TIME LOG

NODAL POINT INPUT = 0.23  
 ELEMENT STIFFNESS FORMATION = 0.65  
 NODAL LOAD INPUT = 0.10  
 TOTAL STIFFNESS FORMATION = 0.41  
 STATIC ANALYSIS = 0.0  
 EIGENVALUE EXTRACTION = 2.51  
 FORCED RESPONSE ANALYSIS = 0.0  
 RESPONSE SPECTRUM ANALYSIS = 0.0  
 STEP-BY-STEP INTEGRATION = 0.0  
 TOTAL SOLUTION TIME = 3.90



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

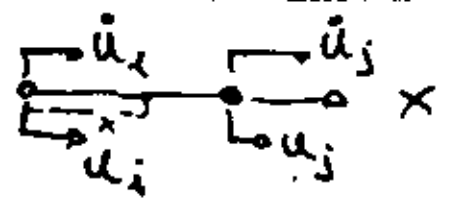
EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

ECUACIONES DINAMICAS

DR. VICTOR HUGO MUCINO QUINTERO

MARZO, 1984

# ELASTODINAMICA



$$\{f\} = \{u \ v \ w\} = [N] \{d\}$$

$$\{\dot{f}\} = \{\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w}\} = [N] \{\dot{d}\}$$

$[N]$  = Funciones de Interpolación

si  $\rho \equiv$  Densidad de Masa

$$\dot{u}_x = [(1-\xi) \ (\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{Bmatrix}$$

$$T_e = \int_{Vol} \frac{\rho}{2} \{\dot{f}\}^T \{\dot{f}\} dV$$

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^T \int_{Vol} \rho [N]^T [N] dV \{\dot{d}\}$$

$T_e$ , para un sistema holónomo, natural es una función cuadrática y homogénea

$$T_e = \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^T [m] \{\dot{d}\}$$

$$\Rightarrow [m] = \int_{Vol} \rho [N]^T [N] dV \equiv \text{Matriz de masa DISTRIBUIDA}$$

$$T = \sum T_e = \sum \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^T [m] \{\dot{d}\} = \frac{1}{2} \{\dot{D}\}^T [M] \{\dot{D}\}$$

La Función Disipación

$$F_e = \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^T [c] \{\dot{d}\} ; F = \frac{1}{2} \{\dot{D}\}^T [C] \{\dot{D}\}$$

La Función Lagrangiana queda definida por

$$L = T - \Pi_p$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{D}} \right\} - \left\{ \frac{\partial L}{\partial D} \right\} + \left\{ \frac{\partial F}{\partial D} \right\} = 0$$

$\therefore L \equiv$  Lagrangiano

$T \equiv$  E. Cinética

$\Pi_p \equiv$  E. Potencial

$F =$  Función de Rayleigh de Disipación

$$[M] \{\ddot{D}\} + [C] \{\dot{D}\} + [K] \{D\} = \{R\}$$

Ecuaciones de Movimiento para el caso  
D inducido con amortiguamiento

En Fricción seca se puede aproximar

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K]$$

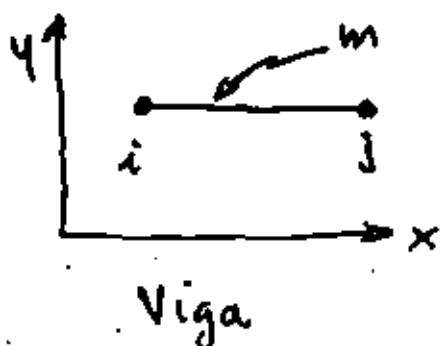
$\therefore \alpha$  y  $\beta$  son empíricas (Experimentales, posiblemente)





$$[m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{matrix}$$

Matriz de Masa Concentrada



$$[m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

Problema de Valores Caracteristicos:

$$\{D\} = \{D_0\} \text{ sen } \omega t, \Rightarrow \{\ddot{D}\} = -\omega^2 \{D_0\} \text{ sen } \omega t$$

sin Amortiguamiento

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{F(\theta)\}$$

$$[M]\{\ddot{D}\} + [K]\{D\} = \{0\} \quad \text{homogeneo}$$

$$\Rightarrow ([K] - \omega^2[M])\{D_0\} = \{0\} \Rightarrow [A] - \lambda[I]\{D_0\} = \{0\}$$

$$|[A] - \lambda[I]| = 0 \quad \text{Problema de valores caracteristicos}$$

$$\therefore \lambda = \omega^2, \quad [A] = [M]^{-1}[K]$$



**DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.**

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA

APLICACIONES AVANZADAS

*Aplicaciones del Método de Elementos Finitos a  
Problemas de Termodinámicos*

ING. ERNESTO MARTIN DEL CAMPO VAZQUEZ

DR. MIHIR SEN

MARZO, 1984

## 8. APLICACIONES AVANZADAS

"APLICACIONES DEL MÉTODO DE ELEMENTOS  
FINITOS A PROBLEMAS DE TERMOFLUIDOS"

ERNESTO MARTÍN DEL CAMPO VÁZQUEZ  
MIHIR SEN

DIVISIÓN DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA

U.N.A.M.

ABRIL 1982

## RESUMEN

Debido a la gran aceptación que ha tenido últimamente el método de elementos finitos en termofluidos, este trabajo pretende ejemplificar su uso mediante aplicaciones a la transferencia de calor y la mecánica de fluidos.

Se resuelve el problema de conducción de calor en una placa, determinándose la distribución de temperaturas, tanto en el estado permanente como en el transitorio. Asimismo, se comparan estas soluciones numéricas con soluciones analíticas, para observar la variación del error con respecto a la variación y número de elementos.

Por otra parte se analiza el flujo potencial bidimensional alrededor de un cilindro entre placas planas, para obtener líneas de corriente y líneas equipotenciales. Para el caso de flujo incompresible, la ecuación que gobierna el proceso es lineal con solución numérica directa, mientras que para el flujo compresible, la no linealidad en las ecuaciones requiere de un método iterativo para su solución; en este último caso también se obtienen los números de Mach locales.

Al final se trata el mismo problema considerando flujo viscoso, incompresible en el plano y se obtienen líneas de corriente.

## CONTENIDO

RESUMEN		iv
NOMENCLATURA		vii
CAPITULO I	INTRODUCCION	1
	1.1 Métodos Existentes	2
	1.2 Utilidad del Método de Elementos Finitos	4
	1.3 Resumen Histórico	5
CAPITULO II	METODO DE ELEMENTOS FINITOS	7
	2.1 Diferentes Métodos	7
	2.1.1 Método Variacional	7
	2.1.2 Método de Rayleigh-Ritz	9
	2.1.3 Método de Residuos Pesados	10
	2.2 Método de Galerkin	13
CAPITULO III	CONDUCCION DE CALOR	16
	3.1 General	16
	3.2 Problema Bidimensional en Estado Permanente	17
	3.2.1 Planteamiento de las Ecuaciones y Solución Analítica	17
	3.2.2 Formulación de Elementos Finitos	18
	3.2.3 Ejemplo Numérico	22
	3.2.4 Solución de Elementos Finitos Contra Solución Analítica	31
	3.3 Problema Bidimensional en Estado Transitorio	45
	3.3.1 Planteamiento de las Ecuaciones y Solución Analítica	45

3.3.2	Formulación de Elementos Finitos	50
3.3.3	Solución de Elementos Finitos Contra Solución Analítica	53
<b>CAPITULO IV</b>	<b>FLUJO POTENCIAL INCOMPRESIBLE</b>	<b>59</b>
4.1	General	59
4.2	Planteamiento de las Ecuaciones	59
4.3	Formulación de Elementos Finitos	62
4.4	Solución y Resultados	64
<b>CAPITULO V</b>	<b>FLUJO POTENCIAL COMPRESIBLE</b>	<b>72</b>
5.1	General	72
5.2	Planteamiento de las Ecuaciones	72
5.3	Formulación de Elementos Finitos	78
5.4	Solución y Resultados	82
<b>CAPITULO VI</b>	<b>Ecuaciones no lineales</b>	<b>94</b>
<b>CAPITULO VII</b>	<b>Conclusiones</b>	
<b>APENDICES</b>		
A.	Programa de Computación para Conducción de Calor	95
B.	Programa de Computación para Flujo Potencial	105
<b>REFERENCIAS</b>		<b>119</b>

## NOMENCLATURA

- a ancho de la placa
- $a_i$  constantes de las funciones de interpolación
- AS<sub>1</sub> malla con más elementos en la zona de variación
- AS<sub>2</sub> malla con menos elementos en la zona de variación
- A matriz de coeficientes para un elemento, de componentes  $A_{ij}$
- A\* matriz global de coeficientes, de componentes  $A_{ij}^*$
- b largo de la placa
- $b_i$  constantes de las funciones de interpolación
- B matriz de coeficientes de temperatura transitoria para un elemento, de componentes  $B_{ij}$
- B\* matriz global de coeficientes de temperatura transitoria, de componentes  $B_{ij}^*$
- $\hat{c}$  velocidad del sonido dimensional
- c velocidad del sonido adimensional
- $c_\infty$  velocidad del sonido alejado del cuerpo
- $c_i$  constantes de las funciones de interpolación
- C calor específico
- $C_i$  constantes
- D distancia característica
- e error raíz medio cuadrático
- f función conocida en el dominio
- $\hat{f}$  vector de flujo para un elemento, de componentes  $f_i$
- $\hat{f}^*$  vector global de flujo, de componentes  $f_i^*$
- F funcional
- $\tilde{g}$  función del potencial de velocidad adimensional
- g vector de términos no lineales, aproximados para un elemento, del potencial de velocidad, de componentes  $g_i$

G	variable en función de la temperatura en estado permanente
$\hat{h}$	entalpía específica dimensional
H	variable en función de la temperatura en estado transitorio
I	principio variacional
K	conductividad térmica
$\ell$	vector de términos no lineales, aproximados para un elemento, de la función de corriente, de componentes $\ell_i$
L	longitud de referencia
$L_i$	coordenadas de área
N	número de Mach
$M_\infty$	número de Mach alejado del cuerpo
$\bar{n}$	normal a la superficie adimensional
$N_i$	funciones de interpolación
$\hat{P}$	presión dimensional
$\hat{q}$	velocidad total dimensional
$q_\infty$	velocidad total alejada del cuerpo
q	vector de fuentes de calor para un elemento, de componentes $q_i$
$q^*$	vector global de fuentes de calor, de componentes $q_i^*$
$\delta$	vector que representa los términos no lineales, aproximados para un elemento, de la función de corriente, de componentes $\delta_i$
$\delta^*$	vector global que representa los términos no lineales aproximados, de la función de corriente, de componentes $\delta_i^*$
$t$	vector que representa los términos no lineales, aproximados para un elemento, del potencial de velocidad, de componentes $t_i$
$t^*$	vector global que representa los términos no lineales aproximados, del potencial de velocidad, de componentes $t_i^*$
U	componente dimensional de la velocidad en la dirección $\hat{x}$
V	componente dimensional de la velocidad en la dirección $\hat{y}$



$w_i$	funciones de peso
$\hat{x}$	coordenada cartesiana dimensional
$x$	coordenada cartesiana adimensional
$\hat{y}$	coordenada cartesiana dimensional
$y$	coordenada cartesiana adimensional
$\gamma$	relación de calores específicos
$\Gamma$	frontera del dominio de un elemento
$\delta$	delta de Dirac
$\Delta$	área de un elemento
$\epsilon$	residuo
$\hat{\theta}$	temperatura absoluta dimensional
$\tilde{\theta}$	temperatura absoluta adimensional
$\theta$	temperatura aproximada para un elemento, de componentes $\theta_i$
$\theta^*$	temperatura global aproximada, de componentes $\theta_i^*$
$\theta_0$	temperatura de referencia
$\theta_1$	temperatura inicial
$\theta_m$	temperatura media
$\Lambda$	operador diferencial lineal
$\tilde{\xi}$	variable cualquiera dimensional
$\xi$	variable cualquiera aproximada, de componentes $\xi_i$
$\hat{\rho}$	densidad dimensional
$\rho_m$	densidad alejada del cuerpo
$\hat{\tau}$	tiempo dimensional
$\tau$	tiempo adimensional
$\Delta\tau$	incremento de tiempo
$\hat{\phi}$	potencial de velocidad dimensional
$\tilde{\phi}$	potencial de velocidad adimensional

- $\phi$  potencial de velocidad aproximado para un elemento, de componentes  $\phi_i$
- $\phi^*$  potencial de velocidad global aproximado, de componentes  $\phi_i^*$
- $\hat{\psi}$  función de corriente dimensional
- $\tilde{\psi}$  función de corriente adimensional
- $\psi$  función de corriente aproximada para un elemento, de componentes  $\psi_i$
- $\psi^*$  función de corriente global aproximada, de componentes  $\psi_i^*$
- $\Omega$  dominio de un elemento

## CAPITULO I INTRODUCCION

El desarrollo de la tecnología va a pasos agigantados y el estudio de problemas asociados con ésta, requiere frecuentemente de nuevas técnicas de análisis. A veces estas técnicas provienen de principios ya conocidos, que originalmente tenían poca utilidad por falta de equipos modernos, como por ejemplo la computadora digital.

El estudio de los termofluidos es un caso donde los avances han sido notorios. El movimiento de un fluido real, se describe por medio de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Aún para el problema más sencillo, de un flujo uniforme alrededor de una placa plana inclinada o alrededor de un cilindro, soluciones analíticas tiene que basarse en alguna aproximación y por eso son de uso limitado. Estas aproximaciones pueden ser ángulo de ataque pequeño en el caso de la placa y bajo número de Reynolds en el caso del cilindro.

En situaciones de interés práctico, la presencia de geometrías irregulares sólidas complica aún más la predicción del comportamiento del fluido, es por ello que el análisis teórico debe complementarse, cuando sea posible, con experimentos o métodos numéricos. Este trabajo se enfoca al área de los métodos numéricos; uno de éstos, con gran aceptación actualmente, es el "método de elementos finitos" que será el que se utilice aquí.

No se pretende, ni con mucho, hacer un análisis del método para lo cual existen ya bastantes libros, sino más bien una orientación de su aplicación a las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor. Para lograr esto, se resuelven algunos problemas específicos cuya solución analítica es conocida y algunos otros de más alto grado de dificultad.

## 1.1 MÉTODOS EXISTENTES

En la actualidad existen modelos matemáticos que describen el comportamiento de los fluidos, en casi cualquier circunstancia y además, tienen una estrecha relación con problemas prácticos que existen actualmente. Sin embargo, hay una gran cantidad de problemas específicos en la dinámica de fluidos que no han sido resueltos, debido a las dificultades encontradas en la mayoría de los métodos analíticos y numéricos convencionales. Estas dificultades son ocasionadas principalmente por la no linealidad de las ecuaciones, producida al escoger una descripción Euleriana de los procesos y también, por lo difícil que es introducir las condiciones de frontera, cuando los cuerpos tienen una geometría un tanto irregular.

El método que ha sido más usado para resolver estas dificultades y que además es bien conocido, es el "método de diferencias finitas" (Richtmyer and Morton, 1967, Roache, 1972), en el cual las derivadas parciales de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno, son reemplazadas por cocientes de diferencias finitas. Una de las desventajas de este método es que se aplica fácilmente sólo a problemas en que el dominio sea de una forma más o menos regular; sin embargo, se han resuelto una variedad de problemas teóricos y prácticos por medio de él.

Otro método numérico es el de "partículas en celda" (Evans y Harlow, 1957), en el cual se construye un sistema de celdas de tal manera, que se puede definir la posición de las partículas del fluido en términos de estas celdas, cada una de ellas está definida por un conjunto de variables, que describen las componentes de velocidad, energía interna, densidad y presión en la celda. Este método tiene un uso limitado dadas sus características.

Entre los últimos métodos que se han desarrollado para la solución de problemas en dinámica de fluidos, está el "método

de pánel" (Hess, 1975), el cual consiste en cubrir la superficie de la frontera sólida por un número finito de pequeñas áreas, llamadas pánels, cada una de las cuales está formada por singularidades de una cierta clase, que tienen una densidad indeterminada. Las singularidades se distribuyen de tal manera, que orientan el flujo alrededor de un determinado cuerpo. Generalmente se usan pánels formados por fuentes o dobletes para cuerpos de superficies sin sustentación y formados por vórtices para superficies con sustentación. La condición que deben cumplir las ecuaciones es que el flujo debe ser tangente a cada uno de los pánels, con lo que se puede calcular la densidad de las singularidades. El flujo total es la superposición de un flujo uniforme y un flujo inducido por las singularidades, con lo cual se puede determinar la velocidad y presión en cualquier punto del flujo. Este método ha sido aplicado felizmente, tanto en problemas aerodinámicos en dos y tres dimensiones con cuerpos de geometría compleja, como a problemas de flujos internos, no uniformes y en estado transitorio.

En años recientes ha tenido una gran popularidad el "método de elementos finitos" en las áreas de mecánica de fluidos y transferencia de calor, debido a su gran flexibilidad. Está íntimamente relacionado con los "métodos varacionales" y los "métodos de residuos pesados" (Finlayson, 1972). Los principios variacionales son usados en combinación con el método de Rayleigh-Ritz, pero desgraciadamente, éstos no pueden ser encontrados en algunos problemas de ingeniería, particularmente cuando las ecuaciones diferenciales no son auto-adjuntas. Los residuos pesados pueden tener la forma de los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y colocación. El método de residuos pesados utiliza el concepto de la proyección ortogonal de un residuo de una ecuación diferencial, sobre un subespacio formado por ciertas funciones de peso. En el método de elementos finitos, podemos usar tanto los principios variacionales, cuando existen, como los residuos pesados a través de aproximaciones.

En las aplicaciones de elementos finitos a la dinámica de fluidos, generalmente el método de Galerkin es considerado la herramienta más conveniente en la formulación de los modelos de elementos finitos, ya que no requiere principios variacionales. Normalmente el método de mínimos cuadrados requiere funciones de interpolación de alto orden, aunque el comportamiento físico pueda ser descrito por ecuaciones lineales de bajo orden.

En estas notas se utilizará el método de elementos finitos combinado con el método de Galerkin ya que es el más conveniente.

## 1.2 UTILIDAD DEL METODO DE ELEMENTOS FINITOS

Al tratar de resolver una ecuación diferencial lineal que describe el comportamiento de cierto fenómeno, uno de los principales problemas que se presentan es cómo introducir las condiciones de frontera, sobre todo si el cuerpo con el que se está trabajando tiene una configuración irregular. La mayoría de las ecuaciones diferenciales lineales, tienen solución para algunos problemas específicos, en los que las fronteras presentan alguna simetría, pero en la realidad, los cuerpos pueden tener configuraciones bastante irregulares, como es el caso de una ala de avión, en la que no existe simetría por ningún lado.

Con métodos analíticos es prácticamente imposible resolver estos problemas en general y los demás métodos numéricos exigen una configuración más o menos regular. Aquí está una de las principales ventajas del método de elementos finitos, ya que la superficie del cuerpo se puede conformar a través de pequeñas regiones y se pueden colocar tantas como sea necesario para lograr un perfil aproximado del cuerpo. Además, el valor de la condición de frontera puede ser diferente entre una y otra región adyacente, con lo que se puede atacar una variedad de problemas reales.

Otra ventaja del método, es que al aplicar la formulación de elementos finitos a la ecuación diferencial, quedan separadas automáticamente las condiciones de frontera (de Dirichlet y de Neumann)

algo que es muy útil.

En el caso de problemas modelados por medio de ecuaciones diferenciales no lineales, el método de elementos finitos es útil para resolverlos, ya que se puede combinar este método con algún método iterativo, a fin de encontrar la solución. Esto se verá más claro en el capítulo dedicado a flujo compresible (Cap. V).

Una desventaja de este método, estriba en que hay que darle una gran cantidad de datos entre coordenadas, condiciones iniciales, de frontera, etc., lo que ocasiona por un lado un sobre esfuerzo personal y por otro la posibilidad de errores al teclear los datos para un programa de computación. Afortunadamente, se ha estado trabajando en ello y se han ideado formas para que el mismo programa calcule la mayoría de los datos que necesita, a través de un preprocesamiento.

Otro problema es que los programas son muy extensos y utilizan un gran tiempo de procesamiento; es por ello que siempre se tratan de utilizar métodos de integración numérica, de solución de sistemas de ecuaciones, etc., que sean muy eficientes para reducir los tiempos.

Por lo anteriormente expuesto, el método de elementos finitos tiene una utilidad en la solución de problemas de la dinámica de fluidos y de muchas otras ramas en las que intervengan ecuaciones diferenciales. Sin embargo, cuando un problema es difícil, lo sigue siendo, no importa el método que se utilice; lo único, es que el método de elementos finitos nos da la posibilidad de resolverlo.

### 1.3 RESUMEN HISTORICO

El método de elementos finitos fué originalmente desarrollado por ingenieros estructurales de aviación en los años 50's

para analizar los grandes sistemas estructurales que existen en los aviones. Turner, Clough, Martin y Topp (1956), presentaron el primer artículo relacionado con ésto; continuaron con los estudios Clough (1960) y Argyris (1963), además de otros. La aplicación del método de elementos finitos a problemas no estructurales, tales como flujo de fluidos y electromagnetismo, fué iniciado por Zienkiewicz y Cheung (1965) y por último, Oden (1972), ha contribuido en las aplicaciones a diferentes clases de problemas en la mecánica no lineal.

Han dado un impulso significativo a la teoría de elementos finitos, el concepto clásico del método variacional de Rayleigh-Ritz (Rayleigh, 1877; Ritz, 1909) y los métodos de residuos pesados, modelados después del método de Galerkin (1965), ya que existe una relación importante entre ellos. En años recientes varios autores han contribuido al desarrollo de la teoría matemática de elementos finitos; algunos de ellos son Babuska y Aziz (1972), Ciarlet y Raviart (1972), Rubin (1972), Strong y Fix (1973) y Oden y Reddy (1976), todos ellos influenciados grandemente por los trabajos de Lions y Magenes (1968).



## CAPITULO II METODO DE ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos es un procedimiento de aproximación para la solución de ecuaciones diferenciales, con condiciones a la frontera y condiciones iniciales, del tipo que se presentan en problemas de ingeniería, física y matemática. El procedimiento básicamente envuelve la división del dominio en muchas pequeñas regiones, llamadas "elementos", convenientemente distribuidas, las cuales pueden ser de forma triangular, cuadrilátera, etc., y usando una interpolación para describir el comportamiento de estos subdominios. Un número satisfactorio de puntos, llamados "nodos", son especificados para cada elemento y a cada uno de ellos le corresponde un valor de la variable o las variables de la ecuación diferencial, que se obtiene interpolando dentro de cada elemento. Usando el principio variacional o el método de residuos pesados las ecuaciones diferenciales que gobiernan el dominio, se transforman en ecuaciones de elementos finitos, que gobiernan aisladamente a cada uno de los elementos y en general son ecuaciones algebraicas. Estas ecuaciones son convenientemente ensambladas para formar un sistema global, en el cual se pueden introducir las condiciones de frontera y las condiciones iniciales, según se requiera. Por último, los valores de la variable en los nodos, son determinados de la solución del sistema de ecuaciones algebraicas.

### 2.1 DIFERENTES METODOS

#### 2.1.1 Método Variacional

Al modelar algún fenómeno físico por medio del cálculo diferencial, frecuentemente se llega a una ecuación integral, en la que únicamente nos interesan sus valores máximos o sus valores mínimos. El problema concerniente a la determinación de valores extremos de las integrales, en las cuales los integrandos contienen

funciones desconocidas, nos lleva al cálculo variacional.

Para ejemplificar ésto, tomaremos el problema de encontrar una función  $\hat{y}=\hat{y}(\hat{x})$ , conociendo  $\hat{y}(\hat{x}_0)$  y  $\hat{y}(\hat{x}_1)$ , de tal manera que la integral

$$I = \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}') d\hat{x} \quad (2.1)$$

sea mínima. Aquí la prima indica derivada con respecto a  $\hat{x}$ .

Si suponemos que  $F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')$  es una función, que tiene derivadas parciales de segundo orden y continuas con respecto a sus argumentos, la minimización de  $I$  nos conduce a la ecuación de Euler-Lagrange de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}'} - \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{y} \partial \hat{y}'} \hat{y}' - \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{y}'^2} \hat{y}'' = 0 \quad (2.2)$$

Este procedimiento se puede generalizar para la integral

$$I = \int_{\hat{x}_0}^{\hat{x}_1} F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}', \hat{y}'', \dots, \hat{y}^{(n)}) d\hat{x} \quad (2.3)$$

en la que su minimización corresponde a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{y}} - \frac{d}{d\hat{x}} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}'} \right) + \frac{d^2}{d\hat{x}^2} \left( \frac{\partial F}{\partial \hat{y}''} \right) - \dots - (-1)^n \frac{d^n}{d\hat{x}^n} \frac{\partial F}{\partial \hat{y}^{(n)}} = 0 \quad (2.4)$$

La ecuación (2.3) es llamada "principio variacional" y  $F$ , el integrando del principio variacional es la "funcional".

La discusión anterior también puede ser generalizada a problemas en dos y tres dimensiones. Por ejemplo, la minimización de la integral doble

$$I(\hat{\xi}) = \iint_{\Omega} F(x, y, \hat{\xi}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial y}) d\Omega \quad (2.5)$$

con los valores conocidos en la frontera  $\Gamma$ , le corresponde una ecuación de la forma

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{\xi}} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x} \right)} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \left( \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial y} \right)} \right\} = 0 \quad (2.6)$$

El método variacional es uno de los métodos más poderosos en la solución de problemas de ingeniería. Casi siempre que tenemos una ecuación del tipo (2.6), suponemos que ésta es la minimización de una funcional, la cual podemos resolver por el método de Rayleigh-Ritz. No siempre es fácil encontrar el problema de minimización el cual corresponde a la ecuación diferencial bajo consideración. Sin embargo, para gran parte de los problemas de estructuras y mecánica de sólidos la funcional sí existe, es por ello que este método tiene popularidad en esas áreas.

### 2.1.2 METODO DE RAYLEIGH-RITZ

Teóricamente, cualquier medio continuo consiste en un número de puntos, a los cuales podemos asociar diferentes variables, como son velocidad, esfuerzo, temperatura, etc. El método de Rayleigh-Ritz es un procedimiento de aproximación en el cual reducimos un sistema continuo a un sistema con un número finito de puntos. Este método tiene una aplicación directa a los principios variacionales, como se muestra a continuación.

Consideremos el problema de minimizar la integral

$$I(\hat{\xi}) = \iint_{\Omega} F(x, y, \hat{\xi}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial x}, \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial y}) d\Omega \quad (2.7)$$

con una condición de frontera  $\hat{\xi} = \hat{\xi}(\Gamma)$ , en la que  $\Gamma$  representa la frontera del dominio. Podemos suponer una solución de la forma

$$\hat{\xi} = \xi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (2.8)$$

de tal manera que ésta satisfaga las condiciones de frontera, para todos los valores de las constantes  $C_i$ . Sustituyendo (2.8) en (2.7), se tiene

$$I(\hat{\xi}) = I(C_i) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

Ya que nosotros buscamos el mínimo de esta función, las constantes  $C_i$  deben satisfacer la condición

$$\frac{\partial I}{\partial C_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

Este es un sistema de ecuaciones algebraicas que puede resolverse para las constantes  $C_i$ . Una vez obtenidas las constantes, las sustituiremos en (2.8) obteniendo la solución aproximada que se buscaba.

Una de las limitaciones de este método, es que es difícil en general, si no imposible, encontrar una función  $\xi$  que satisfaga las condiciones de frontera globales, para un dominio con geometrías complicadas.

### 2.1.3 METODO DE RESIDUOS PESADOS

La idea básica del método de residuos pesados, es obtener una solución aproximada de la siguiente ecuación diferencial

$$A \hat{\xi} + f = 0 \text{ en un dominio} \quad (2.11)$$

donde  $A$  es un operador diferencial,  $\hat{\xi}$  es una variable como puede ser velocidad, temperatura, etc. y  $f$  es una función conocida en el dominio. Además está sujeta a las condiciones de frontera

$$A_k(\hat{\xi}) = f_k \text{ en la frontera } \Gamma \quad (2.12)$$

Si suponemos una aproximación de la forma

$$\hat{\xi} \approx \xi = \sum_{i=1}^n C_i N_i \quad (2.13)$$

donde las  $C_i$  son constantes y las  $N_i$  son funciones linealmente independientes que satisfacen las condiciones de frontera, llamadas funciones de base.

Ya que (2.13) es una aproximación de la función  $\hat{\xi}$ , si la sustituimos en (2.11) no la va a satisfacer exactamente, sin embargo, la podemos igualar a un cierto residuo  $\epsilon$  que será el error que tengamos en la aproximación

$$A \xi + f = \epsilon \quad (2.14)$$

Introduciendo las funciones de peso  $w_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) y construyendo el producto interno  $(\epsilon, w_i)$  e igualándolo a cero tenemos

$$(\epsilon, w_i) = 0 \quad (2.15)$$

lo que es equivalente a decir que la proyección del residuo sobre el espacio de las funciones de peso es cero. Estas ecuaciones se utilizan para encontrar los valores de las  $C_i$ . La definición del producto interno que se utiliza es la siguiente

$$(U, V) = \int_{\Omega} u v d\Omega \quad (2.16)$$

Hay varias maneras de escoger las funciones de peso  $w_i$  entre las que están:

a) Método de Galerkin.- En este método las funciones de peso se hacen igual que las funciones de base, obteniéndose

$$(c, N_i) = 0 \quad (2.17)$$

b) Método de Mínimos Cuadrados. En este método se escogen las funciones de peso igual que el residuo y se minimiza el producto interno con respecto a cada una de las constantes  $C_i$  esto es

$$\frac{\partial}{\partial C_i} (c, c) = 0 \quad (2.18)$$

c) Método de Momentos.- Aquí se escogen las funciones de peso de un conjunto de funciones linealmente independientes como son  $1, x, x^2, x^3, \dots$ , para problemas unidimensionales, de tal manera que

$$(c, \hat{x}_i) = 0 \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.19)$$

d) Método de Colocación.- Se escoge un conjunto de  $n$  puntos  $\hat{x}_i$  en el dominio  $\Omega$  como puntos de colocación y la función de peso es

$$w_i = \delta(\hat{x} - \hat{x}_i) \quad (2.20)$$

donde  $\delta$  es la función de Dirac. Aquí obtenemos

$$(c, \delta(\hat{x} - \hat{x}_i)) = c|_{\hat{x}_i} \quad (2.21)$$

El error entonces es cero en  $n$  puntos de  $\Omega$ .

Los métodos de Galerkin y Mínimos Cuadrados se adaptan muy bien a las aplicaciones de elementos finitos y los métodos de Momentos y Colocación, no se prestan tan directamente a éstas, ya que son más complicados.

## 2.2 METODO DE GALERKIN

El método de Galerkin se adapta muy bien a los problemas que existen en mecánica de fluidos y transferencia de calor, y será el que se utilice a lo largo de este trabajo. Es por ello que se hará un análisis un poco más a fondo de él.

Este método implica la proyección ortogonal del residuo  $\epsilon$  sobre un espacio de funciones linealmente independientes  $N_i$  lo que se efectúa por medio del producto interno (2.16). Esto es equivalente a decir, que el residuo  $\epsilon$  es ortogonal a todo el sistema de funciones  $N_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ), para lo cual se necesita que  $\epsilon$  sea considerado continuo. Ya que sólomente disponemos de  $n$  constantes  $C_1, C_2, \dots, C_n$  solo podemos satisfacer  $n$  condiciones de ortogonalidad.

Efectuando el proceso anterior para (2.11) tenemos

$$\int_{\Omega} \epsilon N_i d\Omega = \int_{\Omega} \left[ \Lambda \left( \sum_{j=1}^n C_j N_j \right) + f \right] N_i d\Omega = 0 \quad (2.22)$$

donde  $\Omega$  es el dominio del elemento.

La ecuación anterior es un sistema de ecuaciones algebraicas, el cual se puede resolver para las constantes  $C_i$ . Ya que tanto las  $C_i$  como las  $N_i$  son arbitrarias, podemos escoger  $C_i = \xi_i$  donde las  $\xi_i$  son valores de la variable en los puntos discretizados del dominio, por lo que la ec. (2.13) se convierte

$$\hat{\xi} = \xi = \sum_{i=1}^n \xi_i N_i \quad (2.23)$$

Utilizando esta aproximación en el proceso anterior llegamos a

$$\int_{\Omega} \epsilon N_i d\Omega = \int_{\Omega} \left[ A \left( \sum_{j=1}^n \xi_j N_j \right) + f \right] N_i d\Omega = 0 \quad (2.24)$$

Al resolver este sistema de ecuaciones, se obtiene directamente la solución aproximada, sin necesidad de calcular primero las constantes y luego sustituirlas para obtener el resultado.

Para ejemplificar, tomaremos la ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial y^2} + f(x, y) = 0 \quad (2.25)$$

Si aproximamos la solución por medio de (2.23), el residuo está definido por

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + f(x, y) = \epsilon \quad (2.26)$$

Efectuando el producto interno entre el residuo y las funciones de base e igualando a cero, nos queda una integral de la forma

$$\int_{\Omega} \epsilon N_i dx dy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + f(x, y) \right) N_i dx dy = 0 \quad (2.27)$$

Utilizando el teorema de Green, se tiene



$$-\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} - f(x,y)N_i \right) dx dy + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} N_i dx \right) = 0$$

(2.28)

donde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$ . Sustituyendo (2.23) en (2.28) y reordenando

$$\xi_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \xi}{\partial y} N_i dx \right) + \int_{\Omega} f(x,y)N_i dx dy$$

(2.29)

Una cualidad muy importante del método de elementos finitos, se puede observar en (2.29). En la forma original de la ecuación de Poisson (2.25) y generalmente cualquier ecuación diferencial, no es evidente como introducir las condiciones de frontera, tanto de Dirichlet como de Neumann. Sin embargo en (2.29) podemos aplicar fácilmente las condiciones de frontera de Dirichlet, en la integral de la izquierda, y las condiciones de frontera de Neumann, en la primera integral de la derecha. Esta separación de las condiciones de frontera de una y otra clase, es debido a la integración por partes que se realiza durante el proceso.

Hay que hacer notar, que para todos los problemas de ingeniería para los cuales existe una funcional, la integral de Galerkin (2.22) da un resultado idéntico al que se obtendría con el método de Rayleigh-Ritz, además para los problemas en los que no existe una funcional, el método de Galerkin siempre es aplicable.

## CAPITULO III

### CONDUCCION DE CALOR

#### 3.1 GENERAL

Una de las grandes preocupaciones que existen al utilizar un método numérico, es la precisión que se obtendrá al usarlo, ya que hay una diversidad de factores que pueden alterar el resultado.

En el caso del método de elementos finitos, en principio existe un error, al hacer la aproximación de la función, por una sumatoria de funciones evaluados en determinados puntos, esto es, al hacer la aproximación de la función en un espacio de dimensión infinita a otro de dimensión finita. Varios autores han calculado el error que se obtiene en diferentes problemas, al aplicar el método de elementos finitos, entre ellos están Oden and Reddy (1976), sin embargo utilizan un análisis matemático muy complicado, para obtener únicamente una estimación.

Al error anterior hay que agregarle el que se tiene al utilizar otros métodos numéricos, como son: integración numérica, derivación numérica, solución de sistemas de ecuaciones, métodos iterativos para ecuaciones no lineales, etc., si a esto le agregamos la precisión de la computadora al efectuar las operaciones, resultaría muy difícil efectuar un análisis exacto, del error total obtenido. Por otra parte, al dividir la región en estudio en diferentes elementos, una buena distribución de ellos puede aumentar la precisión del resultado, en cambio, una mala distribución de éstos, puede incluso conducir a resultados localmente muy erróneos además, teóricamente, entre más elementos se utilicen, mayor es la exactitud, pero más costosa es la solución, por lo que es muy difícil precisar cual es el término medio para obtener una solución suficientemente precisa y a la vez la más económica. Se ha llegado incluso a considerar que es un arte el

efectuar la división del dominio en diferentes elementos.

Debido a todo lo anterior, surgió la necesidad de efectuar una comparación, para observar como se comporta el método; es por ello que en este capítulo se resuelven dos problemas de solución analítica conocida por el método de elementos finitos de Galerkin, con lo cual podemos comparar los resultados, además que se aprovechan para dar ciertas normas muy sencillas, pero muy objetivas, en el uso del método.

### 3.2 PROBLEMA BIDIMENSIONAL EN ESTADO PERMANENTE

El primer problema que se resolverá será el de una placa en dos dimensiones, con transferencia de calor por conducción, en estado permanente, con lo cual se obtendrá la distribución de las temperaturas en toda la superficie. Para ciertas condiciones de frontera, es posible encontrar una solución analítica de este problema y es por ello por lo que se escogió.

#### 3.2.1 Planteamiento de las Ecuaciones y Solución Exacta

La ecuación que define la conducción de calor en dos dimensiones y en estado permanente es (Holman, 1972)

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{y}^2} = 0 \quad (3.1)$$

que es la ecuación de Laplace bidimensional donde  $\hat{\theta}$  es la temperatura y  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  son las coordenadas cartesianas.

se definen las siguientes variables adimensionales

$$\tilde{\theta} = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0}; \quad x = \frac{\hat{x}}{L}; \quad y = \frac{\hat{y}}{L} \quad (3.2)$$

donde  $\theta_0$  y  $L$  son la temperatura y longitud de referencia respectivamente. Utilizando (3.2) en (3.1) tenemos

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} = 0 \quad (3.3)$$

Si consideramos como ejemplo la placa rectangular mostrada en la Fig. 3.1, tres lados de la placa se mantienen a una temperatura constante  $\theta_1$  y el lado superior tiene impuesta una distribución de temperaturas senoidal.

Este problema se puede resolver analíticamente por el método de separación de variables. Utilizando las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} \tilde{\theta} &= \theta_1 & \text{en } x=0 \\ \tilde{\theta} &= \theta_1 & \text{en } y=0 \\ \tilde{\theta} &= \theta_1 & \text{en } x=a \\ \tilde{\theta} &= \theta_m \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \theta_1 & \text{en } y=b \end{aligned} \quad (3.4)$$

y resolviendo la ec. (3.3) usando (3.4) llegamos a

$$\tilde{\theta} = \theta_m \frac{\operatorname{senh} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{senh} \frac{\pi b}{a}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \theta_1 \quad (3.5)$$

La ec. (3.5) es la solución analítica del ejemplo propuesto.

### 3.2.2 Formulación de Elementos Finitos

La temperatura  $\tilde{\theta}$  la podemos aproximar en la forma de elementos finitos como

$$\tilde{\theta} \approx \theta = \sum_{i=1}^n N_i \theta_i \quad (3.6)$$

donde  $n$  es el número total de nodos en un elemento,  $N_i$  son las funciones de interpolación o funciones de base de un elemento

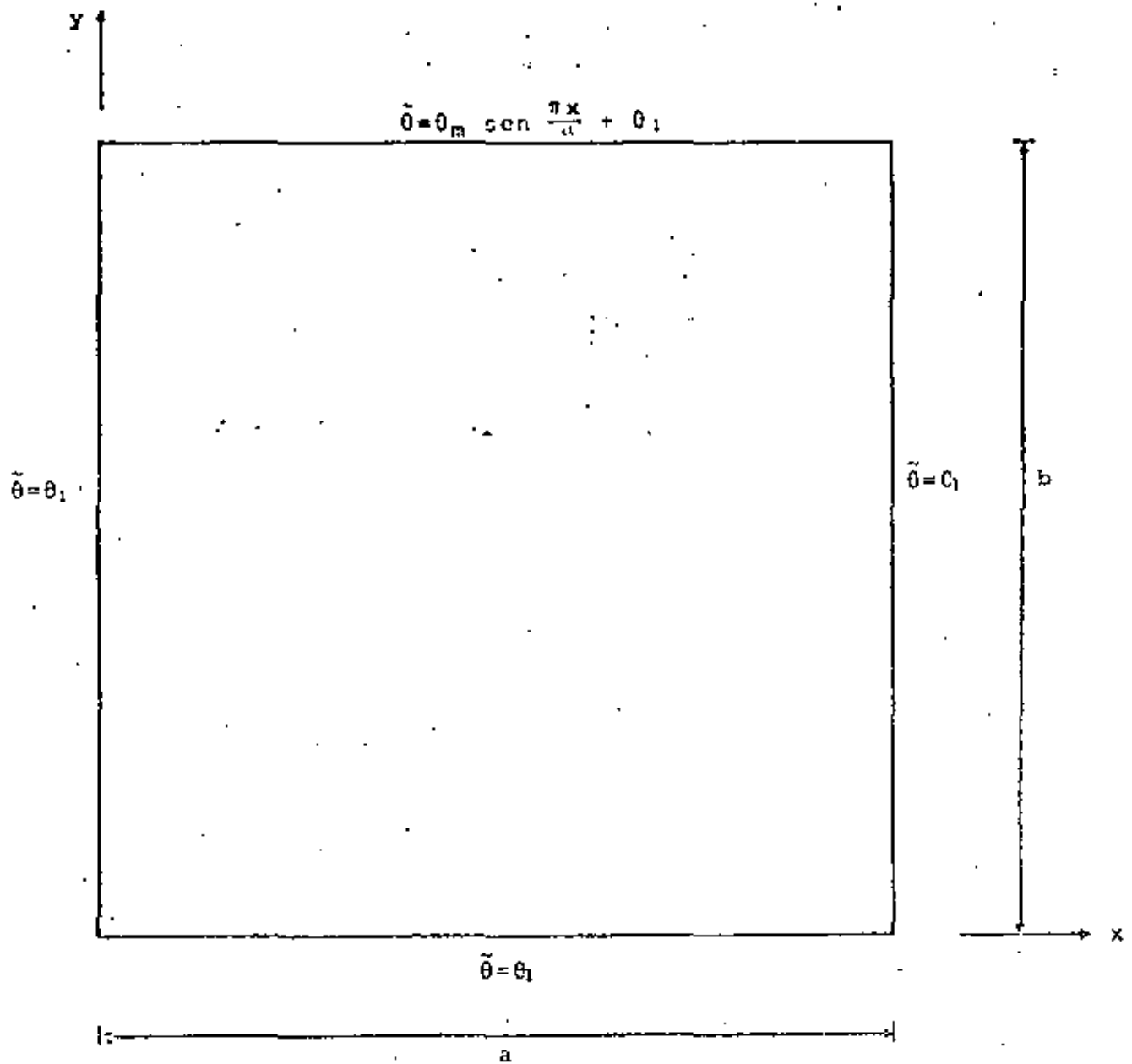


Fig 3.1. Placa rectangular con transferencia de calor por conducción y sus condiciones de frontera

y  $\theta_i$  son los valores de la temperatura en cada nodo del elemento.

Ya que la función  $\theta$  es una aproximación de la función  $\tilde{\theta}$ , al sustituirla en la ec. (3.3) se obtendrá un residuo o error. Entonces tenemos

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = c \quad (3.7)$$

donde  $c$  es el residuo. Considerando la proyección ortogonal del residuo sobre las funciones de base e igualando a cero, que es lo que indica el método de Galerkin se obtiene

$$(c, N_i) \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) N_i \, dx dy = 0 \quad (3.8)$$

Si a la ec. (3.8) le aplicamos el teorema de Green llegamos a

$$-\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} N_i \, dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i \, dx \right) = 0 \quad (3.9)$$

Sustituyendo (3.6) en (3.9) y reordenando

$$\theta_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} N_i \, dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i \, dx \right) \quad (3.10)$$

Podemos usar una notación simplificada con lo que escribimos

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \theta_j = q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.11)$$

A es llamada matriz de coeficientes de temperaturas y  $q$  es el vector de fuentes de calor y son

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.12)$$

$$q_i = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i dx \right) \quad (3.13)$$

Hay que hacer notar que debido a la forma de la integral (3.12) la matriz A es simétrica.

Como la formulación que se hizo fué únicamente para un elemento, se deben de juntar las contribuciones de todos los elementos, para obtener el campo de temperaturas en toda la placa. Para lograr esto, se efectúa un ensamble de todas las ecuaciones, de tal manera, que al final se obtenga un sistema de ecuaciones que contenga todos los nodos de la placa. El sistema global de ecuaciones a resolver será

$$\sum_{j=1}^m A_{ij}^* \theta_j^* = q_i^* \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3.14)$$

donde  $A^*$  es la matriz global de coeficientes,  $\theta^*$  el vector global de temperaturas,  $q^*$  el vector global de flujo de calor y  $m$  el número total de nodos.

La forma en que se efectúa el ensamble se explica detalladamente en Cook (1974).

La ec. (3.14) es un sistema algebraico de ecuaciones lineales simétrico y bandedo, que se puede resolver por cualquiera de

los métodos conocidos, como pueden ser Gauss-Jordan, Gauss-Seidel, etc. o algún otro que aproveche las características de la matriz  $A^*$  como es el Gauss-Crout modificado para matrices bandedas, que es el que se utiliza en el programa de computadora presentado.

Es importante observar que la matriz  $A^*$  es singular; sin embargo, al introducir las condiciones de frontera tanto de Neumann como de Dirichlet en la ec. (3.4), se quita la singularidad, pudiéndose resolver el sistema de ecuaciones resultante.

### 3.2.3 Ejemplo Numérico

Con el fin de hacer más objetivo cual es el procedimiento que se sigue en elementos finitos, en este inciso se resuelve un problema numérico paso por paso. Este consiste en calcular la temperatura en una placa bidimensional con transferencia de calor por conducción, en estado permanente. Los parámetros que se usan en la solución numérica, son los siguientes

$$\theta_1 = 100 \text{ unidades de temperatura}$$

$$\theta_m = 100 \text{ unidades de temperatura}$$

$$a = 12 \text{ unidades de longitud}$$

$$b = 12 \text{ unidades de longitud}$$

Únicamente van a existir condiciones de frontera del tipo Dirichlet y son las que se indican en la Fig. 3.1. Por lo tanto, la ecuación de elementos finitos para un elemento es

$$\sum_{j=1}^n \theta_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (3.15)$$



o en notación compacta

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \theta_j = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (3.16)$$

Para la solución de elementos finitos, se utilizarán elementos triangulares, como muestra la Fig. 3.2, con funciones de interpolación lineal, y son

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y \quad (3.17)$$

donde  $i=1,2,3$  debido a que son tres nodos, una función por cada uno y las constantes están dadas por

$$\begin{aligned} a_1 &= (x_2 y_3 - x_3 y_2) / 2\Delta ; b_1 = (y_2 - y_3) / 2\Delta ; c_1 = (x_3 - x_2) / 2\Delta \\ a_2 &= (x_3 y_1 - x_1 y_3) / 2\Delta ; b_2 = (y_3 - y_1) / 2\Delta ; c_2 = (x_1 - x_3) / 2\Delta \\ a_3 &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) / 2\Delta ; b_3 = (y_1 - y_2) / 2\Delta ; c_3 = (x_2 - x_1) / 2\Delta \end{aligned} \quad (3.18)$$

aquí  $\Delta$  es el área del triángulo y se puede obtener por

$$\Delta = \frac{1}{2} (x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_1 - x_1 y_3 + x_2 y_3 - x_3 y_2) \quad (3.19)$$

Se observa que la numeración local en el triángulo, está hecha en contra de las manecillas del reloj, para que  $\Delta$  resulte positiva. La obtención de las funciones de interpolación se encuentra en Segerlind. (1976).

Para obtener la matriz  $A$  se sustituyen las funciones de interpolación (3.17), en la integral de la cc. (3.10). Por ejemplo para el término  $A_{11}$

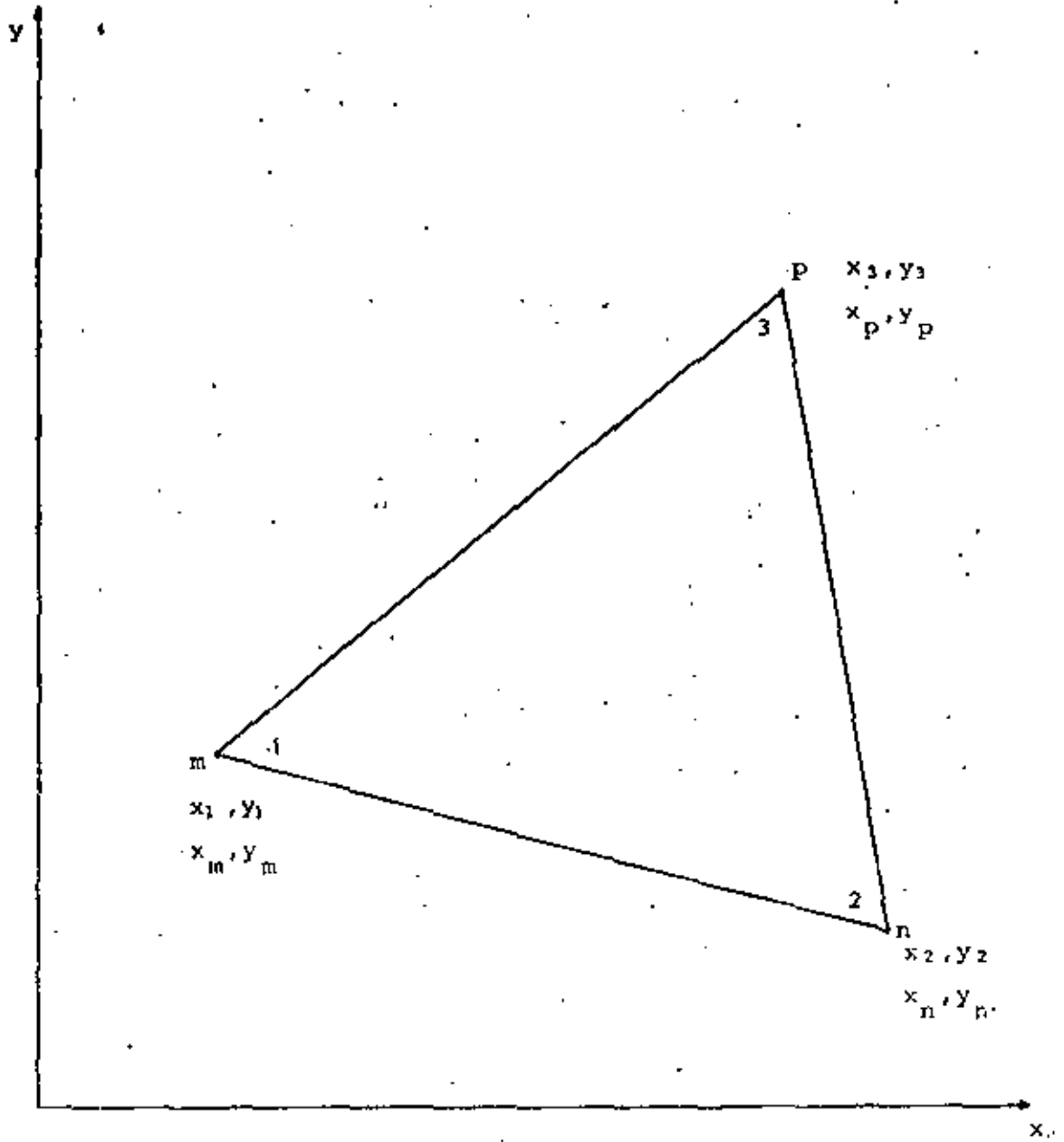


Fig 3.2. Elemento triangular con la numeración local (1,2,3) y la numeración global (n,m,p) y sus respectivas coordenadas cartesianas.

$$A_{11} = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \right]^2 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (a_1 + b_1 x + c_1 y) \right]^2 dx dy$$

$$= \Delta (b_1^2 + c_1^2) \quad (3.20)$$

Procediendo de la misma manera para los demás coeficientes, llegamos a

$$A = \Delta \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde las constantes son las mismas de la ec. (3.18).

El siguiente paso es evaluar las matrices para cada elemento, para lo cual es necesario numerar, de acuerdo a la malla que se utilice, todos los nodos y los elementos, procurando siempre que la diferencia entre los números asignados globalmente, de los nodos de cada elemento, sea mínima, para que el ancho de banda de la matriz global  $A^*$  también sea el mínimo posible. Esto es muy importante, porque en el momento de almacenar la matriz en la memoria en la computadora, se puede hacer en forma bandeda y mientras esta banda sea menor, la memoria que se utilice también es menor, ya que el resto de los coeficientes son ceros y no necesitan almacenaje.

Tomando como ejemplo una discretización de pocos elementos, como muestra la Fig. 3.3, que es una malla de 7 nodos globales con 7 elementos, se puede observar que con la numeración global de los nodos que se indica, la máxima diferencia entre los nodos de cualquiera de cada uno de los elementos es 3, a este factor se le llama esparcidad y para la malla mostrada es

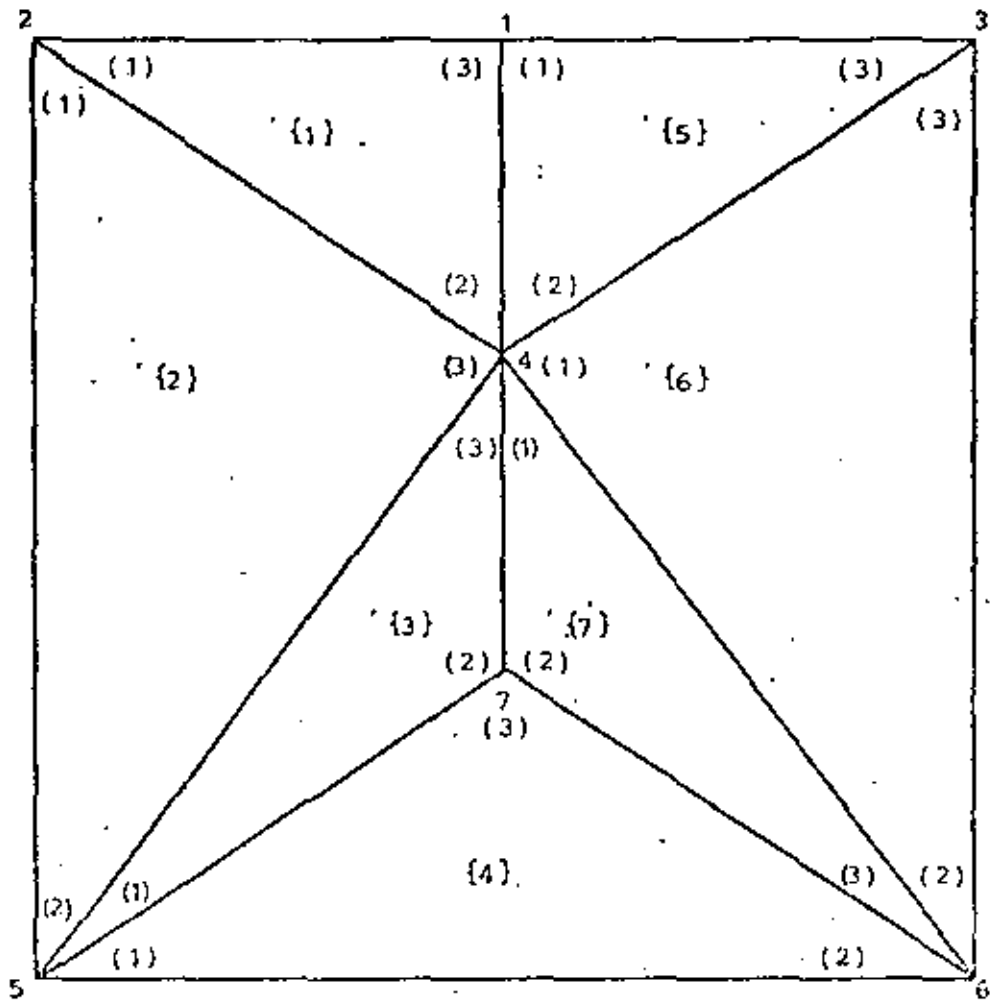


Fig 3.3. Discretización cruda de la placa, mostrando la numeración global, la numeración local y la numeración de los elementos.

el mínimo que se puede obtener. El ancho de la banda de la matriz global, se puede obtener sumándole uno a la esparcidad; para nuestro caso el ancho de la banda es 4, ésto es, la matriz tendrá 4 diagonales con valores numéricos no nulos, incluyendo la diagonal principal, ya sea hacia arriba o hacia abajo de ésta última.

Para evaluar las matrices de cada elemento, primero se procede a formar una tabla que relacione las coordenadas, con los nodos globales a las que corresponden, como sigue.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7
x	6	0	12	6	0	12	6
y	12	12	12	8	0	0	4

En seguida se forma una tabla que relacione los nodos globales, con los nodos locales de cada elemento.

Elemento Nodos Locales	No	Nodos Globales						
		1	2	3	4	5	6	7
1		2	2	5	5	1	4	4
2		4	5	7	6	4	6	7
3		1	4	4	7	3	3	6

Con las dos tablas anteriores, podemos localizar fácilmente las coordenadas para cada nodo local, las cuales se utilizan para obtener las b's y las c's de la matriz A en la ec. (3.2) y al mismo tiempo el área, así por ejemplo para el elemento 1

$$x_1=0 ; \quad x_2=6 \quad ; \quad x_3=6$$

$$y_1=12; \quad y_2=8 \quad ; \quad y_3=12$$

aquí los subíndices indican los nodos locales. Con estas coordenadas, podemos evaluar la matriz para el elemento 1 como sigue

$$A^{(1)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (2) & (4) & (1) \\ \begin{array}{l} (2) \\ (4) \\ (1) \end{array} & \begin{bmatrix} 24 & 0 & -24 \\ 0 & 54 & -54 \\ -24 & -54 & 78 \end{bmatrix} \end{array}$$

se observa que como la matriz es simétrica, únicamente se tiene que calcular 6 términos. Los números entre paréntesis a los lados de la matriz, indican los nodos globales a los que pertenecen los renglones y las columnas. Similarmente para los otros elementos, tenemos

$$A^{(2)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (2) & (5) & (4) \\ \begin{array}{l} (2) \\ (5) \\ (4) \end{array} & \begin{bmatrix} 45 & -2 & -48 \\ -2 & 26 & -24 \\ -48 & -24 & 72 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^{(3)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (5) & (7) & (4) \\ \begin{array}{l} (5) \\ (7) \\ (4) \end{array} & \begin{bmatrix} 24 & -48 & 24 \\ -48 & 150 & -102 \\ 24 & -102 & 78 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^{(4)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (5) & (6) & (7) \\ \begin{array}{l} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array} & \begin{bmatrix} 39 & 15 & -54 \\ 15 & 39 & -54 \\ -54 & -54 & 108 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^{(5)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (1) & (4) & (3) \\ \begin{array}{l} (1) \\ (4) \\ (3) \end{array} & \begin{bmatrix} 78 & -54 & -24 \\ -54 & 54 & 0 \\ -24 & 0 & 24 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^{(6)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (4) & (6) & (7) \\ \begin{array}{l} (4) \\ (6) \\ (7) \end{array} & \begin{bmatrix} 72 & -24 & -48 \\ -24 & -2 & -2 \\ -48 & -2 & 45 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$A^{(7)} = \frac{1}{72} \begin{array}{ccc} & (4) & (7) & (6) \\ \begin{array}{l} (4) \\ (7) \\ (6) \end{array} & \begin{bmatrix} 78 & -102 & 24 \\ -102 & 150 & -48 \\ 24 & -48 & 24 \end{bmatrix} \end{array}$$

En seguida se ensamblan estas matrices en la matriz global, para lo cual se suman los coeficientes de cada matriz del elemento, que correspondan al mismo lugar en matriz global, utilizando los números que están entre paréntesis: así por ejemplo, para el coeficiente  $A_{11}^*$  de la matriz global, hay contribuciones tanto en la matriz del elemento 1 como en la matriz del elemento 5 y nos queda

$$A_{11}^* = \frac{1}{72}(78+78) = \frac{1}{72}156$$

siguiendo un procedimiento similar para los demás coeficientes, tenemos

$$\frac{1}{72} \begin{bmatrix} 156 & -24 & -24 & -108 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 69 & 0 & -48 & -2 & 0 & 0 \\ -24 & 0 & 69 & -48 & 0 & -2 & 0 \\ -108 & -48 & -48 & 408 & 0 & 0 & -204 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 89 & 15 & -102 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 15 & 89 & -102 \\ 0 & 0 & 0 & -204 & -102 & -102 & 408 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3.22)

A continuación se introducen las condiciones de frontera. Como se observa en la fig. 3.3, hay 5 nodos en la frontera y 2 en el interior, que son nuestras incógnitas. Los valores de los nodos en la frontera son

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 200 & \theta_5 &= 100 \\ \theta_2 &= 100 & \theta_6 &= 100 \\ \theta_3 &= 100 \end{aligned}$$

Estos valores se sustituyen en la ec. (3.22), multiplicando las columnas correspondientes y pasándolas del otro lado con signo negativo, ya que los renglones de los nodos conocidos no nos interesan, podemos sustituirlos por un 1 en el coeficiente correspondiente de la diagonal principal y los demás términos del renglón ceros y en el lado derecho el valor del nodo. Haciendo estas operaciones tenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.66 & 0 & 0 & -2.83 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.83 & 0 & 0 & 5.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 100 \\ 100 \\ 433.33 \\ 100 \\ 100 \\ 283.33 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

En la ec. (3.23) podemos descartar los renglones y columnas 1, 2, 3, 5, 6 quedándonos

$$\begin{bmatrix} 5.66 & -2.83 \\ -2.83 & 5.66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_4 \\ \theta_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 433.33 \\ 283.33 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, llegamos a

$$\begin{aligned} \theta_4 &= 135.2491 \\ \theta_7 &= 117.6471 \end{aligned}$$

La solución exacta usando la ec. (3.5) es

$$\begin{aligned} \theta_4 &= 134.6244 \\ \theta_7 &= 110.6182 \end{aligned}$$



El error en el nodo 4 es de 0.5% y en el nodo 2 es de 6.2%. El hecho de que exista tanta diferencia entre el error de uno y otro nodo, se puede explicar refiriéndose a la Fig 3.3, el nodo 4 pertenece a 6 de los 7 elementos que forman la malla, en cambio el nodo 7 pertenece únicamente a 3 elementos, por lo que tiene menos elementos que contribuyan a su solución. De aquí se concluye inmediatamente, que aumentando el número de elementos, se aumenta la precisión.

El procedimiento anterior se puede implementar en un programa de computadora, ya que para una malla más fina, sería prácticamente imposible efectuarlo a mano y además, se pueden aprovechar las características de simetría y bandedado de la matriz global.

Existen otras formas de efectuar el ensamble, que para ciertos problemas son más eficientes, sin embargo, la presentada es la más sencilla y bastante práctica.

### 3.2.4 Solución de Elementos Finitos Contra Solución Exacta

Para obtener los resultados que se muestran en este inciso, se realizó un programa de computadora, el cual se muestra en el anexo, que sigue casi exactamente los mismos pasos del ejemplo 3.3.3. y que tiene además, una subrutina que calcula el error y otra que calcula líneas de temperatura constante.

El error que se utiliza, es el error raíz medio cuadrático, definido por

$$e = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (0_i - \tilde{0}_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

donde  $0_i$  es la solución de elementos finitos y  $\tilde{0}$  es la solución exacta y además se toma únicamente por los nodos interiores, por lo que  $n$  es el número de nodos que no son de frontera.

En la primera prueba que se realiza, se usa una malla como la que se muestra en la Fig. 3.4, con 9 nodos, 8 elementos y un solo nodo incógnito y la variación de temperaturas senoidal en la parte de arriba. Los parámetros que se utilizan son los mismos del ejemplo numérico.

Si se desplazan los nodos a, b y c la misma distancia, a lo largo del eje y, manteniendo constante su distancia x, se van a obtener diferentes temperaturas del nodo c, una para cada posición.

Con esto se intenta ver cual es el comportamiento del método, cuando para una malla con el mismo número de elementos, éstos se hacen más grandes o más pequeños en determinada región, en este caso únicamente se varían en sentido vertical, porque arriba es donde está la mayor variación de temperaturas.

La Fig. 3.5 nos muestra una gráfica posición de la línea  $\overline{acb}$  contra temperatura, en la que se representan las curvas de los resultados obtenidos por elementos finitos y la solución exacta. Se observa que a medida que se van haciendo más pequeños los elementos en la parte superior, se va acercando la solución de elementos finitos a la solución exacta, hay un momento en que son iguales y después se aleja otra vez la curva, a pesar de que son todavía más pequeños los elementos.

En la Fig. 3.6 se puede ver más claro este proceso: aquí se grafica posición de la línea  $\overline{acb}$  contra el error raíz medio cuadrático, a medida que se van haciendo más pequeños los elementos de la parte superior, el error disminuye, hasta que incluso es cero y después vuelve a aumentar.

De estas dos gráficas podemos concluir, que se deben colocar elementos más pequeños en la zona de mayor variación y más grandes donde no exista tanta variación. El hecho que exista un punto en el que el error vuelva a aumentar, es debido a que para

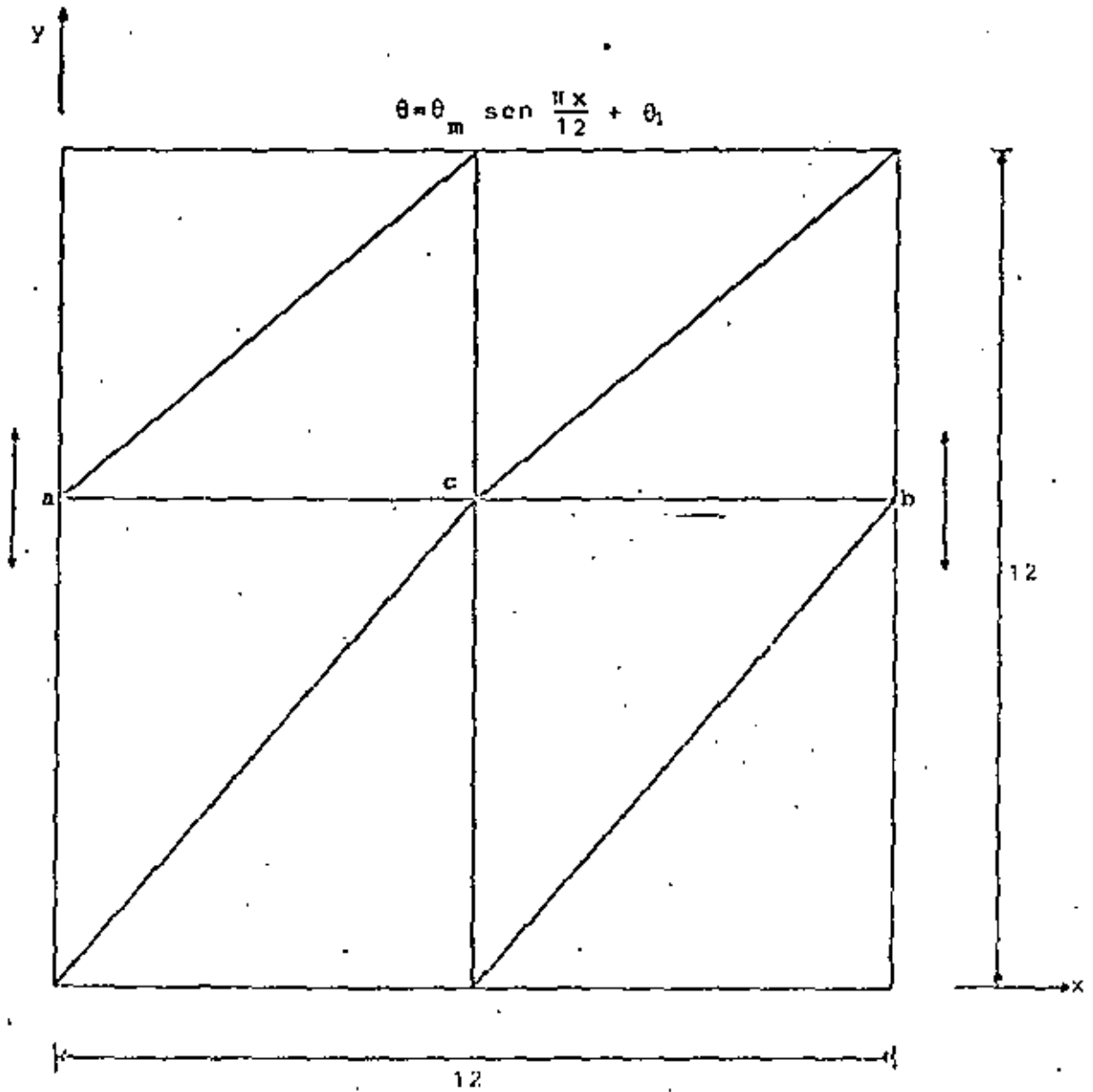


Fig 3.4. Malla con la barra  $\overline{acb}$  móvil.

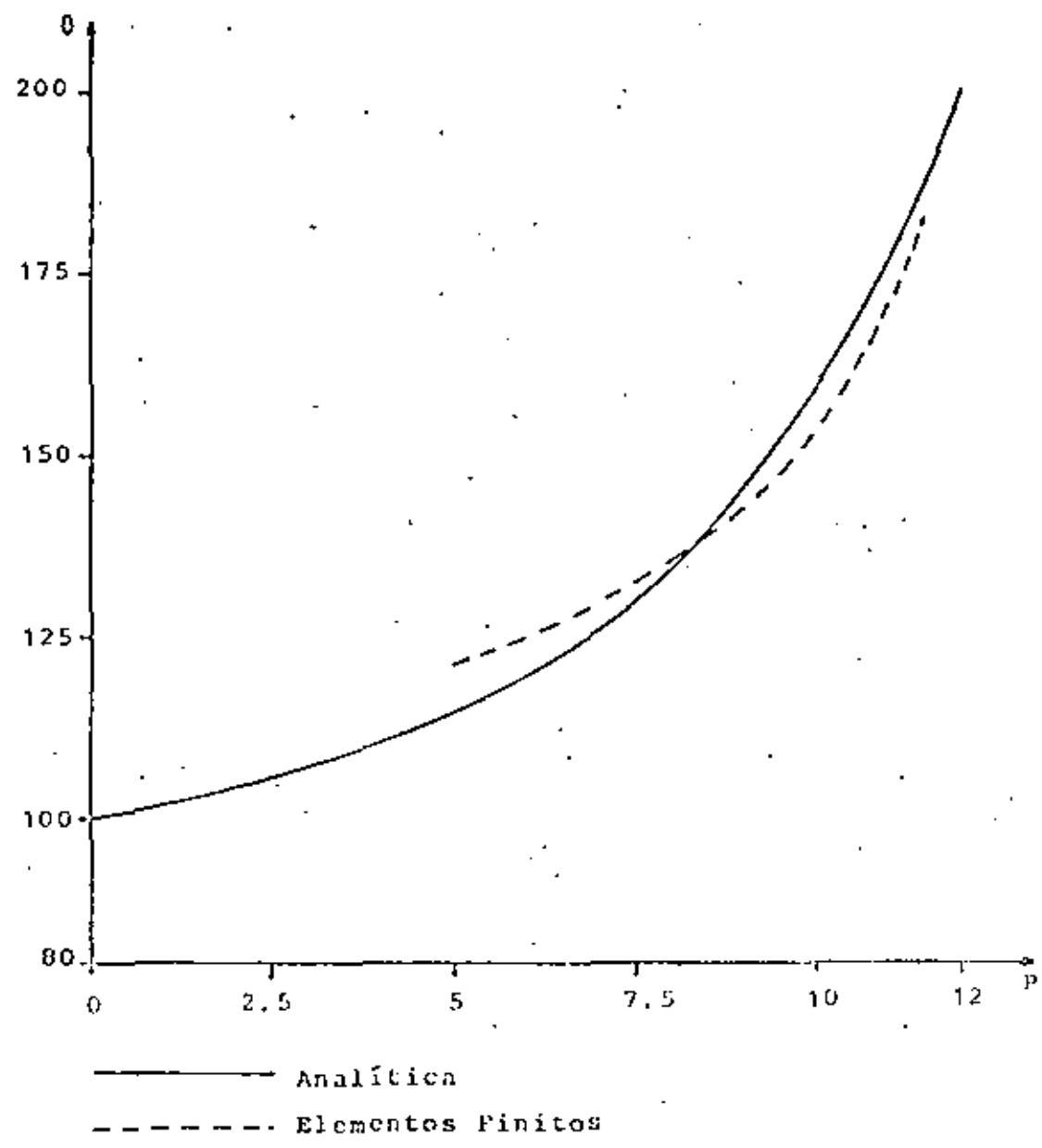


Fig 3.5 Gráfica posición contra temperatura para la solución exacta y de elementos finitos.

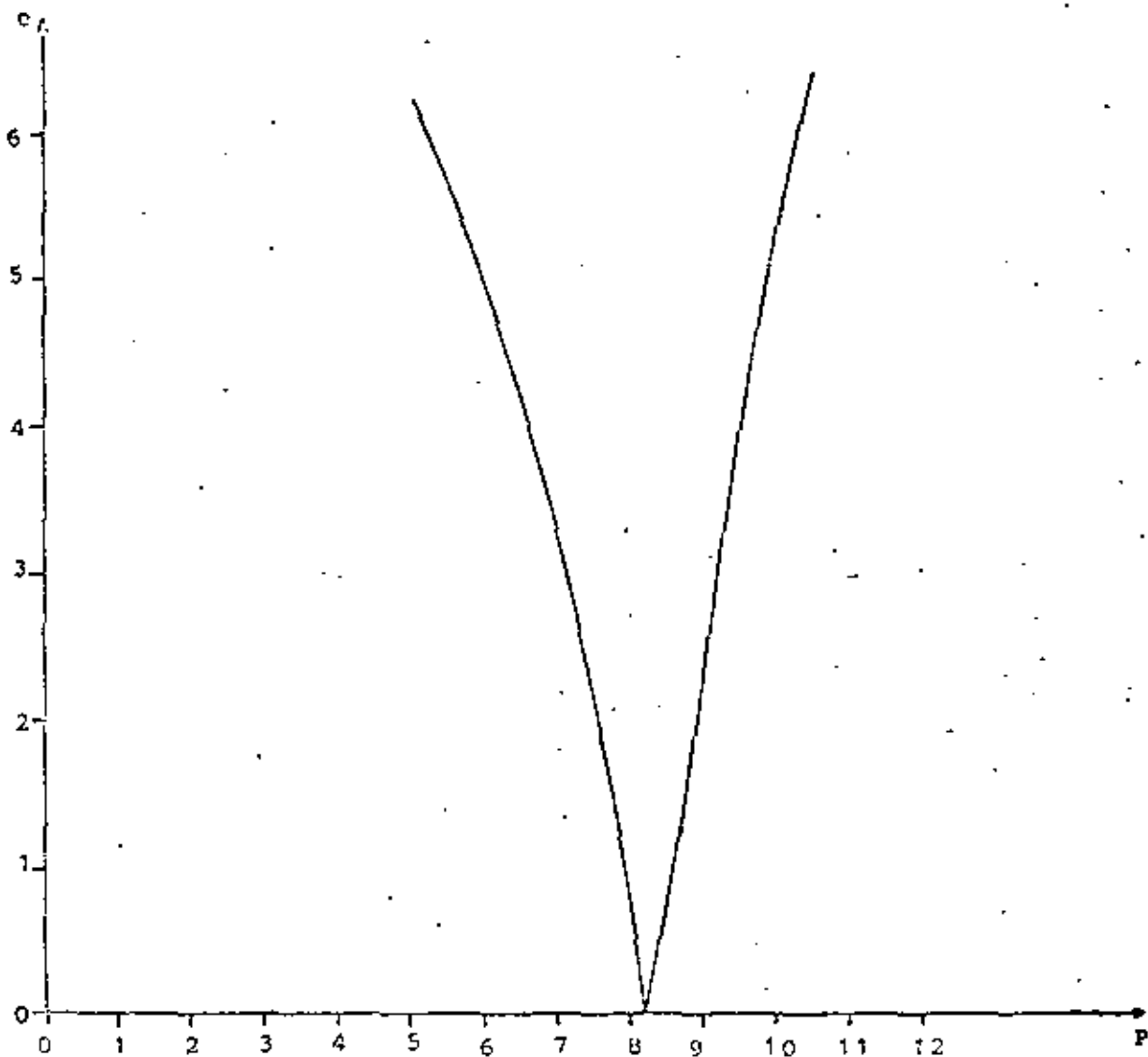


Fig 3.6. Gráfica posición contra error raíz medio cuadrático.

las posiciones de la línea muy altas, los triángulos de la parte superior son muy deformes, ésto es debido a que la base y la altura del triángulo están muy desproporcionados. De aquí se desprende que siempre hay que procurar que los triángulos tiendan a ser equiláteros. Otra razón por la que el error vuelve a aumentar para posiciones muy altas, es que los triángulos de arriba son muy pequeños en comparación de los de abajo, entonces siempre hay que tratar que los triángulos que estén contiguos, tengan una cierta relación de áreas, aunque esto último no es tan importante.

El hecho de que llegue un momento en el que el error sea cero, es debido a las peculiaridad de la malla, ya que sólo existe un solo nodo incógnito. Usualmente es muy difícil obtener una solución exacta por elementos finitos, pero en general se puede obtener una muy buena aproximación, sobre todo para problemas sencillos como éste.

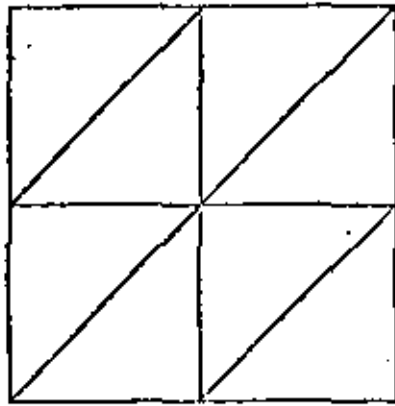
La siguiente prueba consiste en analizar el comportamiento del método, en función del número de elementos y de la posición de éstos, para lo cual primero definiremos tres tipos de mallas.

Mallas tipo  $S_a$ , las cuales tienen el mismo número de elementos, en cualquiera de los lados de la placa, como muestra la Fig. 3.7.

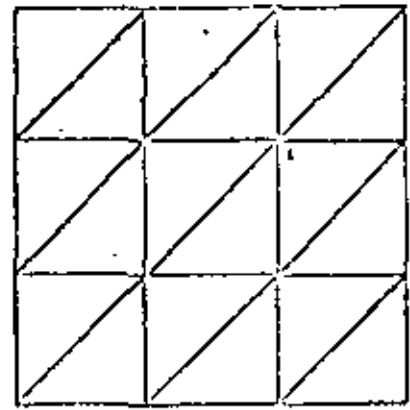
Mallas tipo  $AS_1$ , las cuales tienen más elementos arriba y abajo, que en los lados de la placa, como muestra la Fig. 3.8.

Mallas tipo  $AS_2$ , las cuales tienen más elementos a los lados que arriba y abajo de la placa, como muestra la Fig. 3.9.

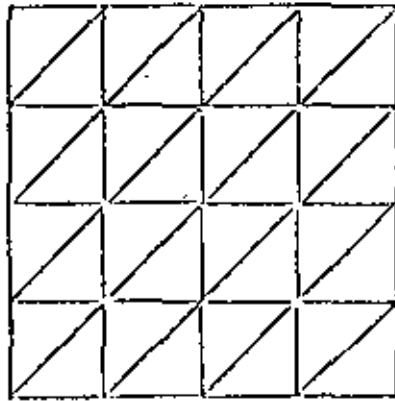
Calculando las temperaturas y el error para todas las mallas anteriores, se obtiene una gráfica como la que muestra la Fig. 3.10, en la que se dibujan las curvas de número de elementos contra error raíz medio cuadrático, para cada tipo de malla. Se observa que para pocos elementos, se obtiene menor error en



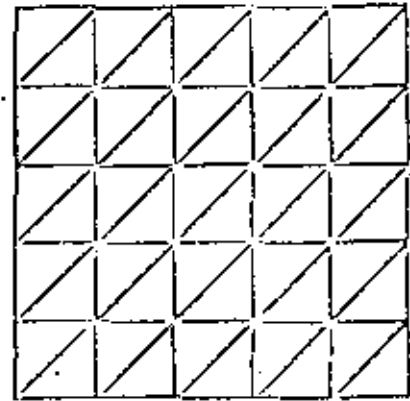
9 Nodos  
8 Elementos



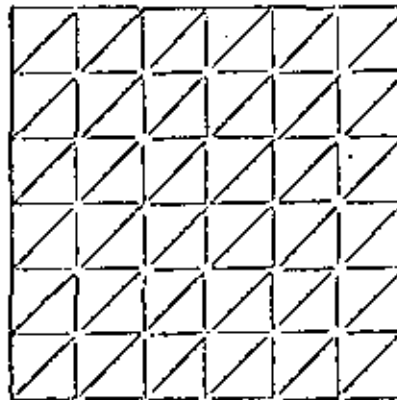
16 Nodos  
18 Elementos



25 Nodos  
32 Elementos

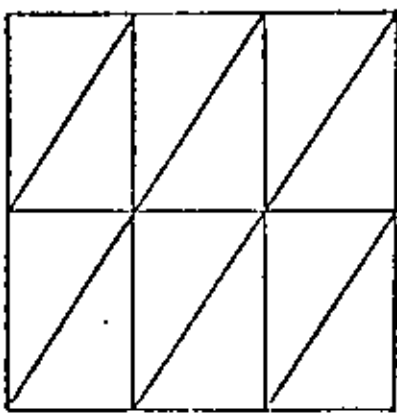


36 Nodos  
50 Elementos

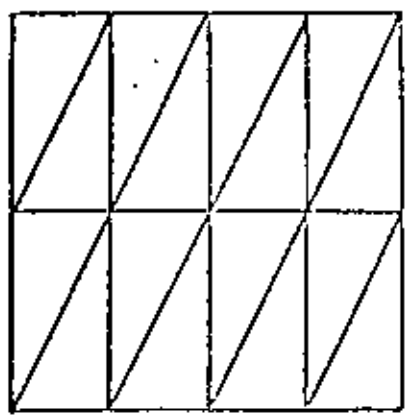


49 Nodos  
72 Elementos

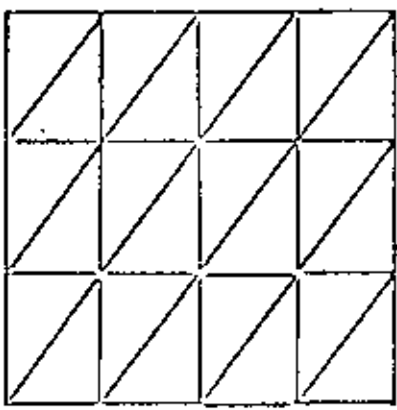
Fig 3.7. Mallas tipo  $S_2$ .



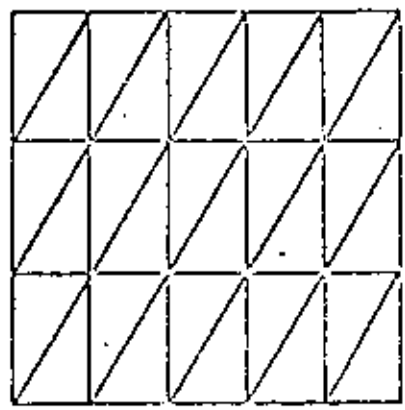
12 Nodos  
12 Elementos



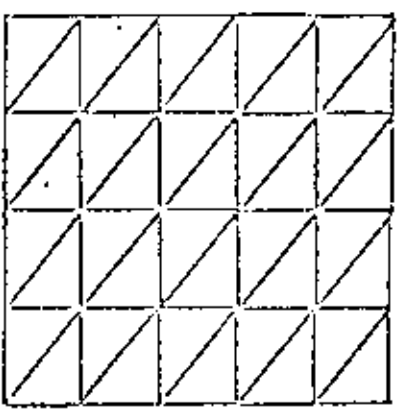
15 Nodos  
16 Elementos



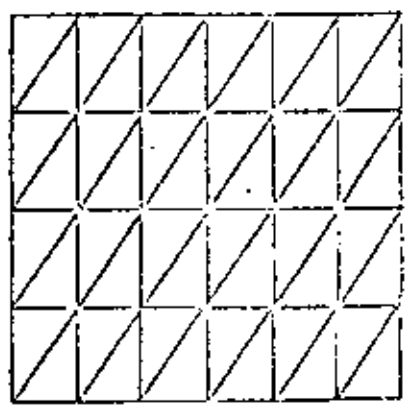
20 Nodos  
24 Elementos



24 Nodos  
30 Elementos



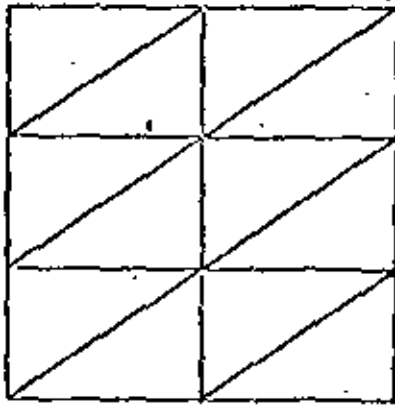
30 Nodos  
40 Elementos



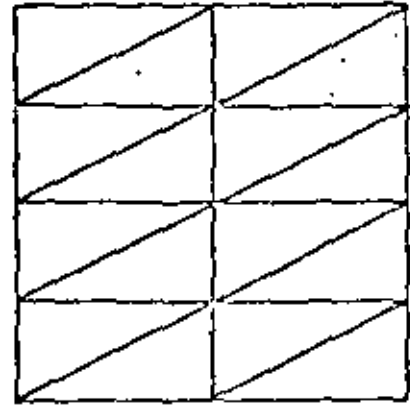
35 Nodos  
48 Elementos

Fig 3.6. Mallas tipo AS<sub>1</sub>.

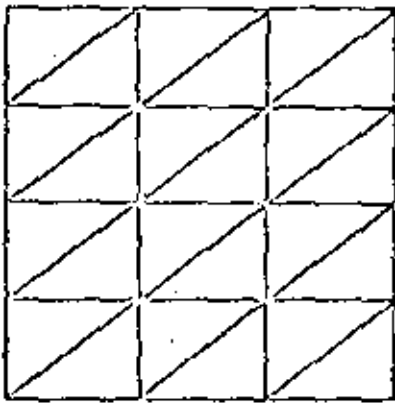




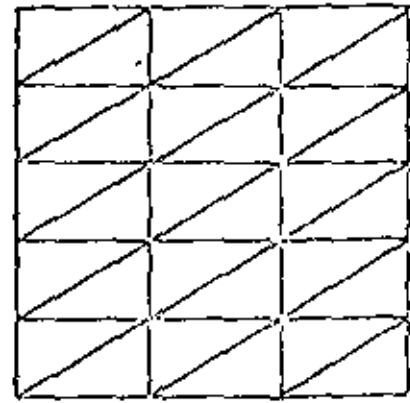
12 Nodos  
12 Elementos



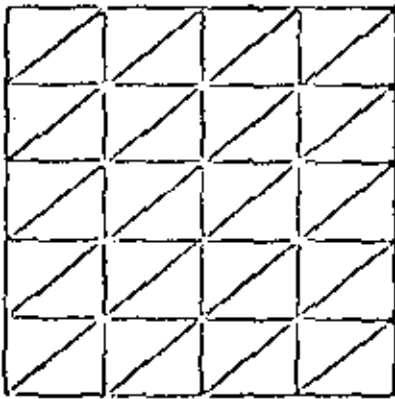
15 Nodos  
16 Elementos



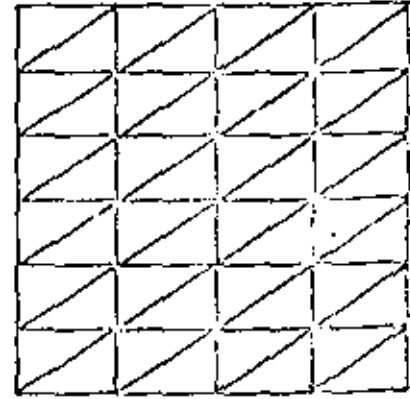
20 Nodos  
24 Elementos



24 Nodos  
30 Elementos



30 Nodos  
40 Elementos



35 Nodos  
48 Elementos

Fig 3.9. Mallas tipo AS2.

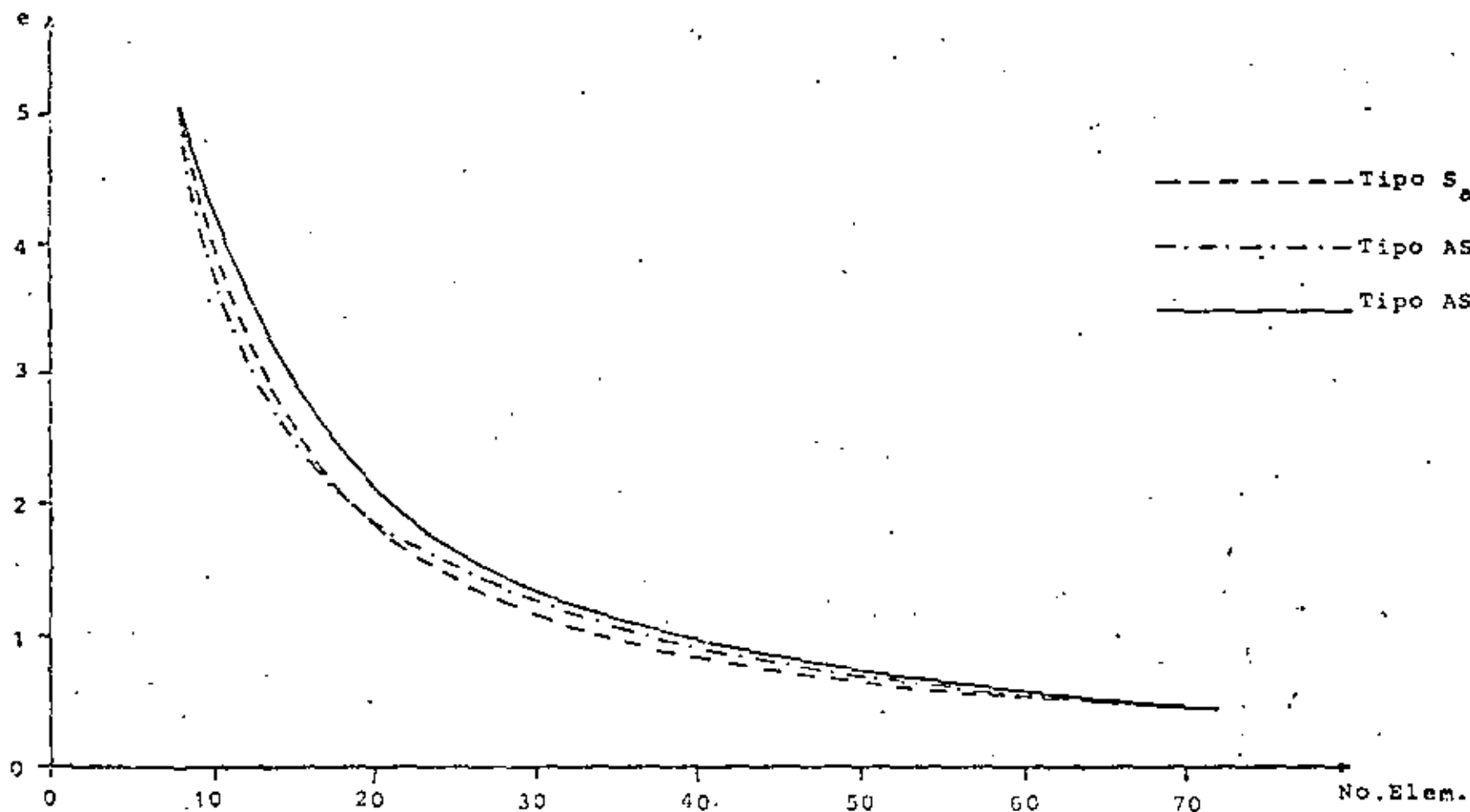


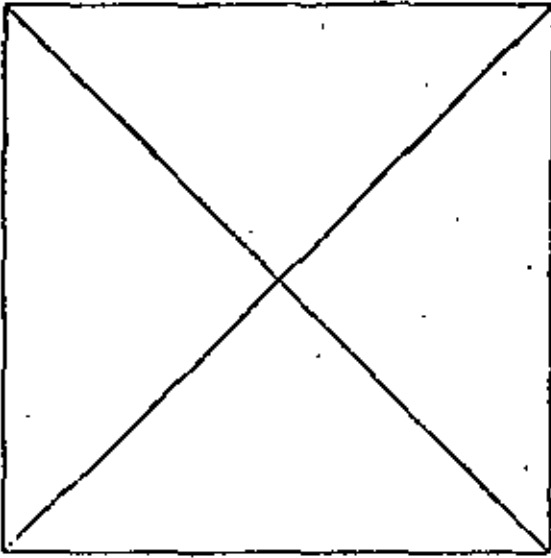
Fig 3.10. Gráfica Número de elementos contra error raíz medio cuadrático para mallas tipo  $S_a$ ,  $AS_1$  y  $AS_2$

las mallas del tipo  $AS_1$ , ésto es mallas con más elementos en la zona de variación y mayor error para mallas del tipo  $AS_2$ , que son lo contrario de las anteriores. Para más elementos se obtiene un menor error utilizando mallas del tipo  $S_a$ . Esto es debido a que los triángulos de estas mallas tienden más a ser equiláteros, que los de las mallas tipo  $AS_1$  y a la vez hay suficientes elementos en la zona de variación, para poder detectar los cambios.

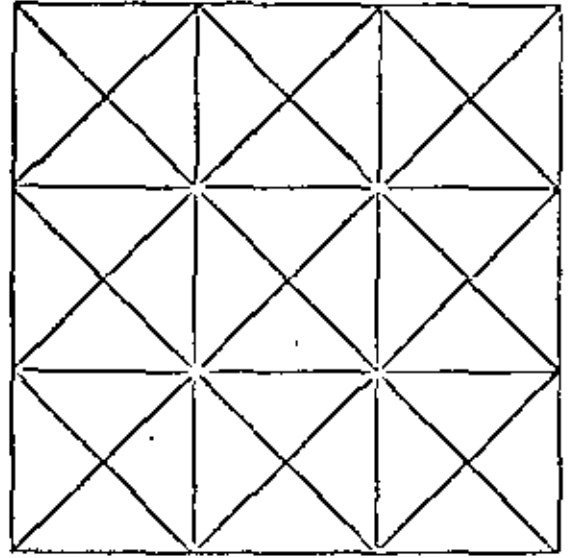
Otra vez podemos concluir, que siempre hay que tratar de poner más elementos en la zona de mayor variación y a la vez procurar que éstos tiendan a ser equiláteros. Las mallas del tipo  $AS_2$  no son recomendables.

Se puede definir otro tipo de mallas, como es la  $S_b$  que muestra la Fig. 3.11, en la que el número de elementos en todos los lados de la placa es el mismo. La curva que se obtiene al graficar número de elementos contra error raíz medio cuadrático, es idéntica a la que se obtiene con la malla tipo  $S_a$ , sin embargo, con la malla  $S_b$  es más fácil aproximar contornos redondeados. Como dato curioso, al utilizar la primera malla de la Fig. 3.11, resulta que la temperatura en toda la placa es constante e igual  $\theta_1$ , ésto es debido a que no hay ningún nodo que detecte que hay una temperatura diferente, por lo que siempre hay que poner suficientes nodos, en las fronteras donde exista variación.

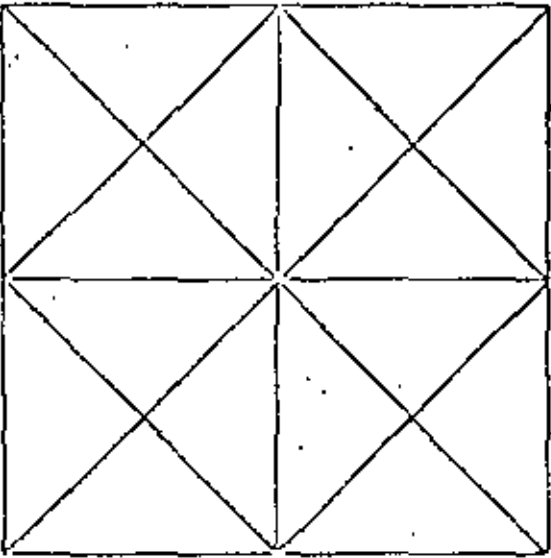
La Fig. 3.12 nos muestra una curva, número de elementos contra error raíz medio cuadrático, graficados ambos logarítmicamente para mallas del tipo  $S_a$ . Se observa que la curva se asemeja mucho a una recta, por lo que podemos decir que el error disminuye exponencialmente, a medida que aumenta el número de elementos, o en otras palabras, que el método de elementos finitos converge exponencialmente a la solución exacta, a medida que aumenta el número de elementos. Esta conclusión no se puede generalizar para todos los problemas, ya que el caso que estamos tratando es muy sencillo, debido a



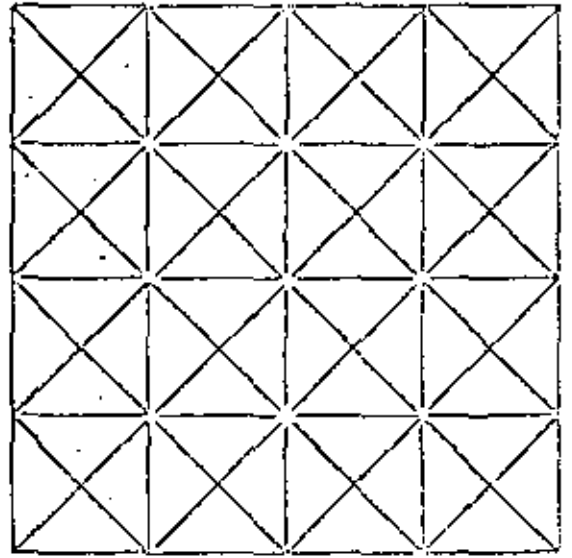
5 Nodos  
4 Elementos



25 Nodos  
36 Elementos



13 Nodos  
16 Elementos



41 Nodos  
64 Elementos

Fig 3.11 Mallas tipo  $S_b$

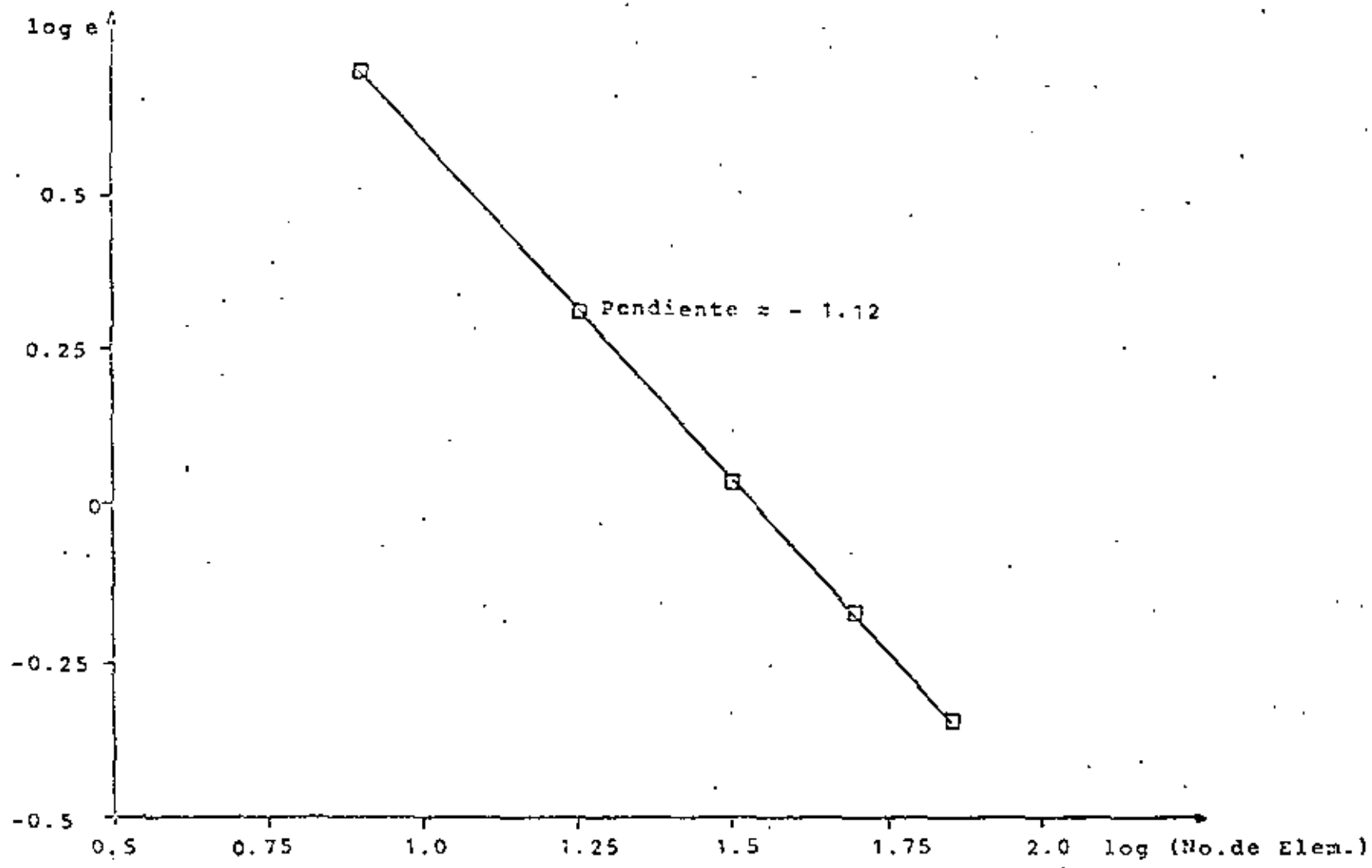


Fig 3.12. Gráfica número de elementos contra error raíz medio cuadrático para mallas de tipo  $S_n$

que es una ecuación lineal, en la que está definida la temperatura en todas las fronteras y además no existen fuentes de calor. Sin embargo, sí nos damos una muy buena idea de cual es la convergencia del método, sobre todo para problemas similares; ésto es, al principio, a medida que se aumentan los elementos, el método converge rápidamente y al final, aunque se aumente el número de elementos, no se mejora mucho la solución, por lo que hay que tratar de encontrar un justo medio, sobre todo teniendo en cuenta que a más elementos la solución es más costosa. Para lograr esto último se pueden hacer dos o tres mallas con distintos números de elementos, para darse una idea de cual es la diferencia de los resultados entre una y otra, además se puede aprovechar, si es que no se conoce, para detectar cuales son las zonas de mayor variación y colocar en ellas más elementos y más pequeños.

Los resultados anteriores, se resumen en las siguientes normas para el uso del método de elementos finitos:

- 1.- Dividir la región con una malla gruesa, para observar cuales son las zonas de mayor variación.
- 2.- Colocar más elementos y más pequeños en las zonas de gran variación.
- 3.- Dividir la región con una malla más fina y comparar los resultados con los obtenidos con la malla de aproximación, en caso de existir mucha diferencia, utilizar una malla todavía más fina y repetir el procedimiento.
- 4.- Procurar que los triángulos tiendan a ser equiláteros y evitar aquellos que sean muy deformes. Siempre es posible substituir un triángulo muy deformado por dos triángulos más parecidos a triángulos equiláteros.
- 5.- Colocar suficientes nodos en las fronteras donde exista variación.

Por último, la Fig. 3.13 muestra líneas de temperatura constante en la superficie de la placa, obtenidas con una malla del tipo  $S_2$ , que tiene 49 nodos y 72 elementos y con un error raíz medio cuadrático relativo en la solución de 0.35%.

### 3.3 PROBLEMA BIDIMENSIONAL EN ESTADO TRANSITORIO

El segundo problema que se resolverá en este capítulo, es el de una placa en dos dimensiones con transferencia de calor por conducción en estado transitorio, para obtener la distribución de temperaturas en toda la superficie, en el transcurso del tiempo. Para el mismo ejemplo del inciso anterior, se puede encontrar una solución analítica a través de series de Fourier, con la que se pueden comparar los resultados obtenidos por elementos finitos.

#### 3.3.1 Planteamiento de las Ecuaciones y Solución Exacta

La ecuación que define la conducción de calor en dos dimensiones y en estado transitorio es, Holman (1972).

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{y}^2} = \frac{\hat{\rho}c}{K} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} \quad (2.26)$$

donde  $\hat{\theta}$  es la temperatura,  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  son coordenadas cartesianas,  $\hat{\rho}$  es la densidad,  $c$  es el calor específico,  $K$  es la conductividad térmica del material y  $\hat{t}$  es el tiempo. Se tomará como constantes las propiedades del material.

Definiendo las siguientes variables adimensionales:

$$\tilde{\theta} = \frac{\hat{\theta}}{\theta_0} ; x = \frac{\hat{x}}{L} ; y = \frac{\hat{y}}{L} ; \tau = \frac{\hat{t}}{\hat{\rho}cL^2/K} \quad (3.27)$$

Aquí  $\theta_0$  y  $L$  son variables de referencia. Usando (3.27) en (3.26) se tiene

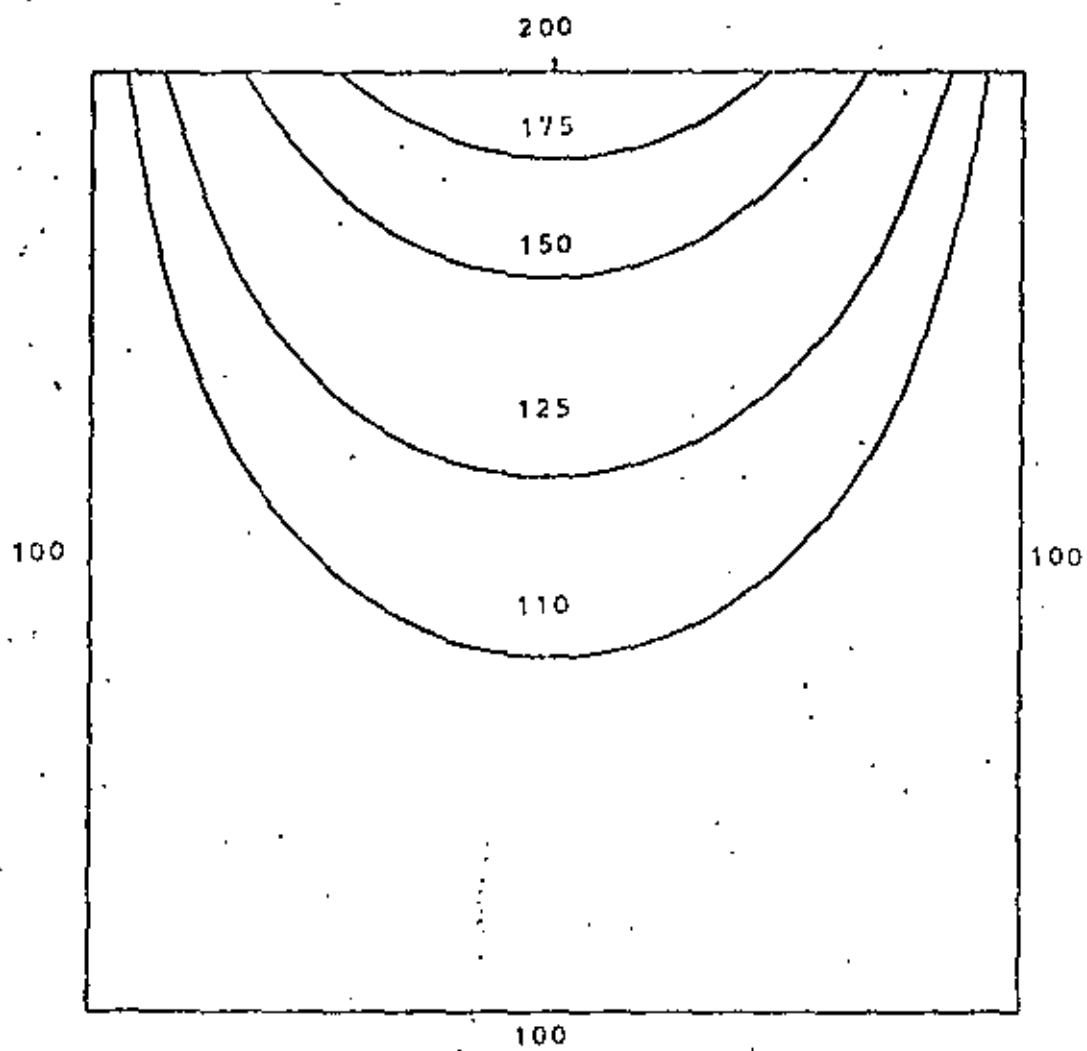


Fig 3.13. Líneas de temperatura constante



$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \tau} \quad (3.28)$$

Considerando un ejemplo similar al de la sección anterior, pero ahora en estado transitorio. Tenemos una placa rectangular, como la mostrada en la fig. 3.14, donde para tiempo  $\tau=0$  toda la placa se encuentra a una temperatura  $\tilde{\theta}=0$  y para tiempo  $\tau>0$  se cambia la temperatura del lado superior por una distribución de temperaturas senoidal. Para este problema también se puede encontrar una solución analítica como sigue.

Se supone que la solución sea de la forma

$$\tilde{\theta} = G(x, y) + H(x, y, \tau) \quad (3.29)$$

donde el primer término del lado derecho es la solución en estado permanente y el segundo término es la componente debida al estado transitorio.

La solución en estado permanente se obtiene por medio del método de separación de variables, utilizando las siguientes condiciones de frontera

$$\begin{aligned} G &= 0 && \text{en } x=0 \\ G &= 0 && \text{en } x=a \\ G &= 0 && \text{en } y=0 \\ G &= 0 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} && \text{en } y=b \end{aligned} \quad (3.30)$$

La solución del problema permanente está dada en la ec. (3.5), así que

$$G(x, y) = 0 \frac{\operatorname{senh} \frac{\pi y}{a}}{\operatorname{senh} \frac{\pi b}{a}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} \quad (3.31)$$

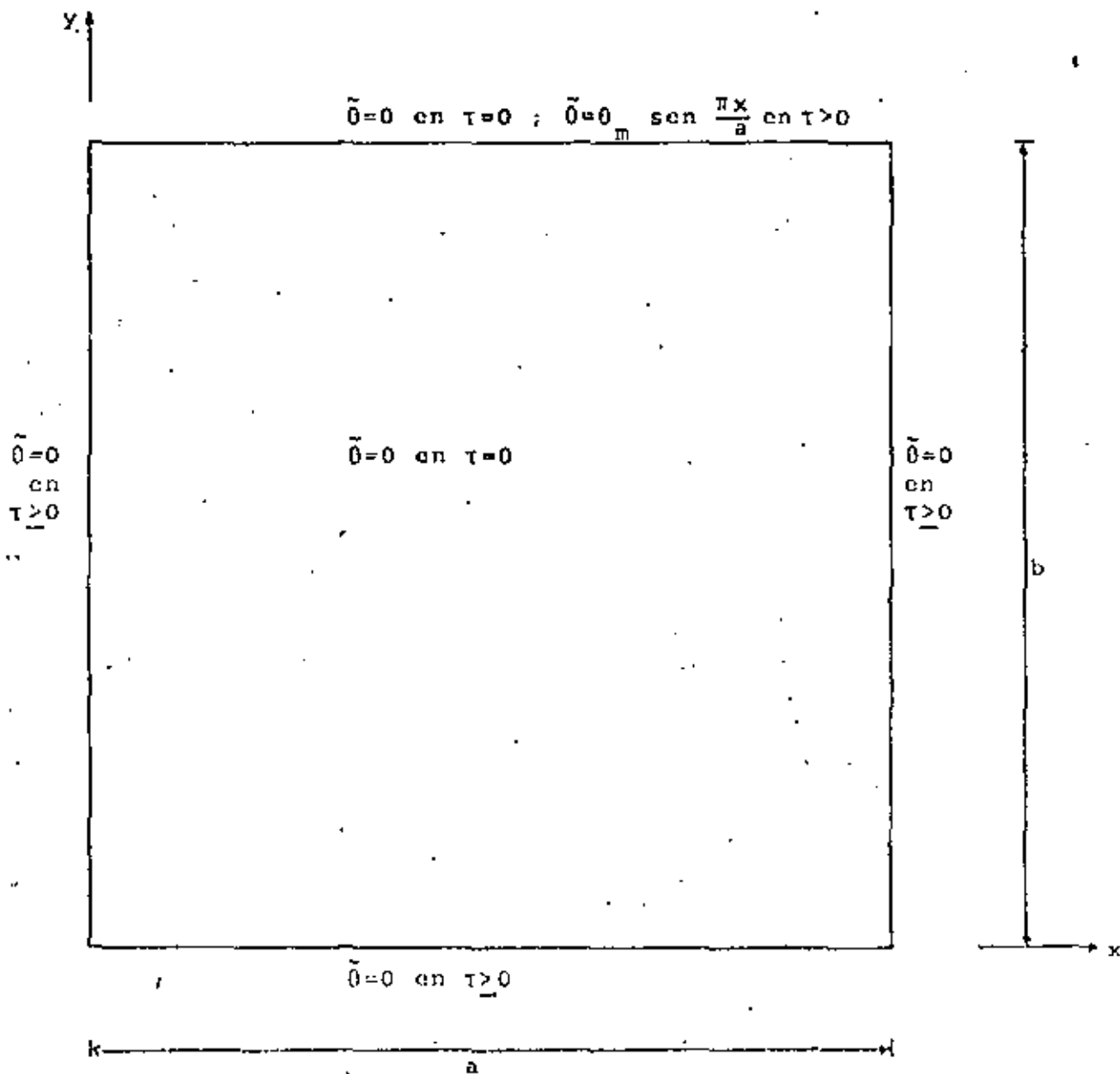


Fig 3.14. Placa con transferencia de calor por conducción con sus condiciones iniciales y de frontera.

Por otra parte, la contribución en estado transitorio también se puede obtener por el método de separación de variables, pero ahora se usan las siguientes condiciones de frontera, para tiempo mayor que cero

$$\begin{aligned} & H=0 \text{ en } x=0 \\ & H=0 \text{ en } x=a \\ \tau > 0 : & H=0 \text{ en } y=0 \\ & H=0 \text{ en } y=b \end{aligned} \quad (3.32)$$

y para tiempo igual a cero las condiciones iniciales son

$$H(x, y, 0) = -G(x, y) \quad \text{en } 0 < x < a, 0 < y < b \quad (3.33)$$

Sustituyendo  $H(x, y, \tau)$  por  $\hat{\theta}$  en la ec. (3.28) y resolviéndola usando (3.32) y (3.33) llegamos a una solución de la forma

$$H(x, y, \tau) = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{b^2/a^2 + n^2} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 \tau} \quad (3.34)$$

La cual es una serie de Fourier senoidal, cuya exactitud depende del número de términos que se tomen en la sumatoria.

Por último, sustituyendo (3.31) y (3.34) en (3.29), tenemos

$$\tilde{\theta} = \sum_n \sin \frac{n\pi x}{a} \left[ \frac{\sinh \frac{n\pi y}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{b^2/a^2 + n^2} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{-\left(\frac{1}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 \tau} \right] \quad (3.35)$$

que es la solución analítica de la ec. (3.28) para el problema propuesto.

### 3.3.2. Formulación de Elementos Finitos

Debido a que el problema que estamos considerando se encuentra en estado transitorio, ésto es, depende del tiempo, en la formulación se hace una combinación de dos métodos, el método de elementos finitos en espacio y el método de diferencias finitas en tiempo. Para lograrlo, se calcula la distribución de temperaturas en la placa para un tiempo inicial, utilizando elementos finitos, después se incrementa el tiempo por un  $\Delta t$  y se vuelve a calcular la distribución de temperaturas por elementos finitos, utilizando los resultados del tiempo anterior, como indica el método de diferencias finitas, así sucesivamente hasta que se llega al estado permanente.

Para la formulación de elementos finitos se procede de la siguiente manera: la temperatura  $\tilde{\theta}$  la podemos aproximar de la forma

$$\tilde{\theta}(x, y, \tau) \approx \theta(x, y, \tau) = \sum_{i=1}^n \theta_i(\tau) N_i(x, y) \quad (3.36)$$

donde  $\theta$  es la función aproximada,  $\theta_i(\tau)$  son los valores de la temperatura en cada nodo del elemento,  $N_i$  son las funciones de interpolación del elemento y  $n$  es el número total de nodos del elemento.

Debido a que se hizo una aproximación al sustituir (3.37) en (3.28), se obtendrá un residuo como sigue

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = c \quad (3.37)$$

donde  $c$  es el residuo. Tomando el residuo ortogonal a las funciones de interpolación

$$(\epsilon, N_i) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \right) N_i \, dx dy = 0 \quad (3.38)$$

donde  $\Omega$  es el dominio de un elemento. Aplicando el teorema de Green a la ec. (3.38) llegamos a

$$- \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} N_i \, dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i \, dx \right) - \int_{\Omega} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} N_i \, dx dy = 0 \quad (3.39)$$

donde  $\Gamma$  es el contorno del elemento. Sustituyendo (3.36) en (3.39) y reordenando

$$\theta_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy + \theta_j \int_{\Omega} N_i N_j \, dx dy = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} N_i \, dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i \, dx \right) \quad (3.40)$$

donde  $\dot{\theta}_j \equiv \frac{d\theta_j}{d\tau}$ . Usando notación compacta escribimos

$$\sum_{j=1}^n (\Lambda_{ij} \theta_j + B_{ij} \dot{\theta}_j) = q_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.41)$$

$\Lambda$  es la matriz de coeficientes de temperatura estables,  $B$  es la matriz de coeficientes de temperatura transitorios y  $q$  es el vector de fuentes de calor y son

$$\Lambda_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.42)$$

$$U_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j dx dy \quad (3.43)$$

$$q_i = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \theta}{\partial y} N_i dx \right) \quad (3.44)$$

Ahora utilizando el método de diferencias finitas en tiempo, hacemos las siguientes aproximaciones

$$\theta_j = \frac{\theta_j^{k+1} + \theta_j^k}{2} \quad (3.45)$$

$$\dot{\theta}_j = \frac{\theta_j^{k+1} - \theta_j^k}{\Delta \tau} \quad (3.46)$$

donde  $k$  contabiliza los incrementos de tiempo  $\Delta \tau$ . Sustituyendo (3.45) y (3.47) en (3.41) y agrupando términos tenemos

$$(\Delta \tau A_{ij} + 2B_{ij}) \theta_j^{k+1} = (-\Delta \tau A_{ij} + 2B_{ij}) \theta_i^k + 2\Delta \tau q_i \quad (3.47)$$

lo que se puede escribir como

$$\sum_{j=1}^n G_{ij} \theta_j^{k+1} = h_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.48)$$

donde

$$G_{ij} = \Delta \tau A_{ij} + 2B_{ij} \quad (3.49)$$

$$h_i = 2\Delta \tau q_i + (-\Delta \tau A_{ij} + 2B_{ij}) \theta_i^k \quad (3.50)$$

Con la ec. (3.48) se pueden encontrar las temperaturas para el siguiente tiempo en función de las temperaturas del tiempo anterior y en nuestro caso, para el tiempo inicial las temperaturas en toda la placa son cero, excepto en la parte superior donde se encuentra la distribución de temperaturas senoidal. Se puede observar que las matrices  $A$  y  $B$  únicamente se tienen que calcular una vez, ya que éstas dependen solo de la topología del cuerpo y no del tiempo, lo cual facilita mucho los cálculos.

A continuación se procede a efectura el ensamble de las matrices de cada elemento, en la matriz global. También en este caso la matriz global resulta ser simétrica y bandeda, lo cual es debido a la forma de los integrales (3.42) y (3.43).

### 3.3.3 Solución del Problema por Elementos Finitos Contra Solución Analítica

Los resultados que se muestran a continuación, se obtuvieron de un programa de computadora. En éste, primero se generan las matrices  $A$  y  $B$  de la ec. (3.47) para cada elemento, con ellas se calcula la matriz  $G$  de la ec. (3.48) para el incremento de tiempo y se ensamblan las matrices de todos los elementos, obteniéndose la matriz global  $G^*$ . En seguida se genera el vector  $k$  para lo cual se utilizan los valores de la temperatura del tiempo anterior. El orden del sistema de ecuaciones (3.48), se reduce a únicamente el número de incógnitas sustituyendo las condiciones de frontera del tipo Dirichlet y se resuelve obteniéndose las temperaturas. Este proceso se repite hasta que llega al estado permanente, o sea cuando la diferencia entre las temperaturas del tiempo anterior y el nuevo sea menor que un cierto valor preestablecido. En el posprocesamiento se calcula el error entre la solución analítica y la de elementos finitos para cada instante de tiempo y se interpola linealmente dentro de cada elemento para obtener las coordenadas de las líneas de temperatura constante.

Al igual que la solución en estado permanente, la norma del error, que se utiliza para comparar la solución analítica y la solución de elementos finitos, es el error raíz medio cuadrático definido en la ec. (3.25).

La malla que se utiliza para efectuar los cálculos es del tipo  $S_a$  de 25 nodos y 32 elementos, como la que se muestra en la Fig. 3.7, debido a que con esta malla, para el estado permanente, se obtiene un error bastante pequeño al efectuar los cálculos y además no consume mucho tiempo de procesamiento en la computadora.

En la Fig. 3.15 se grafica la variación en el tiempo de la temperatura del nodo central de la malla, obtenida analíticamente y por elementos finitos. Se observa que para tiempos muy pequeños la temperatura obtenida por elementos finitos desciende de la condición inicial y luego vuelve a subir, lo que físicamente no es posible. Después se observa que las dos temperaturas se elevan al mismo tiempo de la condición inicial y se separan hasta que llega un momento en que la diferencia entre una y otra es más o menos constante, esta diferencia es la misma que existe entre la solución de elementos finitos y analítica para estado permanente, lo cual es aceptable, ya que no se puede pedir menor diferencia si se utiliza la misma malla. La oscilación no se disminuye al hacer más pequeños los incrementos de tiempo y sí se puede aumentar si éstos son más grandes, por lo que es un defecto del método. Si se utilizan mallas más finas con más elementos en la zona de mayor variación, la oscilación disminuye y la precisión aumenta.

La Fig. 3.16 nos muestra una gráfica de la variación del error raíz medio cuadrático a lo largo del tiempo. En ella se observa que para tiempos muy pequeños el error es grande, debido a las oscilaciones de la temperatura en los nodos, y a medida que transcurre el tiempo, el error se reduce hasta que es igual al que se obtiene en estado permanente. El máximo error es de



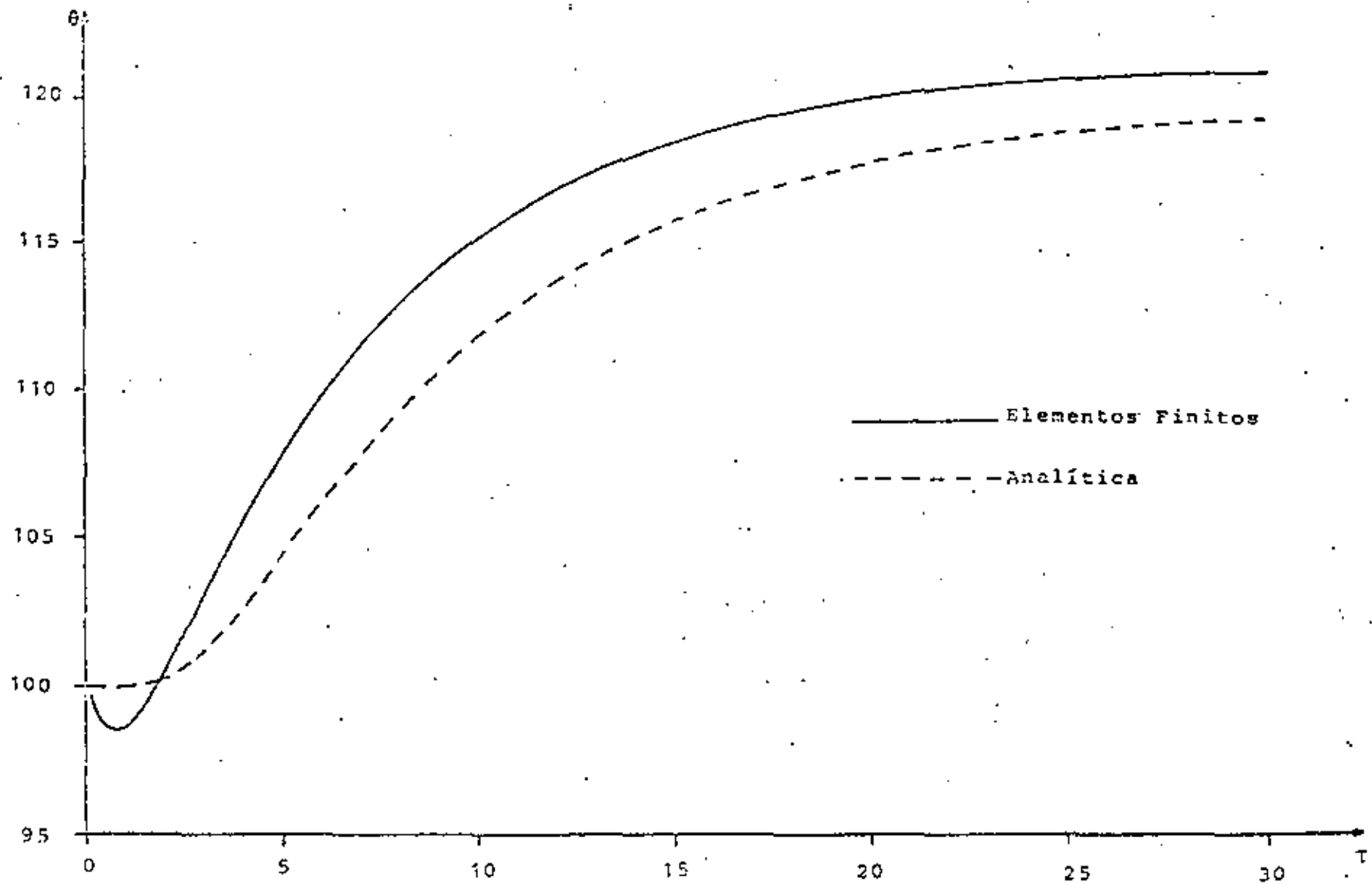


Fig 3.15 Gráfica tiempo contra temperatura para el nodo central de la malla.

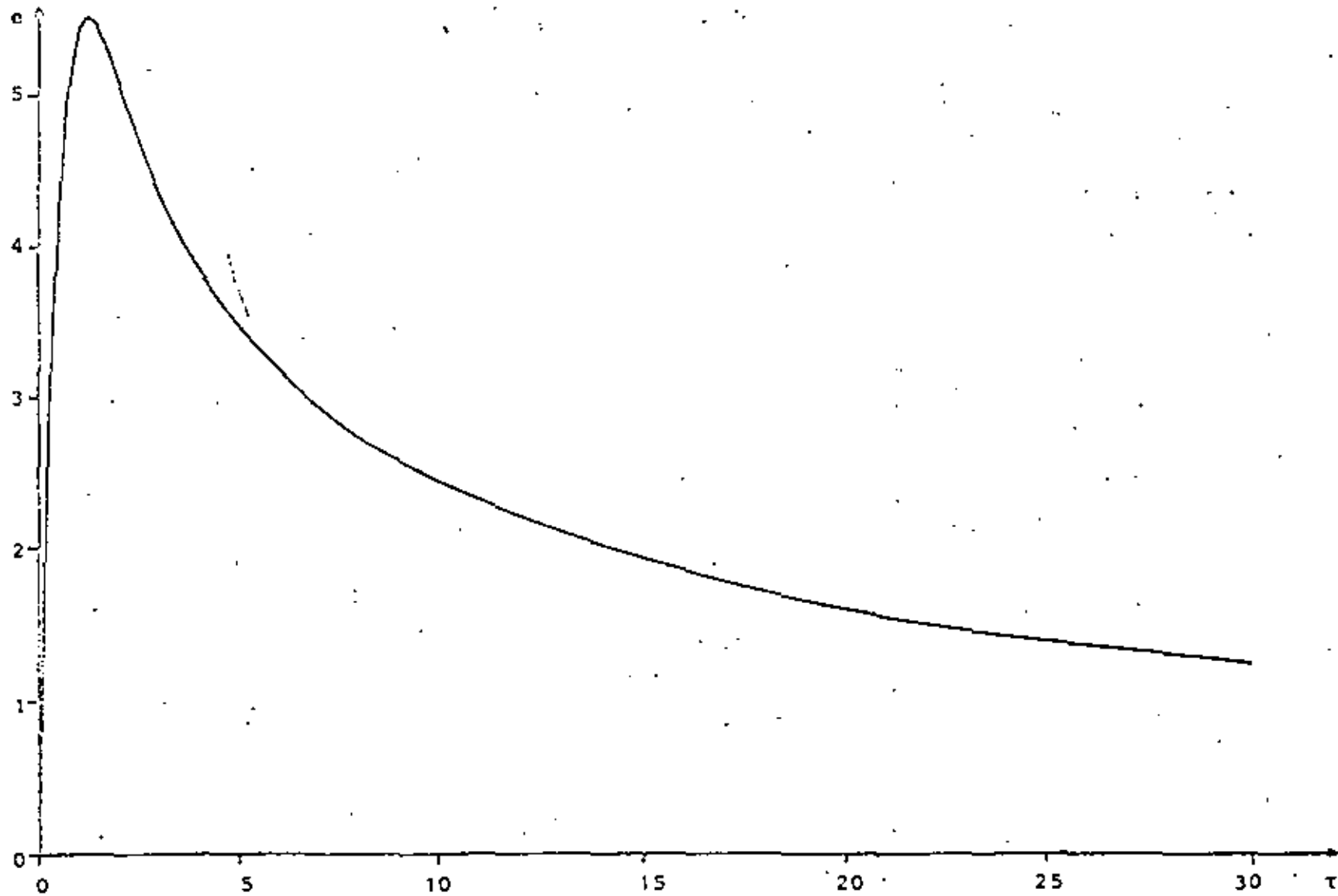


Fig. 3.16. Gráfica tiempo contra error raíz medio cuadrático

5.450, el cual es bastante pequeño considerando la malla que se utilizó.

Para el ejemplo escogido, la distribución de temperaturas llegó al estado permanente en 32 unidades de tiempo aproximadamente y coinciden en este tiempo tanto la solución de elementos finitos como la analítica. La Fig. 3.17 muestra líneas de temperatura constante e igual a 110 unidades en diferentes tiempos, obtenidas a partir de la solución de elementos finitos.

En base a los resultados obtenidos, podemos decir que la combinación del método de elementos finitos y el método de diferencias finitas para resolver problemas parabólicos es efectiva, únicamente teniendo en cuenta que la discretización del dominio debe ser más fina que para un problema elíptico, para disminuir la oscilación que se presenta en los primeros instantes de tiempo.

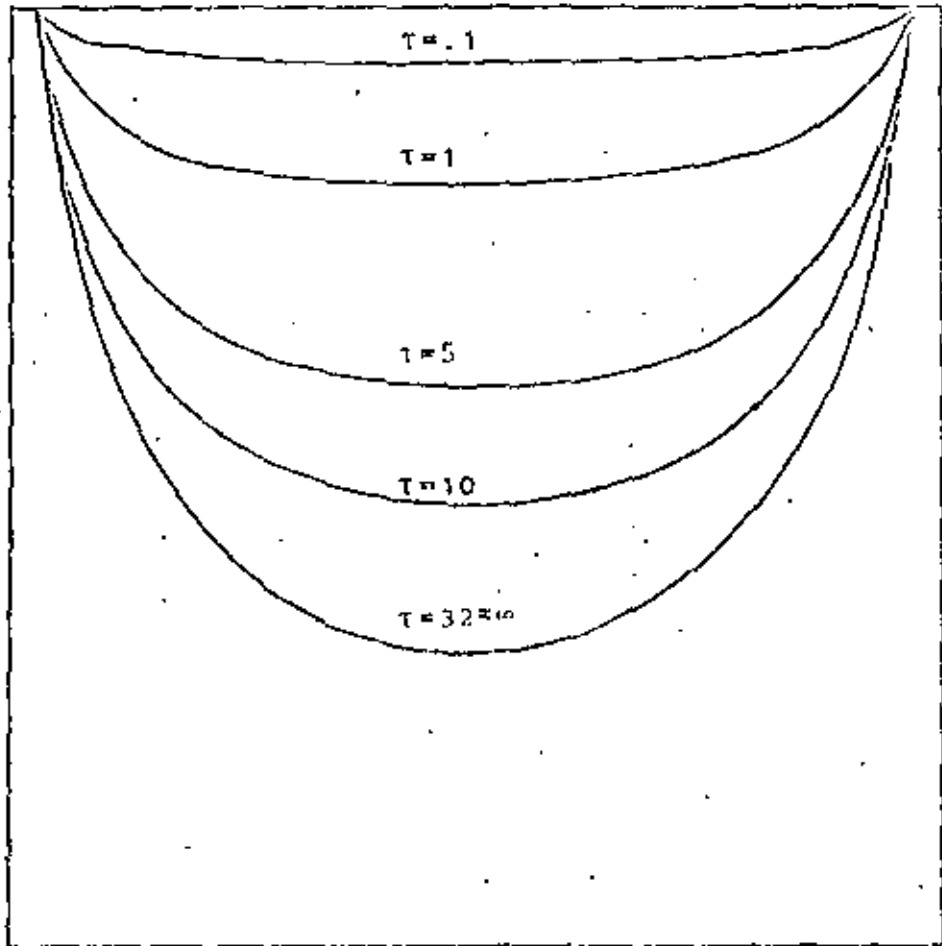


Fig 3.17. Líneas de temperatura constante  $\theta=110$  en diferentes tiempos.

## CAPITULO IV FLUJO POTENCIAL INCOMPRESIBLE

### 4.1 GENERAL

En este capítulo se va a tratar el caso de la solución de un flujo potencial incompresible y no viscoso, o sea un flujo ideal, por medio del método de elementos finitos, en conjunto con el método de Galerkin.

Para ejemplificar, se resolverá el problema de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro, el cual se encuentra entre dos placas planas.

Este tipo de flujo puede ser utilizado para obtener una aproximación del comportamiento de un flujo real, con una viscosidad muy pequeña, y con una capa límite muy delgada en la superficie, además de que sea incompresible. Un ejemplo de los flujos que cumplen estas condiciones, son los flujos convergentes o acelerados.

### 4.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Ya que lo que nos interesa es un flujo bidimensional, todos los planteamientos que se hagan a continuación serán descritos en dos dimensiones para mayor facilidad.

Un fluido real debe satisfacer las siguientes condiciones:

- a) La ecuación de continuidad, que en coordenadas cartesianas es:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} = 0 \quad (4.1)$$

donde  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  son los componentes de velocidad en las direcciones  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  respectivamente.

- b) La segunda ley de Newton en todos los puntos y en cualquier instante.
- c) El fluido no debe penetrar dentro de cualquier contorno sólido, ni tampoco se deben formar oquedades entre el fluido y el contorno.
- d) A las condiciones anteriores le añadimos otra más. El fluido debe ser irrotacional, esto es

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = 0 \quad (4.2)$$

El aplicar la segunda ley de Newton a una partícula del fluido, nos conduce a las ecuaciones de Euler y son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{G}}{\partial t} + \hat{u} \frac{\partial \hat{G}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{G}}{\partial y} &= -\frac{1}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde  $\hat{t}$  es el tiempo,  $\hat{\rho}$  es la densidad y  $\hat{p}$  es la presión.

Nosotros vamos a considerar un flujo en estado permanente, por lo tanto para este caso el primer término de la ecuación (4.3) desaparece.

Ya que el flujo que estamos considerando es irrotacional, podemos definir un potencial de velocidad a partir de la ec. (4.2) de la siguiente forma

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} ; \hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \quad (4.4)$$

donde  $\hat{\phi}$  es el potencial de velocidad. De esta manera obtenemos una función  $\hat{\phi}$  tal, que su derivada con respecto a una dirección cualquiera es la componente de velocidad en esa dirección. Esto

es posible ya que no existe rozamiento, una partícula que esté inicialmente en reposo no puede ponerse a girar, de igual manera una partícula que está girando, no puede alterar su rotación.

Si sustituimos la ec. (4.4) en la ec. de continuidad(4.1) obtenemos

$$\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.5)$$

que es la llamada ecuación de Laplace en dos dimensiones. Toda función  $\hat{\phi}$  que satisfaga esta ecuación es un caso posible de flujo irrotacional.

La ec. (4.5) tiene solución analítica para casos muy sencillos, en los que las fronteras no presenten ninguna complicación, sin embargo, para casos en los que las fronteras no son muy regulares, hay que utilizar un método numérico para resolverla.

Para el caso de un flujo bidimensional, también se puede definir una función  $\hat{\psi}$ , llamada función de corriente, que nos relacione las velocidades en las dos direcciones. A partir de la ec. (4.1) tenemos

$$u = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} ; \quad v = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \quad (4.6)$$

sustituyendo (4.6) en (4.2) se tiene

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.7)$$

que es la ecuación de Laplace para la función de corriente y su solución tiene dificultades similares a la del potencial de velocidad.

Se puede demostrar fácilmente, que la línea descrita por la función  $\hat{\psi} = \text{const.}$  es la trayectoria de una partícula del fluido y a esta curva se le llama línea de corriente.

El potencial de velocidad y la función de corriente se relaciona de (4.6) y (4.4)

$$\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} = - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \quad (4.8)$$

Como consecuencia las líneas de corriente y las líneas equipotenciales son perpendiculares entre sí para un flujo ideal.

#### 4.3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Ya que el mismo tipo de ecuación, ésto es, la ecuación de Laplace, se utiliza para obtener el potencial de velocidad y la función de corriente, la formulación de elementos finitos es idéntica para cualquiera de las dos y la única diferencia estriba en las condiciones de frontera que se utilizan. No existe ventaja de una sobre otra formulación si las geometrías son más o menos simples. Por lo tanto únicamente se describirá la formulación de la función de corriente.

Se definen las siguientes variables adimensionales

$$\tilde{\psi} = \frac{\hat{\psi}}{q_{\infty} D}, \quad x = \frac{\hat{x}}{D}, \quad y = \frac{\hat{y}}{D}$$

donde  $q_{\infty}$  es la velocidad alejada del cuerpo y D es una distancia característica. Sustituyendo en la ec. (4.8), se tiene

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.9)$$

Haciendo la siguiente aproximación para un elemento

$$\tilde{\psi} = \sum_{i=1}^n N_i \psi_i \quad (4.10)$$



donde  $\psi$  es la función aproximada y  $N_i$  son las funciones de interpolación o funciones de base de un elemento,  $n$  es el número de nodos del elemento y  $\psi_i$  es el valor de la función en cada nodo. Sustituyendo (4.10) en (4.9) e igualando a un residuo  $\epsilon$  se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \epsilon \quad (4.11)$$

Considerando una proyección ortogonal del residuo sobre las funciones de peso, que en este caso son iguales a las funciones de base

$$(\epsilon, N_i) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) N_i \, dx \, dy = 0 \quad (4.12)$$

donde  $\Omega$  es el dominio del elemento. Aplicando el teorema de Green en (4.12) llegamos

$$-\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx \, dy + \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} N_i \, dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} N_i \, dx \right) = 0 \quad (4.13)$$

Sustituyendo (4.10) en (4.13) y reordenando,

$$\psi_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} N_i \, dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} N_i \, dx \right) \quad (4.14)$$

Usando una notación simplificada escribimos

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j = f_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.15)$$

Aquí  $A$  y  $f$  son llamados matriz de coeficientes y vector de flujo respectivamente y son

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.16)$$

$$b_i = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \psi}{\partial y} N_i dx \right) \quad (4.17)$$

Para obtener el sistema de ecuaciones global, se ensamblan las ec. (4.15) de todos los elementos, obteniéndose:

$$\sum_{j=1}^m A_{ij}^* \psi_j^* = b_i^* \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (4.18)$$

donde  $m$  es el número total de nodos.

#### 4.4 SOLUCION Y RESULTADOS

El problema específico escogido como ejemplo, es el del flujo alrededor de un cilindro de radio  $D=1$  entre placas planas separadas una distancia  $4D$  y suponiendo que el flujo uniforme se encuentra a una distancia  $3.5D$ , medida desde el centro del cilindro, Fig 4.1.

Por simetría se utiliza una cuarta parte del dominio, sección a-b-c-d-e. Por inspección notamos que las fronteras a-b y e-d-c son líneas de corriente y como referencia tomaremos  $\tilde{\psi}=0$  en e-d-c. Ya que la velocidad es constante en a-e podemos poner

$$\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial y} = u = 1 \quad (4.19)$$

Integrando

$$\tilde{\psi} = y + \text{const.} \quad (4.20)$$

lo que significa que la función de corriente varía linealmente con respecto a  $y$ , en la frontera a-e. Sustituyendo los valores de  $y$ , en la ec. (4.20), para la frontera a-b llegamos a  $\tilde{\psi}=2$ .

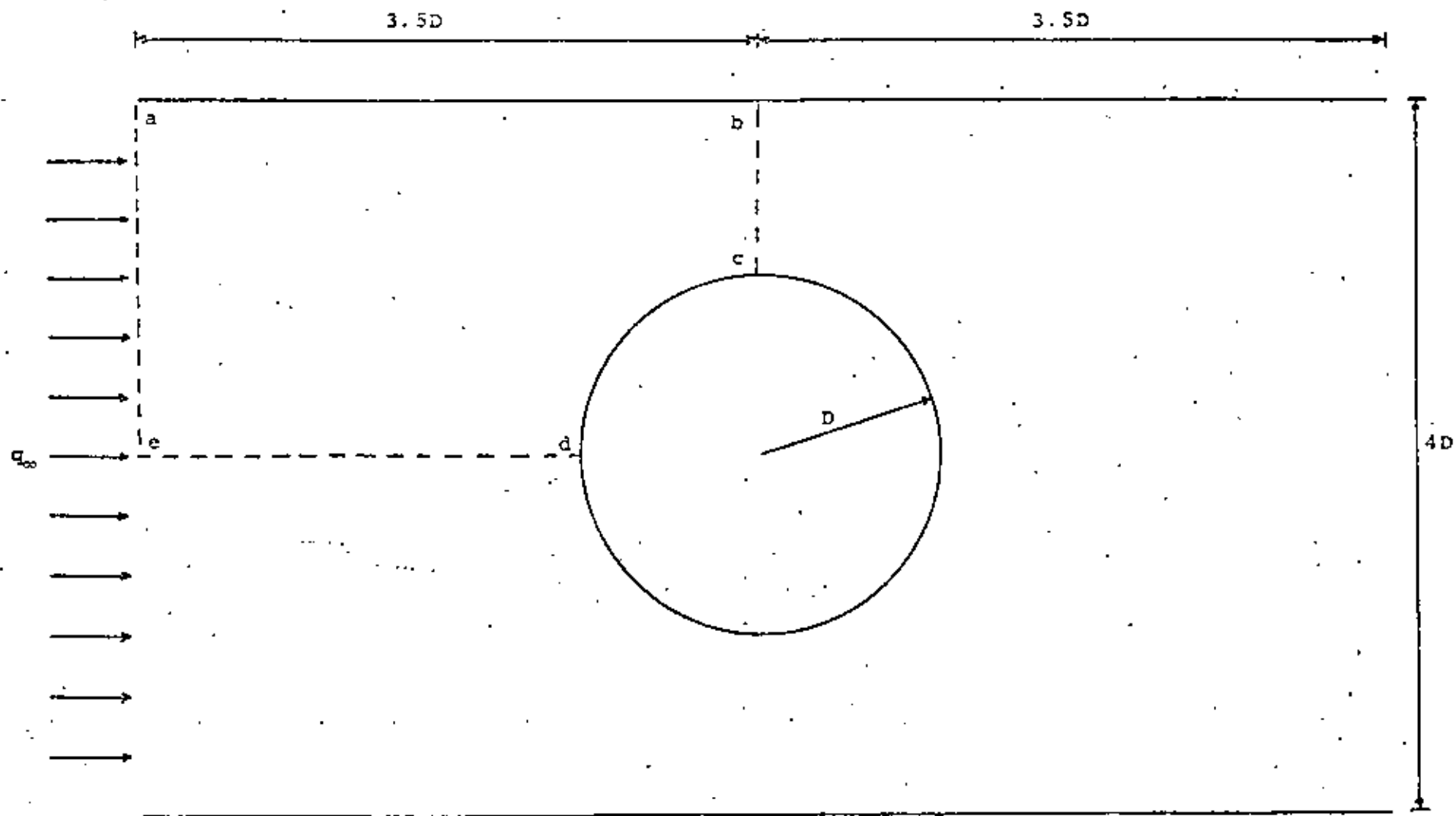


Fig 4.1 Flujo uniforme alrededor de un cilindro entre placas planas.

Todas las condiciones de frontera que hemos definido hasta el momento son del tipo Dirichlet. Lo único que resta es definir la condición de frontera para el lado b-c, sabemos que la línea de corriente es perpendicular a ese lado, por lo que definimos  $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ , siendo esta del tipo Neumann. Las condiciones de frontera se presentan en la Fig 4.2.

Para resolver este problema, se escogieron elementos triangulares, con funciones de interpolación lineal, por lo que solamente tienen 3 nodos cada elemento. Los elementos y las funciones son los mismos utilizados en la sección 3.2.3 donde se pueden consultar.

En el programa de computadora que se realizó, primero se generan las matrices de coeficientes  $A$  de cada elemento, mismas que se ensamblan en la matriz global  $A^*$ . Para el vector  $f$  en los nodos en la frontera que tienen la condición de Neumann la integral (4.17) debe evaluarse. En nuestro caso resulta ser cero. En los demás nodos con la condición de Dirichlet esta integral tiene valor desconocido pero ya que la función de corriente es conocida allí, no es necesario calcularla. Las condiciones de frontera del tipo Dirichlet se sustituyen en el sistema (4.19), reduciéndose con ello el orden de la matriz global, a únicamente el número de incógnitas y se resuelve el sistema resultante obteniéndose los valores de  $\psi$ . En el posprocesamiento, se interpola linealmente dentro de cada elemento para obtener las coordenadas de las líneas de corriente, además, por medio de la ec. (4.23), se calculan las velocidades arriba de la cresta del cilindro.

Se utilizan dos discretizaciones del dominio como muestra las figuras 4.3 y 4.4. La primera es una malla gruesa de 10 nodos, usada tanto para probar el programa como para observar las zonas de mayor variación. La segunda es una malla fina de 73 nodos con 111 elementos, que se realizó tomando en cuenta los resultados obtenidos con la malla anterior.

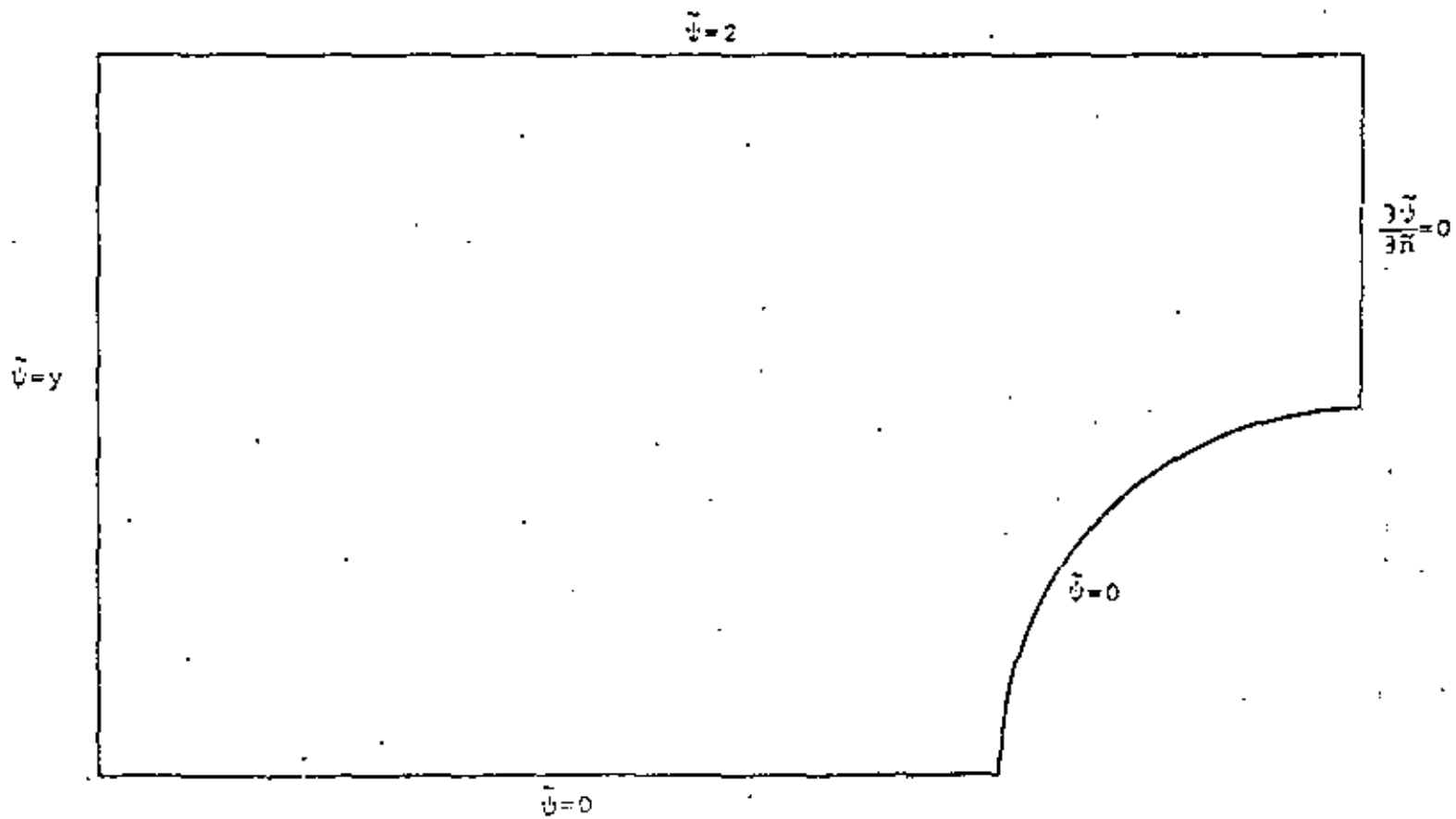


Fig 4.2. Condiciones de frontera.

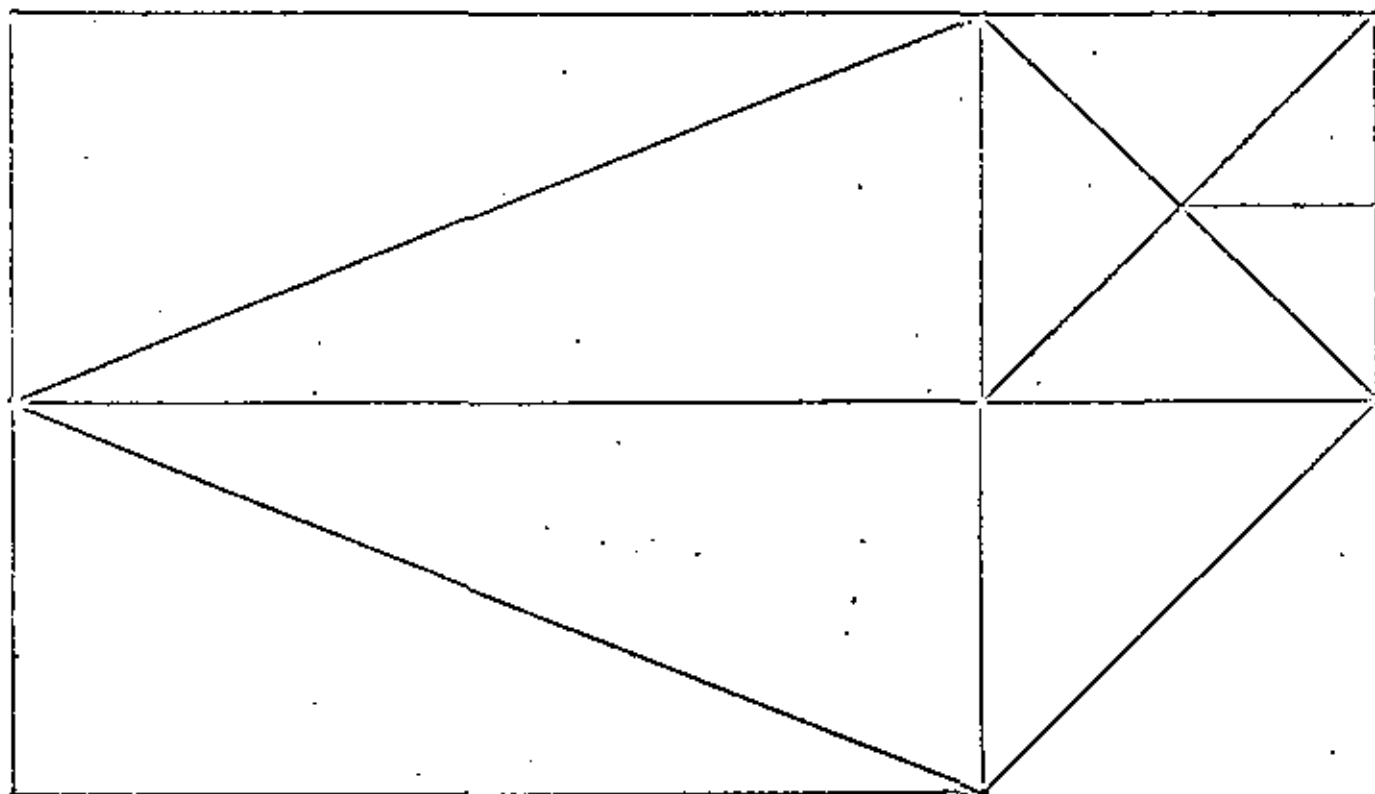


Fig 4.3. Malla gruesa.

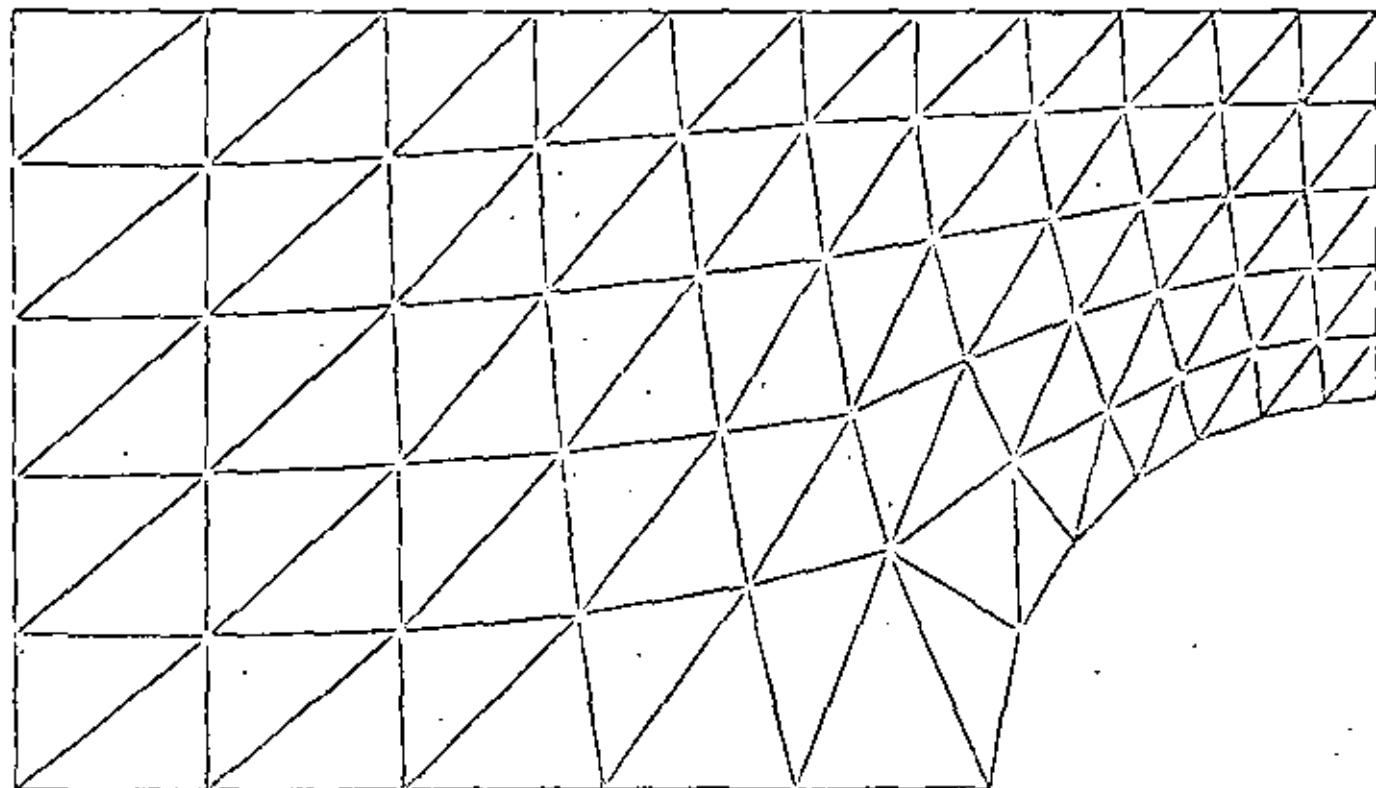


Fig 4.4. Malla Fina.

En la Fig. 4.5 se muestran las líneas de corriente y la variación de la velocidad en la cresta del cilindro, se comparan con la solución analítica aproximada, obtenida por el método de imágenes de la siguiente forma (Chung, 1978)

$$\tilde{\psi} = q_{\infty} \left\{ y - \frac{H}{2\pi} \operatorname{senh}^2\left(\frac{\pi b}{H}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi y}{H}\right) / \left[ \cosh^2\left(\frac{\pi x}{H}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi y}{H}\right) \right] \right\} \quad (4.24)$$

donde  $x, y$  son coordenadas con origen en el centro del cilindro,  $b$  es el radio y  $H$  es la distancia vertical entre las dos placas.

Se observa que existe bastante diferencia entre los resultados obtenidos con la malla gruesa y la solución analítica, el error raíz medio cuadrático relativo es de 8.5%. Sin embargo, al comparar los resultados de la malla fina con la solución analítica, el error raíz medio cuadrático relativo, en la desviación de las curvas de líneas de corriente, es de 0.9% el cual es bastante pequeño; en la figura se ve claramente que casi coinciden las curvas.

También se observa como la velocidad aumenta en la cresta del cilindro al acercarse a éste y la poca diferencia que existe entre la curva de la malla fina y la solución analítica.

Concluyendo, los resultados demuestran la utilidad del método de elementos finitos de Galerkin en la solución de problemas de flujo potencial incompresible y cómo, con una buena discretización se pueden obtener resultados bastantes precisos.



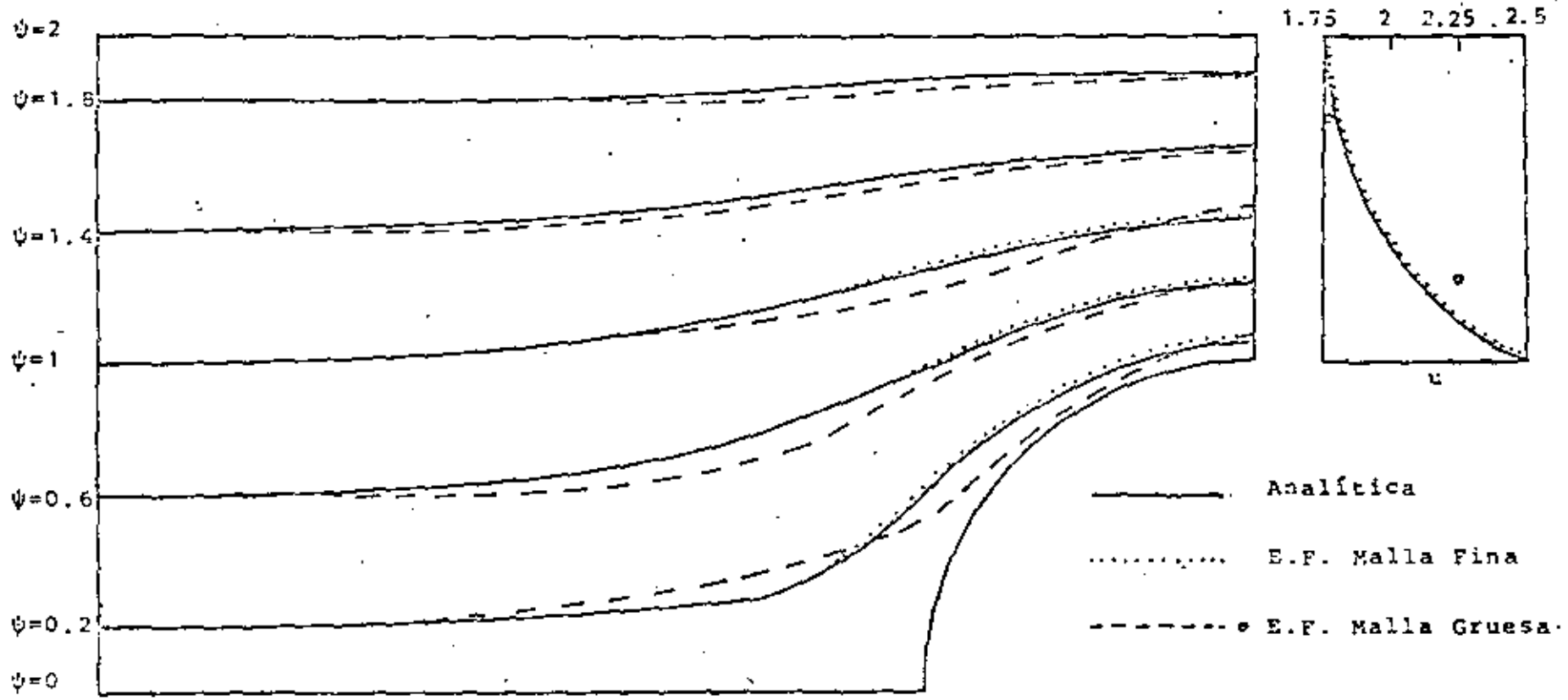


Fig 4.5 Líneas de corriente y variación de la velocidad arriba de la cresta del cilindro.

## CAPITULO V FLUJO POTENCIAL COMPRESIBLE

### 5.1 GENERAL

Cuando se estudian flujos alrededor de cuerpos sumergidos, normalmente no se pueden resolver las ecuaciones de movimiento en forma analítica, debido a la no linealidad de las mismas, es por ello que en el presente capítulo se estudiará la solución de un flujo potencial compresible subsónico y no viscoso, por medio del método de elementos finitos, usando el método de residuos pesados de tipo Galerkin.

El caso de flujos subsónicos ha sido estudiado principalmente utilizando los principios variacionales (Shen, 1977). Entre los trabajos más importantes se encuentra el de Carey (1975), el cual utiliza un principio variacional, en combinación con una expansión de perturbaciones. Sin embargo, como se muestra en Martín del Campo y Sen (1980), se puede resolver el problema de flujos potenciales más sencillamente, con un método iterativo combinado con el método de elementos finitos. En esta forma se pueden calcular las líneas de corriente y equipotenciales, así como el número de Mach local en cada punto del espacio.

Para ejemplificar, se resolverá el problema de un flujo bidimensional alrededor de un cilindro sin circulación, el cual se encuentra entre dos placas. Este problema puede ser extendido fácilmente a el tratamiento de flujos compresibles alrededor de perfiles aerodinámicos, para lo cual únicamente habría que añadir la circulación.

### 5.2 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES

Al igual que en el capítulo anterior, ya que lo que se va a tratar es un flujo bidimensional, todos los desarrollos que se hagan a continuación, serán descritos en dos dimensiones.

que es la ecuación que define la velocidad del sonido, en función de las velocidades y de la relación de calores específicos y  $\hat{q}$  es

$$\hat{q} = \hat{u}^2 + \hat{v}^2$$

Multiplicando por  $\hat{u}$  la primera ecuación y por  $\hat{v}$  la segunda de las ec. (5.5), sumándolas y sustituyendo la ec. (5.6) tenemos

$$\left[1 - \left(\frac{\hat{u}}{c}\right)^2\right] \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \left[1 - \left(\frac{\hat{v}}{c}\right)^2\right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \frac{\hat{u}\hat{v}}{c^2} \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}\right) = 0 \quad (5.10)$$

Si a la ec. (5.10) le sumamos y restamos  $\frac{\hat{u}\hat{v}}{c^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y}$  y sustituimos la ec. (5.7) llegamos a

$$\left[1 - \left(\frac{\hat{u}}{c}\right)^2\right] \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \left[1 - \left(\frac{\hat{v}}{c}\right)^2\right] \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} - \frac{2\hat{u}\hat{v}}{c^2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = 0 \quad (5.11)$$

De la ecuación de irrotacionalidad (5.7) se puede definir un potencial de velocidad  $\hat{\phi}(x,y)$  que satisface

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} ; \quad \hat{v} = \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \quad (5.12)$$

Sustituyendo (5.12) en (5.11) se obtiene

$$\left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} + \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (5.13)$$

Las ecuaciones (5.9) y (5.13) forman un sistema acoplado en la incognita  $\hat{\phi}(x,y)$ . Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$x = \frac{\hat{x}}{D} ; y = \frac{\hat{y}}{D} ; \tilde{\phi} = \frac{\hat{\phi}}{Dq_{\infty}} \quad (5.14)$$

$$c = \frac{\hat{c}}{c_{\infty}} ; q = \frac{\hat{q}}{q_{\infty}}$$

donde D es una distancia característica, las ecuaciones (5.9) y (5.13) transforman

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} = \frac{M_{\infty}^2}{c^2} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} \right] \quad (5.15)$$

$$c^2 = 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_{\infty}^2 \left[ 1 - \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.16)$$

donde  $M_{\infty} = \frac{q_{\infty}}{c_{\infty}}$ .  $M_{\infty}$  es el número de Mach alejado del cilindro.

En seguida se procede a obtener la ecuación para la función de corriente. De la ecuación de conservación de masa (5.6) podemos definir una función de corriente  $\hat{\psi}(x,y)$  que satisface

$$\hat{u} = \frac{\rho_{\infty}}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} ; \hat{v} = - \frac{\rho_{\infty}}{\hat{\rho}} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} \quad (5.17)$$

sustituyendo (5.17) en la condición de irrotacionalidad (5.7) llegamos a

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial \hat{y}^2} = \frac{1}{\hat{\rho}} \left( \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial \hat{y}} \right) \quad (5.18)$$

Esta ecuación, aparte de no ser lineal, tiene dos incógnitas  $\hat{\psi}$  y  $\hat{\rho}$ . De las ec. (5.5) podemos despejar los términos  $\frac{1}{\beta} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial y}$ ,  $\frac{1}{\beta} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial x}$  y sustituirlos en (5.18) con lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = - \frac{1}{c^2} \left( \hat{u} \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \hat{v} \frac{\partial \hat{c}}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \hat{u} \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} + \hat{v} \frac{\partial \hat{c}}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right) \quad (5.19)$$

Otra vez, sería muy difícil resolver esta ecuación, ya que ahora está en función de las velocidades que no conocemos. Sin embargo si sustituimos el potencial de velocidad en lugar de las velocidades, (5.12) en (5.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} = & - \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{c}}{\partial y} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \hat{c}}{\partial x} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{c}}{\partial y} \frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial y^2} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

nos queda una ecuación de la función de corriente en términos del potencial de velocidad, el cual podemos calcular de la ec. (5.15), al igual que la velocidad del sonido de la ec. (5.16). Definiendo las siguientes variables adimensionales

$$\begin{aligned} x &= \frac{\hat{x}}{D} ; y = \frac{\hat{y}}{D} ; \bar{\psi} = \frac{\hat{\psi}}{D c_{\infty}} ; \\ \bar{\phi} &= \frac{\hat{\phi}}{D c_{\infty}} ; c = \frac{\hat{c}}{c_{\infty}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

y sustituyéndolas en (5.20), se tiene.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} = & - \frac{M_{\infty}^2}{c^2} \left( \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right. \\ & \left. + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial x} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (5.22)$$

### 5.3 FORMULACION DE ELEMENTOS FINITOS

Para el potencial de velocidad  $\tilde{\phi}(x,y)$ , escribimos la ec. (5.15) como una ecuación de Poisson de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} - \tilde{g}(\tilde{\phi}) = 0 \quad (5.23)$$

donde

$$\tilde{g}(\tilde{\phi}) = \frac{M_\infty^2}{c^2} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x \partial y} + \left( \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial y^2} \right] \quad (5.24)$$

Haciendo la aproximación para un elemento

$$\tilde{\phi}(x,y) \approx \phi(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i \phi_i \quad (5.25)$$

donde  $\phi$  es la función aproximada y  $N_i$  son las funciones de interpolación de un elemento,  $n$  el número de nodos del elemento y  $\phi_i$  es el valor de la función en cada nodo. Sustituyendo (5.25) en (5.23) se obtiene un residuo.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \tilde{g} = \varepsilon$$

Se hace el residuo ortogonal a las funciones de interpolación tal que

$$(\varepsilon, N_i) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \tilde{g} \right) N_i dx dy = 0 \quad (5.26)$$

donde  $\Omega$  es el dominio del elemento. Tomando la siguiente aproximación

$$\tilde{g} \approx g = \sum_{j=1}^n N_j \beta_j \quad (5.27)$$

y aplicando el teorema de Green a (5.26) resulta

$$\begin{aligned} \phi_j \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy = & \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i dx \right) \\ & - g_j \int_{\Omega} N_i N_j dx dy \end{aligned} \quad (5.28)$$

Usando notación simplificada escribimos

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \phi_j = f_i + t_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5.29)$$

$A$  es la matriz de coeficientes,  $f$  es el vector de flujo  $t$  es el vector que representa los términos no lineales y son

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.30)$$

$$f_i = \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} N_i dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} N_i dx \right) \quad (5.31)$$

$$t_i = -g_j \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad (5.32)$$

El vector  $g$  se obtiene sustituyendo (5.25) en (5.24) como

$$g_j = \frac{M_\infty^2}{c^2} \left[ \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 \phi_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} + 2 \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \left( \phi_j \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \left( \phi_k \frac{\partial^2 N_k}{\partial x \partial y} \right) + \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 \phi_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right] \quad (5.33)$$

y la velocidad del sonido

$$c^2 = 1 + \left( \frac{\gamma-1}{2} \right) M_\infty^2 \left[ 1 - \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right)^2 - \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (5.34)$$

A continuación se ensamblan las ecuaciones de todos los elementos obtenidos

$$\sum_{j=1}^m A_{ij}^* \phi_j^* = f_i^* + t_i^* \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5.35)$$

Ya que el vector  $t^*$  de la ec. (5.35) está en función de los valores del potencial de velocidad en los nodos, esta ecuación se resuelve por medio de iteraciones, para lo cual en la primera iteración se resuelve

$$A^* \phi = f^* \quad (5.36)$$

Para  $M_\infty=0$ . Los valores obtenidos de  $\phi(x,y)$  se sustituyen en el vector  $t^*$  de (5.35) y se resuelve la ecuación obteniéndose con ella nuevos valores de  $\phi(x,y)$ , los que se utilizan en la siguiente iteración. Así sucesivamente, hasta que la diferencia del valor anterior y el nuevo sea menor que una cierta magnitud.



Para la formulación de la función de corriente, se sigue un procedimiento similar al utilizado en el potencial de velocidad, llegando a

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} \psi_j = \delta_i + \lambda_i \quad (i, 1, 2, \dots, n) \quad (5.37)$$

y el vector  $\delta$  se obtiene a partir de

$$\delta_i = \ell_j \int_{\Omega} N_i N_j dx dy \quad (5.38)$$

donde  $\ell$  está dado por

$$\begin{aligned} \ell_j = \frac{-M_{\infty}^2}{c^2} & \left[ \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \left( \phi_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} \right) \left( \psi_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) + \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left( \phi_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right) \left( \phi_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. + \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \left( \phi_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial x \partial y} \right) \left( \psi_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) + \left( \phi_i \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \left( \phi_j \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} \right) \left( \psi_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \right) \right] \quad (5.39) \end{aligned}$$

donde  $c^2$  se obtiene de la misma forma que en la ec. (5.34). Al igual que para el potencial de velocidad, se efectúa un ensamble de todas las matrices de los elementos (5.37), para obtener la matriz global de coeficientes, lo que se representa

$$A^* \psi = \delta^* + \lambda^* \quad (5.40)$$

En este caso el vector  $\lambda^*$  de la ec. (5.40) está en función de los valores del potencial de velocidad y de la función de corriente en los nodos, sin embargo los primeros ya se conocen de la solución de la ec. (5.35), por lo que se pueden sustituir aquí, quedando la ecuación únicamente en función de  $\psi(x,y)$ . Nuevamente se utiliza un método de iteraciones,

igual al usado en el potencial de velocidad para encontrar  $\psi(x,y)$ .

### 5.4 SOLUCION Y RESULTADOS

El problema específico escogido como ejemplo, es el del flujo uniforme alrededor de un cilindro de radio  $D$ , entre placas planas separadas por una distancia  $2H$  y se supone que el flujo uniforme se encuentra a una distancia  $3.5D$  del centro del cilindro Fig.5.1. Por la simetría del flujo, se puede tomar para el cálculo solamente un cuadrante del dominio total.

Las condiciones de frontera, tanto para el potencial de velocidad como para la función de corriente, se muestran en la Fig. 5.2.

Para la discretización del dominio se utilizan elementos triangulares. Las funciones de interpolación para cada elemento son cuadráticas, para poder sustituir las en las ec.(5.33) y (5.39), ya que de menor grado se anularían. Es por ello que cada elemento tiene 6 nodos uno por cada función de interpolación, las cuales son

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 2L_1^2 - L_1 & N_4 &= 4L_1 L_2 \\
 N_2 &= 2L_2^2 - L_2 & N_5 &= 4L_2 L_3 \\
 N_3 &= 2L_3^2 - L_3 & N_6 &= 4L_3 L_1
 \end{aligned}
 \tag{5.41}$$

donde  $L_1, L_2, L_3$  son las coordenadas de área y su relación con las coordenadas cartesianas es

$$L_i = a_i + b_i x + c_i y \tag{5.42}$$

donde las constantes  $a_i, b_i, c_i$  están definidas por la ec. (3.23). Se utilizan coordenadas de área por su facilidad al efectuar operaciones, así por ejemplo las derivadas de las funciones de

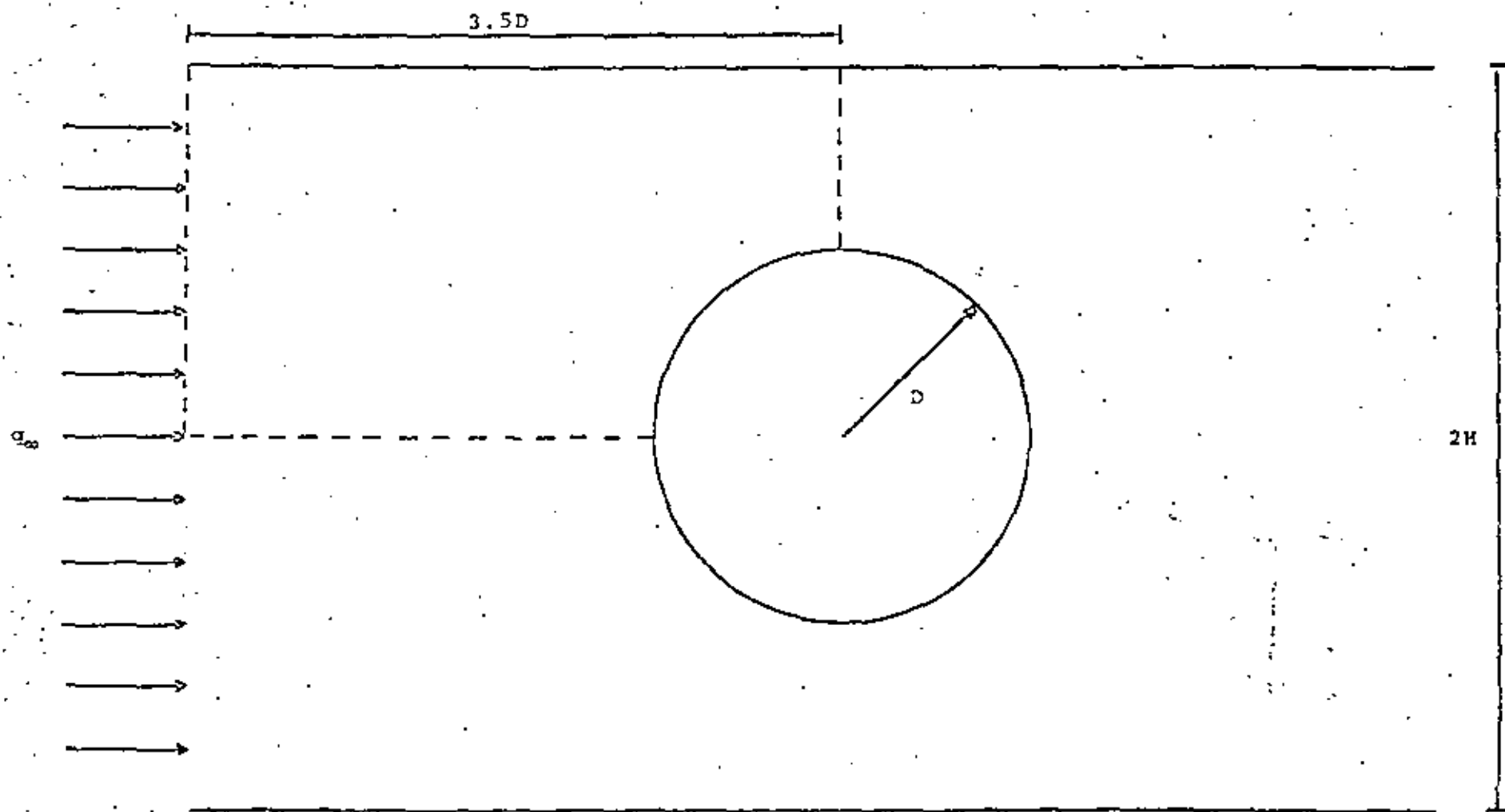
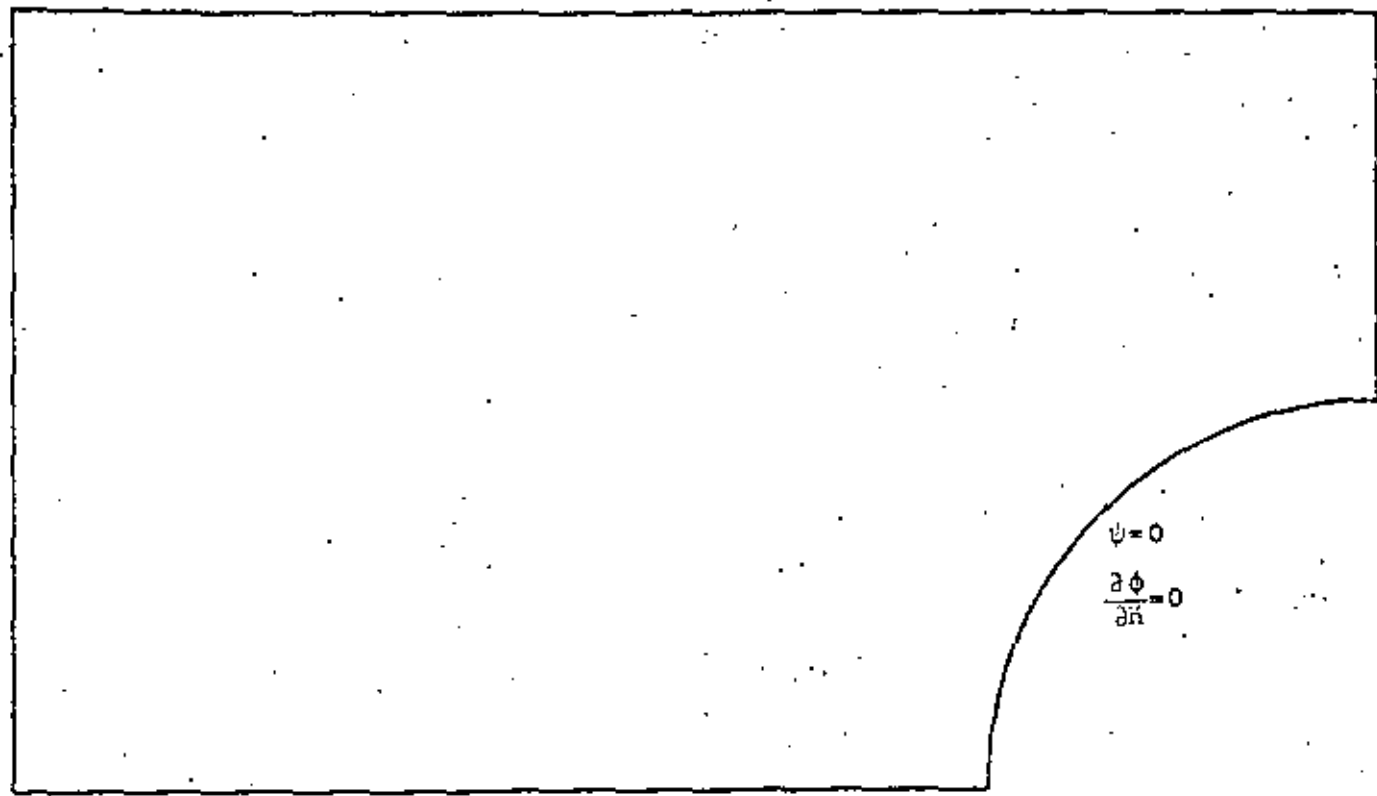


Fig 5.1. Flujo compresible alrededor de un cilindro entre placas planas.

$$\psi = 2 ; \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$\psi = y$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 1$$



$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$$
$$\phi = 0$$

$$\psi = 0$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

$$\psi = 0 ; \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

Fig 5.2. Condiciones de frontera.

interpolación se obtienen por la regla de la cadena como

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \frac{\partial L_1}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial x} \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \frac{\partial L_2}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial L_3} \frac{\partial L_3}{\partial y}$$

y las integrales que aparecen en las ecuaciones se resuelven a través de

$$\int_{\Omega} L_1^n L_2^m L_3^p dx dy = 2\Delta \frac{n!m!p!}{(n+m+p+2)!} \quad (5.44)$$

donde  $\Delta$  es el área del elemento triangular.

Se realizó un programa de computación que calcula las matrices y vectores de elementos finitos y también efectúa las iteraciones. Para el potencial de velocidad, primero se generan las matrices de coeficientes  $A$  de cada elemento, mismas que se ensamblan en la matriz global  $A^*$ . Se calcula la integral (5.31) utilizando las condiciones de frontera del tipo Neumann y estas ya ensambladas forman el vector global  $f^*$ . El vector  $t^*$  se calcula con los valores obtenidos de  $\phi$  en la iteración anterior. Las condiciones de frontera del tipo Dirichlet se sustituyen en el sistema de ecuaciones (5.29), con lo que se reduce la matriz global a únicamente el número de incógnitas y se resuelve, obteniéndose nuevos valores de  $\phi$ . La matriz  $A^*$  y el vector  $f^*$  únicamente se calculan una vez, ya que son los mismos para cada iteración, lo único que cambia es el vector  $t^*$ , en el cual se introducen los nuevos valores de  $\phi$ , hasta que haya una convergencia dentro de una magnitud predeterminada. En el pos-

procesamiento se interpola cuadráticamente dentro de cada elemento, para obtener las coordenadas de las líneas equipotenciales.

El programa para la función de corriente sigue un procedimiento similar al anterior. La matriz  $A$  de la ec. (5.40) es la misma que la del potencial de velocidad, ya que ésta depende únicamente de la malla y las funciones de interpolación que se utilicen. En el vector  $\phi^*$  se utilizan los valores  $\phi$  obtenidos en el programa anterior.

El dominio primero se discretiza con una malla gruesa, como muestra la Fig. 5.3, la cual tiene 10 elementos y 28 nodos. Esto tiene dos finalidades: La primera probar y corregir el programa de computación y la segunda observar dónde se encuentran las zonas de mayor variación, para hacer una mejor discretización.

La Fig. 5.4 muestra una malla más fina con 37 elementos y 92 nodos, la que se realizó tomando en cuenta los resultados obtenidos por la malla anterior.

En la Fig 5.5 se presentan las líneas de corriente para las dos mallas en el caso de flujo incompresible. En las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestran las líneas de corriente y equipotenciales para números de Mach 0.1, 0.2 y 0.3 respectivamente, obtenidos con la malla fina. Estas figuras también indican la variación del número de Mach local, sobre la cresta del cilindro.

Se observa una diferencia entre el caso de flujo incompresible comparado con el flujo compresible y esta diferencia es notable para altos números de Mach. Se nota también que en el caso de flujo compresible, el número de Mach aumenta al acercarse al cilindro. Esto puede presentar problemas para un perfil aerodinámico si el número de Mach local se acercara a la unidad.

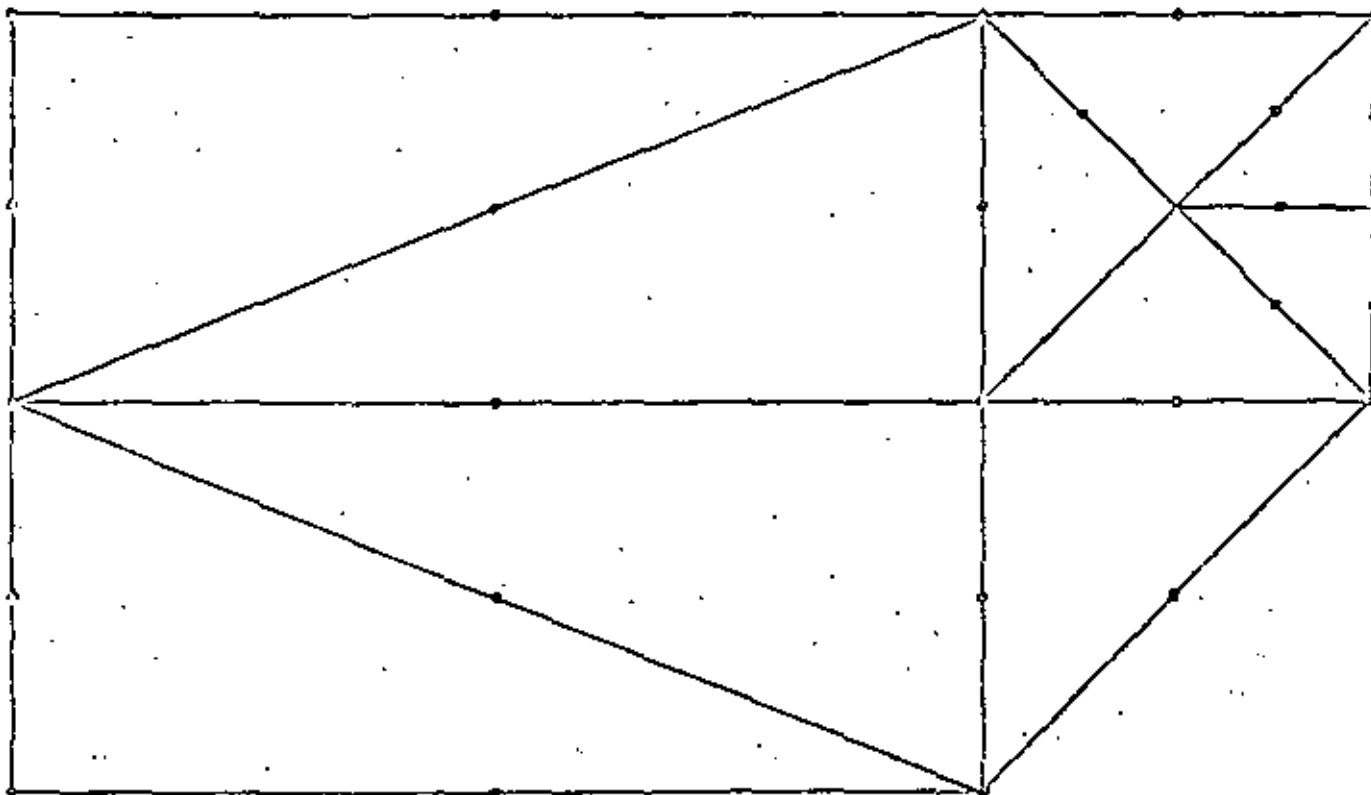


Fig 5.3. Malla gruesa con sus nodos.

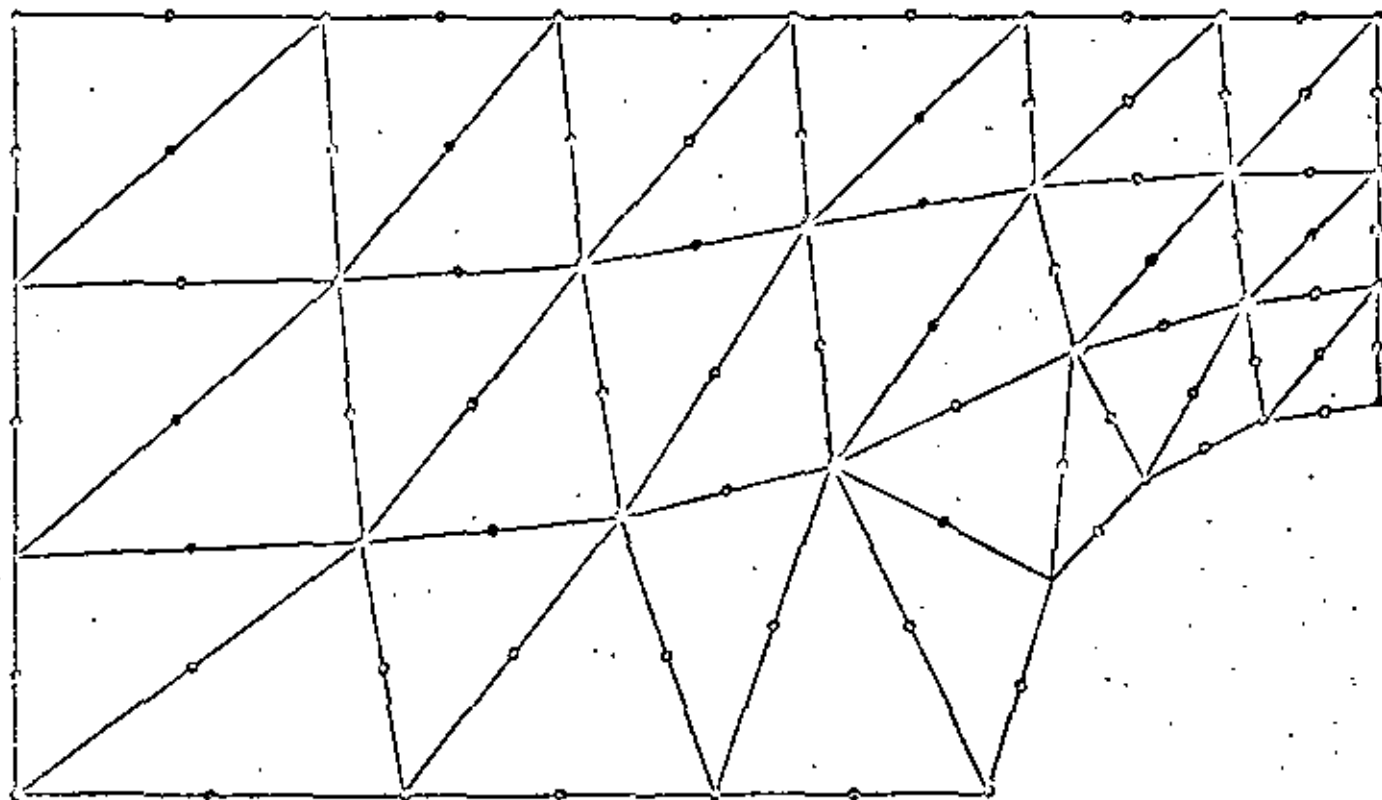


Fig 5.4. Malla fina con sus nodos.



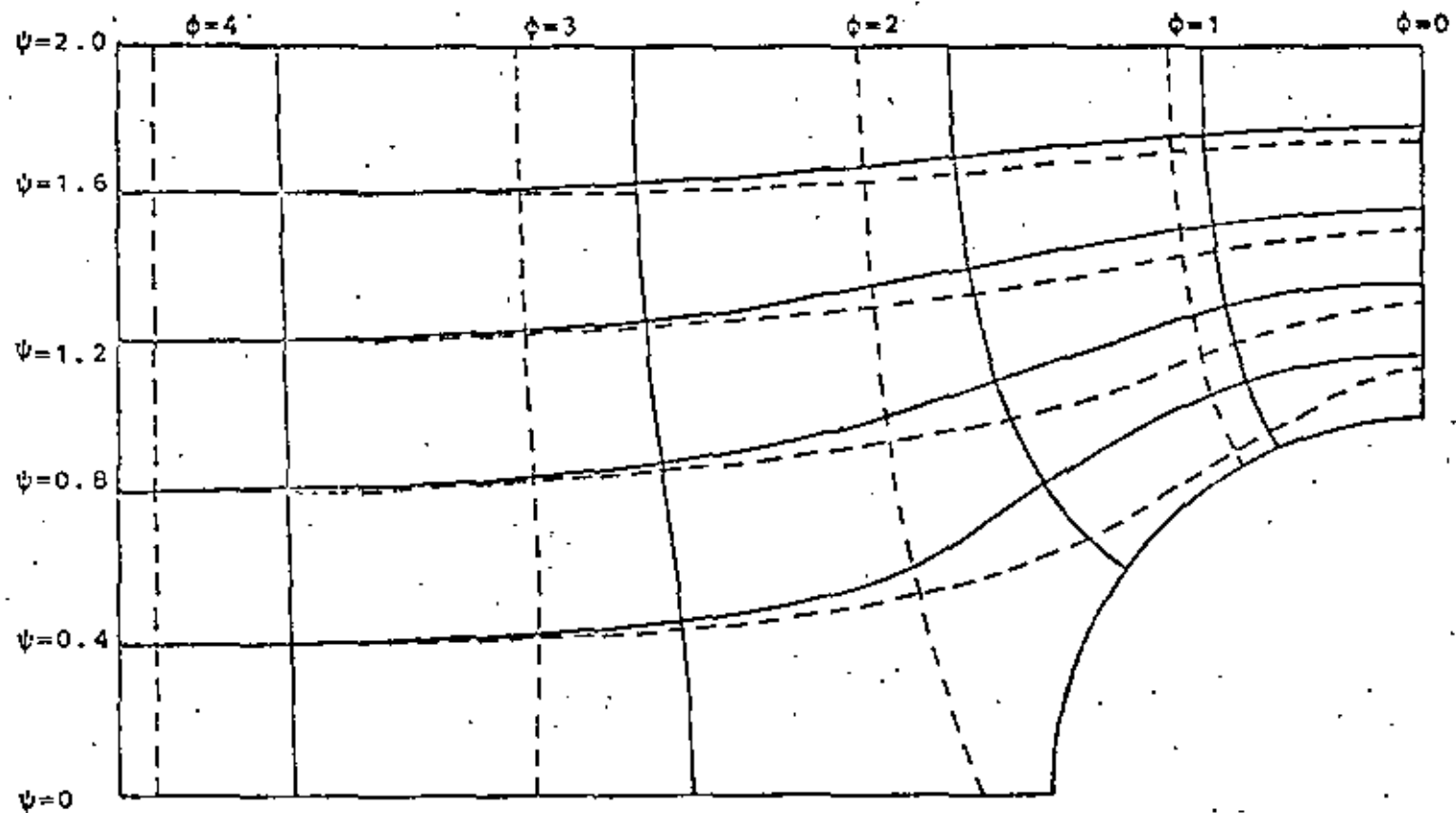


Fig 5.5 Líneas de corriente para las dos mallas,  
 $N_{\omega}=0$ , Línea punteada malla gruesa, Línea  
 continua: Malla fina.

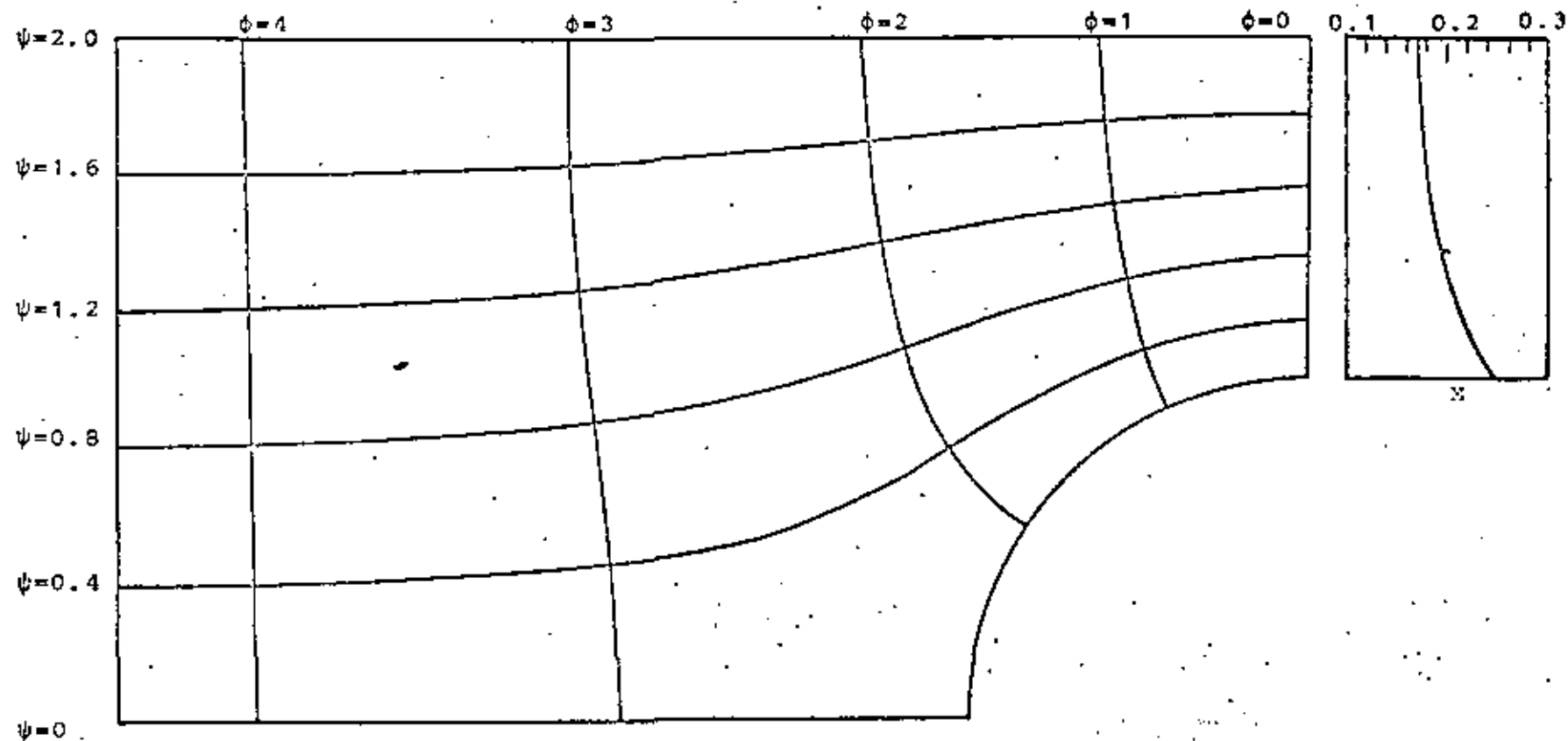


Fig 5.6. Líneas equipotenciales y líneas de corriente para  $M_{\infty}=0.1$  y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

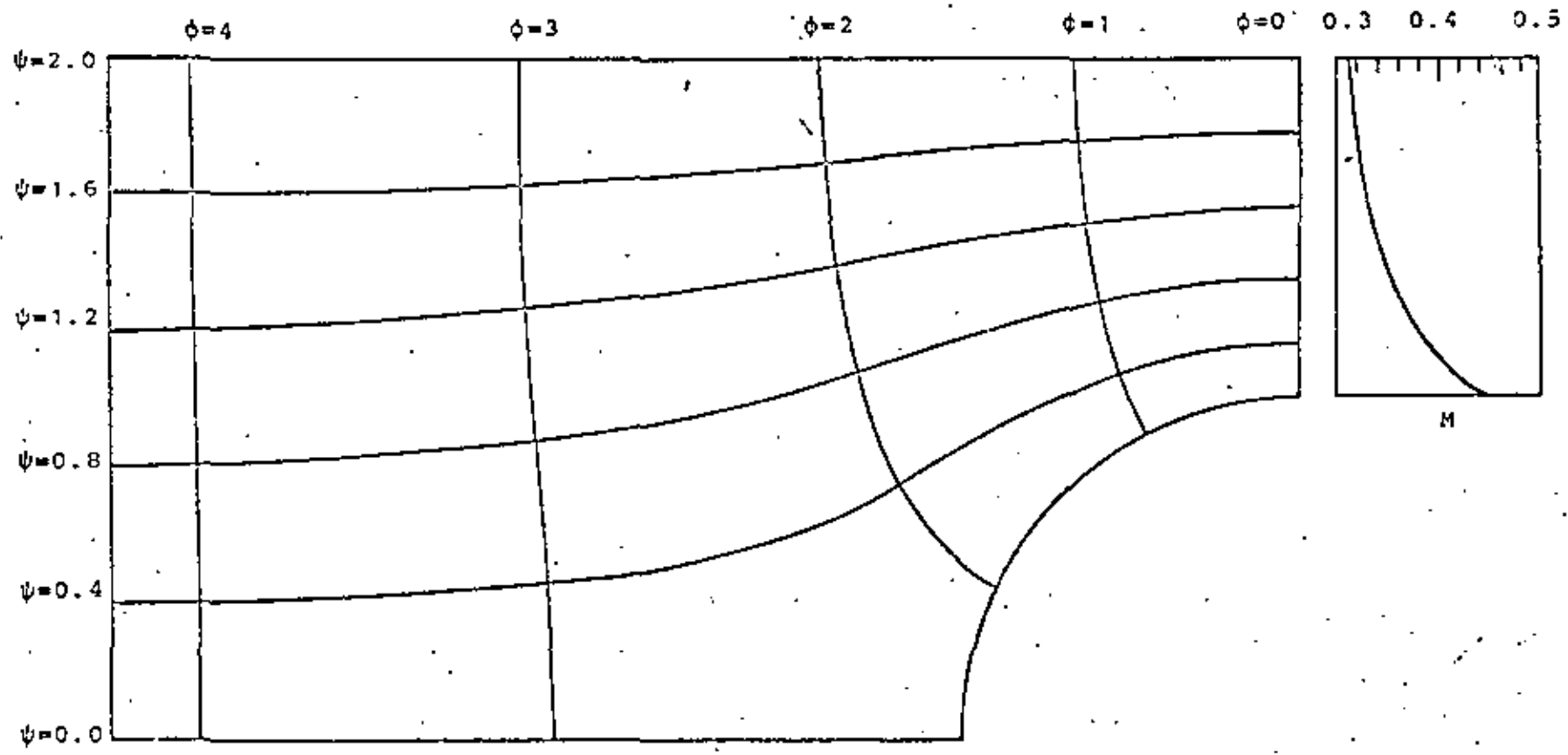


Fig 5.7. Líneas equipotenciales y líneas de corriente para  $M_{\infty}=0.2$  y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

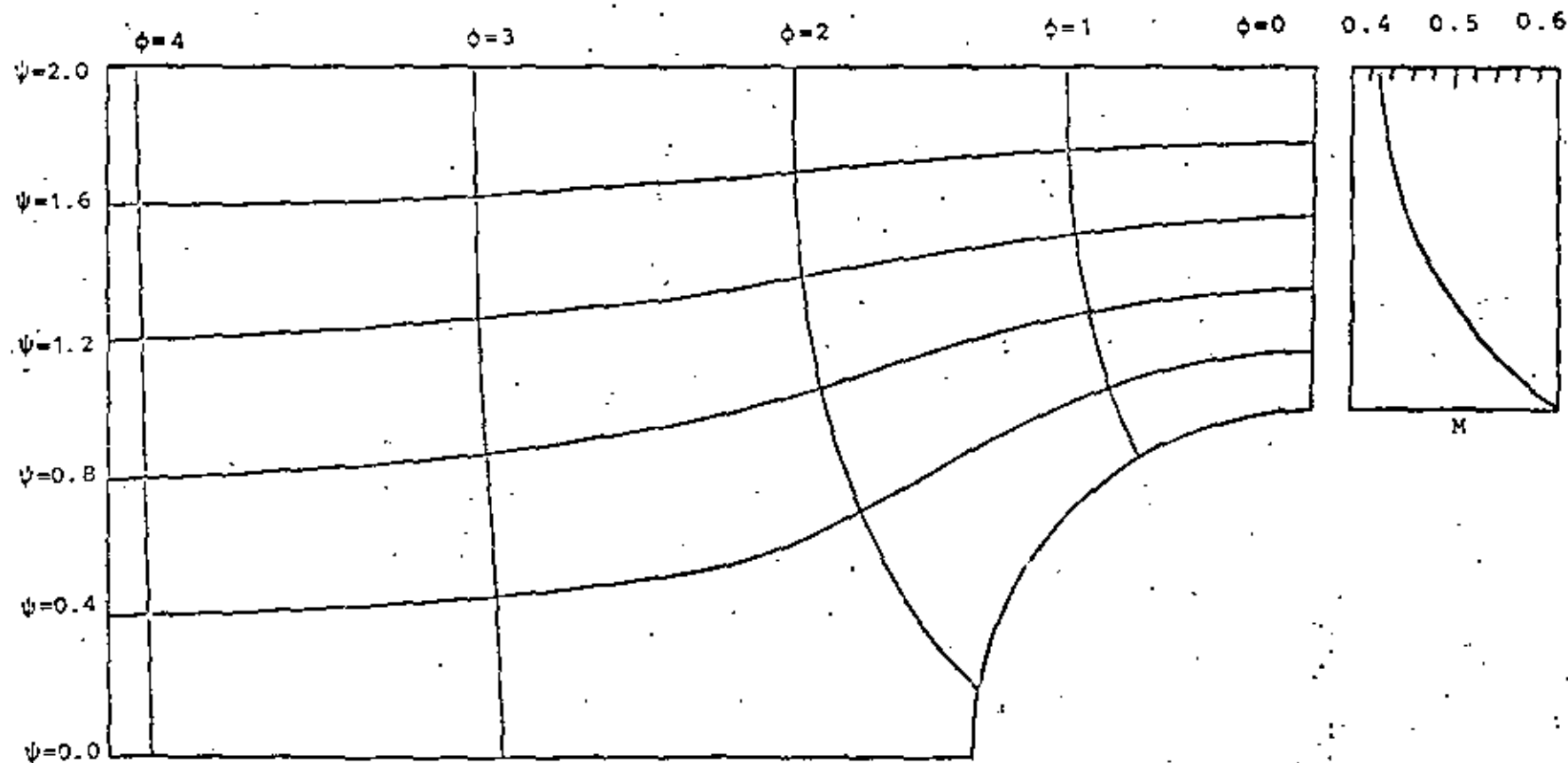


Fig 5.8. Líneas equipotenciales y líneas de corriente para  $M_\infty=0.3$  y variación del número de Mach local en la cresta del cilindro.

Para bajos números de Mach, se necesitan pocas iteraciones para la convergencia, como muestra la siguiente tabla:

$M_{\infty}$	ERMC	Iteraciones	
		para $\phi$	para $\psi$
0.1	0.0001	4	3
0.2	0.0001	9	3
0.3	0.0001	20	3

La función de corriente necesita menos iteraciones para converger, ya que se parte de valores exactos obtenidos del potencial de velocidad.

Para la malla gruesa se logra convergencia hasta para número de Mach 0.5, sin embargo los resultados obtenidos para este número no son confiables, debido a lo grueso de la discretización, es por ello que no se presentan.

Por último las soluciones numéricas demuestran la utilidad del método de elementos finitos de Galerkin, en combinación con un método iterativo, en la solución de problemas de flujo potencial subsónico.

## CAPITULO VI ECUACIONES NO LINEALES

6.1 INTRODUCCION La ecuación diferencial representada por

$$L(n) = 0$$

es lineal si sus combinaciones lineales de soluciones son también soluciones. De otra forma la ecuación es no lineal. O veces la ecuación diferencial es lineal con condiciones a la frontera no lineales. El problema en su conjunto es entonces no lineal.

En cualquier caso, la solución completa a un problema diferencial no lineal no puede obtenerse mediante la superposición de soluciones más sencillas. Esta es una desventaja tanto para el análisis teórico como para el numérico.

En la mecánica de fluidos y transferencia de calor aparecen comúnmente cuatro diferentes tipos de no linealidades:

(a) No linealidades debidas al cambio de las propiedades materiales con respecto a las variables de campo como son la velocidad, temperatura y presión. En la mayoría de los casos este cambio es relativamente poco. La no linealidad es como consecuencia, débil. El problema puede resolverse numéricamente mediante iteraciones en las que se toman los valores de las propiedades correspondiendo a las variables de campo en la iteración anterior. Al llegar a una convergencia del proceso iterativo se habrá encontrado la solución del problema no lineal. Esta técnica se utilizó para resolver el problema del flujo potencial compresible mencionado en el capítulo anterior.

(b) No linealidades debidas a la convección de las variables de campo. Estas provienen del hecho de que la des-

cripción euliana de las lineaciones de balance incluyen términos que reflejan el cambio en la variable de campo correspondiendo al transporte físico de un lugar al otro del material que constituye el medio continuo. En algunas situaciones específicas estos términos pueden ser idénticamente cero por lo que estos problemas se prestan a soluciones analíticas. Sin embargo, en muchos casos de interés práctico, los términos convectivos no pueden despreciarse frente a los difusivos. La relación entre la magnitud de los efectos convectivos y difusivos se representan mediante el número de Reynolds ( $Re$ ) en el caso de la ecuación de movimiento (o ecuación de transporte de cantidad de movimiento) y el número de Péclet ( $Pe$ ) en el caso de la ecuación de energía (o ecuación de transporte técnico). Para  $Re=0$ , el conjunto de ecuaciones es lineal y fácilmente resuelto tanto analíticamente como numéricamente. En caso de que  $Re$  sea de orden unitario se puede hacer una expansión alrededor de la solución de  $Re=0$ , obteniéndose las ecuaciones de perturbación también lineales (Vand Dyke, 1964). Para  $Re \rightarrow \infty$ , puede usarse la teoría de la capa límite (Schlichting, 1968) para dividir el dominio en una zona viscosa y otra no viscosa. Esta simplificación ayuda a la solución del problema y se usa para la mayoría de los cálculos aerodinámicos, en conjunto quizás con algún modelo de la turbulencia.

El problema del número de Reynolds intermedio es importante de punto de vista de su aplicación sobre todo a flujos internos. Los métodos numéricos tienen que emplearse en estos casos para la obtención del campo de variables y otros parámetros de interés como son las fuerzas sobre obstáculos y flujos de calor en las paredes. La no linealidad del problema es fuerte y el proceso iterativo necesario para llegar a la solución debe ser relativamente compleja. En este capítulo se usa la técnica de Newton-Raphson para este problema

(c) No linealidades debidas a las condiciones de frontera. Estas pueden provenir de una variedad de efectos, como por ejem-

$$\tilde{u} \approx u = \sum_{i=1}^n u_i n_i(x) \quad (6.4)$$

donde las  $n_i(x)$  son las función de interpolación. Efectuando el criterio de Galerkin al residuo  $\epsilon$  obtenido, se tiene

$$\int_{\Omega^e} \epsilon N_i dx = 0 \quad (6.5)$$

donde  $\Omega^e = [x^-, x^+]$  representa un elemento y

$$\epsilon = \frac{d^2 u}{dx^2} - 6u^2 \quad (6.6)$$

Se tiene

$$\int_{x^-}^{x^+} \frac{d^2 u}{dx^2} N_i dx - b \int_{x^-}^{x^+} u^2 N_i dx = 0 \quad (6.7)$$

Integrando el primer término por partes,

$$\int_{x^-}^{x^+} \frac{du}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx + 6 \int_{x^-}^{x^+} u^2 N_i dx = N_i \frac{dn}{dx} \Big|_{x^-}^{x^+} \quad (6.8)$$

Sustituyendo la ecuación (6.4) en la (6.8), se tiene

$$\sum_{j=1}^n u_j \int_{x^-}^{x^+} \frac{dN_j}{dx} \frac{dN_i}{dx} dx + 6 \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n u_j u_k \int_{x^-}^{x^+} N_i N_j N_k dx = N_i \frac{dn}{dx} \Big|_{x^-}^{x^+} \quad (6.9)$$



plo la ponencia de una superficie libre en un fluido o transferencia de calor por radiación en las fronteras. La no linealidad puede ser débil o fuerte dependiendo del valor de un parámetro que la represente, la pendiente de la superficie libre o la del flujo de calor por radiación comparado con el debido a conducción y convección.

(d) Otras no linealidades que forman parte de la formulación física del problema y que pueden deberse a procesos físicos como reacciones químicas en la combustión o a fronteras internas incógnitas como ondas de choque en el flujo transónico, ambos siendo ejemplos de la no linealidad fuerte.

## 6.2. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Considérese el problema no lineal representado por la ecuación diferencial ordinaria.

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - G_{\bar{u}}^2 = 0 \quad (6.1)$$

con las condiciones de frontera

$$\bar{u}(1)=1, \bar{u}(2)=0.25 \quad (6.2)$$

La solución exacta de esta ecuación no lineal es

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{x^2}, \quad (6.3)$$

la que se va a usar para propósitos de comparación con los resultados numéricos.

Para resolver la ecuación (6.1) numéricamente, se divide primero el dominio  $[1, 2]$  en elementos. En cada elemento se hace la aproximación.

lo que puede inscribirse como

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} u_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ijk} u_j u_k + C_i = 0 \quad (6.10)$$

donde

$$A_{ij} = \int_{x^-}^{x^+} \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} dx$$

$$B_{ijk} = 6 \int_{x^-}^{x^+} N_i N_j N_k dx$$

$$C_i = - N_i \left. \frac{du}{dx} \right|_{x^-}^{x^+}$$

La ecuación (6.10) representa la formulación de elementos finitos para cada elemento. Se tiene aquí dos opciones a seguir (a) Ensamblar las ecuaciones algebraicas de cada elemento en una formulación global. Recordando que las contribuciones  $C_i$  de elementos adyacentes se anulan, se llegará al siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales.

$$\sum_{j=1}^m A_{ij}^* u_j + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m B_{ijk}^* u_j u_k + C_i^* = 0, \quad i=1, m \quad (6.11)$$

Ahora se puede introducir las condiciones a la frontera y resolver las ecuaciones que se quedan. Una solución directa de las ecuaciones algebraicas no lineales no es posible, sino por medio de algún método iterativo.

Un método comúnmente usado es el de Newton-Raphson, descrito a continuación.

Considérese  $m$  ecuaciones en la  $n$  incógnitas  $u_1, u_2, \dots, u_n$  representadas por:

$$F_i(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad i=1, 2, \dots, m$$

Haciendo una expansión en serie de Taylor alrededor de los valores  $u_i = u_i^{(j)}$  de las funciones  $F_i$ , se tiene

$$F_i(u_1^{(j+1)}, u_2^{(j+1)}, \dots, u_n^{(j+1)}) = F_i(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)})$$

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial u_1}\right)\Delta u_1 + \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_2}\right)\Delta u_2 + \dots + \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_n}\right)\Delta u_n \quad (6.12)$$

para  $i=1, 2, \dots, m$ . Las derivadas se evalúan en  $u_1 = u_1^{(j)}, u_2 = u_2^{(j)}, \dots, u_n = u_n^{(j)}$ . Si se quiere que  $F_i(u_1^{(j+1)}, u_2^{(j+1)}, \dots, u_n^{(j+1)})$  sea cero, se tiene al desprestigiar los términos de orden superior,

$$F(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)}) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F_i}{\partial u_k}\right)\Delta u_k \quad i=1, 2, \dots, m \quad (6.13)$$

Entonces si  $u_i^{(j)}$  son los valores de  $u_i$  en una iteración  $j$ , los siguientes valores deben ser

$$u_i^{(j+1)} = u_i^{(j)} + \Delta u_i$$

donde  $\Delta u_i$  es la solución del conjunto de ecuaciones (6.13). El proceso se sigue hasta obtener convergencia de acuerdo con algún criterio prefijado.

(b) Un procedimiento mejor es el de aplicar la técnica de Newton-Raphson a las ecuaciones (6.10) de cada elemento, para después

En este caso, la ecuación representativa de un elemento es:

$$F_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} u_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{ijk} u_j u_k + C_i = 0 \quad (6.14)$$

De aquí

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_k} = A_{ik} + \sum_{m=1}^n (B_{ikm} + B_{imk}) u_m = H_{ik} \quad (6.15)$$

Estas expresiones para  $F_i$  y  $\partial F_i / \partial u_k$  pueden sustituirse en la ecuación (6.13) y el ensamblar estas ecuaciones de todos los elementos se tiene el conjunto global. Este puede resolverse para los incrementos  $\Delta u_k$  después de incorporar las condiciones a la frontera. La importante ventaja de este segundo procedimiento es que se tiene que almacenar solamente matrices de  $n \times n$  mientras que en el primero se necesitaría lugar para  $n \times n \times n$ . Desde luego, aun aquí se puede aprovechar de la simetría de las matrices con el fin de ahorrar memoria de la computadora.

La figura 6.1 ejemplifica la solución de la ecuación (6.1) con las condiciones de frontera (6.2) utilizando tres elementos de tipo lineal. Se indica también la solución exacta dada por la ecuación (6.3). La figura 6.2 tiene el error raíz medio cuadrático e para diferentes números de elementos tanto para elementos tipo lineal como cuadrático.

### 6.3 FLUJO VISCOZO

Las ecuaciones diferenciales adimensionales para la solución del flujo de un fluido viscoso incompresible son:

$$\text{div } \mathbf{q} = 0 \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \text{grad} \mathbf{q} = -\text{grad} p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{q} \quad (6.17)$$

El vector  $\mathbf{q}$  representa la velocidad,  $p$  la presión y  $t$ , el tiempo adimensionales. Aquí se tratará únicamente el caso bidimensional permanente en que  $n$  y  $v$  son las componentes cartesianas de  $\mathbf{q}$ . Con esta restricción, las ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6.18)$$

$$n \frac{\partial n}{\partial x} + v \frac{\partial n}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6.19)$$

$$n \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (6.20)$$

Existen tres posibilidades para tratar estas ecuaciones:

(a) Formulación variables primitivas: Se puede usar las ecuaciones (6.18), (6.19) y (6.20) en su forma original y determinar las tres incógnitas  $n, v, p$ .

(b) Formulación  $\psi$ - $w$ : Se definen la función de corriente  $\psi$  y la vorticidad  $w$  de manera que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (6.21)$$

$$w = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (6.22)$$

De éstas se obtiene:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -w \quad (6.23)$$

Fig 6.1: Solución de elemento finito

Fig. 6.2: Error obtenido con el método de elemento finito para diferentes números de elementos.

Además, se deriva la ecuación (6.20) con respecto a  $x$  y se resta la derivada de la (6.19) con respecto a  $y$ . Al utilizar la ecuación (6.18) se tiene la llamada ecuación de vorticidad:

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{R_e} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6.24)$$

En términos de la función de corriente ésta queda como

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = R_e \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \quad (6.25)$$

El conjunto de ecuaciones (6.23) y (6.25) debe resolverse para las dos incógnitas  $\psi$  y  $w$ .

(c) Formulación  $\psi$ : Al sustituir  $w$  de la ecuación (6.23) en la (6.25) se obtiene

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = R_e \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (6.26)$$

la cual es una sola ecuación de cuarto orden en la incógnita  $\psi$ .

Las tres formulaciones han sido utilizadas para la solución del problema de flujo viscoso. Aquí se verá solamente la  $\psi$ - $w$  que tiene ciertas ventajas con respecto a su bajo orden y la sencilla aplicación de las condiciones a la frontera. En efecto estas condiciones deben ser sobre  $u$  y  $v$  o sobre sus derivadas normales en contorno cerrado.

Para ejemplificar el uso del método del elemento finito se considera el caso del flujo viscoso alrededor de un cilindro entre placas planas como mostrado en la figura 6.3. Considerando simetría alrededor de una línea horizontal, se toma únicamente la mitad del dominio total indicado por el área ABCDEF.

En las fronteras sólidas BC y EF, la condición de que la velocidad normal sea cero se traduce a  $\psi = \text{constante}$  sobre estos tramos. Por esta razón, la ecuación (6.23) se reduce a  $w = -\partial^2 \psi / \partial n^2$ , donde  $n$  es la coordenada local normal a la superficie. Tómese un punto I en el interior del fluido, a una pequeña distancia  $\Delta s$  normal a la frontera. El punto F queda sobre la frontera a pie de esta normal. Con una expansión en serie de Taylor alrededor de F se tiene

$$\psi_I = \psi_F + \left(\frac{\partial \psi}{\partial n}\right)_F \Delta s + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2}\right)_F (\Delta s)^2 \quad (6.27)$$

con un error del orden  $(\Delta s)^3$ .

La condición de que la velocidad tangencial sobre la pared sólida es también cero se convierte a  $(\partial \psi / \partial n)_F = 0$ . La ecuación (6.27) se reduce a

$$\psi_I = \psi_F - w_F (\Delta s)^2 / 2 \quad (6.28)$$

Esta relación en combinación con  $\psi = \text{constante}$  debe ser utilizada en las fronteras sólidas BC y EF. En el tramo AF se usa la condición  $\psi = y - y^3/3$  y  $w = 2y$  que corresponde al perfil de velocidad semiparabólico. En la parte DE se considera  $\partial \psi / \partial x = \partial x = 0$ . En AB y CD,  $\psi = 0$  ya que forman parte de una línea de corriente y  $w = 0$  por la simetría del flujo.



En la figura 6.4 se muestra la malla utilizada. Las ecuaciones (6.23) y (6.25) se discretizan utilizando el método de elemento finito de Galerkin. Las incógnitas son las  $\psi$  es en todos los nodos interiores así como alguno de la frontera. A este conjunto de ecuaciones algebraicas se le introduce las condiciones de frontera, resolviéndose el conjunto reducido. Las figuras 6.5, 6.6, 6.7 y 6.8 muestran las líneas de corriente obtenidas para diferentes números de Reynolds. Alrededor de  $Re=50$  comienza a aparecer el vórtice estacionario atrás del cilindro que se hace más notorio a mayores números de Reynolds.

## CAPITULO VII

### C O C L U C I O N E S

Con estos apuntes se pretende ejemplificar las aplicaciones del método de elementos finitos al problema de termofluidos. Aparte de una descripción del método se ha incluido análisis de errores en algunos casos comparando la solución numérica con la analítica. Esto tiene el propósito de demostrar la validez del método de punto de vista de un usuario del método. También se formó un archivo de programas de cierta flexibilidad que se pueden encontrar en los Apéndices. Estos pueden usarse en relación con los problemas comunes de la transferencia de calor y mecánica de fluidos.

Se nota que la utilidad del método de elemento finito estriba principalmente en la solución de problemas elípticos, ya que se adapta bien a geometrías irregulares con condiciones de frontera tipo Dirichlet y Neumann. Es por ello que ha tenido una gran aceptación en la solución de problemas de la ingeniería. Se observa también que las ecuaciones parabólicas pueden manejarse a través de una combinación del método de elemento finito en la parte elíptica con el método de diferencias finitas en la parte parabólica.

Aunque el método de elemento finito no es el único para resolver los problemas de termofluidos, definitivamente debe ser considerado como una de las posibilidades para ello.

#### REFERENCIAS ADICIONALES

1. Van Dylec, M., Perturbation Methods in Fluid Mechanics, Academic Press, 1964.
2. Schlichting, H., Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1968.





```

SUBROUTINE ELFIN (NNO,NEL,NCF,NIT,LCR,NBAN,DELT,MODE,XNODE,YNODE,
* NENN,NOD,VAL,TEA,ALI,T1,TH,H,U,FO)

```

```

*****
*
*   ESTA SUBROUTINA CONTROLA TODOS LOS CALCULOS QUE SE
*   NECESITAN PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA, YA SEA CON
*   DUCION DE CALOR EN ESTADO PERMANENTE O TRANSITORIO.
*
*****

```

```

DIMENSION MODE(200),XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),TEA(25)
* ,TEN(25),ALI(50),CMP(25,8),DMP(25,8),CMPR(9,8),
* TENR(9),NOD(60),VAL(60),CNM(3,3),DNM(3,3),TEMP(200)
NMP=NNO-NCF

```

```

LIMPIA LAS MATRICES

```

```

DO 1 I=1,NNO
DO 1 J=1,NBAN
CMP(I,J)=0.0
DMP(I,J)=0.0

```

```

1 CONTINUE

```

```

CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES PARA CADA ELEMENTO
Y LAS ENSAMBLA EN LAS MATRICES GLOBALES

```

```

DO 5 I=1,NEL
CALL ELMT (I,XNODE,YNODE,NENN,CNM,DNM,DELT)
DO 4 J=1,3
JJ=NENN(I,J)
DO 3 K=J,3
KK=NENN(I,K)
LL=JJ
IF (LL.LT.KK) GO TO 2
LL=KK
KK=JJ
KKK=KK-LL+1
2 CMP(LL,KKK)=CMP(LL,KKK)+CNM(J,K)
DMP(LL,KKK)=DMP(LL,KKK)+DNM(J,K)
3 CONTINUE
4 CONTINUE
5 CONTINUE

```

```

REDUCE LA MATRIZ GLOBAL

```

```

K=0
DO 6 I=1,NNO
IF (MODE(I).NE.0) GO TO 6
K=K+1
L=0
JJ=NNO-I+1
IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
DO 5 J=1,JJ
IF (MODE(I+J-1).NE.0) GO TO 5

```

L=L+1

CMPR(K,L)=CMP(I,J)

110

5 CONTINUE

6 CONTINUE

TRIANGULARIZA LA MATRIZ REDUCIDA

CALL TRIBAN (NMP,NBAN,CMPR)

INICIA LA MARCHA EN EL TIEMPO

DO 16 M=1,NIT

DO 7 I=1,NNO

TEN(I)=0.0

7 CONTINUE

CALCULA EL VECTOR DE TEMPERATURA TRANSITORIA

DO 10 I=1,NNO

JJ=NNO-I+1

IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN

DO 8 J=1,JJ

TEN(J+I-1)=TEN(J+I-1)+CMP(I,J)\*TEA(I)

8 CONTINUE

IF (I.EQ.1) GO TO 10

JJ=NBAN

IF (JJ.GT.I) JJ=I

DO 9 J=2,JJ

TEN(I-J+1)=TEN(I-J+1)+DMP(I-J+1,J)\*TEA(I)

9 CONTINUE

10 CONTINUE

INTRODUCE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET

DO 13 II=1,NCF

I=NOD(I)

JJ=NNO-I+1

IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN

DO 11 J=1,JJ

IF (MODE(J+I-1).NE.0) GO TO 11

TEN(J+I-1)=TEN(J+I-1)-CMP(I,J)\*VAL(II)

11 CONTINUE

JJ=NBAN

IF (JJ.GT.I) JJ=I

DO 12 J=1,JJ

IF (MODE(I-J+1).NE.0) GO TO 12

TEN(I-J+1)=TEN(I-J+1)-CMP(I-J+1,J)\*VAL(II)

12 CONTINUE

TEN(I)=VAL(II)

13 CONTINUE

REDUCE EL VECTOR GLOBAL DE TEMPERATURAS

K=0

DO 14 I=1,NNO

```

      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 14
      K=K+1
      TENR(K)=TEN(I)
14  CONTINUE
C
C
C     RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES
C
C     CALL RESOLV (NMP,NBAN,CMPR,TENR)
C
C     ENZAMBLA EL VECTOR DE TEMPERATURAS RESULTANTE
C
      L=0
      DO 15 I=1,NNO
      IF (MODE(I).NE.0) GO TO 15
      L=L+1
      TEA(I)=TENR(L)
15  CONTINUE
C
C
C     ESCRIBE LAS TEMPERATURAS PARA EL INCREMENTO DE TIEMPO
C
      TIM=DELT*M
      WRITE (6,100) TIM
      WRITE (6,200) (I,TEA(I),I=1,NNO)
C
C
C     CALCULA LAS LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE
C
      CALL LICOR (TEA,NEL,LCR,XNODE,YNODE,NENN,ALI)
C
C     CALCULA LA SOLUCION ANALITICA EN EL CASO DE LA PLACA
C
      CALL TEMPER (NNO,XNODE,YNODE,NENN,T1,TM,H,W,F0,TEMP,TIM)
C
C     CALCULA LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE PARA LA SOLUCION
      ANALITICA
C
      CALL LICOR (TEMP,NEL,LCR,XNODE,YNODE,NENN,ALI)
C
C     CALCULA EL ERROR ENTRE LA SOLUCION ANALITICA Y
      DE ELEMENTOS FINITOS
C
      CALL ERROR (NNO,MODE,TEA,TEMP)
16  CONTINUE
      RETURN
100 FORMAT (///20X,'VALORES DE LAS TEMPERATURAS PARA',//,
*        30X,'TIEMPO = ',E18.12/)
200 FORMAT (25X,'TEM(',I3,') = ',E18.12)
      END
C
      SUBROUTINE ELHT (N,XNODE,YNODE,NENN,CNM,DMN,DELT)
C
C     *****
C
C     *
C     *     ESTA SUBROUTINA CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES
C     *     DE TEMPERATURA PERMANENTE Y TRANSITORIA, PARA CADA
C     *     ELEMENTO.
C     *
C     *****

```

```
DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),CNM(3,3),DNM(3,3)
```

```
*      ,X(3),Y(3),B(3),C(3)
```

```
DO 1 L=1,3
```

```
I=NENN(N,L)
```

```
X(L)=XNODE(I)
```

```
Y(L)=YNODE(I)
```

```
1 CONTINUE
```

```
A2=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)+X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
```

```
A=A2/2.
```

```
B(1)=(Y(2)-Y(3))/A2
```

```
B(2)=(Y(3)-Y(1))/A2
```

```
B(3)=-B(1)-B(2)
```

```
C(1)=(X(2)-X(3))/A2
```

```
C(2)=(X(3)-X(1))/A2
```

```
C(3)=-C(1)-C(2)
```

```
DO 2 I=1,3
```

```
Z=(B(1)*B(I)+C(1)*C(I))*DELTA
```

```
CNM(I,I)=A/3.+Z
```

```
DNM(I,I)=A/3.-Z
```

```
2 CONTINUE
```

```
DO 4 I=1,2
```

```
DO 3 J=I+1,3
```

```
Z=(B(I)*B(J)+C(I)*C(J))*DELTA
```

```
CNM(I,J)=A/6.+Z
```

```
DNM(I,J)=A/6.-Z
```

```
3 CONTINUE
```

```
--4 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE ERROR (NNO,MODE,TEA,TEMP)
```

```
*****
```

```
*                                                                 *
```

```
*      ESTA SUBROUTINA CALCULA EL ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO      *
```

```
*      QUE EXISTE ENTRE LA SOLUCION ANALITICA Y LA DE             *
```

```
*      ELEMENTOS FINITOS.                                          *
```

```
*                                                                 *
```

```
*****
```

```
DIMENSION TEA(200),TEMP(200),MODE(200)
```

```
L=0
```

```
ERMC=0.
```

```
ERNCR=0.
```

```
DO 1 I=1,NNO
```

```
IF (MODE(I).NE.0) GO TO 1
```

```
L=L+1
```

```
ERMC=ERMC+(TEA(I)-TEMP(I))**2.
```

```
ERNCR=ERNCR+((TEA(I)-TEMP(I))/TEMP(I))**2.
```

```
1 CONTINUE
```

```
ERMC=SQRT(ERMC/L.)
```

```
ERNCR=SQRT(ERNCR/L.)*100.
```

```
WRITE (6,100) ERMC,ERNCR
```

```
RETURN
```

```
100 FORMAT (/20X,'ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO = ',E18.12,'//20X,
```

```
*      'ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO RELATIVO = ',E18.12,' Z')
```

```
END
```



SUBROUTINE LICOR (GHI,NEL,LCR,XNODE,YNODE,NENN,ALI)

```

*****
*
*   ESTA SUBROUTINA CALCULA LINEAS DE TEMPERATURA CONSTANTE
*   POR MEDIO DE INTERPOLACION LINEAL DENTRO DE CADA UNO DE
*   ELEMENTO.
*
*****

```

```

DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),GHI(200),ALI(50)
*       ,XLIN(70),YLIN(70)
DO 13 M=1,LCR
  N=0
  DO 9 I=1,NEL
    J=NENN(I,1)
    K=NENN(I,2)
    L=NENN(I,3)
    IF (GHI(J).EQ.ALI(M).OR.GHI(K).EQ.ALI(M).OR.
*     GHI(L).EQ.ALI(M)) GO TO 6
    IF (GHI(J).GT.ALI(M).AND.GHI(K).LT.ALI(M).OR.
*     GHI(J).LT.ALI(M).AND.GHI(K).GT.ALI(M)) GO TO 1
    GO TO 2
  1 N=N+1.
    FACT=(GHI(J)-ALI(M))/(GHI(J)-GHI(K))
    XLIN(N)=XNODE(J)-(XNODE(J)-XNODE(K))*FACT
    YLIN(N)=YNODE(J)-(YNODE(J)-YNODE(K))*FACT
  2 IF (GHI(J).GT.ALI(M).AND.GHI(L).LT.ALI(M).OR.
*     GHI(J).LT.ALI(M).AND.GHI(L).GT.ALI(M)) GO TO 3
    GO TO 4
  3 N=N+1.
    FACT=(GHI(J)-ALI(M))/(GHI(J)-GHI(L))
    XLIN(N)=XNODE(J)-(XNODE(J)-XNODE(L))*FACT
    YLIN(N)=YNODE(J)-(YNODE(J)-YNODE(L))*FACT
  4 IF (GHI(K).GT.ALI(M).AND.GHI(L).LT.ALI(M).OR.
*     GHI(K).LT.ALI(M).AND.GHI(L).GT.ALI(M)) GO TO 5
    GO TO 9
  5 N=N+1.
    FACT=(GHI(K)-ALI(M))/(GHI(K)-GHI(L))
    XLIN(N)=XNODE(K)-(XNODE(K)-XNODE(L))*FACT
    YLIN(N)=YNODE(K)-(YNODE(K)-YNODE(L))*FACT
    GO TO 9
  6 IF (GHI(J).NE.ALI(M)) GO TO 7
    N=N+1.
    XLIN(N)=XNODE(J)
    YLIN(N)=YNODE(J)
  7 IF (GHI(K).NE.ALI(M)) GO TO 8
    N=N+1.
    XLIN(N)=XNODE(K)
    YLIN(N)=YNODE(K)
  8 IF (GHI(L).NE.ALI(M)) GO TO 9
    N=N+1.
    XLIN(N)=XNODE(L)
    YLIN(N)=YNODE(L)
  9 CONTINUE

```

```

WRITE(6,100),ALI(M)
MM=N-1.
LL=N
DO 12 II=1,MM
KK=II+1
DO 11 JJ=KK,N
PIT=XLIN(II)-XLIN(JJ)
TIP=YLIN(II)-YLIN(JJ)
IF (ABS(PIT).GT.0.000000001.OR.ABS(TIP).GT.0.000000001) GO TO 10
LL=LL-1.
XLIN(JJ)=100000.0
YLIN(JJ)=LL*100000.0
10 IF (XLIN(II).LE.XLIN(JJ)) GO TO 11
S=XLIN(II)
T=YLIN(II)
XLIN(II)=XLIN(JJ)
YLIN(II)=YLIN(JJ)
XLIN(JJ)=S
YLIN(JJ)=T
11 CONTINUE
12 CONTINUE
WRITE(6,101) (I,XLIN(I),YLIN(I),I=1,LL)
13 CONTINUE
RETURN
100 FORMAT (///32X,'PUNTOS EN LOS QUE LA TEMPERATURA',//36X,
* ' ES CONSTANTE PARA:',//45X,'TEM =',F10.4,
* //33X,'PUNTO COORD-X COORD-Y')
101 FORMAT (34X,I3,2X,F15.8,' ',F15.8)
END

```

```

SUBROUTINE RESOLV (N,NBAN,A,B)

```

```

*****
*
*   ESTA SUBROUTINA RESUELVE UN SISTEMA DE ECUACIONES
*   TRIANGULARIZADO, POR MEDIO DE SUSTITUCION GAUSSIANA
*   HACIA ADELANTE Y HACIA ATRAS.
*
*****

```

```

DIMENSION A(87,87),B(87)

```

```

DO 20 I=2,N
SUM=B(I)
KK=I-NBAN+1
IF (KK.LE.0) KK=1
DO 10 K=KK,I-1
SUM=SUM-A(K,I+1-K)*B(K)
10 CONTINUE
B(I)=SUM
20 CONTINUE
DO 50 L=1,N
I=N-L+1
SUM=B(I)/A(I,1)
KK=I+1
II=1+NBAN-1
IF (II.GT.N) II=N

```

```

IF (KK.GT.II) GO TO 40
DO 30 K=KK,II
SUM=SUM-A(I,K-I+1)*B(K)
30 CONTINUE
40 B(I)=SUM
50 CONTINUE
RETURN
END

```

```

C
SUBROUTINE TEMPER (NNO,XNODE,YNODE,NENN,T1,TH,H,W,FO,TEMP,TIM)
C *****
C *
C *   ESTA SUBROUTINA OBTIENE LA SOLUCION ANALITICA POR
C *   MEDIO DE SERIE DE FOURIER SENOIDAL, PARA EL PROBLEMA
C *   DE CONDUCCION DE CALOR, EN ESTADO PERMANENTE Y
C *   TRANSITORIO, EN UNA PLACA RECTANGULAR.
C *
C *****
C
DIMENSION XNODE(200),YNODE(200),NENN(80,3),TEMP(200),IT(200)
PI=3.141592654
DO 3 I=1,NNO
KON=-1
GAR=0.0
DO 1 J=1,1000
KON=-1*KON
TIA=J*KON/(H*H/W/W+J*J)*SIN(J*PI*YNODE(I)/H
* )*EXP(-(1./W/W+J*J/H/H)*PI*PI*FO*TIM)
GAR=GAR+TIA
IF (ABS(TIA).LT.1.E-45) GO TO 2
1 CONTINUE
2 IT(I)=J
TEMP(I)=TM*SIN(PI*XNODE(I)/W)*(SINH(PI*YNODE(I)/W)
* /SINH(PI*H/W)-2./PI*GAR)+T1
3 CONTINUE
WRITE (6,100)
WRITE (6,200) (IT(I),I,TEMP(I),I=1,NNO)
RETURN
100 FORMAT (///20X,'DISTRIBUCION DE TEMPERATURAS EN LA PLACA'//)
200 FORMAT (21X,'ITER = ',I4,2X,'TEM(',I3,',') = ',E18,12)
END

```

```

C
SUBROUTINE TRIHAN (N,NBAN,A)
C *****
C *
C *   ESTA SUBROUTINA TRIANGULARIZA UNA MATRIZ SIMETRICA
C *   POR EL METODO DE GAUSS-CROUT, MODIFICADO PARA
C *   MATRICES BANDEADAS.
C *
C *****
C
DIMENSION A(250,250)
DO 50 I=1,N
IP=N-I+1
IF (NBAN.LT.IP) IP=NBAN

```

```
DO 40 J=1,IP
SUM=A(I,J)
KK=14J-NBAN
IF (KK.LE.0) KK=1
II=I-1
IF (KK.GT.II) GO TO 20
DO 10K=KK,II
SUM=SUM-A(K,I)*A(K,I+1-K)*A(K,I+J-K)
10 CONTINUE
20 IF (J.LE.1) GO TO 30
A(I,J)=SUM/PARA
GO TO 40
30 PARA=SUM
IF (ABS(SUM).LE.0.00000001) GO TO 60
A(I,J)=SUM
40 CONTINUE
50 CONTINUE
RETURN
60 WRITE (6,100) I,J,PARA
STOP
100 FORMAT (10X,"LA MATRIZ SE HACE SINGULAR">//10X,"EN EL ELEMENTO",
*      * A(",I3,",",I3,") =",F15.12)
END
```



```

C
C DIMENSION NENN(250,6),XNODE(250),YNODE(250),MODE(250),NODO(100),
* XNODO(100),YNODO(100),NODE(150),VELX(150),VELY(150),
* ANOR1(50),ANOR2(50),NOD(50),MODD(50),VAL(50),XL(6),YL(6),
* AL1(6),AL2(6),AL3(6),ALC(75)

```

```

C
C LEE LOS PARAMETROS DEL PROGRAMA

```

```

C
C READ (5,/) NES
C READ (5,/) NNO,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,NNE,LCR,NBAN
C READ (5,/) AMAC,B,IMAX,ERR

```

```

C
C LEE LA DISTRIBUCION DE NODOS EN CADA ELEMENTO

```

```

C
C READ (5,/) ((NENN(I,J),J=1,6),I=1,NEL)

```

```

C
C LEE LAS COORDENADAS DE LOS NODOS EN ESQUINA

```

```

C
C READ (5,/) (NODO(I),XNODO(I),YNODO(I),I=1,NNE)
C IF (NCFN.LE.0) GO TO 1

```

```

C
C LEE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN

```

```

C
C READ (5,/) (NODE(I),VELX(I),VELY(I),I=1,NCFN)
C READ (5,/) (ANOR1(I),ANOR2(I),I=1,NEFN)

```

```

C
C LEE LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET

```

```

C
C 1 READ (5,/) (NOD(I),MODD(I),VAL(I),I=1,NCFD)

```

```

C
C LEE LOS VALORES DE LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES

```

```

C
C READ (5,/) (ALC(I),I=1,LCR)

```

```

C
C CALCULA LAS COORDENADAS DE LOS NODOS INTERMEDIOS

```

```

C
C DO 2 I=1,NNE
C K=NODO(I)
C XNODE(K)=XNODO(I)
C YNODE(K)=YNODO(I)

```

```

C 2 CONTINUE

```

```

C DO 4 I=1,NEL

```

```

C DO 3 J=1,3

```

```

C K=NENN(I,J)

```

```

C XL(J)=XNODE(K)

```

```

C YL(J)=YNODE(K)

```

```

C 3 CONTINUE

```

```

C XL(4)=(XL(1)+XL(2))/2.

```

```

C XL(5)=(XL(2)+XL(3))/2.

```

```

C XL(6)=(XL(1)+XL(3))/2.

```

```

C YL(4)=(YL(1)+YL(2))/2.

```

```

C YL(5)=(YL(2)+YL(3))/2.

```

```

C YL(6)=(YL(1)+YL(3))/2.

```

```

C DO 4 J=4,6

```

```

C K=NENN(I,J)

```

119

```

XNODE(K)=XL(J)
YNODE(K)=YL(J)
4 CONTINUE
DO 5 I=1,NND
MODE(I)=0.0
5 CONTINUE
DO 6 I=1,NCFD
K=NOD(I)
MODE(K)=MODE(I)
6 CONTINUE
C
C ASIGNA LOS VALORES DE LAS COORDENADAS DE AREA
C
DO 7 I=1,6
AL1(I)=0.0
AL2(I)=0.0
7 CONTINUE
AL1(1)=1.
AL1(4)=0.5
AL1(6)=0.5
AL2(2)=1.
AL2(4)=0.5
AL2(5)=0.5
DO 8 I=1,6
AL3(I)=1.-AL1(I)-AL2(I)
8 CONTINUE
IF (NES.EQ.1) GO TO 9
C
C ESCRIBE LOS DATOS DEL PROGRAMA
C
WRITE(6,100) AMAC,B,IMAX,ERR
WRITE (6,101) NND,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,NNE
WRITE (6,102) (I,(NENN(I,J),J=1,6),I=1,NEL)
WRITE (6,103)
WRITE (6,104) (I,MODE(I),XNODE(I),YNODE(I),I=1,NND)
WRITE (6,105)
WRITE (6,106) (NODE(I),VELX(I),VELY(I),I=1,NCFN)
WRITE (6,107)
WRITE (6,108) (I,ANOR1(I),ANOR2(I),I=1,NEFN)
WRITE (6,109)
WRITE (6,110) (NOD(I),VAL(I),I=1,NCFD)
C
C LLAMA A LA SUBROUTINA MAESTRA
C
9 CALL ELFIN (NND,NEL,NCFN,NCFD,NEFN,AMAC,B,IMAX,ERR,NENN,MODE,
* XNODE,YNODE,NODE,VELX,VELY,ANOR1,ANOR2,NOD,VAL,
* AL1,AL2,AL3,LCR,ALC,NBAH)
CALL EXIT
100 FORMAT (//5X,'NUMERO DE MACH =',F8.5,//5X,'FACTOR ISOENTROPICO =',
* F9.5,//5X,'NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES =',I4,//5X,
* 'MAXIMO ERROR PERMITIDO =',F7.6)
101 FORMAT (///5X,'NUMERO TOTAL DE NODOS =',I4,//5X,'NUMERO ',
* 'DE ELEMENTOS =',I4,//5X,'NUMERO DE CONDICIONES DE ',
* 'DE FRONTERA DE DIRICHLET =',I4,//5X,'NUMERO DE ',
* 'ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA DE NEUMAN =',

```

```

*      I4, //5X, *NUMERO DE NODOS EN ESQUINA = *, I4, // //15X,
*      *DISTRIBUCION DE NODOS EN CADA ELEMENTO*, //20X,
*      *ELMT  1  2  3  4  5  6*, //)
102 FORMAT (20X, 7I4)
103 FORMAT (/// //28X, *COORDENADAS DE LOS NODOS*, //20X,
*      * NODO NODO  COORD-X  COORD-Y*, //)
104 FORMAT (20X, 2I5, 2F10.5)
105 FORMAT (/// //20X, *VALORES DE LAS VELOCIDADES EN*, //24X,
*      *LOS NODOS DE FRONTERA*, //22X, * NODO  VEL-X  VEL-Y*, //)
106 FORMAT (22X, I5, 2F10.5)
107 FORMAT (/// //20X, *VALORES DE LAS NORMALES EN LOS*, //24X, *ELE*,
*      *MENTOS DE FRONTERA*, //22X, * ELMT NORMAL-1  NORMAL-2* //)
108 FORMAT (22X, I5, 2F10.5)
109 FORMAT (/// //20X, *VALORES DE LAS CONDICIONES DE*, //24X,
*      *FRONTERA DE DIRICHLET*, //26X, * NODO  VALOR* //)
110 FORMAT (26X, I5, F10.5)
111 FORMAT (/// //20X, *VALORES DE LAS COORDENADAS DE AREA*, //28X,
*      *EN CADA ELEMENTO*, //22X, * NODO  L1  L2*,
*      *      L3*, //)
112 FORMAT (22X, I5, 3F8.5)
END

```

C

```

SUBROUTINE ELFIN (NNO, NEL, NCFN, NCFD, NEFN, AMAC, B, IMAX, ERR, NENN, MODE
*      , XNODE, YNODE, NODE, VELX, VELY, ANOR1, ANOR2, NOD, VAL, AL1, AL2
*      , AL3, LCR, ALC, NBRN)

```

C

```

*****

```

C

```

*      * ESTA SUBROUTINA CONTROLA TODOS LOS CALCULOS QUE SE          *
*      * NECESITAN PARA LA SOLUCION DEL PROBLEMA, YA SEA          *
*      * FLUJO COMPRESIBLE O INCOMPRESIBLE.                      *
*      *

```

C

C

C

C

```

*****
DIMENSION MODE(250), XNODE(250), YNODE(250), NENN(250, 6), PHI(250),
*      AMP(250, 250), AMPRA(180, 180), AMPRN(180, 180), PHIRN(180),
*      PHIR1(180), COM(250), COMR(180), NOD(50), VAL(50), NODE(150),
*      VELX(150), VELY(150), ANOR1(50), ANOR2(50), ANM(6, 6), FN(3),
*      AL1(6), AL2(6), AL3(6), PHIRA(180), PHI(6), XLIN(200), YLIN(200)
*      , ALC(75)

```

```

NMF=NNO-NCFD

```

C

C

C

```

LIMPIA LAS MATRICES Y LOS VECTORES

```

```

DO 1 I=1, NNO
PHI(I)=0.0
DO 1 J=1, NBRN
AMP(I, J)=0.0
AMPRN(I, J)=0.0

```

```

1 CONTINUE

```

C

C

C

C

```

CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES PARA CADA ELEMENTO
Y LAS ENSAMBLA EN LA MATRIZ GLOBAL

```

```

DO 5 I=1, NEL
CALL ELMT (I, XNODE, YNODE, NENN, ANM)

```



```

DO 4 J=1,6
  JJ=NEHN(I,J)
  DO 3 K=J,6
    KK=NEHN(I,K)
    LL=JJ
    IF (LL.LT.KK) GO TO 2
    LL=KK
    KK=JJ
  2 AMP(LL, KK-LL+1)=AMP(LL, KK-LL+1)+ANM(J,K)
  3 CONTINUE
  4 CONTINUE
  5 CONTINUE
  IF (NCFN.LE.0) GO TO 7

```

```

C
C
C   CALCULA EL VECTOR DE FLUJO SI EXISTE

```

```

  LL=1
  DO 7 I=1,NEFN
    CALL NEUMAN (I,LL,XNODE,YNODE,VELX,VELY,ANOR1,ANOR2,FN)
    JJ=LL
    DO 6 J=1,3
      KK=NODE(JJ)
      PHI(KK)=PHI(KK)+FN(J)
      JJ=JJ+1
    6 CONTINUE
    LL=LL+2
  7 CONTINUE

```

```

C
C
C   INTRODUCES LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE DIRICHLET.

```

```

DO 10 II=1,NCFD
  I=NOD(II)
  JJ=NNO-I+1
  IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
  DO 8 J=1,JJ
    IF (MODE(J+I-1).NE.0) GO TO 8
    PHI(J+I-1)=PHI(J+I-1)-AMP(I,J)*VAL(II)
  8 CONTINUE
  JJ=NBAN
  IF (JJ.GT.1) JJ=1
  DO 9 J=1,JJ
    IF (MODE(I-J+1).NE.0) GO TO 9
    PHI(I-J+1)=PHI(I-J+1)-AMP(I-J+1,J)*VAL(II)
  9 CONTINUE
  PHI(I)=VAL(II)
10 CONTINUE

```

```

C
C
C   REDUCE LA MATRIZ Y EL VECTOR GLOBALES

```

```

  K=0
  DO 12 I=1,NNO
    IF (MODE(I).NE.0) GO TO 12
    K=K+1
    PHIRI(K)=PHI(I)
    PHIRN(K)=PHI(I)
  12 CONTINUE

```

```

L=0
JJ=NNO-I+1
IF (JJ.GT.NBAN) JJ=NBAN
DO 11 J=1,JJ
IF (MODE(I+J-1).NE.0) GO TO 11
L=L+1
AMPRN(K,L)=AMP(I,J)
11 CONTINUE
12 CONTINUE

C
C   TRIANGULARIZA LA MATRIZ REDUCIDA
C
CALL TRIBAN (NMP,NBAN,AMPRN)

C
C   RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES PARA FLUJO INCOMPRESIBLE
C
CALL RESOLV (NMP,NBAN,AMPRN,PHIRN)
CALL ERROR (ITER,ERR,IMAX,NNO,NMP,PHI,PHIRN,MODE
*          ,PHIRA)

C
C   INICIA LAS ITERACIONES PARA FLUJO COMPRESIBLE
C
ITER=0
13 ITER=ITER+1
IF (ITER.EQ.10001) GO TO 19
DO 14 I=1,NNO
COM(I)=0.0
14 CONTINUE

C
C   CALCULA LOS TERMINOS NO LINEALES
C
DO 16 N=1,NEL
CALL NOLINE (N,AMAC,B,XNODE,YNODE,NENN,PHI,AL1,AL2,AL3,FHI)
DO 15 J=1,6
K=NENN(N,J)
COM(K)=COM(K)+FHI(J)
15 CONTINUE
16 CONTINUE
L=0

C
C   CALCULA EL NUEVO VECTOR DE FLUJO
C
DO 17 I=1,NNO
IF (MODE(I).NE.0) GO TO 17
L=L+1
COMR(L)=COM(I)
17 CONTINUE
DO 18 I=1,NMP
PHIRN(I)=PHIR1(I)+COMR(I)
18 CONTINUE

C
C   RESUELVE EL SISTEMA DE ECUACIONES PARA FLUJO COMPRESIBLE
C
CALL RESOLV (NMP,NBAN,AMPRN,PHIRN)

```

```

C      CALCULA LA DIFERENCIA CON LA ITERACION ANTERIOR
C
CALL ERROR (ITER,ERR,IMAX,NNO,NMP,PHI,PHIRN,MODE
*        ,PHIRA)
GO TO 13
C
C      CALCULA LAS LINEAS EQUIPOTENCIALES
19 CALL LICOR (NENN,XNODE,YNODE,PHI,ALC,XLIN,YLIN,LCR,NEL)
RETURN
END
C
SUBROUTINE ELMT (N,XNODE,YNODE,NENN,ANM)
*****
*
*   ESTA SUBROUTINA CALCULA LAS MATRICES DE COEFICIENTES
*   PARA CADA ELEMENTO, UTILIZANDO FUNCIONES DE INTERPO-
*   LACION CUADRATICA.
*
*****
DIMENSION XNODE(250),YNODE(250),NENN(250,6),X(3),Y(3),ANM(6,6)
DO 1 I=1,3
K=NENN(N,I)
X(I)=XNODE(K)
Y(I)=YNODE(K)
1 CONTINUE
DET=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)+X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
B1=(Y(2)-Y(3))/DET
B2=(Y(3)-Y(1))/DET
B3=(Y(1)-Y(2))/DET
C1=(X(3)-X(2))/DET
C2=(X(1)-X(3))/DET
C3=(X(2)-X(1))/DET
Z1=B1*B1+C1*C1
Z2=B2*B2+C2*C2
Z3=B3*B3+C3*C3
Z12=B1*B2+C1*C2
Z13=B1*B3+C1*C3
Z23=B2*B3+C2*C3
AREA=DET/2.
H=AREA/3.
ANM(1,1)=3.*H*Z1
ANM(1,2)=-Z12*H
ANM(1,3)=-Z13*H
ANM(1,4)=4.*Z12*H
ANM(1,5)=0.0
ANM(1,6)=4.*Z13*H
ANM(2,2)=3.*Z2*H
ANM(2,3)=-Z23*H
ANM(2,4)=4.*Z12*H
ANM(2,5)=4.*Z23*H
ANM(2,6)=0.0
ANM(3,3)=3.*Z3*H
ANM(3,4)=0.0

```

```

ANM(3,5)=4.*Z23*H
ANM(3,6)=4.*Z13*H
ANM(4,4)=8.*H*(Z1+Z2+Z12)
ANM(4,5)=4.*H*(Z2+Z12+2.*Z13+Z23)
ANM(4,6)=4.*H*(Z1+Z12+Z13+2.*Z23)
ANM(5,5)=8.*H*(Z2+Z3+Z23)
ANM(5,6)=4.*H*(Z3+2.*Z12+Z13+Z23)
ANM(6,6)=8.*H*(Z1+Z3+Z13)
RETURN
END

```

C

```

SUBROUTINE ERROR (ITER,ERR,IMAX,NNO,NMF,PHI,PHIRN,MODE
,PHIRA)

```

C

C

C

C

C

C

C

C

```

*****
*
*   ESTA SUBROUTINA CALCULA LA DIFERENCIA ENTRE EL VALOR
*   DE LA ITERACION ANTERIOR Y LA NUEVA, POR MEDIO DEL
*   ERROR RAIZ MEDIO CUADRATICO.
*
*****

```

```

DIMENSION PHI(250),PHIRN(180),PHIRA(180),MODE(250)

```

```

IF (ITER.GT.0) GO TO 3

```

```

L=0

```

```

DO 1 I=1,NNO

```

```

IF (MODE(I).NE.0) GO TO 1

```

```

L=L+1

```

```

PHI(I)=PHIRN(L)

```

```

1 CONTINUE

```

```

DO 2 I=1,NMF

```

```

PHIRA(I)=PHIRN(I)

```

```

2 CONTINUE

```

```

WRITE (6,100)

```

```

WRITE (6,200) (I,PHI(I),I=1,NNO)

```

```

GO TO 7

```

```

3 ERMEC=0.

```

```

EMECRE=0.0

```

```

DO 4 I=1,NMF

```

```

ERMEC=ERMEC+(PHIRN(I)-PHIRA(I))**2.

```

```

EMECRE=EMECRE+((PHIRN(I)-PHIRA(I))/PHIRA(I))**2.

```

```

4 CONTINUE

```

```

ERMEC=SQRT(ERMEC/NMF)

```

```

EMECRE=SQRT(EMECRE/NMF)

```

```

L=0

```

```

DO 5 I=1,NNO

```

```

IF (MODE(I).NE.0) GO TO 5

```

```

L=L+1

```

```

PHI(I)=PHIRN(L)

```

```

5 CONTINUE

```

```

WRITE (6,300) ITER,ERMEC,EMECRE

```

```

WRITE (8,/) ITER

```

```

IF (EMECRE.LE.ERR) GO TO 8

```

```

IF (ITER.GE.IMAX) GO TO 9

```

```

DO 6 I=1,NMF

```

```

PHIRA(I)=PHIRN(I)

```

12525

```

6 CONTINUE(10)
7 RETURN (10)
8 WRITE (6,400)(10)
  WRITE (6,500)(10)
  WRITE (6,200)(I,PHI(I),I=1,NNO)(10)
  ITER=10000(10)
  RETURN(10)
9 WRITE (6,600)(10)
  WRITE (6,500)(10)
  WRITE (6,200)(I,PHI(I),I=1,NNO)(10)
  STOP (10)
100 FORMAT ('///20X,'VALORES DE LA VELOCIDAD POTENCIAL',/27X'/Y,
*      ' SIN COMPRESIBILIDAD: //) //)
200 FORMAT ('22X,'PHI(',I3,',)='E18.12) (2)
300 FORMAT ('/5X,'ND, ITERACION '=',I3,4X,'ERR.M;C;R;C'='E18.12,4X,'ERR.M;C;R;C'='E18.12,/) (2)
500 FORMAT ('//20X,'VALORES DE LA VELOCIDAD POTENCIAL',/27X'/Y,
*      ',21X,'OBTENIDOS EN LA ULTIMA ITERACION: //) //)
400 FORMAT ('//10X,' **** EL SIGUIENTE ES EL RESULTADO FINAL: '
*      ' **** //) //)
600 FORMAT ('//10X,' **** NO CONVERGE EN EL MAXIMO NUMERO DE
*      ' ITERACIONES **** //) //)
END(10)

```

```

C C
C C SUBROUTINE LICOR (NENN,XNODE,YNODE,FAS,CAL,XLIN,YLIN,LCR,NEL,NEL)
C C *****
C C *
C C * ESTA SUBROUTINA CALCULA LINEAS EQUIPOTENCIALES
C C * INTERPOLANDO CUADRATICAMENTE DENTRO DE CADA
C C * ELEMENTO: (1)
C C *
C C *****
C C
C C DIMENSION NENN(250,6),XNODE(250),YNODE(250),FAS(250),CAL(100),0,
*      XAI(3),XLIN(200),YLIN(200)(0)
C C DO 29 M=1,LCRICK
C C N=0 M=0
C C DO 25 I=1,NEL,NEL
C C L=0 I=0
C C II=NENN(I,1),1)
C C JJ=NENN(I,2),2)
C C KK=NENN(I,3),3)
C C LL=NENN(I,4),4)
C C MM=NENN(I,5),5)
C C NN=NENN(I,6),6)
C C IF (FAS(II).GE.CAL(M).AND.FAS(JJ).LE.CAL(M).OR.OR
*      FAS(II).LE.CAL(M).AND.FAS(JJ).GE.CAL(M).OR.OR
*      FAS(II).GE.CAL(M).AND.FAS(KK).LE.CAL(M).OR.OR
*      FAS(II).LE.CAL(M).AND.FAS(KK).GE.CAL(M)) GO TO 10 I
C C GO TO 11) 1)
C C 1 DO 19 J=1,3,3
C C IF (J.NE.1) GO TO 20
C C IA=II-1)
C C IB=JJ-1)
C C IC=LL-1)

```

```

GO TO 4
2 IF (J.NE.2) GO TO 3
IA=JJ
IB=KK
IC=MM
GO TO 4
3 IF (J.NE.3) GO TO 19
IA=II
IB=KK
IC=MM
4 IF (FAS(IA).EQ.CAL(M).OR.FAS(IB).EQ.CAL(M).OR.
* FAS(IC).EQ.CAL(M)) GO TO 5
GO TO 8
5 IF (FAS(IA).NE.CAL(M)) GO TO 6
N=N+1
XLIN(N)=XNODE(IA)
YLIN(N)=YNODE(IA)
6 IF (FAS(IB).NE.CAL(M)) GO TO 7
N=N+1
XLIN(N)=XNODE(IB)
YLIN(N)=YNODE(IB)
7 IF (FAS(IC).NE.CAL(M)) GO TO 19
N=N+1
XLIN(N)=XNODE(IC)
YLIN(N)=YNODE(IC)
GO TO 19
8 IF (FAS(IA).GT.CAL(M).AND.FAS(IB).LT.CAL(M).OR.
* FAS(IA).LT.CAL(M).AND.FAS(IB).GT.CAL(M)) GO TO 9
GO TO 19
9 N=N+1
L=L+1
IF (XNODE(IA).EQ.XNODE(IB)) GO TO 12
D1=XNODE(IA)*XNODE(IA)-XNODE(IA)*XNODE(IB)-XNODE(IA)*XNODE(IC)
* +XNODE(IC)*XNODE(IB)
D2=XNODE(IC)*XNODE(IC)-XNODE(IC)*XNODE(IB)-XNODE(IC)*XNODE(IA)
* +XNODE(IA)*XNODE(IB)
D3=XNODE(IB)*XNODE(IB)-XNODE(IB)*XNODE(IA)-XNODE(IB)*XNODE(IC)
* +XNODE(IA)*XNODE(IC)
AA=FAS(IA)/D1+FAS(IC)/D2+FAS(IB)/D3
BB=-FAS(IA)*(XNODE(IC)+XNODE(IB))/D1-FAS(IC)*(XNODE(IA)+XNODE(IB))
* /D2-FAS(IB)*(XNODE(IA)+XNODE(IC))/D3
CC=FAS(IA)*XNODE(IC)*XNODE(IB)/D1+FAS(IC)*XNODE(IA)*XNODE(IB)/D2+
* FAS(IB)*XNODE(IA)*XNODE(IC)/D3-CAL(M)
IF (AA.EQ.0) GO TO 13
XL1=(-BB+SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
XL2=(-BB-SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
IF (XL1.GT.XNODE(IA).AND.XL1.LT.XNODE(IB).OR.
* XL1.LT.XNODE(IA).AND.XL1.GT.XNODE(IB)) GO TO 10
GO TO 11
10 XLIN(N)=XL1
GO TO 14
11 XLIN(N)=XL2
GO TO 14
12 XLIN(N)=XNODE(IA)
GO TO 14

```

```

13 XLIN(N)=-CC/BB
14 IF (YNODE(IA).EQ.YNODE(IB)) GO TO 17
   D1=YNODE(IA)*YNODE(IA)-YNODE(IA)*YNODE(IB)-YNODE(IA)*YNODE(IC)
   *   +YNODE(IC)*YNODE(IB)
   D2=YNODE(IC)*YNODE(IC)-YNODE(IC)*YNODE(IB)-YNODE(IC)*YNODE(IA)
   *   +YNODE(IA)*YNODE(IB)
   D3=YNODE(IB)*YNODE(IB)-YNODE(IB)*YNODE(IA)-YNODE(IB)*YNODE(IC)
   *   +YNODE(IA)*YNODE(IC)
   AA=FAS(IA)/D1+FAS(IC)/D2+FAS(IB)/D3
   BB=-FAS(IA)*(YNODE(IC)+YNODE(IB))/D1-FAS(IC)*(YNODE(IA)+YNODE(IB))
   *   /D2-FAS(IB)*(YNODE(IA)+YNODE(IC))/D3
   CC=FAS(IA)*YNODE(IC)*YNODE(IB)/D1+FAS(IC)*YNODE(IA)*YNODE(IB)/D2+
   *   FAS(IB)*YNODE(IA)*YNODE(IC)/D3-CAL(H)
   IF (AA.EQ.0) GO TO 18
   YL1=(-BB+SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
   YL2=(-BB-SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
   IF (YL1.GT.YNODE(IA).AND.YL1.LT.YNODE(IB).OR.
   *   YL1.LT.YNODE(IA).AND.YL1.GT.YNODE(IB)) GO TO 15
   GO TO 16
15 YLIN(N)=YL1
   GO TO 19
16 YLIN(N)=YL2
   GO TO 19
17 YLIN(N)=YNODE(IA)
   GO TO 19
18 YLIN(N)=-CC/BB
19 CONTINUE
20 IF (L.EQ.0) GO TO 25
   XAI(1)=XLIN(N-1)+(XLIN(N)-XLIN(N-1))/3.
   XAI(2)=XLIN(N-1)+2.*(XLIN(N)-XLIN(N-1))/3.
   DO 24 J=1,2
   XI=XAI(J)
   N=N+1
   DET=XNODE(II)*YNODE(JJ)-XNODE(JJ)*YNODE(II)+XNODE(JJ)*YNODE(KK)-
   *   XNODE(KK)*YNODE(JJ)+XNODE(KK)*YNODE(II)-XNODE(II)*YNODE(KK)
   A1=(XNODE(JJ)*YNODE(KK)-XNODE(KK)*YNODE(JJ))/DET
   A2=(XNODE(KK)*YNODE(II)-XNODE(II)*YNODE(KK))/DET
   A3=(XNODE(II)*YNODE(JJ)-XNODE(JJ)*YNODE(II))/DET
   B1=(YNODE(JJ)-YNODE(KK))/DET
   B2=(YNODE(KK)-YNODE(II))/DET
   B3=(YNODE(II)-YNODE(JJ))/DET
   C1=(XNODE(KK)-XNODE(JJ))/DET
   C2=(XNODE(II)-XNODE(KK))/DET
   C3=(XNODE(JJ)-XNODE(II))/DET
   AA=2.*(FAS(II)*C1*C1+FAS(JJ)*C2*C2+FAS(KK)*C3*C3+FAS(LL)*C1*C2*2.+
   *   2.*FAS(MM)*C2*C3+2.*FAS(NN)*C1*C3)
   BB=FAS(II)*(4.*A1*C1-C1)+FAS(JJ)*(4.*A2*C2-C2)+FAS(KK)*(4.*A3*C3-
   *   C3)+4.*FAS(LL)*(A1*C2+A2*C1)+4.*FAS(MM)*(A2*C3+A3*C2)+
   *   4.*FAS(NN)*(A1*C3+A3*C1)+4.*XI*(FAS(II)*B1*C1+FAS(JJ)*B2*C2
   *   +FAS(KK)*B3*C3+FAS(LL)*(B1*C2+B2*C1)+FAS(MM)*(B2*C3+B3*C2)
   *   +FAS(NN)*(B1*C3+B3*C1))
   CC=2.*XI*XI*(FAS(II)*B1*B1+FAS(JJ)*B2*B2+FAS(KK)*B3*B3+2.*FAS(LL)*
   *   B1*B2+2.*FAS(MM)*B2*B3+2.*FAS(NN)*B1*B3)+XI*(FAS(II)*(4.*
   *   A1*B1-B1)+FAS(JJ)*(4.*A2*B2-B2)+FAS(KK)*(4.*A3*B3-B3)+
   *   4.*FAS(LL)*(A1*B2+A2*B1)+4.*FAS(MM)*A2*B3+A3*B2)+4.*FAS(NN)*(A1

```

```

*   *B3+(A3*B1)+FAS(II)*(2.*A1*A1-A1)+FAS(JJ)*(2.*A2*A2-A2)+FAS(KK)
*   *(2.*A3*A3-A3)+4.*FAS(LL)*A1*A2+4.*FAS(MM)*A2*A3+4.*FAS(NN)*A1
*   *A3-CAL(M)
  IF (AA.EQ.0) GO TO 23
  YL1=(-BB+SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
  YL2=(-BB-SQRT(BB*BB-4.*AA*CC))/(2.*AA)
  IF (YL1.GT.YNODE(II).AND.YL1.LT.YNODE(KK).OR.
*   YL1.LT.YNODE(II).AND.YL1.GT.YNODE(KK).OR.
*   YL1.GT.YNODE(II).AND.YL1.LT.YNODE(JJ).OR.
*   YL1.LT.YNODE(II).AND.YL1.GT.YNODE(JJ)) GO TO 21
  GO TO 22
21  YLIN(N)=YL1
    XLIN(N)=XI
    GO TO 24
22  YLIN(N)=YL2
    XLIN(N)=XI
    GO TO 24
23  YLIN(N)=-CC/BB
    XLIN(N)=XI
24  CONTINUE
25  CONTINUE
    MMM=N-1
    LLL=N
    DO 28 III=1,MMM
      KKK=III+1
      DO 27 JJJ=KKK,N
        PIT=XLIN(III)-XLIN(JJJ)
        TIP=YLIN(III)-YLIN(JJJ)
        IF (ABS(PIT).GT.0.000000001.OR.ABS(TIP).GT.0.000000001) GO TO 26
        LLL=LLL-1
        XLIN(JJJ)=100000.
        YLIN(JJJ)=LLL*100000.
26  IF (XLIN(III).LE.XLIN(JJJ)) GO TO 27,
      S=XLIN(III)
      T=YLIN(III)
      XLIN(III)=XLIN(JJJ)
      YLIN(III)=YLIN(JJJ)
      XLIN(JJJ)=S
      YLIN(JJJ)=T
27  CONTINUE
28  CONTINUE
    WRITE(6,100) CAL(M)
    WRITE (6,101) (I,XLIN(I),YLIN(I),I=1,LLL)
29  CONTINUE
100  FORMAT (//32X,'PUNTOS EN LOS QUE LA FUNCION DE CORRIENTE',
*         //32X,'ES CONSTANTE PARA:',//45X,'PHI =',E18.12,
*         //33X,' PUNTO          COORD-X          COORD-Y'//)
101  FORMAT (34X,I3,1X,E18.12,1X,E18.12)
      END

```

C

```

SUBROUTINE NEUMAN (I,LL,XNODE,YNODE,VELX,VELY,ANOR1,

```

C

```

*****

```

C

```

*

```

C

```

*   ESTA SUBROUTINA CALCULA EL VECTOR DE FLUJO DEBIDO

```

-

```

*   - - - A LAS CONDICIONES DE FRONTERA DE NEUMANN. - - -

```

-

```

*

```

C

```

*****

```



```

C
*      ANOR2,FN)
DIMENSION NNODE(150),XNODE(250),YNODE(250),VELX(150),VELY(150),
*      ANOR1(50),ANOR2(50),FN(3),X(3),Y(3),VX(3),VY(3)
  II=LL
  DO 10 K=1,3
    J=NNODE(II)
    X(K)=XNODE(J)
    Y(K)=YNODE(J)
    VX(K)=VELX(II)
    VY(K)=VELY(II)
    II=II+1
10 CONTINUE
  AN1=ANOR1(I)
  AN2=ANOR2(I)
  DIS=SQRT((X(2)-X(1))**2+(Y(2)-Y(1))**2)
  FN(1)=DIS/15.*(AN1*(4.*VX(1)+2.*VX(2)-VX(3))
*      +AN2*(4.*VY(1)+2.*VY(2)-VY(3)))
  FN(2)=DIS/15.*(AN1*(2.*VX(1)+16.*VX(2)+2.*VX(3))
*      +AN2*(2.*VY(1)+16.*VY(2)+2.*VY(3)))
  FN(3)=DIS/15.*(AN1*(-VX(1)+2.*VX(2)+4.*VX(3))
*      +AN2*(-VY(1)+2.*VY(2)+4.*VY(3)))
  RETURN
  END

C
SURROUTINE NOLINE (N,AMAC,B,XNODE,YNODE,NENN,PHI,AL1,AL2,AL3,FHI)
*****
*
*   ESTA SUBROUTINA CALCULA LOS TERMINOS NO LINEALES
*   DE LA ECUACION PARA FLUJO COMPRESIBLE, POR MEDIO
*   DE LA APROXIMACION DE ELEMENTOS FINITOS.
*
*****
DIMENSION XNODE(250),YNODE(250),NENN(250,6),PHI(250),AL1(6),
*      AL2(6),AL3(6),F(6),G(6,6),FHI(6),PLI(6),X(3),Y(3)
  DO 10 I=1,3
    K=NENN(N,I)
    X(I)=XNODE(K)
    Y(I)=YNODE(K)
10 CONTINUE
  DO 20 I=1,6
    K=NENN(N,I)
    PLI(I)=PHI(K)
20 CONTINUE
  DET=X(2)*Y(3)-X(3)*Y(2)+X(3)*Y(1)-X(1)*Y(3)+X(1)*Y(2)-X(2)*Y(1)
  B1=(Y(2)-Y(3))/DET
  B2=(Y(3)-Y(1))/DET
  B3=-B1-B2
  C1=(X(3)-X(2))/DET
  C2=(X(1)-X(3))/DET
  C3=-C1-C2
  S2=4.*PLI(1)*B1*B1+4.*PLI(2)*B2*B2+4.*PLI(3)*B3*B3+8.*PLI(4)
*      *B1*B2+8.*PLI(5)*B2*B3+8.*PLI(6)*B1*B3
  S4=4.*PLI(1)*C1*C1+4.*PLI(2)*C2*C2+4.*PLI(3)*C3*C3+8.*PLI(4)

```

```

*   #C1*C2+8.*PLI(5)*C2*C3+9.*PLI(6)*C1*C3
S5=4.*(PLI(1)*B1*C1+PLI(2)*B2*C2+PLI(3)*B3*C3+PLI(4)*(B1*C2
*   +B2*C1)+PLI(5)*(B2*C3+B3*C2)+PLI(6)*(B1*C3+B3*C1))
DO 30 I=1,6
S1=PLI(1)*B1*(4.*AL1(I)-1.)+PLI(2)*B2*(4.*AL2(I)-1.)
*   +PLI(3)*B3*(4.*AL3(I)-1.)+4.*PLI(4)*(B1*AL2(I)+B2*AL1(I))
*   +PLI(5)*4.*(B2*AL3(I)+B3*AL2(I))
*   +4.*PLI(6)*(B1*AL3(I)+B3*AL1(I))
S3=PLI(1)*C1*(4.*AL1(I)-1.)+PLI(2)*C2*(4.*AL2(I)-1.)
*   +PLI(3)*C3*(4.*AL3(I)-1.)+4.*PLI(4)*(C1*AL2(I)+C2*AL1(I))
*   +PLI(5)*4.*(C2*AL3(I)+C3*AL2(I))
*   +4.*PLI(6)*(C1*AL3(I)+C3*AL1(I))
Q2=S1*S1+S3*S3
A2=1.-B*AMAC*AMAC*(1.-Q2)
F(I)=(S1*S1*S2+S3*S3*S4+2.*S1*S3*S5)/A2*AMAC*AMAC
30 CONTINUE
AREA=DET/2.
DO 40 I=1,6
DO 40 J=1,6
G(I,J)=0.0
40 CONTINUE
DO 50 I=1,3
G(I,I)=AREA/309
G(I+3,I+3)=AREA*8./45.
50 CONTINUE
G(1,2)=-AREA/180.
G(1,3)=G(1,2)
G(2,3)=G(1,2)
G(4,5)=AREA*4./45.
G(4,6)=G(4,5)
G(5,6)=G(4,5)
G(1,5)=-AREA/45.
G(2,6)=G(1,5)
G(3,4)=G(1,5)
DO 60 I=1,6
DO 60 J=1,6
IF(I.EQ.J) GO TO 60
G(J,I)=G(I,J)
60 CONTINUE
DO 70 I=1,6
FHI(I)=0.0
70 CONTINUE
DO 80 I=1,6
DO 80 J=1,6
FHI(I)=FHI(I)+G(I,J)*F(J)
80 CONTINUE
RETURN
END

```

REFERENCIAS

Argyris, J.H. (1963); "Recent Advances in Matrix Method of Structural Analysis", Pergamon Press, Elmsford, New York.

✓ Aubin, J.P. (1972); "Approximation of Elliptic Boundary Value Problems", Wiley-Interscience, New York.

Babuska, I. and Aziz, A.K. (1972); Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Element Method, "Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations", A.K. Aziz (ed), Academic Press, New York.

Carey, G.F. (1975); "A Dual Perturbation Expansion and Variational Solution for Compressible flows Using Finite Elements in Fluids, Vol. 2, ed. Gallagher, Oden, Taylor and Zienkiewicz, John Wiley & Sons.

Ciarlet, P.G. and Raviart, P.A. (1972); "General Lagrange and Hermite Interpolation in  $R^n$  with Applications to the Finite Element Method", Arch. Rat. Mech. Anal. 46.

Clough, R.W. (1960); "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis", Proceedings of 2nd Conf. on Electronic Computation, American Society of Civil Engineers, Pittsburgh, Penn.

✓ Cook, R.D. (1974); "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, New York.

✓ Chung, T.J. (1978); "Finite Element Analysis in Fluid Dynamics", McGraw Hill Co.,

Evans, M.E. and Harlow, F.H. (1957); "The Particle-in-Cell Method for Hydrodynamic Calculations", Los Alamos Scientific Lab., Report No. LA-2139, Los Alamos, New Mexico.

Finlayson, B.A. (1972); "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", Academic Press, New York.

Galerkin, B.G. (1915) "Rods and Plates", Series Occuring in Various Questions Concerning the Elastic Equilibrium of Rods and Plates (in Russian) Vestn, Inghenevov, Vol. 19.

Hess, J.L. (1975); "Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-Flow Problems with Emphasis on the Surface-Source Method", Computer Methods.

- Holman, J.P. (1972); "Heat Transfer", Mc Graw Hill Co., New York.
- Lions, J.L. and Magenes, E. (1968), "Non-Homogeneous Boundary-Value Problems and Applications", Vol. 1 (Trans from 1968 French edition by P. Kenneth), Springer-Verlag, 1972.
- Martín del Campo, E. y Sen, M. (1980); "Cálculo del Flujo Potencial Compresible por el Método de Elementos Finitos de Galerkin", Memorias VI Congreso, ed. Academia Nacional de Ingeniería, Querétaro, Qro., México.
- Oden, J.T. (1972) "Finite Element of Nonlinear Continua", McGraw-Hill, New York.
- Oden, J.T. and Reddy, J.N. (1976); "Introduction to Mathematical Theory of Finite Elements", John Wiley & Sons, New York.
- Rayleigh, J.W.S. (1877); "Theory of Sound", 1st. ed. revised, Dover Publications Inc., New York, 1945.
- Richtmyer, R.D. and Morton, K.W. (1967); "Difference Methods of Initial-Value Problems", 2nd ed., Interscience Publishers, New York.
- Ritz, W. (1909); "Uber Eine Neve Methods Zur Losung Gewisser Variations-Probleme der Mathematischen Physik", J. Reine Angew. Math., Vol. 135.
- Roache, P.J. (1972); "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Publishers, Alburquerque, New Mexico.
- Seegerlind, L.J. (1976); "Applied Finite Elements Analysis", John Wiley & Sons Inc., New York.
- Shen, S. (1977); "Finite Element Methods in Fluid Mechanics", Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 9.
- Strang, G. and Fix, G. (1973); "An Analysis of Finite Element Methods", Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Turner, M.J.J., Clough, R.W., Martin, H.C., and Topp, L.P. (1965); "Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures", J. Aeron. Sci., 23, No. 9.
- Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. (1965); "Finite Elements in the Solution of Field Problems", The Engineering.



DIVISION DE EDUCACION CONTINUA  
FACULTAD DE INGENIERIA U.N.A.M.

EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

A N E X O S

MARZO, 1984

# ANALYSIS OF CRANKSHAFT-BEARING SYSTEMS USING A FINITE ELEMENT-TRANSFER MATRIX APPROACH

V. H. Mucino, Professor of Mechanical Engineering  
The University of Mexico City  
Mexico City, Mexico

V. Pavlic, Professor of Mechanical Engineering  
The University of Wisconsin-Milwaukee  
Milwaukee, Wisconsin

R. G. Teschner, Engineering Analysis Manager  
J. I. Case Company  
Hodme, Wisconsin

## ABSTRACT

In this study a new approach is proposed for the analysis of a crankshaft-bearing system. The mathematical model of the system incorporates the elastic properties of the crankshaft and supports, the hydrodynamic nature of the journal-bearings, and for the first time the mass distribution of the rotating crankshaft. The procedure of analysis involves substructuring principles applied to the crankshaft for which each crank represents a substructure and a new condensation scheme is used for the synthesis of the system by operating over the transfer matrices of the substructures derived from the finite element discretization of each crank. The analysis yields the loads on the main bearings for a full cycle of  $4\pi$  at constant speed of rotation.

## NOMENCLATURE

	$x, \dot{x}, \ddot{x}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
	$y, \dot{y}, \ddot{y}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
	$z, \dot{z}, \ddot{z}$	displacement velocities and acceleration, rotating system
	$[C]$	coordinate transformation matrix
	$\{Y\}$	vector of d.o.f. in the absolute system
	$\{Q\}$	vector of d.o.f. in the rotating system
	$m$	lumped mass
	$k$	spring stiffness
	$[K]$	stiffness matrix of substructure
	$\{X\}$	vector of d.o.f. of substructure
	$[M]$	mass matrix of substructure
	$[D]$	dynamic stiffness matrix of substructure
	$x_L$	d.o.f. of left interface
	$x_I$	d.o.f. of intermediate nodes
	$x_R$	d.o.f. of right interface
	$F_L$	loads on left interface
	$F_I$	loads on intermediate nodes
	$F_R$	loads on right interface
	$[T_i]$	transfer matrix of substructure $i$
	$\{Z_j\}$	state vector of interface $j$
	$\{S\}$	vector of transfer matrix
	$L$	length of bearing
	$D$	diameter of bearing
	$c$	radial clearance
	$\{H\}$	mobility functions
	$\{J\}$	journal displacements
	$\{R\}$	reactions vector
		<b>INTRODUCTION</b>
		In the analysis of crankshaft-bearing systems, there are three main areas of concern: stress analy-
$\{F\}$	vector of loads on crankshaft	
$\{R_j\}$	vector of reactions on journals	
$\{F_s\}$	vector of loads on crankpins	
$r$	journal radius	
$P$	pressure distribution	
$\theta$	circumferential polar coordinate	
$z$	longitudinal polar coordinate	
$h$	oil film thickness	
$\nu$	oil viscosity	
$\omega$	angular velocity	
$\dot{\phi}$	journal precession rate	
$t$	time	
$\{B\}$	vector of bearing displacements	
$\{e\}$	vector of eccentricities	
$\{Y_s\}$	vector of displacements of crankshaft	
$[F]$	flexibility matrix of supports	
$x, \dot{x}, \ddot{x}$	displacement velocities and acceleration, absolute system	
$y, \dot{y}, \ddot{y}$	displacement velocities and acceleration, absolute system	
$z, \dot{z}, \ddot{z}$	displacement velocities and acceleration, absolute system	

sis, dynamic analysis and bearing performance analysis. The analytical models typically used for each of these three areas have very little in common, mainly due to simplifying assumptions which make the calculations practical for designers and analysts. In the stress analysis area, for instance, static loads are generally considered and the crankshaft is almost always isolated from the other components of the system. Stresses are then computed based on the static loads assumed and the corresponding reactions. In the dynamic analysis area, the stress distribution of the crank is of little interest and for all practical purposes of no interest whatsoever and the emphasis is placed on the torsional vibrations caused by the rotating and reciprocating masses and the lack of rotational constraints. Finally, in the area of bearing analysis, the loads acting on the bearings are generally assumed to be those obtained through the static analysis for a number of rotational positions along a full cycle of operation. The bearings are typically isolated from the entire system and thus the effects of the dynamics of the crankshaft and the interaction with the other components of the system are not fully incorporated.

Numerous studies have been published describing a variety of analytical, empirical and experimental methods in each of these three areas, such as the studies by Lowell [1], Lshleman [2] and Ross and Slaymaker [3] among many others.

However, few attempts have been made to model the crankshaft-bearing system as a whole, considering that the loads acting on the crankshaft cause deformations. This in turn interacts with the dynamics of the system, the flexibility of the supports and the hydrodynamics of the journal-bearings of the engine. While a more extensive literature search is presented in [4], here only some of the significant works are discussed.

Gross and Hussman [5] developed a method by means of which loads on the main bearings could be determined considering a model that consisted of a round shaft representing the crankshaft, elastic supports represented by springs and bearings which were assumed to behave as linear springs. The procedure derived by these authors considered the shaft as a statically undetermined system on flexible supports. The results obtained improved over the classical method of considering each crank as a separate simply supported beam on which certain loads act and the reactions satisfy the conditions of static equilibrium for each separate crank. However, the true reality of the hydrodynamic nature of the bearings was not considered. Later, Von Shurheim [6] incorporated the hydrodynamic characteristics of the bearings by using the expressions derived by Holland [7] which relate the instantaneous eccentricities of the journals with certain velocity. By taking the eccentricities as deflections of the crankshaft, the reaction loads could be determined, but an important assumption was that the supports were rigid. In both cases, [5] and [6], a transfer matrix approach was used to carry out the calculations based on the Haizer method [8].

Most recently, Stickler [9] developed a more elaborate approach which for the first time introduced the finite element method to model the crankshaft and also incorporated the hydrodynamics of the bearings through the mobility method developed by Booker [10, 11]. In the model used by Stickler, the crankshaft was modeled with beam elements and the supports were represented through a flexibility matrix. This study showed very clearly the difficulties involved in considering the crankshaft as an actually unsymmetrical shaft as opposed to the round shafts used in studies [5] and [6]. It should be noted that in none of the

previous cases was the mass distribution of the crankshaft considered in the formulation and thus an important aspect of the dynamics of the crankshaft was neglected.

In this study, a general approach is presented which yields the loads on the main bearings and uses a solid finite element model for each crank in such a way that the elastic properties are more representative and, for the first time, includes the mass distribution of the crankshaft.

The approach is based on the finite element-transfer matrix method developed by Nucino and Pavelle [12]. The synthesis of the system substructures is made by combining the state vectors of the substructures with the hydrodynamic loads on the bearings and the flexibility of the supports.

## THE SYSTEM MODEL AND EQUATIONS

The system considered in this study consists of three main components: the crankshaft, the flexible supports and the journal-bearings as shown in Figure 1. It is assumed that the loads acting on the crankpins can be obtained using the pressure-volume diagram

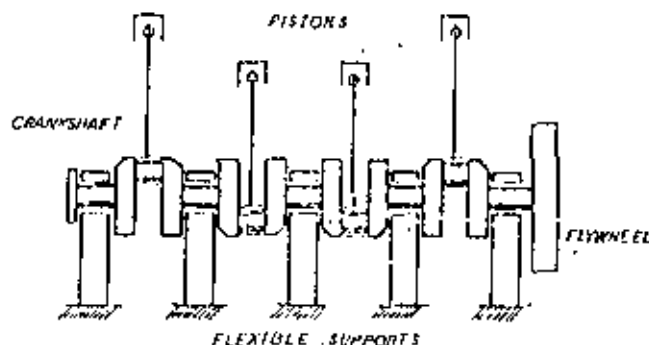


Fig. 1 A Typical Crankshaft-Bearing System on Flexible Supports

and the geometric characteristics of the system for the entire cycle of operation. Thus, the loads acting on the crankpins can be resolved into radial and tangential components as shown in Figure 2.

In order to formulate the equations of the system, it is necessary to define the degrees of freedom of the system in such a way that the interaction between the crankshaft and the bearings and the supports can also be described. First, the vector of loads acting on the crankshaft can be defined as:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} R_j \\ F_c \end{Bmatrix} \quad (1)$$

where  $\{R_j\}$  are the reactions from the bearings acting on the main journals and  $\{F_c\}$  are the loads from the connecting rods acting on the crankpins.

The reactions generated by the bearings are the result of integrating the pressure distribution developed by the lubricant oil film and thus:

$$\{R_j\} = \left\{ \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{z=0}^L r P_j(\theta, z) dz \right\} \quad (2)$$

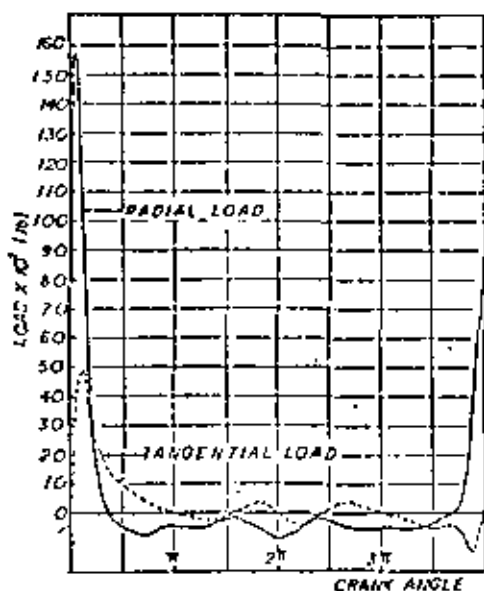


Fig. 2 Radial and Tangential Loads Acting on the Crankpin

where  $P_j(0, z)$  is the pressure distribution around  $(0)$  and along  $(L)$  for bearing of radius  $r$  as shown in figure 3. The pressure distribution is governed by Reynold's equation:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ h^3 \frac{\partial p}{\partial z} \right] =$$

$$6 \mu \left[ (\omega - 2\dot{\delta}) \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial z} \dot{\delta} \right]$$

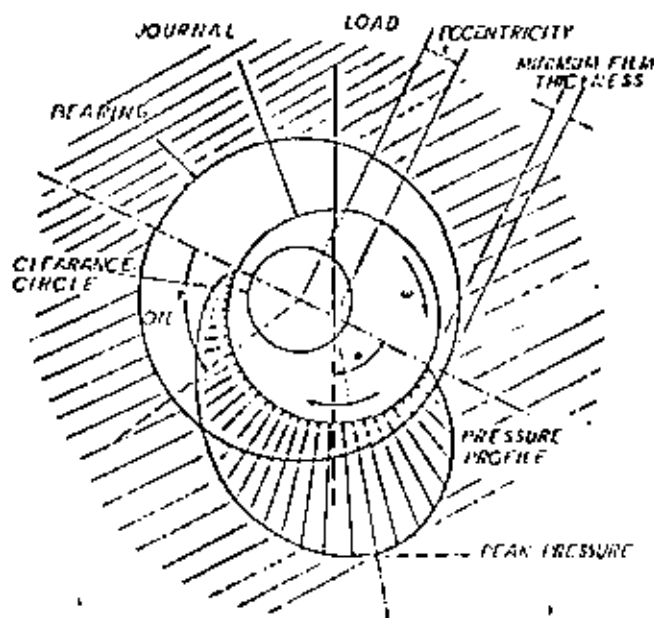


Fig. 3 A Journal-Bearing System and Lubricant Pressure Distribution

In this equation  $h$  is the oil film thickness around the bearing,  $\mu$  is the viscosity of the lubricant,  $\dot{\delta}$  is the journal precision rate and  $\omega$  is the angular velocity of the journal. The vector of displacements of the crankshaft can then be defined as:

$$\{Y\} = \begin{Bmatrix} \{B\} + \{e\} \\ \{Y_s\} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

where  $\{B\}$  is the vector of displacements of the bearings which are rigidly attached to the supports,  $\{e\}$  is the vector of eccentricities of the journals with respect to the bearings, and  $\{Y_s\}$  is the vector of displacements of the crankshaft at other locations except the displacements of the main bearings.

To incorporate the flexibility of the supports, the vector  $\{B\}$  can be expressed as:

$$\{B\} = [F] \{-R_j\} \quad (5)$$

where  $[F]$  is the flexibility matrix representing the support structure and  $\{-R_j\}$  is given by the negative of equation (2).

Due to the nature of the mechanical system, two coordinate systems are needed to derive the equations of motion. Both systems coincide in the origin and one axis  $z$  as shown in Figure 4, but one is fixed

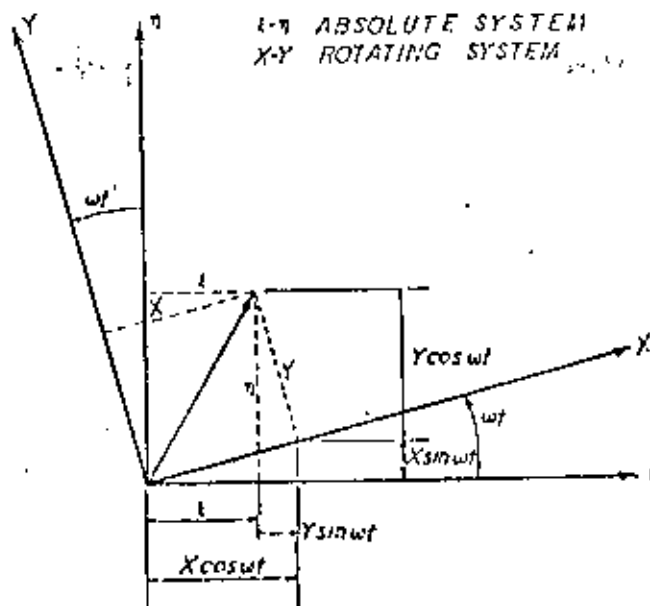


Fig. 4 Coordinate Systems: Rotating  $(x, y, z)$  and Absolute  $(c, n, t)$

$(c, n, t)$  and the other one rotates  $(x, y, z)$  and is attached to the crankshaft. The transformations from rotating to the absolute system are:

Displacements:

$$\begin{Bmatrix} c \\ n \\ t \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (6)$$



Velocities:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \dot{x} - \omega y \\ \dot{y} + \omega x \\ \dot{z} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Acceleration:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + \omega^2 x \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y \\ \ddot{z} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

where [C] is given by:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

The degrees of freedom for the crankshaft and supports can be expressed using the following notation.

In the absolute system (x, y, z):

$$\{Y\}_s^T = (\epsilon_1 n_1 \epsilon_1 \epsilon_2 n_2 \epsilon_2 \dots \epsilon_n n_n \epsilon_n)_s$$

$$= (\epsilon_1 \theta_2 \theta_3 \dots \theta_{3n})_s$$

In the rotating system (x, y, z):

$$\{Q\}_s^T = (x_1 y_1 z_1 x_2 y_2 z_2 \dots x_n y_n z_n)_s$$

$$(q_1 q_2 q_3 \dots q_{3n})_s$$

Where the subscript s designates the d.o.f. of the crankshaft and for the supports the subscript is b

$$\epsilon_1 = \theta_{3i-2} \quad x_1 = q_{3i-2}$$

$$n_1 = \theta_{3i-1} \quad \text{and} \quad y_1 = q_{3i-1}$$

$$\epsilon_i = \theta_{3i} \quad z_1 = q_{3i}$$

Deriving the potential and kinetic energies of the elastic members, (crankshaft and supports), and applying the Lagrangian equation, the following equations of motion result:

$$M_1^s [\ddot{x}_1 - 2\omega\dot{y}_1 + \omega^2 x_1] + 2k_1 [x_1 - e_1^x] + \sum_{j=1}^n k_{1j} q_j = P_{1s}^x \quad (10)$$

$$\sum_{j=1}^n k_{1j} q_j = P_{1s}^x$$

$$M_1^s [\ddot{y}_1 - \omega^2 y_1] + 2k_1 [y_1 - e_1^y] + \sum_{j=1}^n k_{1j} q_j = P_{1s}^y \quad (11)$$

$$M_1^s [\ddot{z}_1] + \sum_{j=1}^n k_{1j} q_j = P_{1s}^z \quad (12)$$

$$M_1^b [e_1^x - x_1 - \omega^2 (x_1 - e_1^x)] + k_1 [x_1 - e_1^x] = P_{1b}^x \quad (13)$$

$$M_1^b [e_1^y - y_1 - \omega^2 (y_1 - e_1^y)] + k_1 [y_1 - e_1^y] = P_{1b}^y \quad (14)$$

These equations are expressed using the degrees of freedom of the crankshaft in the rotating coordinate system and also in terms of the eccentricities of the journals with respect to the bearings in the rotational system.

The solution of this system of equations is not trivial due to the nature of the system once the loads derived from the pressure distribution generated in the bearings are incorporated in the right hand side of Equations (10) through (14).

#### NUMERICAL PROCEDURE

In order to carry out the analysis of the system and the solution of the equations previously formulated, it is necessary to make use of the fact that the crankshaft can be macrodiscretized into a number of substructures which have similar characteristics. Each substructure (crankthrow) is then discretized using a finite element model such as the one shown in Figure 5. The equation describing the static equilibrium of this substructure written in matrix form is:

$$[X] \{X\} = \{F\} \quad (15)$$

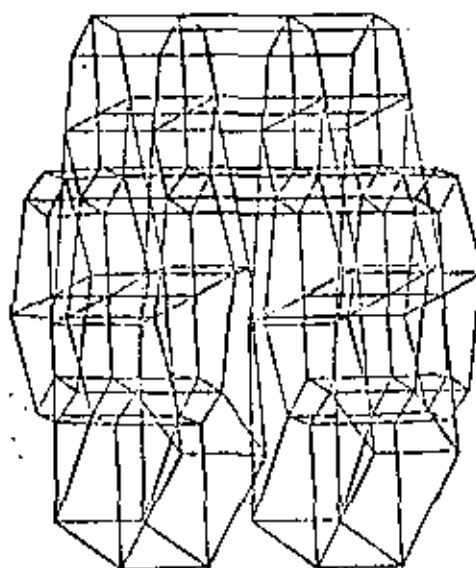


Fig. 5 Finite Element Model of a Crankthrow as a Substructure

where  $[K]$  is the stiffness matrix of the substructure and  $\{x\}$  is the vector of displacements of the nodes or degrees of freedom and  $\{F\}$  is the vector of loads acting on the substructure.

To introduce the mass distribution of the crankshaft, the mass matrix can be incorporated so that:

$$[M] \ddot{\{x\}} + [K] \{x\} = \{F(t)\} \quad (16)$$

It will be assumed that the internal damping be neglected.

Considering that the load is harmonic with circular frequency of  $\omega$ , then Equation (16) can be reduced to:

$$[D] \{x_0\} = \{F_0\} \quad (17)$$

where  $[D]$  is the "dynamic stiffness matrix" given by

$$[D] = [K] - \omega^2 [M] \quad (18)$$

In order to synthesize all the substructures, the finite element-transfer matrix method can be applied. To do this, the vectors of displacements and loads can be partitioned as follows:

$$\{x_0\} = \begin{Bmatrix} x_L \\ x_I \\ x_R \end{Bmatrix}, \text{ and } \{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_I \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Then, by following the formulation given in (12), the final expression for the transfer matrix can be obtained in the form:

$$\begin{Bmatrix} x_R \\ F_R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & S_1 \\ T_{21} & T_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_L \\ F_L \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Which written in a more compact form becomes:

$$\{z_R\} = [T_1] \{z_L\} \quad (21)$$

This equation is the transfer matrix relationship between state vectors  $\{z_R\}$  and  $\{z_L\}$  which contain both the displacements and the loads acting on the interfaces of the substructure. By changing the subscripts to 1 and 2 instead of L and R, a second substructure can be added by considering the following standard relationships as described by Pestel and Leckie [13]:

$$\{z_3\} = [T_2] [T_1] \{z_1\} \quad (22)$$

In this equation,  $[T_1]$  and  $[T_2]$  are the transfer matrices of the first and second substructures and more substructures can be assembled by multiplying the transfer matrices in the corresponding order.

It should be noted that the main advantage of this scheme is that by multiplying the matrices

$[T_1]$ ,  $[T_2]$ , etc., the size of the matrices does not increase but remains compatible with the order of the matrices being multiplied.

The state vectors  $\{z_i\}$  contain the loads and displacements of the interfaces of the substructures. These in turn are the reactions and the displacements of the journals of the crankshaft where the interfaces were designated. From Equation (20) the following two expressions can be obtained to express the reactions on the main journals assuming that the corresponding displacements are known:

$$\{F_I^k\} = [T_{12}^k]^{-1} \left[ \{x_{I+1}^k\} - [T_{11}^k] \{x_I^k\} - \{S_1^k\} \right] \quad (23)$$

$$\{F_{I+1}^k\} = [T_{21}^k] \{x_I^k\} + [T_{22}^k] \{F_I^k\} + \{S_2^k\} \quad (24)$$

where the superscripts  $k$  indicate that the vectors are obtained based on the transfer matrix of the  $i$ th crankthrow. The net force on the bearings can be obtained by algebraically adding the contribution of each degree of freedom in the corresponding direction and through the displacements of the supports using the flexibility matrix of Equation (5).

The instantaneous velocities of the journal centers in the bearing clearance circle can be approximated using Booker's equations [10, 11] which have the following form:

$$\frac{de^x}{dt} = \frac{|F|}{LD} \frac{c/r}{v/c} (M_x^x) - \bar{\omega}(e^y) \quad (25)$$

$$\frac{de^y}{dt} = \frac{|F|}{LD} \frac{c/r}{v/c} (M_y^y) + \bar{\omega}(e^x) \quad (26)$$

where  $(M_x)$  and  $(M_y)$  are known as the mobility functions and are functions of the bearing characteristics and the eccentricities of the journals with respect to the bearings. The explicit form of these mobility functions which apply to finite bearings are given by Booker [14] and were developed by Moes [15].

Equations (25) and (26) allow the determination of the instantaneous velocities of the journals in the bearings in the plane perpendicular to the axis of the shaft. By extrapolating these velocities through an increment of time,  $\Delta t$ , a new position can be found which can be used to determine a new set of loads which will generate a new set of journal velocities.

#### COMPUTER ALGORITHM

The computational algorithm consists of an iterative procedure which yields a cycle of displacements and loads of the journals of the crankshaft in such a way that the elasto-hydrodynamic behavior of the system can be approximated. Once the transfer matrix has been derived for each harmonic component of the loads acting on the crankpin of each substructure, complete calculations are performed and the following steps define the algorithm:

- 1) Initiate with an arbitrary eccentricity of each journal in the bearings and take these eccentricities as the absolute displacements of the journals of the crankshaft.
- 2) Determine the loads acting on the journals which, combined with the instantaneous loads on the crankpin, are compatible with the eccentricities and displacements of the previous step, using Equations (23) and (24).
- 3) Determine the loads on the bearings using the following relationship

$$\{R_i\} = \{F_i\}^k - \{F_i\}^{k-1} \quad (27)$$

- 4) Compute displacements on the journals for the loads just found using Equations (4) and (5).
- 5) Once the displacements of the bearings and the displacements of the journals are known, the eccentricities can be found by the vectorial difference of these displacements. Thus,

$$\{e\} = \{B\} - \{J\} \quad (28)$$

where  $\{e\}$  is the vector of eccentricities,  $\{B\}$  is the vector of bearing displacements and  $\{J\}$  is the vector of journal displacements.

- 6) Determine the instantaneous velocities of the journals in the bearings using Equations (25) and (26).
- 7) Extrapolate the displacements of the journals through an increment of time  $\Delta t$  and find a new absolute position using an extrapolating scheme, such as the Adam's formulas [16], mainly:

$$e_{i+1} = e_i + \frac{1}{2} \Delta t (\dot{e}_i + \dot{e}_{i-1}) \quad (29)$$

- 8) Rotate the position of the crankshaft with respect to the support through an angle of  $\omega \Delta t$  and calculate the new loads from the connecting rods on the crankpin.
- 9) Repeat steps 2 through 8 until one cycle  $4\pi$  is completed.
- 10) Repeat steps 2 through 9 until convergence is achieved. In this step, convergence is achieved when the cycle of loads is identical to the previous cycle within certain margins.

The algorithm just described is shown in the form of a block diagram in Figure 6.

#### APPLICATION TO A REAL SYSTEM

The computational procedure developed in this study was applied on a crankshaft-bearing system, the main characteristics of which are given in Tables 1, 2 and 3. In this application, the loads on the crankpin were resolved into Fourier components and only the first 6 components were considered in the approximation.

The load cycles for main bearings 1, 2 and 3 are shown in Figures 7 through 12 for two cases. In the first, the mass of the crankshaft is not considered and in the second the mass is introduced by using the dynamic stiffness matrix of Equation (1d).

#### CONCLUSIONS

From the results obtained in this analysis and based on the previous attempts for this type of system, the following conclusions can be drawn:

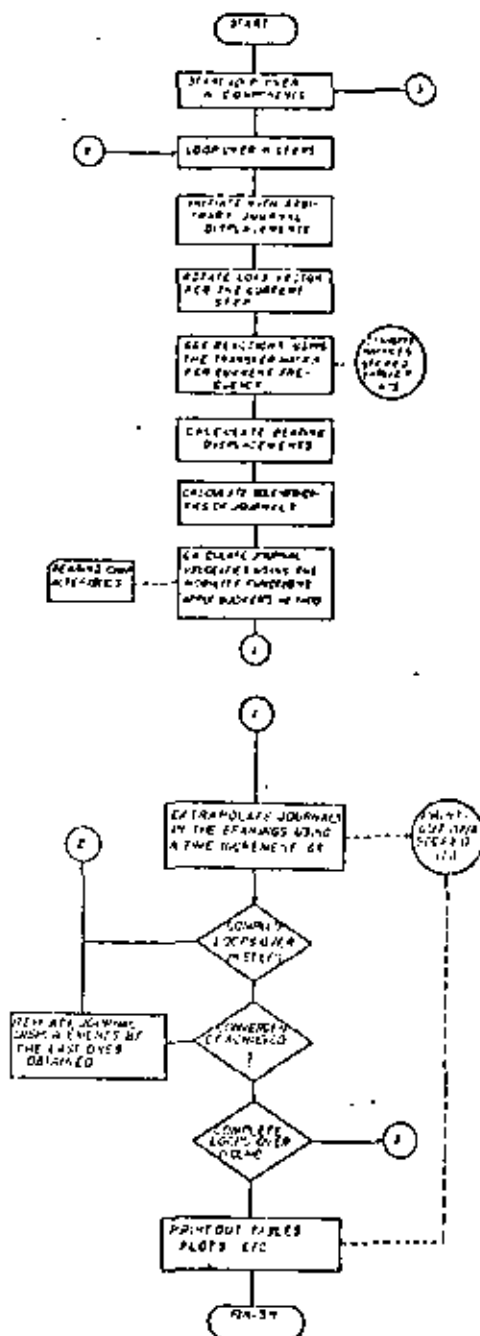


Fig. 6 Flowchart of Computer Algorithm

- 1) The incorporation of the mass distribution of the crankshaft in the analysis has a considerable effect on the calculation of the loads on the main journals, yielding loads which are approximately 12.5% and 22% smaller for main bearings 1 and 2 and approximately 7% greater for main bearing 3. This can be seen in the Figures 7 through 12.
- 2) The loads on the bearings, combined with the loads on the crankpins and the displacements of the journals, can be used to perform the stress analysis using the matrices obtained in Equation (15) for the finite element model.
- 3) The method developed here incorporates for the first time the mass distribution of the crankshaft to carry out the analysis.

BEARING NO	1	2	3	4	5
DIAMETER (IN)	2.87	2.87	2.87	2.87	2.87
LENGTH (IN)	1.40	1.0	1.1	1.0	1.40
RADIAL CLEARANCE (IN)	0.0035	0.0025	0.0035	0.0025	0.0035
FIRING ORDER	1	3	4	2	
OIL VISCOSITY	6.9 x 10 <sup>-6</sup>				
CRANKSHAFT SPEED	1400 R.P.M.				

Table 1 Crankshaft-Bearing System Data

CRANK NO	1	2	3	4
PHASE ANGLE	0	54.9	109	340
STROKE (IN)	4.125			
WED THICKNESS (IN)	1.1 (average)			
CRANKPIN DIA. (IN)	2.75			
CRANKPIN LENGTH (IN)	3.04			
MAIN JOURNAL DIA. (IN)	2.87			
MAIN JOURNAL LENGTH (IN)	1.40			

Table 2 Crankshaft Geometry Data

CRANK ANGLE	RADIAL FORCE	TANGENTIAL FORCE	CRANK BEND	PIVAL FORCE	BEARING ADJUST
0	1721	0	370	-190	-150
10	15757	2671	345	-182	-250
20	8151	4556	320	-167	-237
31	4152	4129	410	-150	-227
41	1117	2955	419	-137	-210
50	181	2161	420	-125	-174
60	115	1756	440	-112	-54
70	193	1170	442	-105	50
80	-329	3128	450	-125	152
91	-197	3009	440	-206	173
100	-543	2462	418	-267	206
110	-869	182	450	-321	251
120	-1311	151	440	-347	218
130	-1777	132	500	-349	212
140	-2191	129	510	-319	140
150	-2679	128	520	-300	23
160	-3110	81	570	-276	63
170	-3536	13	540	-237	0
180	-3937	0	510	-190	-13
190	-4308	-13	500	-500	-40
200	-4589	-56	511	-519	-200
210	-5111	-130	500	-490	-173
220	-5448	-171	500	-490	-213
230	-5627	-210	440	-513	-227
240	-5751	-251	510	-471	-297
250	-5648	-279	470	-435	-341
260	-5448	-311	450	-319	-379
270	-5251	-352	510	-242	-410
280	-4951	-40	550	-168	-430
290	-4527	50	540	-79	-442
300	-4209	171	570	45	-490
310	-3975	390	530	14	-500
320	-3648	327	490	352	-504
330	-3327	212	700	211	-490
340	-3012	263	740	544	-490
350	-2744	140			
360	-2579	0			

Table 3 Radial and Tangential Loads on the Crankpin

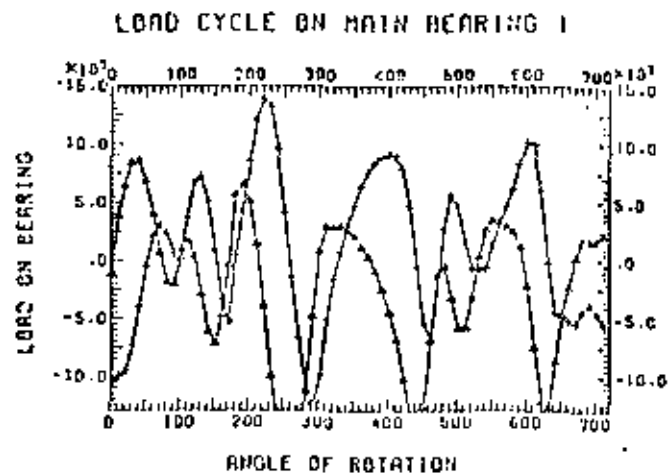


Fig. 7 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 1, Crankshaft Without Mass

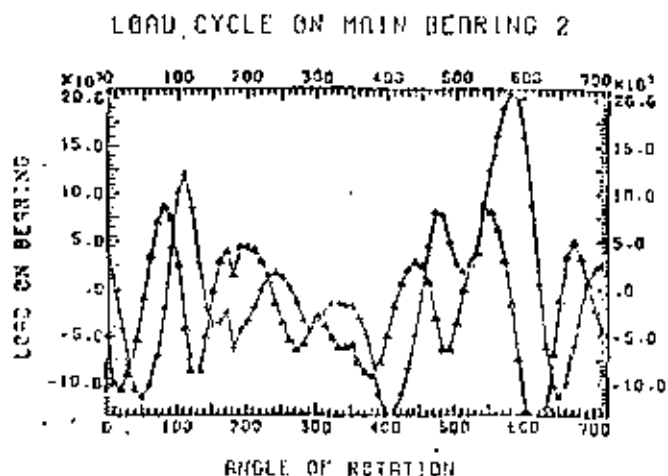


Fig. 8 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 2, Crankshaft Without Mass

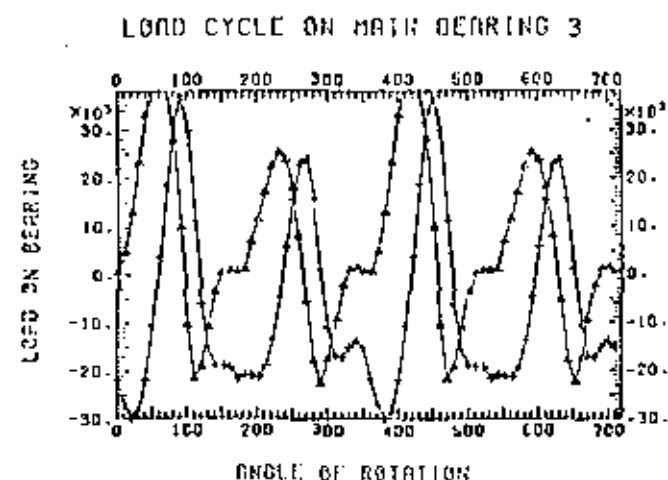


Fig. 9 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 3, Crankshaft Without Mass

4) The application of the finite element-transfer matrix method to this problem allows the detailed representation of the crankshaft structure without resulting in large system matrices. This fact increases the efficiency of the method which allows the stress analysis using the same

model and results obtained in the elasto-hydrodynamic analysis.

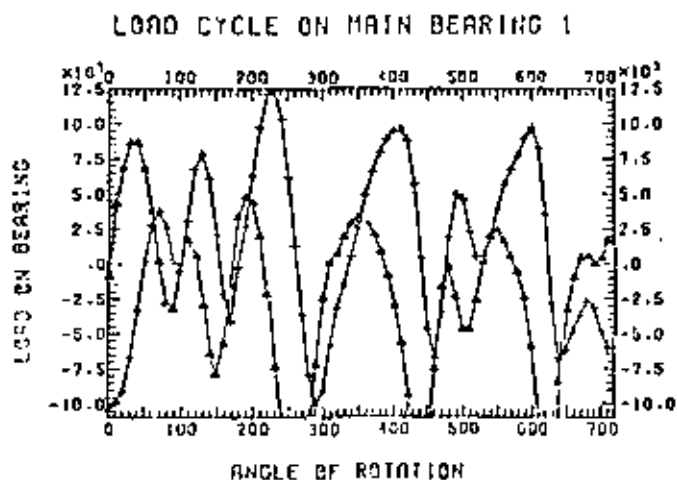


Fig. 10 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 1, Crankshaft With Mass

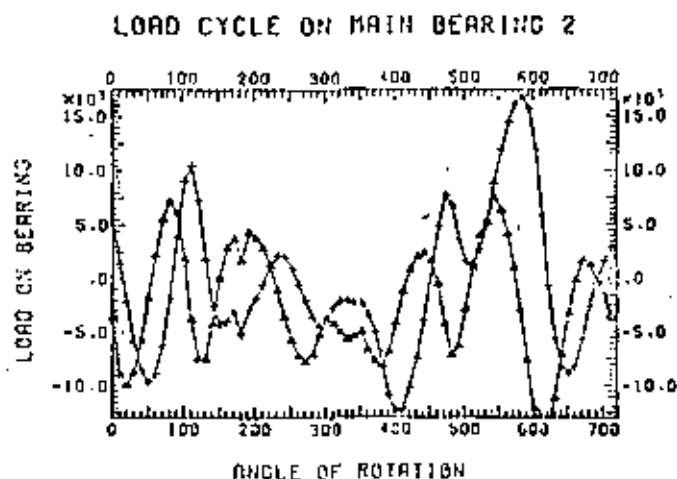


Fig. 11 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 2, Crankshaft With Mass

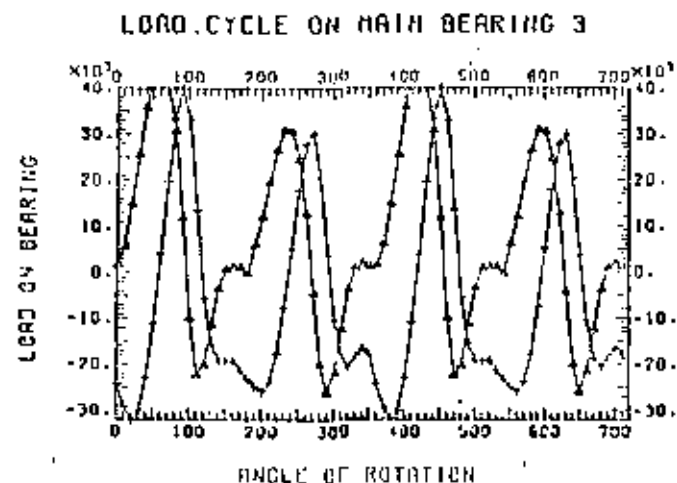


Fig. 12 Radial and Tangential Loads on Main Bearing 3, Crankshaft With Mass

Recommendations for future work in this area may include the consideration of the rotational degrees of freedom in the system in order to obtain moments on the journals and also to consider the Coriolis components of the acceleration given in Equation (10) which was dropped by rotating the supports around the crankshaft instead of doing the opposite.

Also, some parametric analysis would allow the determination of the effect of some additional geometrical parameters on the systems' behavior.

#### REFERENCES

1. Lowell, C.M., "A Rational Approach to Crankshaft Design," presented by the Gas and Power Division of ASME, Chicago, Ill., Nov. 13-18, 1955, ASME Paper No. 55-A-57.
2. Eshleman, R.L., "Torsional Response of Internal Combustion Engines," *Trans. ASME, Journal of Engineering for Industry*, May 1974, pp. 441-449.
3. Ross, J.H., and Slaymaker, R.R., "Journal Center Orbits in Piston Engine Bearings," SAE Paper No. 690114, 1969.
4. Mucino, V.H., "Analysis of Multicylinder IC-Engine Crankshafts with Hydrodynamic Bearings Using a Finite Elements-Transfer Matrix Approach," Doctoral Thesis, Department of Mechanical Engineering, University of Wisconsin--Milwaukee, May 1981.
5. Gross, W., and Hussmann, W., "Forces in the Main Bearings of Multicylinder Engines," *Trans. SAE*, 1966, Paper 660756.
6. Von Schnurbein, E., "A New Method of Calculating Plain Bearings of Statically Indetermined Crankshafts," *Trans. SAE*, Vol. 79, 1970, Paper 700716.
7. Holland, J., "Contributions to the Investigation of Lubricating Conditions in Internal Combustion Engine," *VDI Forsch*, p. 375, 1959.
8. Holzer, H., "Die Bereschnung der Drehschwingungen," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J.W. Edwards, Pub. Inc., Ann Arbor, Michigan.
9. Stickler, A.C., "Calculation of Bearing Performance in Indeterminate Systems," Ph.D. Dissertation, Cornell University, Dept. of Mechanical Engineering, 1974.
10. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Mobility Method of Solution," *Trans. ASME, Journal of Basic Engineering*, Series D, Vol. 87, Sept. 1965, p. 537.
11. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Maximum Film Pressure," *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, July 1967, p. 531.
12. Mucino, V.H., and Pavlic, V., "An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach," *Journal of Mechanical Design*, ASME PAPER No. 80-C2/DET-123, 1980.
13. Pestel, F.C., and Lackie, F.A., *Matrix Methods in Elastodynamics*, McGraw-Hill, N.Y., 1953, p. 143.
14. Booker, J.F., "Dynamically Loaded Journal Bearings: Numerical Application of the Mobility Method," *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, January, 1971, p. 153.
15. Hoos, H., Discussion, I. Mech. E. 1969 Tribology Convention, Colkernburn, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Vol. 183, Part 3P, 1968-1969, p. 205.
16. Shampine, L.F., and Gordon, H.K., *Computer Solution of Ordinary Differential Equations*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, California, 1975, Ch. 3, p. 45.



AN ASME PUBLICATION  
\$3.00 per copy \$1.50 to ASME Members

# ASME

80-C2/DET-123

THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS  
345 E 47 ST., New York, N.Y. 10017

The Society shall not be responsible for statements or opinions advanced in papers or in discussion at meetings of the Society or of its Divisions or Sections, or printed in its publications. Discussion is granted only if the paper is published in an ASME Journal or Proceedings. Release for general publication upon presentation. Full credit should be given to ASME, the Technical Division, and the author(s).

## An Exact Condensation Procedure for Chain-Like Structures Using a Finite Element-Transfer Matrix Approach

V. H. Mucino

Research Asst.,  
Department of Mechanical Engineering,  
Assoc. Mem. ASME

V. Pavelic

Professor of Mechanical Engineering,  
Mem. ASME

*The main objective of this study is to describe a new scheme to carry out the static or dynamic analysis of elastic systems using a combined Finite Element-Transfer Matrix Approach. The proposed scheme offers the advantage of automatic matrix size reduction without having to truncate degrees of freedom, and preserving the strain and kinetic energy throughout the condensation. Although limited to chain-like elastic systems, the method is generalized to non-repetitive configurations with substructures having intermediate active degrees of freedom.*

### Introduction

The analysis of large and complex systems often requires a discretization so refined that the resulting stiffness and mass matrices become too large for the computer to handle. To overcome this difficulty, several "reduction techniques" have been proposed, having as primary objective the size reduction of the system matrices, through a truncation of degrees of freedom (d.o.f.), which involves the selection of certain "master" and "slave" d.o.f., also known in literature as retained and truncated d.o.f., respectively.

Guyan [1] is credited with establishing the concepts involved in performing the reduction, which is based upon the assumption that for dynamic analysis, the kinetic energy of the lower frequency modes is less sensitive to the truncation than the kinetic energy of the higher frequency modes, while the strain energy is preserved through the truncation.

In this procedure, the problems involved are two-fold; first, the results are dependent on the ability and experience of the analyst, to arbitrarily select the master d.o.f. in such a way that the motion of the principal modes can be characterized adequately by the retained d.o.f., and second, that the truncation modifies to an extent the distribution of the inertial properties of the structure, which in turn introduces some error in the results obtained. Further, no criteria currently exists to relate the number and location of the retained d.o.f. and the error introduced by the truncation. Common sense, experience and technical intuition in some cases are about the only possible tools to come up with an efficient truncation, unless the problem in hand is fairly simple. However, for practical purposes, even though these

techniques are used, they produce limited success results.

The idea of matrix condensation lends itself particularly well to the concept of substructuring, which involves the "Macrodiscretization" of a large system into a set of sub-systems known as substructures, which in turn are discretized using a finite element method, having as its main purpose to extract the most significant modes and to assemble the system as a whole in terms of the principal modes of each substructure. This area received significant attention in the aerospace industry and is well documented under the subject of "Modal Synthesis Techniques." Hurty [2], Bamford [3] and Goldman [4], among others, have developed extensive studies in this area and the theory need not be repeated here.

These techniques have been well adapted to the present finite element practice, and several codes, such as NASTRAN [5], ANSYS [6] and SUPERB [7], among others, offer the features of "substructuring" and "dynamic condensation."

It is to be noted that the use of these techniques is primarily directed towards the dynamic analysis area, in which not only the stiffness matrix is stored, but also, the mass, and in some cases, the damping matrices are stored, thus reducing the problem size memory storage capacity requirements to enhance the computer analysis work.

While matrix methods of analysis have significantly contributed to the development of these techniques, particularly the "Direct Stiffness Method" [8], upon which the finite element method is based, other methods have not enjoyed the same degree of application, but may potentially be proved useful for the analysis of structures. Such is the case for the "Transfer Matrix Method" [9], which can be viewed as a continuity function for an enclosed system with transferable boundaries. Its advantages and limitations are documented by Dimarogonas [10] and Eshleman [11], but it has had some successful applications for very particular types of problems, as have the studies published by Prohl [12], Leckie [13], and Lin and McDaniel [14].

Contributed by the Design Engineering Division of THE AMERICAN SOCIETY OF MECHANICAL ENGINEERS for presentation at the Century 2 Design Technology Transfer Conference, San Francisco, Calif., Aug. 19-21, 1980. Manuscript received at ASME Headquarters March, 1980. Paper No. 80-C2/DET-123.

Copies will be available until May 1981.

The generalization achieved by the finite element method and the correspondence or correlation between the "Direct Stiffness" and the "Transfer Matrix" methods prompted various researchers to investigate the possibility of combining the advantages of both methods. Pestel and Leckie [15], treated the field transfer matrix as a different way of expressing the stiffness matrix. Later Dokainish [16] presented a combined Finite Element-Transfer Matrix (FE-TM) Method for the dynamic analysis of tapered or rectangular plates. In his approach, a finite element formulation was used to obtain the stiffness and mass matrices for a strip of elements whose boundaries were successively connected and whose end boundaries were characterized by state vectors, as defined in the standard transfer matrix method. Then a transformation of matrices was performed as described by Pestel and Leckie [15] and an algorithm similar to that proposed by Holzer [17] was used to successively solve for the natural frequencies of the system. McDaniel and Eversole [18] followed a similar approach to treat a stiffened plate structure and gave some numerical values of merit in the computing time efficiency of the algorithm as compared with regular finite element formulation without condensation.

In this paper a further generalization for the FE-TM method is presented with special emphasis on the non-repetitive configuration, but still chain-like type of structures, without restricting the substructures to be of the same nature. A special feature, described herein, is the treatment given to the intermediate d.o.f. which are condensed into a more compact form rather than regarding them as slave or truncated d.o.f. Condensation in this sense implies that all the d.o.f. contribute to both kinetic and strain energy.

## Theory

**The Equations of Motion.** The equations of motion of any elastic structure able to store energy in terms of elastic and inertial properties can be obtained from the applicable form of the Lagrange equation as follows:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial x_i} = Q_i \quad (1)$$

Where the Lagrangian function ( $L$ ) is given by the following expression:

$$L = 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - 1/2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n K_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

In this expression, it is assumed that the characteristics of the system can be approximated by expressing the kinetic energy (first term), and the strain energy (second term) in terms of a finite number ( $n$ ) of generalized coordinates of d.o.f.

The substitution of equation (2) in equation (1) yields the resulting equations of motion, which expressed in matrix notation have the following general form:

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{F(t)\} \quad (3)$$

**Systems Matrices and Substructures.** In finite element practice, the mass matrix  $[M]$  can be formulated using a lumped mass approach as described by Bisplinghoff et. al. [19]. This formulation results in a diagonal matrix.

Also, a consistent mass formulation can be used to describe the distributed mass properties of the system. Archer [20] introduced the concept of consistent mass matrix, and gave it a physical interpretation analogous to that of the stiffness matrix. The later approach results in a banded matrix and the natural frequencies obtained using this consistent mass formulation are upper bounds to the exact frequencies of the system.

The formulation of the equations of motion using either a lumped or consistent mass matrix, generally satisfy the requirements of minimum potential energy. The explicit form of the equations of motion is as follows:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & m_{n2} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dots \\ \ddot{x}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

This system of equations is applicable to any elastic structure if damping can be neglected. If finite elements are used to discretize the overall structure, and the system is composed of several substructures, the overall system matrices have the following form:

## Nomenclature

$\frac{\partial}{\partial t}$  = partial derivative with respect to time  
 $\dot{x}_i, \dot{x}_j$  = generalized velocities  
 $x_i, x_j$  = generalized coordinates  
 $Q_i$  = generalized forces  
 $L$  = Lagrangian function  
 $\{\ddot{X}\}, \{X\}$  = vector of generalized (accelerations, displacements)  
 $\{\ddot{X}_m\}, \{X_m\}$  = vector of (accelerations, displacements) of master d.o.f.  
 $\{\ddot{X}_s\}, \{X_s\}$  = vector of (accelerations, displacements) of slave d.o.f.  
 $\{\ddot{X}_L\}, \{X_L\}$  = vector of d.o.f. of the (left, right) boundaries of a substructure  
 $\{X_j\}$  = vector of intermediate d.o.f. of a substructure  
 $m_{ij}$  = mass coefficient associated with generalized coordinates "i" and "j"  
 $[M]$  = global mass matrix  
 $[M_{mm}]$   
 $[M_{ms}]$   $[M_{sm}]$   $[M_{ss}]$  = partitions of the global mass matrix

corresponding to the master and slave d.o.f.  
 $[M_{ij}]$   
 $K_{ij}$  = stiffness coefficient associated with generalized coordinates "i" and "j"  
 $[K]$  = global stiffness matrix  
 $[K_{mm}]$   
 $[K_{ms}]$   $[K_{sm}]$   $[K_{ss}]$  = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the master and slave d.o.f.  
 $[K_L]$   
 $[K_{LL}]$   $[K_{LR}]$   $[K_{RL}]$   $[K_{RR}]$  = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the left and right boundaries d.o.f.  
 $[K_{RR}]$   
 $R$  = order of the global stiffness matrix  
 $r_i$  = order of the substructure "i" stiffness matrix  
 $n$  = number of degrees of freedom per node  
 $N$  = number of nodes at the interfaces

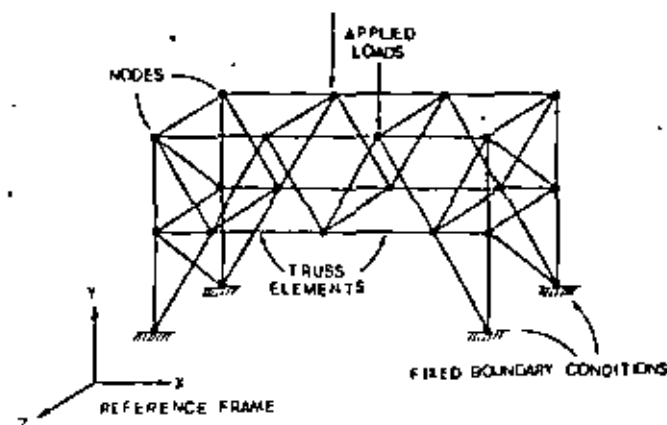


Fig. 1 Multi-degree of freedom general structure with constrained boundary conditions and applied load vectors

$$[M] = \begin{bmatrix} [m_1] & & \\ & [m_2] & \\ & & \ddots \\ & & & [m_n] \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad [K] = \begin{bmatrix} [k_1] & & \\ & [k_2] & \\ & & \ddots \\ & & & [k_n] \end{bmatrix} \quad (5)$$

The overlap between the blocks represents the common boundaries between two adjacent substructures. Physically, the overlap between matrices represents the degrees of freedom connecting the two subsystems.

The order of these matrices is directly given by the total number of d.o.f. in the overall system. As an example, consider the structural system shown in Fig. 1.

If a lumped mass matrix is used, and no damping is assumed, the equations describing the motion of the structure under a harmonic driving force are as follows:

$$[M]_{r_1 \times r_1} \{\ddot{X}\}_{r_1 \times 1} + [K]_{r_1 \times r_1} \{X\}_{r_1 \times 1} = \{F\}_{r_1 \times 1} \quad (6)$$

If the system as shown in Fig. 1 is assembled to another alike system, as shown in Fig. 2, such that some nodes are common to both systems, the resulting equations become:

$$\begin{bmatrix} [M_1] \\ \\ [M_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_i \\ \ddot{X}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_1] \\ \\ [K_2] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_i \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_i \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

$r_1 \times r_1$        $r_1 \times 1$        $r_1 \times r_1$        $r_1 \times 1$        $r_1 \times 1$

where:

$[X_i]$  are the degrees of freedom associated with subsystem "i" only  $i = 1, 2$  and  $[X_j]$  are the degrees of freedom connecting the two substructures.

For the example used here, the order of the global matrices is given by the following relationship.

$$R = r_1 + r_2 - (\text{d.o.f.}) \times N \quad (8)$$

where:

$r_i$  is the order of the  $i$ th substructure matrix,  $i = 1, 2$ ,  $N$  is

the number of nodes at the interface and d.o.f. is the number of degrees of freedom per node.

In general, the substructures do not have to be of the same order, and several substructures can be assembled following the same procedure. The general expression for the order of the global matrices of the chain-like system shown in Fig. 3 is given by:

$$R = \sum_{i=1}^n r_i - \sum_{i=1}^{n-1} (\text{d.o.f.})_i \times N_i \quad (9)$$

It should be noted that the interfaces may or may not have the same number of nodes. The important fact to note here is that the more substructures there are in the system, the larger the order of the system matrices will be. This is not the case for the proposed method described in the following sections.

### Nomenclature (cont.)

- $\{F(t)\}$  = vector of applied time dependent forces
- $\{F_m\} \{F_s\}$  = vector of forces associated with (master, slave) d.o.f.
- $\{F^*\}$  = reduced vector of applied forces after condensation
- $\{F_L\} \{F_R\}$  = vectors of forces for the (left, right) boundary d.o.f.
- $\{F_i\}$  = vector of forces at the intermediate d.o.f.
- $[D]$  = dynamic stiffness matrix
- $[D_{mm}]$
- $[D_{ms}] \{D_{sm}\}$  = partitions of the global dynamic stiffness matrix corresponding to the master and slave d.o.f.
- $[D_m]$
- $[D^*]$  = reduced dynamic stiffness matrix after condensation
- $[T_i]$  = transfer matrix of substructure  $i$
- $[T_{11}]$
- $[T_{12}] \{T_{21}\}$  = partitions corresponding to the overall transfer matrix of a substructure with active intermediate d.o.f.

- $[T_{22}]$
- $Z_R \{Z_L\}$  = state vectors of the (right, left) boundaries
- $[A] \{B\} \{C\}$
- $[D] \{E\} \{F\}$  = partitions of the global stiffness matrix corresponding to the (left, right and intermediate) d.o.f.
- $[G] \{H\} \{J\}$
- $\{\psi_{11}\}$
- $\{\psi_{21}\} \{\psi_{12}\}$  = partitions of the reduced set of equations after the intermediate d.o.f. have been eliminated in the global system
- $\{\psi_{22}\}$
- $\{R_1\}$  = vectors of remainder terms after the intermediate d.o.f. have been eliminated in the global system
- $\{R_2\}$
- $\{S_1\}$  = complementary vectors for the extended transfer matrix of equation (32)
- $\{S_2\}$
- $\omega$  = frequency of vibration



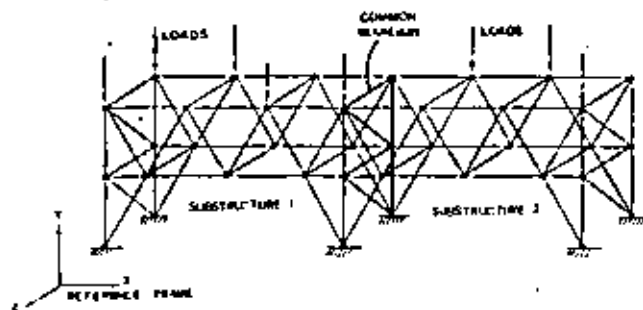


Fig. 2 Superstructure composed of two alike substructures having a common interface boundary

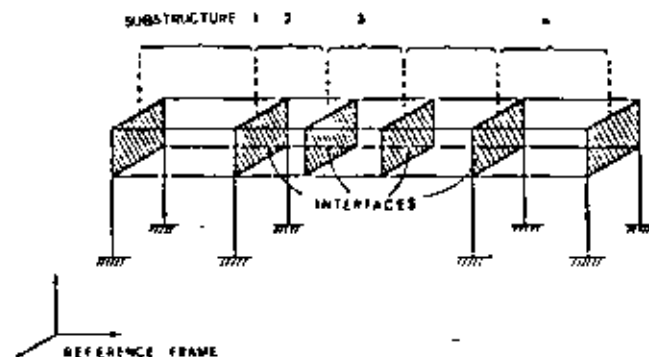


Fig. 3 Multisegmented superstructure with "n" substructures chain-like connected. The substructures are of a non-repetitive nature.

**Condensation Techniques.** As stated earlier, the condensation of d.o.f. has as its primary objective, the matrix size reduction and is conceptually done in four steps which are:

- 1 Selection of master set of d.o.f.
- 2 Partition of the system matrices.
- 3 Obtaining the solution for the master set of d.o.f.
- 4 Performing expansion or recovery for slave d.o.f.

The selection of the master set of d.o.f. is generally left to the analyst, who designates certain d.o.f. as being the most representative of the motion of the system. Once the master set has been specified, rearrangement of rows and columns is performed on the mass and stiffness matrices, in order to make the partitions given in the following equation:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{X}_m \\ \ddot{X}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Where the subscript (*m*) indicates the terms associated with the "master set" of d.o.f., and subscript (*s*) indicates the terms associated with the "slave d.o.f." Assuming a harmonic solution, the following expression can be obtained:

$$\begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (11)$$

this equation can be written as follows:

$$\begin{bmatrix} D_{mm} & D_{ms} \\ D_{sm} & D_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_m \\ X_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_m \\ F_s \end{Bmatrix} \quad (12)$$

or

$$[D] \{X\} = \{F\} \quad (13)$$

Where the matrix  $[D]$  is known as the "Dynamic Stiffness Expanding" equation (12), solving for  $\{X_s\}$  and substituting, several times, the following system of equations is obtained:

$$[D^*] \{X_m\} = \{F^*\} \quad (14)$$

where

$$[D^*] = [D_{mm}] - [D_{ms}] [D_{ss}]^{-1} [D_{sm}] \quad (15)$$

and

$$\{F^*\} = \{F_m\} + [D_{ms}] [D_{ss}]^{-1} \{F_s\} \quad (16)$$

Equation (14) constitutes the "Reduced" set of equations, whose matrix order is dependent on the number of master d.o.f. The expanded solution can be obtained using the recovery equations; these equations are given by the following expression:

$$\{X_s\} = [D_{ss}]^{-1} [\{F_s\} - [D_{sm}]\{X_m\}] \quad (17)$$

A special case in the condensation results when the master d.o.f. are chosen in such a way that there are no driving forces acting on the slave d.o.f.; in this case equations (16) and (17) become:

$$\{F^*\} = \{F_m\} \quad (18)$$

and

$$\{X_s\} = [D_{ss}]^{-1} [D_{sm}]\{X_m\} \quad (19)$$

Aside from the inherent approximation in the discretization of the system, the solution expressed by equations (14) and (17) do not fully satisfy the Lagrange equation (1), since the kinetic energy is not minimized, considering the slave d.o.f. This argument is well documented by Guyan [21] and Clough [22], among others. Therefore, the truncation of d.o.f. introduces some error in the results obtained.

#### The Finite Element-Transfer Matrix Approach

Prior to the discussion and derivation of the proposed method, the fundamental concepts of combining the finite element and the transfer matrix method will be reviewed briefly. A more detailed description can be found in references [15, 16] and [18].

The application of the direct stiffness method to an elastic system subject to a static load vector results in the following equation:

$$[K] \{X\} = \{F\} \quad (20)$$

Now, let's consider the system described by equation (20) as a structure such that the degrees of freedom can be partitioned into "left" and "right" d.o.f. Then equation (20) becomes:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{LR} \\ K_{RL} & K_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ X_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (21)$$

By expanding this expression and solving for  $\{X_R\}$  and  $\{F_R\}$  in terms of  $\{X_L\}$  and  $\{F_L\}$ , the following equations can be obtained:

$$\{X_R\} = [-K_{LR}]^{-1} [K_{LL}] \{X_L\} + [K_{LR}]^{-1} \{F_L\} \quad (22)$$

and

$$\{F_R\} = [[K_{RL}] - [K_{RR}] [K_{LR}]^{-1} [K_{LL}]] \{X_L\}$$

$$+ [K_{RR}] [K_{LR}]^{-1} [F_L] \quad (23)$$

which arranged in matrix form become:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[K_{LR}]^{-1}[K_{LL}] & [K_{LR}]^{-1} \\ [K_{RL}] - [K_{RR}][K_{LR}]^{-1}[K_{LL}] & [K_{RR}][K_{LR}]^{-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} \quad (24)$$

or simplifying the notation, it can be written as follows:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} \quad (25)$$

or

$$\{Z_R\} = [T] \{Z_L\} \quad (26)$$

Equation (26) can be recognized as the transfer matrix relationship between the state vectors  $\{Z_R\}$  and  $\{Z_L\}$ , which were derived directly from the stiffness relationship between the displacement vector  $\{X\}$  and force vector  $\{F\}$ , given by equation (20).

In this example, only the field transfer matrix was derived. In a similar manner, the point transfer matrix could be derived.

### The Proposed Method of Analysis

Consider now, that the structure to be analyzed is such that it can be broken down into substructures which are chain-like connected as shown in Fig. 4. The substructures have certain number of d.o.f. which are at the interfaces and some which are intermediate between the two interfaces. Then taking the vector of d.o.f. for one substructure, and dividing it into three subsets:

$$X = \begin{Bmatrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{Bmatrix}$$

where

- $\{X_L\}$  are the d.o.f. at the left interface
- $\{X_I\}$  are the intermediate d.o.f., and
- $\{X_R\}$  are the d.o.f. at the right interface

Using this partition in equation (13) applied to one substructure, the following expressions can be written:

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ X_I \\ X_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_I \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (27)$$

solving for the  $X_I$  and substituting in the remaining equations, the following expressions are obtained:

$$\begin{aligned} & [[A] - [B][E]^{-1}[D]] \{X_L\} \\ & + [[C] - [B][E]^{-1}[F]] \{X_R\} + [B][E]^{-1} \{F_I\} = \{F_L\} \\ & [[G] - [H][E]^{-1}[D]] \{X_L\} \\ & + [[I] - [H][E]^{-1}[F]] \{X_R\} + [H][E]^{-1} \{F_I\} = \{F_R\} \end{aligned} \quad (28)$$

which can also be written in matrix form as follows:

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ X_R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_L \\ F_R \end{Bmatrix} \quad (29)$$

where  $\{\psi_{ij}\}$  and  $\{R_i\}$  are the short hand notation of the matrices in the square brackets of equations (28).

By expanding and rearranging equation (29), it can be shown after various matrix manipulations that the left and right boundaries can be related by the following expression.

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\psi_{12}^{-1} \psi_{11} & \psi_{12}^{-1} \\ \psi_{21} - \psi_{22} \psi_{12}^{-1} \psi_{11} & \psi_{22} \psi_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\psi_{12}^{-1} R_1 \\ \psi_{22} \psi_{12}^{-1} R_1 + R_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

or simplifying the notation:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

where  $T_{ij}$  correspond to the terms included in the partitions of the matrix of equation (30).

Adding one dummy equation to the system, i.e.,  $(1=1)$  the following equation can be obtained:

$$\begin{Bmatrix} X_R \\ F_R \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & S_1 \\ T_{21} & T_{22} & S_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_L \\ F_L \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

which is the expanded transfer matrix relating the state of the left and right boundaries through the intermediate degrees of freedom.

For dynamic analysis, the stiffness matrix  $[A]$  can be substituted by the dynamic stiffness matrix given in equations (11) and (13). The procedure then to obtain the transfer matrix is analogous to that just described.

Once the transfer matrix has been formulated for each substructure, the assembly of the system as a whole is made following standard transfer matrix method procedures.

The relation between the left and right interface state vectors, of a substructure in a chain-like connected system is given by equation (32), which in short hand notation has the form of equation (26) repeated here for convenience of the reader.

$$\{Z_R\}_n = [T_n] \{Z_L\}_n \quad (26)$$

When two substructures are linked together, the right interface of substructure  $(n)$ , becomes also the left interface of substructure  $(n+1)$ , therefore:

$$\{Z_L\}_{n+1} = \{Z_R\}_n \quad (33)$$

The relationship between state vectors for substructure  $(n+1)$  is then

$$\{Z_R\}_{n+1} = [T_{n+1}] \{Z_L\}_{n+1} \quad (34)$$

Combining equations (26), (33) and (34) the equation results:

$$\{Z_R\}_{n+1} = [T_{n+1}][T_n] \{Z_L\}_n \quad (35)$$

In this case, the general expression for the total system with "n" substructures as shown in Fig. 4 is given by

$$\{Z\}_n = [T_n][T_{n-1}][T_2][T_1] \{Z_0\} \quad (36)$$

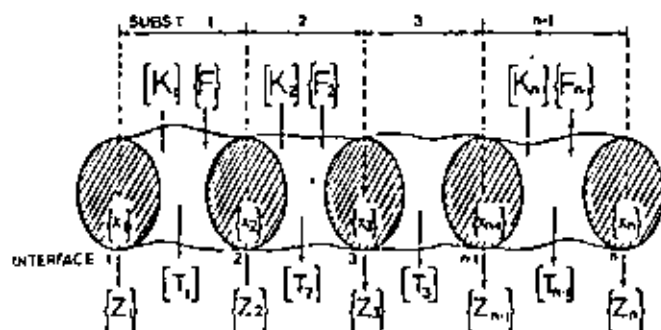


Fig. 4 A chain-like connected system, composed of "n" substructures or stations, with defined stiffnesses  $[k_i]$  and applied force vectors  $\{F_i\}$ , and state vectors  $\{Z_i\}$  defined at the connecting boundaries

or

$$\{Z\}_n = [U] \{Z\}_0 \quad (37)$$

where

$$[U] = [T_n][T_{n-1}] \dots [T_1] \quad (38)$$

It should be noted that by multiplying the transfer matrices  $[T_i]$ , the order of matrix  $[U]$  does not increase but remains compatible with the matrices being multiplied. If the system is such that all substructures have the same transfer matrix the order of the system transfer matrix  $[U]$  remains the same.

This feature results in a reduced size matrix which embodies the entire system. The end state vectors  $\{Z\}_n$  and  $\{Z\}_0$  contain the boundary conditions of the structure in terms of displacements in the direction of the d.o.f. and forces at the nodes located in the interfaces.

Once the system has been assembled, this is when all the transfer matrices have been multiplied as expressed by equation (38). Subsequently the boundary conditions have to be satisfied by solving for the unknown terms in the end state vectors. After the end state vectors are known the intermediate state vectors can be obtained by recursively applying equation (26) until all state vectors are known.

For dynamic analysis, the dynamic stiffness matrix contains the frequency terms. Those frequency values which satisfy the boundary conditions are the natural frequencies for the system. The procedure to obtain the natural frequencies and the modes is similar to that proposed by Holzer [17]. In this method a natural frequency value is assumed for which the system is "tested," where the test consists in multiplying the transfer matrices and observing whether or not the boundary conditions are satisfied. If the boundary conditions are not satisfied, a different "test" frequency must be chosen; and calculations must be repeated, until the boundary conditions are satisfied producing an actual natural frequency of the system. This iterative procedure is shown schematically in the computer flowchart in Fig. 5.

#### Operational Aspects of the Finite Element-Transfer Matrix Method

Due to the inherent complications of matrix operations, it is necessary to point out some important aspects to be considered in developing a suitable computer algorithm.

The proposed method is oriented towards the analysis of complex systems which can be modeled by means of substructures connected in a chain-like manner, for instance, beams with intermediate supports, bridges, multithrow crankshafts, etc. The complications involved in obtaining the stiffness and mass matrices are directly associated with the type of finite elements used to describe the structure. Several books [23, 24 among others] are available with detailed descriptions of the procedures required to obtain the system matrices of equations (3) and (4).

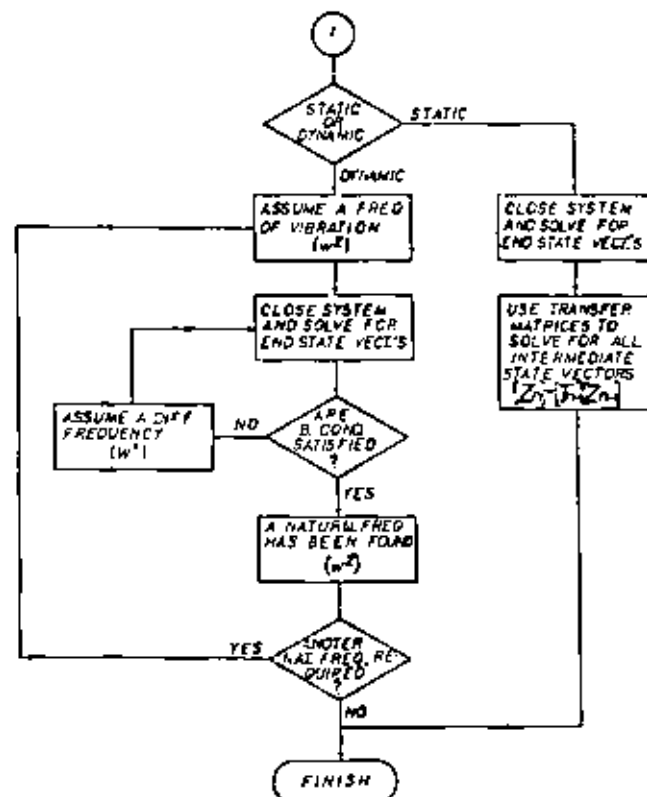
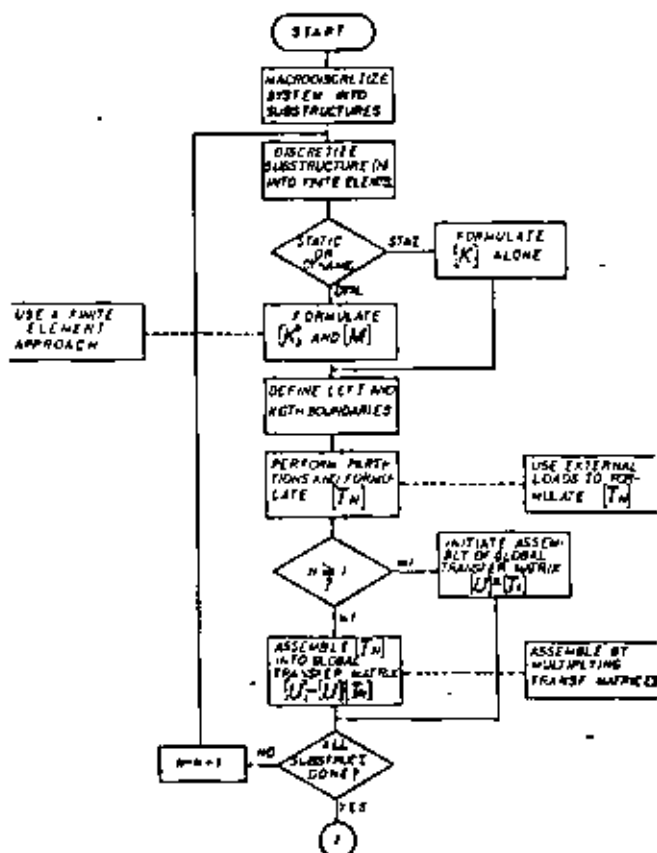


Fig. 5 Computer implementation algorithm for the generalized finite element-transfer matrix method for the static or dynamic analysis of chain-like structures

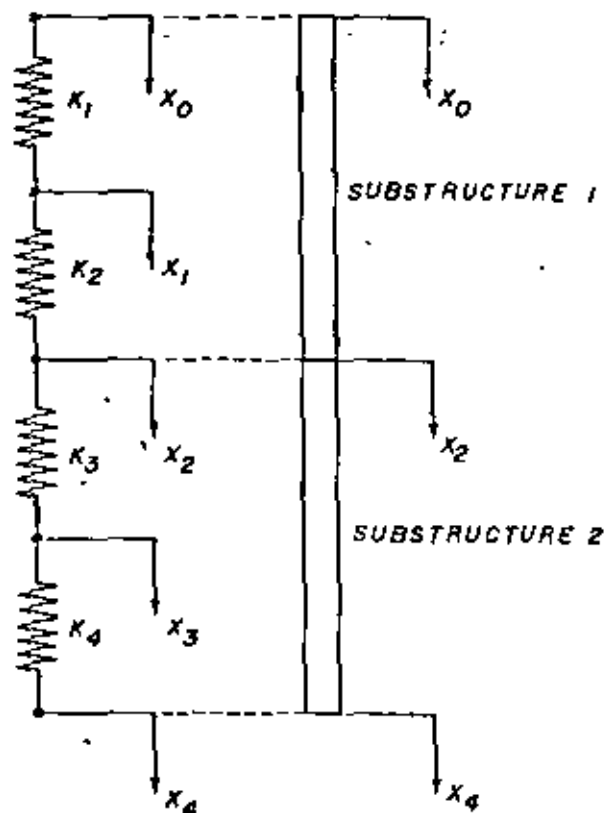


Fig. 6 Simple chain-like system and synthesis by substructuring

The derivation of the transfer matrix for a substructure, however, requires the inversion of submatrix  $[E]$  in equation (27) and  $[\psi_{12}]$  in equation (30). These inversions are sources of some numerical errors. However, these inversions are done only once for each substructure and are not affected by the load vector. This is an advantage, especially if all the substructures have the same configuration. This is the case in periodic structures such as those treated by Emgels and Mairovitch [25]. Note also that the order of these matrices is smaller than the order of the stiffness and mass matrices for a given substructure, since only the intermediate d.o.f. are considered in the matrix to be inverted.

Finally, it can be noted that the matrix  $[k]$  is banded and it does not require full storage in the computer memory. It is the assembly of the various substructures that makes storage requirements increase, since the order of the global matrices increases too. In the FE-TM method the substructure matrix  $[7_i]$  is fully populated and requires full storage in the computer memory, but the global transfer matrix  $[U]$  does not increase in size since it results from consecutive matrix multiplications as indicated by equation (36).

Some other aspects in obtaining the solution of the system are parallel to those involved in standard transfer matrix applications and discussion may be found, for instance, in papers by Pestel and Leckie [9] or [15].

Although the proposed method is oriented towards more complex structures, a simple example is given in the appendix with the purpose of illustrating the treatment of two substructures which have a common boundary and are chain-like connected. In this example, the stiffness matrix  $[k]$  is first derived for each element in the substructure and then assembled using the standard direct stiffness method. Subsequently, the transfer matrix  $[7]$  is formulated for each substructure by applying the transformations of equations (28), (30) and (32) to the stiffness matrix found earlier.

Finally, global transfer matrix  $[U]$  is obtained by multiplying the transfer matrices of each substructure.

Treatment of a larger and more complex system is analogous to that described in this example and the use of the finite element method allows more complex elements to be used to discretize the substructures and to obtain the substructure stiffness and mass matrices. Such applications have been done by the authors using 3-D isoparametric solid elements and will be reported in our next papers which are now in preparation.

## Summary and Conclusions

A brief description of the currently available condensation and substructuring techniques has been made, pointing out some of the main features of these techniques and how they apply to the actual type of systems addressed in this study. The correlation between the stiffness and transfer matrix for simple elements was discussed, and a generalization of the concept was developed for complex substructures having intermediate active d.o.f. A detailed derivation of the equations involved in the proposed method was made, and a general computer algorithm flowchart (Fig. 5) was presented showing the main steps required for computer implementation of this method for practical applications to an actual physical system.

It is important to note that special attention must be paid to the numerical aspects involved in the matrix operations, in order to reduce the possibility of numerical error.

From inspection of the equations derived, and from the example given in the appendix, the following conclusions can be drawn which apply for chain-like connected systems.

- 1 Matrix reduction can be achieved by applying the FE-TM approach to the substructures of a system.
- 2 No selection of Master and Slave degrees of freedom is required in the FE-TM method, thus reducing the possibility of misrepresentation of the system.
- 3 All the degrees of freedom are included in the formulation of the reduced equations, and no sacrifice is required in approximating the kinetic energy of the system.
- 4 Intermediate active d.o.f. can be properly condensed, along with any external loads acting on them as shown by equation (28).
- 5 The advantages of the finite element method apply to the proposed method in terms of discretizing the system using substructures.
- 6 The advantages of the Transfer Matrix method also apply to the proposed method, specifically the fact that by multiplying the transfer matrices, the order of the resulting matrix does not increase.

Future improvements in this area perhaps will include the formulation of transfer matrices for structures with complex finite elements and in addition, the inclusion of branches in the system may be considered.

Some of this work is already in progress at this institution, specifically, transfer matrix for structures modeled with 3D-solid finite elements.

## References

- 1 Guyan, R. J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices," *A.I.A.A. Journal*, Vol. 3, No. 2, Feb. 1965, p. 380.
- 2 Hurry, W. C., "Introduction to Modal Synthesis Techniques," Paper No. 1 of ASME Special Publication Bk. No. H00072, 1971, *Synthesis of Vibrating Systems*.
- 3 Hamford, R. M., "A Modal Combination Program for Dynamic Analysis of Structures," Technical Memorandum J1-290, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Calif., July 1967.
- 4 Goldman, R. L., "Vibration Analysis by Dynamic Partitioning," *A.I.A.A. Journal*, Vol. 7, No. 6, June 1969, p. 1152.

5 MacNeal, R. H., "The NASTRAN Theoretical Manual," (Level 15.5), The MacNeal-Schendler Corporation, Los Angeles, Ca., 1974.

6 DeSalvo, G. J., and Swanson, J. A., "The ANSYS User's Manual," SWAN Analysis Systems, Inc., Elizabeth, Pa., 1974.

7 SUPERB's User Manual, Structural Dynamics Research Corporation, Milford, Ohio, 1978.

8 Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N.Y., 1975, p. 138.

9 Leckie, F. A., and Pestel, E., "Transfer Matrix Fundamentals," *Intern. J. Mech. Sci.*, Vol. 2, 1960, pp. 137-167.

10 Dimarogonas, A. D., *Vibration Engineering*, West Publishing Co., N.Y., 1976, p. 406.

11 Fshleman, R. L., *Flexible Rotor-Bearing System Dynamics*, ASME Special Publication, Book No. H00042, 1972.

12 Prohl, M. A., "A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors," *Transactions ASME*, Vol. 67, 1945, pp. A142, A148.

13 Leckie, F. A., "The Application of Transfer Matrices to Plate Vibrations," *Ingenieur-Archiv*, Vol. XXXII, 1963, pp. 100-111.

14 Liu, Y. K., and McDaniel, T. J., "Dynamics of Beam-Type Periodic Structures," *ASME, Journal of Engineering for Industry*, Nov. 1969, p. 1133.

15 Pestel, E. C., and Leckie, F. A., *Matrix Methods in Elastodynamics*, McGraw-Hill, N.Y., 1963, p. 148.

16 Dokainish, M. A., "A New Approach for Plate Vibrations: Combination

of Transfer Matrix and Finite-Element Technique," *ASME, Journal of Engineering for Industry*, May 1972, pp. 326-330.

17 Holzer, H., "Die Berechnung der Drehschwingungen," Springer-Verlag OHG, Berlin, 1921, Republished by J. W. Edwards, Pub., Inc., Ann Arbor, Mich.

18 McDaniel, T. J., and Eversole, K. B., "A Combined Finite Element-Transfer Matrix Structural Analysis Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 51, No. 2, 1977, pp. 157-169.

19 Bisplinghoff, R. L.; Ashley, H., and Halfman, R., *Aeroelasticity*, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., 1955.

20 Archer, J. S., "Consistent Mass Matrix for Distributed Mass Systems," *Proc. ASCE, Journal of the Structural Division*, Vol. 89, No. ST4, Aug. 1963.

21 Guyan, R. J., "Distributed Mass Matrix for Plate Element Bending," *Technical Note, A.I.A.A. Journal*, Sept. 1964, p. 567.

22 Clough, R. W., and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, N.Y., 1975, p. 235.

23 Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method*, McGraw-Hill, N.Y., 1977.

24 Cook, R. D., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., N.Y., 1974.

25 Engels, R. C., and Mitrovich, L., "Response of Periodic Structures—by Modal Analysis."

## APPENDIX

Transfer Matrix derivation for the two substructure system shown, Fig. 6.

Stiffness Matrix of Substructure 1:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Stiffness Matrix of Substructure 2:

$$\begin{bmatrix} K_3 & -K_3 & 0 \\ -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Assembled Overall System Stiffness Matrix:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 & 0 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & -K_2 + K_3 & -K_3 & 0 \\ 0 & 0 & -K_3 & K_3 + K_4 & -K_4 \\ 0 & 0 & 0 & -K_4 & K_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Partitions on Substructure 1 Stiffness Matrix for Transfer Matrix Formulation:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

Therefore

$$\begin{aligned} A &= K_1 & B &= -K_1 & C &= 0 \\ D &= -K_1 & E &= K_1 + K_2 & F &= -K_2 \\ G &= 0 & H &= -K_2 & I &= K_2 \end{aligned}$$

Then, using equations (30) and (32)

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} & \psi_{12} &= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} & R_1 &= -\frac{K_1 f_1}{K_1 + K_2} \\ \psi_{21} &= -\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} & \psi_{22} &= \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} & R_2 &= -\frac{K_2 f_1}{K_1 + K_2} \end{aligned}$$

$$\psi_{12}^{-1} = -\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}$$

and

$$\begin{aligned} T_{11} &= -\left(-\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}\right) \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) = 1 & T_{12} &= -\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \\ T_{21} &= -\left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) + \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}\right) \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) = 0 & T_{22} &= \left(\frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2}\right) \left(-\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}\right) = -1 \end{aligned}$$

$$S_1 = - \left( - \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right) \left( \frac{-K_1 f_1}{K_1 + K_2} \right) = - \frac{f_1}{K_2}$$

$$S_2 = \left( \frac{K_2 K_1}{K_1 + K_2} \right) \left( - \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right) \left( \frac{-K_1 f_1}{K_1 + K_2} \right) + \left( \frac{-K_2 f_1}{K_1 + K_2} \right) = \frac{f_1 (K_1 - K_2)}{(K_1 + K_2)}$$

The Transfer Matrix for Substructure 1 is

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & - \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} & \frac{f_1}{K_2} \\ 0 & -1 & \frac{f_1 (K_1 - K_2)}{(K_1 + K_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ f_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & - \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} & \frac{f_1}{K_2} \\ 0 & -1 & \frac{f_1 (K_1 - K_2)}{(K_1 + K_2)} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ f_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

The Global Transfer Matrix is

$$\begin{bmatrix} X_4 \\ f_4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \left( \frac{K_3 + K_4}{K_3 K_4} - \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right) \left( - \frac{f_1}{K_2} - \frac{K_3 + K_4}{K_3 K_4} \left( \frac{f_1 (K_1 - K_2)}{(K_1 + K_2)} \right) - \frac{f_3}{K_4} \right) \\ 0 & 1 & \left( - \frac{f_1 (K_1 - K_2)}{(K_1 + K_2)} + \frac{f_3 (K_3 - K_4)}{K_3 + K_4} \right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ f_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



The Society shall not be responsible for statements or opinions advanced in papers or in discussion at meetings of the Society or of its Divisions or Sections, or printed in its publications. Discussion is printed only if the paper is published in an ASME journal or Proceedings. Released for general publication upon presentation. Full credit should be given to ASME, the Technical Division, and the author(s).

\$3.00 PER COPY  
\$1.50 TO ASME MEMBERS

## Design Improvement of a Friction Brake Plate Through Finite Element Analysis

V. H. MUCINO

V. PAVELIC

R. G. TASCHNER

The University of Wisconsin-Milwaukee,  
Milwaukee, Wisc.

The finite element method is applied to conduct the stress analysis of the friction brake plate used in the rear axle system of agricultural tractors. External loads on the plate are considered to be applied to the spline and fixed boundary conditions at the friction material area. The original design of the friction plate is analyzed and shown to have an uneven distribution of load on the teeth of the spline, causing high stresses at some critical areas of the plate. Design changes are made on the analysis model, having as a primary interest the reduction of peak stresses to an acceptable level, without severe modifications to the original design. With a minimum of computer manipulations, the finite element model used yielded the best configuration of the brake plate for the given loads.

Contributed by the Design Engineering Division of The American Society of Mechanical Engineers for presentation at the Design Engineering Conference & Show, Chicago, Illinois, May 7-10, 1979. Manuscript received at ASME Headquarters February 22, 1979.

Copies will be available until February 1, 1980.

# Design Improvement of a Friction Brake Plate Through Finite Element Analysis

V. H. MUCINO

V. PAVELIC

R. G. TASCHNER

## NOVENCLATURE

- $A_f$  = flank area of the teeth  
 $d_{ri}$  = radial displacement at the tip of the tooth (i)  
 $d_{ti}$  = tangential displacement at the tip of the tooth (i)  
 $f_i$  = load distribution factor  
 $F_n$  = normal force acting on the flank of the teeth  
 $F_r$  = radial force acting on the flank of the teeth  
 $F_t$  = tangential component of the normal force ( $F_n$ )  
 $m$  = slope of loading line in Goodman diagram  
 $P_e$  = equivalent pressure on the flank of the teeth  
 $r$  = stress ratio of alternating stress ( $s_{ai}$ ) to mean stress ( $s_{mi}$ )  
 $S_{ai}$  = alternating stress at tooth (i)  
 $S_{mi}$  = mean stress at tooth (i)  
 $S_{max, i}$  = maximum stress at tooth (i)  
 $S_{vmi}$  = Von Mises criterion of failure  
 $S_1, S_2, S_3$  = principal stresses  
 $T_i$  = torque carried by tooth (i)  
 $T_{in}$  = input torque in the spline shaft  
 $T_{pl}$  = torque carried by one friction plate  
 $\phi$  = pressure angle of the spline teeth

## INTRODUCTION

The system considered in this analysis is a multiple disk brake, which is used in a typical rear axle of an agricultural tractor. The main objective of the analysis is the design improvement of the brake system which depends upon the performance of the friction plates. These friction plates are subject to fluctuating loads that may cause fatigue failure of the system. Therefore, the analysis is carried out having as primary interest the reduction of peak

stresses occurring at the critical area of the friction plate.

In pursuing the objective it is desirable to keep the overall modifications to a minimum.

This paper demonstrates the application of the finite element method as an efficient tool to identify critically stressed areas of a typical friction plate, and also as a tool to qualitatively evaluate the design modifications proposed in order to reduce the critical stresses.

Fig. 1 shows the main components of the rear axle assembly which consists of a differential gear train (A), a clutch system (B), a dual brake system (C&C') and the planetary gear train systems (D&D'). The various components in the assembly of each brake system, are shown separately in Fig. 2.

The operation of a multiple disk brake system may be described briefly as follows: the friction plates rotate along with the shaft to which they are attached through the spline, and the steel plates are attached to the housing in such a way that rotation is prevented. Axial displacement is allowed for both the friction plates and steel plates. When hydraulic pressure is applied to the brake cylinder, the brake piston moves axially and presses the friction plates against the steel plates, the acting torque in the shaft is transmitted to the friction plates through the spline, and then transmitted to the steel plates through the friction material on the friction plates, the absorbed braking torque from the steel plates is finally transmitted to the housing which is attached to the frame of the tractor. The heat generated during the brake application is absorbed by coolant fluid which circulates on either side of the friction plate through the holes provided on the plate.

The braking loads imposed on the friction plates, induce high stress concentration at the root of the teeth in the spline, which are sub-



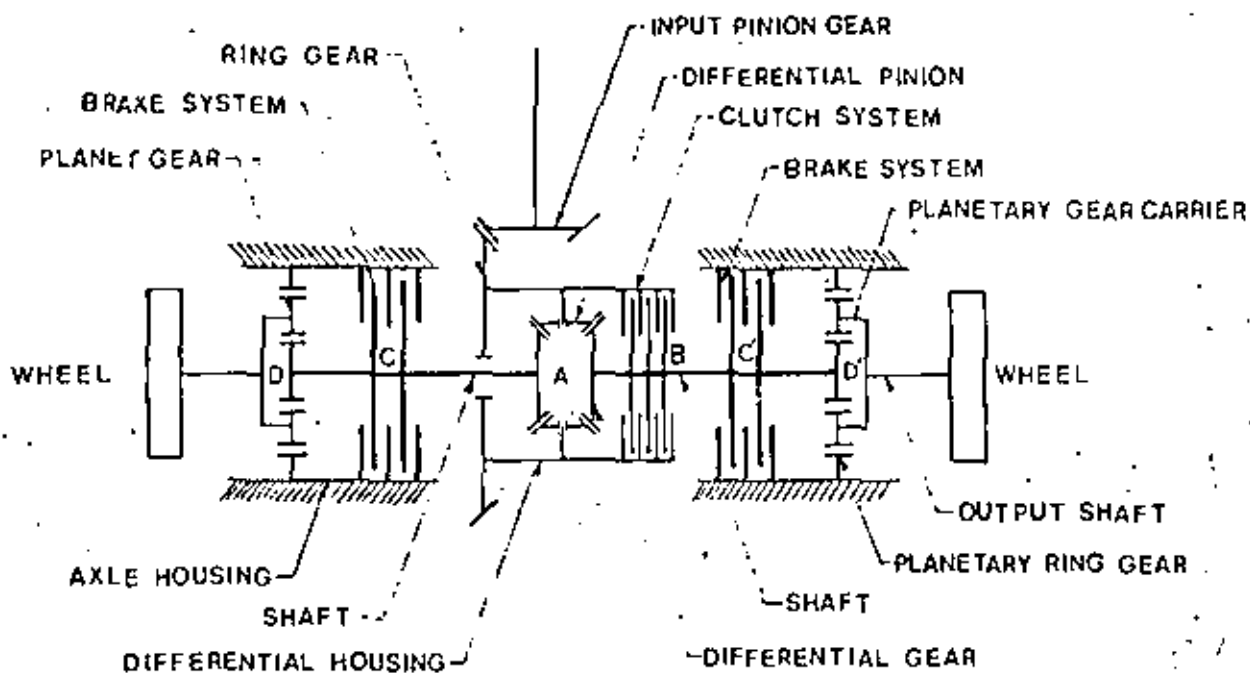


Fig. 1 Schematic view of a tractor rear axle assembly

due to a stress variation ranging from zero value (idle mode) to some maximum value (brake application).

Fig. 3 shows schematically torques applied to the friction plate, the geometry of the spline, and the location of the coolant circulation holes.

#### LOADING CONSIDERATIONS

Due to the repetitive nature of the loads, these can be expressed by means of a static (mean) component, and a dynamic (alternating) component, for the purpose of analysis. These loads are distributed among the teeth on the friction plate, in such a way that the ratio of alternating stress to steady stress at any location of the plate is always constant. This is due to the fact that the load varies from zero to some maximum value in each brake application. However, the load that a particular tooth carries is not necessarily equal to the load carried by a different tooth in the spline.

Fig. 4 shows qualitatively the variation of stresses with respect to time, at three arbitrary locations of the friction plate. Also plotted in the same Fig. 4 is the variation of the load with respect to time. It can be appreciated that the maximum stresses at any of the locations shown are reached when the applied load is maximum, this is, the stress peaks are in phase with the load peaks.

Using the notation of Juvinall (1),<sup>1</sup> the stress ratio can be expressed as follows:

$$r = \frac{S_{ai}}{S_{mi}} \quad (1)$$

where  $S_{ai}$  is the alternating stress component,  $S_{mi}$  is the mean stress component and for the particular case in which the load varies from zero to a maximum value then  $r = 1$ ; or

$$S_{ai} = S_{mi} \quad (2)$$

Fig. 5 shows the Goodman diagram and the loading line for the teeth in the spline of the friction plate. The slope of the loading line is such that:

$$S_{max,i} = S_{mi} + S_{ai} \quad (3)$$

by substituting the equality (2) in equation (3) it results

$$S_{max,i} = 2S_{mi}$$

therefore, the slope of the loading line in the Goodman diagram is

$$m = 2$$

<sup>1</sup> Underlined numbers in parentheses designate references at end of paper.

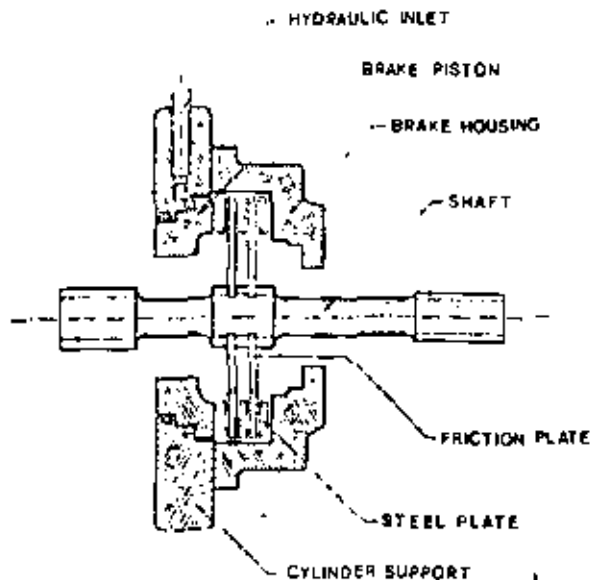


Fig. 2 Brake assembly system

Based on these stress relationships and for the particular case treated in this analysis, the following considerations can be made in order to formulate the finite element model.

- 1 From fatigue theory as treated by Sors (2), the alternating stress component must be as small as possible in order to improve the fatigue life of the part.
- 2 Due to the nature of the loads, and by in-

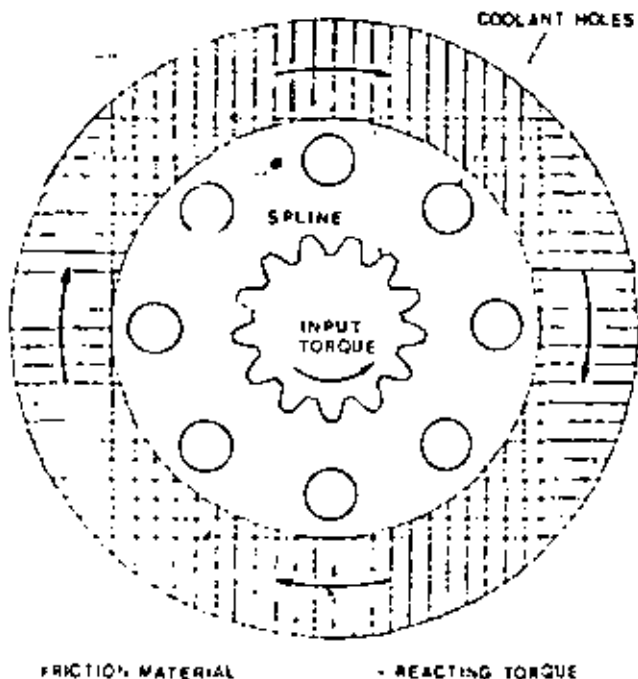


Fig. 3 Torques applied and geometry of the friction plate

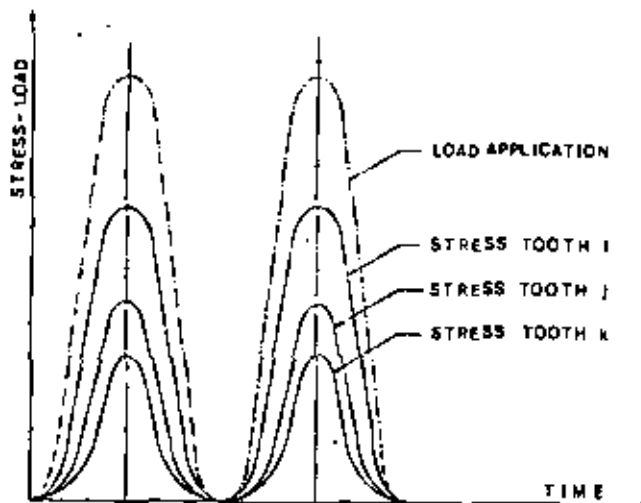


Fig. 4 Variation of load and stresses at three arbitrary locations of the friction plate

spection of equations (2) and (3), the reduction of the maximum peak stress at any location of the part will result in a reduction of the dynamic component of stress.

- 3 Since both the steel plates and friction plates are allowed to displace in the axial

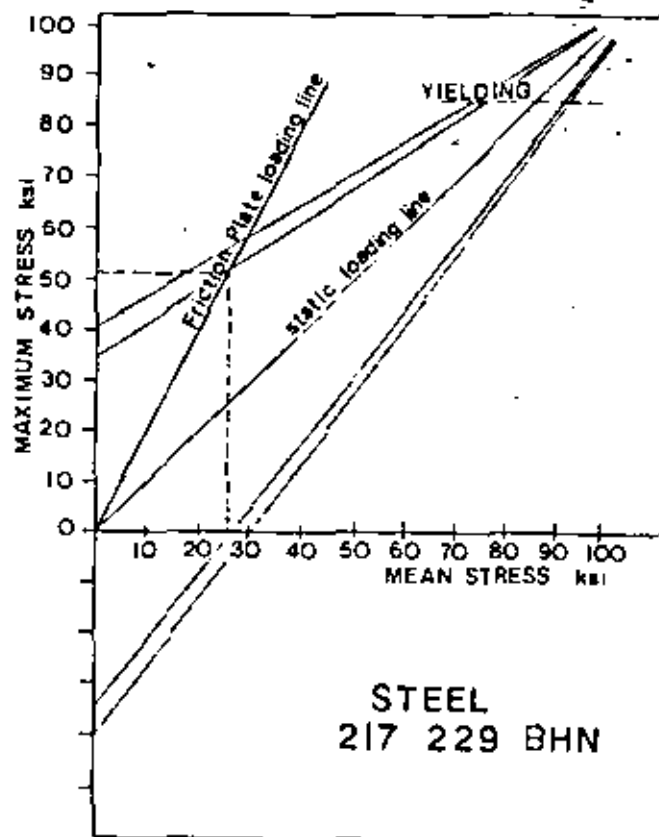


Fig. 5 Goodman diagram and loading line for the friction plate.

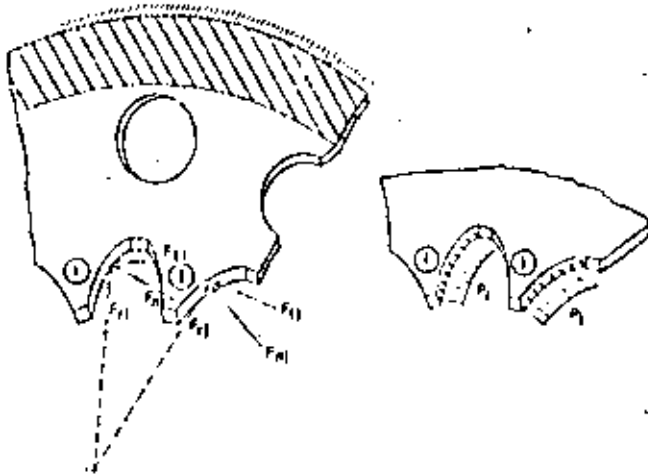


Fig. 6 Application of the load on the friction plate spline teeth

direction the load on the friction plate can be considered to be acting only in the plane of the plate and it has no component in the axial direction.

- 4 The total load acting on the friction plate can be broken down into tangential and radial forces acting on the teeth of the spline, such that the summation of the resulting tangential forces at the pitch circle, multiplied by the corresponding pitch radius is equivalent to the torque provided by the shaft.
- 5 The loads applied to the teeth of the plate are reacted by the friction material, which transmits the braking torque to the steel plates.
- 6 A static analysis alone can be performed on the friction plate, to estimate the stress distribution on the plate.

#### FORMULATION OF THE PROBLEM

Fig. 6 shows schematically the application of the load on the friction plate, at the location of two adjacent teeth, and the boundary conditions at the friction material area of the plate. In order to avoid local effects due to concentrated point loads, it is convenient to represent the applied forces at the teeth as uniform pressures along the flank of each tooth. The resultant force at the pitch circle must hold for the consideration as discussed earlier in item 4.

The total input torque for each wheel is carried by two plates, such that each plate carries one-half of the input torque.

For the numerical portion of this study

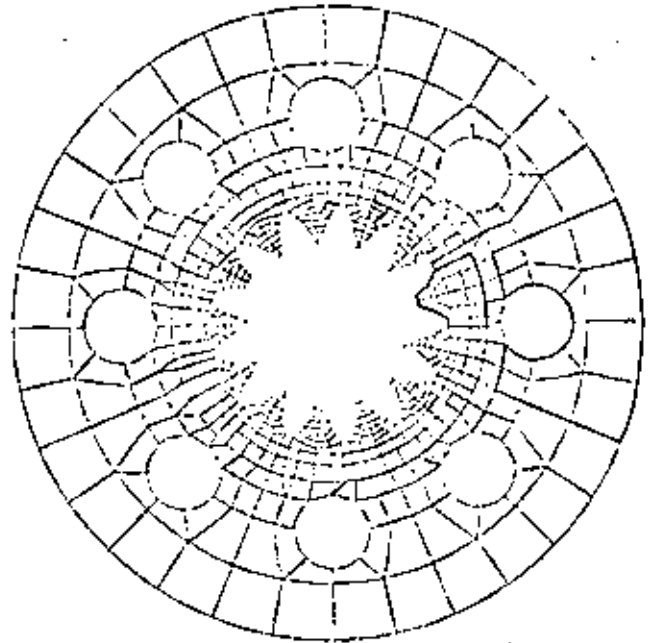


Fig. 7 Computer plot of the original design 8-holes friction plate geometry

and test data available for the particular case, the torque carried by each plate was determined to be as follows:

$$T_{pr} = \frac{1}{2} T_{in} \quad (4)$$

Then

$$T_{pr} = \frac{1}{2} (32400) = 16200 \text{ lb-in} \quad [1833\text{N-m}]^2$$

assuming equal load per tooth, the torque in the plate is distributed equally among the 13 teeth. The torque carried by each tooth is then:

$$T_t = \frac{1}{13} T_{pr} \quad (5)$$

then

$$T_t = \frac{1}{13} (16200) = 1250 \text{ lb-in} \quad [141 \text{ N-m}]$$

The equivalent tangential force at each tooth acting at the pitch circle is obtained by dividing the torque by the radius of the pitch circle, this is:

<sup>2</sup> Numbers in brackets indicate the SI equivalence.

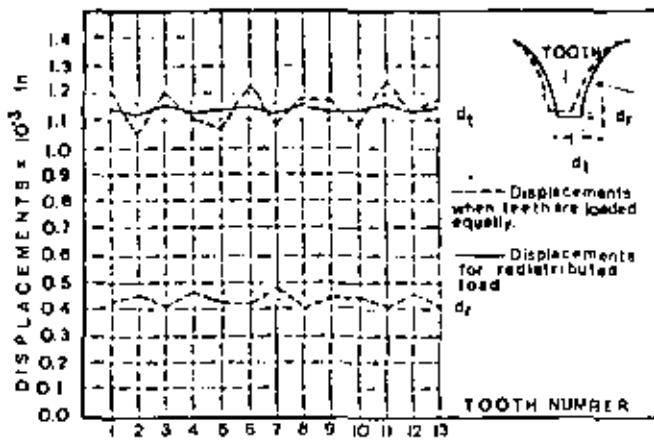


Fig. 8 Displacements at the tip of each tooth for the original 8-holes friction plate model

$$F_{ti} = \frac{1}{r_p} \quad (6)$$

where  $r_p = 1.3$  in. Then

$$F_{ti} = \frac{1250}{103} = 960 \text{ lb} \quad [4276 \text{ N}]$$

The equivalent normal force at the flank of the tooth is obtained as follows:

$$F_{ni} = \frac{1}{\cos \phi} F_{ti} \quad (7)$$

where  $\phi$  is the pressure angle of the spline geometry. For the present case  $\phi = 25$  deg.

The normal force is then:

$$F_{ni} = \frac{1}{\cos 25^\circ} (960) = 1060 \text{ lb} \quad [4722 \text{ N}]$$

The equivalent pressure at the flank of the teeth is obtained by dividing the normal force by the area of the flank:

$$p_e = \frac{F_{ni}}{A_f} \quad (8)$$

where  $A_f$  is the area of the flank of the tooth for the present case  $A_f = 0.04106 \text{ in.}^2$  then:

$$p_e = \frac{1060}{0.04106} = 25800 \text{ psi} \quad [178 \text{ MPa}]$$

The load as uniform pressure on each tooth is estimated to be 25800 psi [178 MPa] acting on the overall flank of each tooth.

Table 1 Spline Teeth Load Factors Table

Tooth Number	Tangential Spacing $d_t$	Inverse %	Percentage %	Nominal Percentage %	Percentage Difference %	Load Factor
1	0.1200	8.3533	7.2684	7.6923	-0.4239	0.9448
2	0.1054	9.4876	8.2753	7.6923	-0.5829	1.0750
3	0.1200	8.3533	7.2684	7.6923	-0.4239	0.9448
4	0.1176	8.8609	7.7461	7.6923	-0.0537	1.0069
5	0.1088	9.1911	8.0162	7.6923	-0.3242	1.0421
6	0.1219	8.2934	7.1511	7.6923	-0.5312	0.9301
7	0.1054	9.5984	8.1974	7.6923	-0.5050	1.0653
8	0.1156	8.5763	7.4804	7.6923	-0.2119	0.9724
9	0.1167	8.5689	7.4739	7.6923	-0.2184	0.9716
10	0.1062	9.4150	8.2201	7.6923	-0.5283	1.0686
11	0.1220	8.1947	7.1493	7.6923	-0.5430	0.9294
12	0.1091	9.1659	7.9947	7.6923	-0.3023	1.0393
13	0.1125	8.8888	7.7530	7.6923	-0.0607	1.0019
Total	—	114.476	100.000	100.000	—	—

#### THE FINITE ELEMENT MODEL

Due to the type of geometry and loading, plane stress elements were considered adequate for this analysis. Flat plate parabolic elements (8 nodes per element) were chosen to model the geometry of the friction plate.

In order to define the finite element mesh of the structure of the friction plate, node and element generation patterns were used. The procedure is as follows: only one tooth is broken down into finite elements, the location of nodes is defined with respect to a cylindrical coordinate system which origin is at the center of the plate. The element connectivity is also defined for this tooth, then, node generation is performed to define the node locations of the remaining 12 teeth. In the same manner, element generation is performed for the remaining 12 teeth. The generation is done by incrementing the node numbers by 100, at every 27.69 deg twelve times around the center of the plate. A similar approach is used to define the mesh for the outer part of the plate encompassing the coolant circulation holes; in this case one sector is defined and seven sectors are generated around the center of the plate. Finally, quadrilateral and triangular elements are used in order to connect the two sets of sectors together. This is shown in Fig. 7.

The finite element program used, developed by structural Dynamics Research Corporation [3]

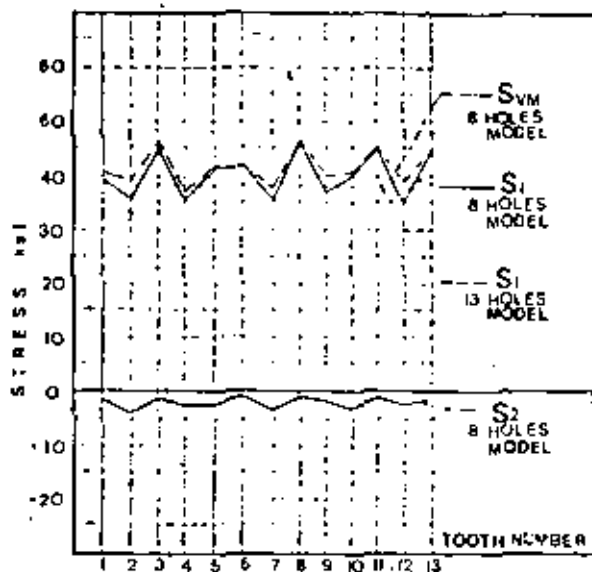


Fig. 9 Stresses at the root of each tooth. The von Mises failure criterion and the principal stresses  $S_1$  and  $S_2$ , correspond to the original design. The constant line for  $S_1$  corresponds to the proposed new design.

is based on a wave front algorithm solver, therefore, node numbering does not affect the size of the wave front, which is, in function of the order in which the elements are defined. (A more detailed description of the wave front algorithm solver can be found in Reference (4) by Nicolas et al.) However, the order in which it is convenient to generate the elements, is not necessarily the most efficient for the wave front size; therefore, a wave front optimizer preprocessor was applied after the mesh generation was accomplished, in order to rearrange the element definition.

The resulting wave front was considerably reduced and the computer costs of this analysis were also reduced.

#### THE FINITE ELEMENT COMPUTER RUNS

Inspection of the solution yielded by the finite element method application showed that the largest displacement for each tooth occurs at the tip. For the case where the load is considered equally distributed among the teeth, these displacements showed to be different from one tooth to another. Then, the relative differences of displacements are indicative of the particular flexibility of each tooth. Fig. 8 shows graphically the variation of tangential displacements at the tip for all thirteen teeth (dashed line).

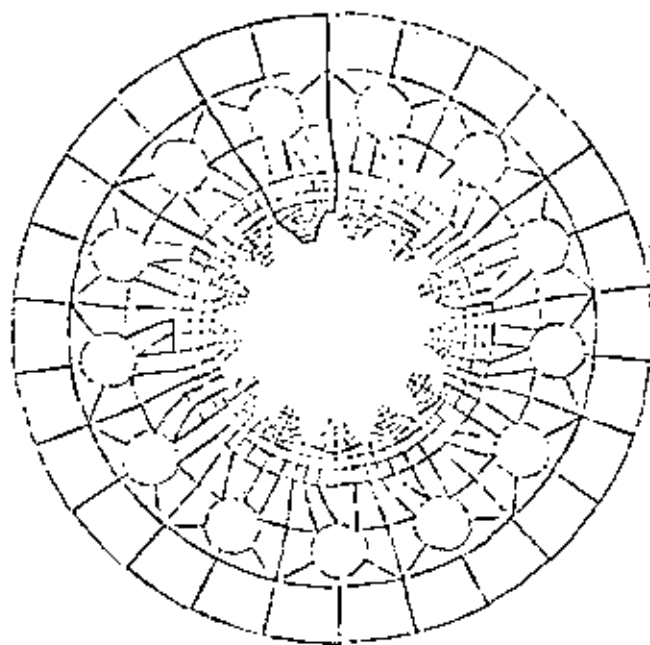


Fig. 10 Computer plot of the proposed 13-holes friction plate

Due to the variation in flexibility for each tooth, the load carried by the most flexible tooth must be less than that for the stiffest tooth. Because of this, a redistribution of the load must be considered, such that the load for a particular tooth is inversely proportional to the tangential displacement at every tooth.

Based on the relative differences of tangential displacements, load factors were developed, in order to redistribute the load on the teeth.

The significance of the load factors is that they indicate the amount of load in percentage carried by each individual tooth.

Table 1 summarizes the calculations made in order to obtain the load factor values for each tooth.

The equivalent pressures applied to the teeth as obtained by equation (8) are then modified as follows:

$$P_{e_i} = \frac{F_{ni}}{A_f} (f_i) \quad (9)$$

i.e.,  $f_i$  is the load factor for the  $i$ th tooth.

A computer run was performed considering the load factors, and the resulting displacements are shown in Fig. 8 (solid line) for all 13 teeth. The stress solution obtained from this run showed that the maximum stress for each tooth occurs at the base of the root.

Fig. 9 shows the magnitude of the maximum

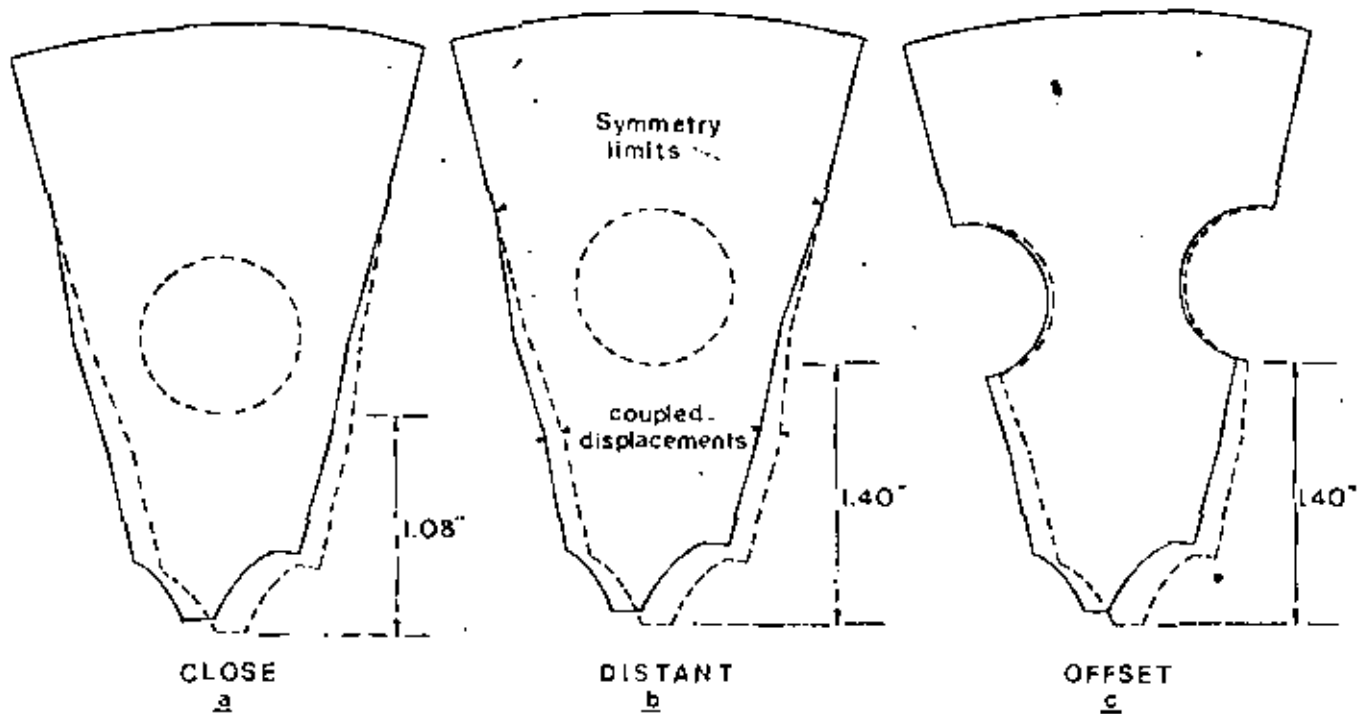


Fig. 12 Additional models of one sector used to determine the most adequate position of the holes with respect to the teeth

the resulting stress distribution (Fig. 11) shows a consistent pattern of stresses which indicates an even distribution of the load on the teeth.

The maximum stress level for the new design plots as the straight line in the graph shown in Fig. 9. As it can be observed, the peak stresses obtained with the original design can be reduced by having the same number of coolant holes than teeth on the plate.

Finally, three additional models were considered in the analysis to determine the most adequate position for the holes with respect to the teeth. These models were made for only one sector encompassing one tooth and one hole. In order to make the one sector model represent to complete structure of the plate, proper boundary conditions were imposed by coupling the displacements of the nodes in the symmetry limits as shown in Fig. 12.

Very good correlation was found between stresses obtained with the complete model and the stresses obtained with the simplified one sector model, (within a 1 percent of difference).

Table 2 summarizes the results obtained in the various computer runs, and provides a reference for the maximum stresses and locations for each case treated.

Table 2 Summary of Results Obtained from the Finite Element Method Computer Runs

RUN No	MODEL	LOAD DISTRIBUTION	MAXIMUM STRESS LOCATION $S_1$ (MPa)	MINIMUM STRESS LOCATION $S_2$ (MPa)
1	8 HOLES	Equal load per tooth	$S_1 = 46800$ (222.7)	$S_2 = 35100$ (231.7)
			$S_1 = 1120$ (-9.63)	$S_2 = 3900$ (26.9)
2	8 HOLES	Distributed load by load factor	$S_1 = 45500$ (215.12)	$S_2 = 35200$ (242.9)
			$S_1 = 1600$ (11.6)	$S_2 = 3900$ (26.9)
3	13 HOLES	Equal load per tooth	$S_1 = 25500$ (251.6)	same
			$S_1 = 6000$ (41.37)	
4	ONE SECTOR Hole 1.40" from tooth	Uniform Pressure	$S_1 = 37500$ (272.9)	Root of all 13 teeth
			$S_1 = 58000$ (262.0)	
5	ONE SECTOR Hole 1.08" from tooth	Uniform Pressure	$S_1 = 5000$ (20.48)	Root of tooth
			$S_1 = 41000$ (292.9)	
6	ONE SECTOR Hole Offset from tooth	Uniform Pressure	$S_1 = 39000$ (166.9)	Root of tooth
			$S_1 = 5000$ (20.48)	
			$S_1 = 41000$ (292.9)	

CONCLUSIONS

From the results in this analysis, the following conclusions can be drawn:

DIRECTORIO DE ALUMNOS PARA EL CURSO DE :  
EL METODO DEL ELEMENTO FINITO EN LA INGENIERIA  
DEL 5 AL 9 DE MARZO DE 1984

NOMBRE Y DIRECCION

EMPRESA Y DIRECCION

MANUEL ALEMAN VELAZQUEZ  
 Infiernillo No. 1559  
 Col. Fracc. Irapuato-Laboratorio  
 Irapuato, Gto.

LAPEN (CFE)  
 Ave. Apaseo Oriente s/n  
 Col. Cd. Industrial  
 36500 Irapuato, Gto.  
 727-27 ext. 117

ANTONIO HERNANDEZ VILLANUEVA  
 Zirahuen No. 12-A  
 Col. San Javier  
 Deleg. Tlalnepantla  
 54030 México, D. F.  
 390-5919

INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO  
 Eje Central Lázaro Cárdenas No. 152  
 Col. Sn. Bartolo Atepehuacán  
 Deleg. Gustavo A. Madero  
 07730 México, D. F.  
 567-6600 ext. 205, 204

LEONARDO CANETE ENRIQUEZ  
 Gaviotas No. 23  
 Col. Las Alamedas  
 54500 Atizapán, Edo. de México  
 822-6696

COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
 Caraco, Guerrero  
 250-51

J. ANTONIO CARNERO PARRA  
 Rúa Balcones Loza No. 5  
 Col. Obrera  
 Deleg. Cuauhtémoc  
 06800 México, D. F.  
 588-6696

INST. TEC. TLALNEPANTLA  
 Ave. Tecnológico s/n  
 Col. Tecnológico  
 Deleg. Tlalnepantla, Edo. de México  
 565-6512

AMILCAR DIAZ DE LEON ESQUEDA  
 Paseo de la Primavera No. 3504  
 Col. Villas de Irapuato  
 36500 Irapuato, Gto.

COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
 Av. Apaseo Oriente s/n  
 36500 Irapuato, Gto.  
 727-27 ext. 216

ABEL DOMINGUEZ BORDES  
 Unidad Habitacional Lindavista Vallejo  
 Edif. 16 Ent. G Depto. No. 303  
 México, D. F.  
 587-8863

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS  
 Dante No. 36 3° Piso  
 Col. Nueva Anzures  
 México, D. F.  
 525-3570

JOSE A. GARCIA ESCOTO

MANUEL GARCIA MARTINEZ

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS  
 Dante No. 36 3° Piso  
 Col. Nueva Anzures  
 México, D. F.  
 525-3570

JULIO CESAR GOMEZ MANCILLA  
Llamaradas No. 6-9  
Col. Buenavista  
Cuernavaca, Mor.  
438-11

RAUL MANUEL IBARRA GONZALEZ  
Mantua No. 100  
Col. Residencial Acoxa  
Deleg. Tlalpán  
14300 México, D. F.  
684-5867

JOSE LUIS MORA PEREZ  
Priv. Fco. Covarrubias No. 23  
Col. Militar  
Morelia, Michoacán  
476-13

CANDIDO NICOLAS LOPEZ  
Tokio No. 711-2  
Col. Portales  
Deleg. Benito Juárez  
03300 México, D. F.  
532-6287

JOSE E. MOLASCO MORALES  
Monterrey No. 356-8  
Col. Roma Sur  
Deleg. Cuauhtémoc  
06760 México, D. F.  
574-2749

ROSALIO PEREZ MARTINEZ  
Cruz del Sur No. 15  
Col. Sta. Cruz del Monte  
Naucalpan, Edo. de México  
562-0215

MARCO ANTONIO ALARCON RAMIREZ  
Norte 92 No. 6507  
Col. Sn. Pedro el Claro  
Deleg. Gustavo A. Madero  
07480 México, D. F.  
760-5557

EDUARDO A. RINCON MEJIA  
Corralejo No. 623  
Col. Independencia  
Toluca, Edo. de México  
91-721-411-54

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS  
Interior Internado Palmira  
Apartado Postal No. 475  
62000 Cuernavaca, Mor.  
438-11

I P E S A  
San Lorenzo No. 153-5° Piso  
Col. Del Valle  
Deleg. Benito Juárez  
México, D. F.  
559-4375

GEOTERMIA C.F.E.  
Alejandro Volta No. 655  
Apartado Postal No. 31-C  
Morelia, Michoacán  
436-49

SECRETARIA DE COMUNICACIONES Y TRANSP.  
Xola y Universidad  
Col. Narvarte  
Deleg. Benito Juárez  
México, D. F.  
530-3000 ext. 382, 383

ING. PERRE LELONG FLEURY  
Oklahoma No. 157  
Col. Nápoles  
03810 México, D. F.  
536-0362 576-0212

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES ELECTRICAS  
Interior Internado Palmira  
Cuernavaca, Mor.  
438-11 ext. 2216

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES CUAUTITLAN  
Km. 3 Carr. Cuautitlán Teoloyucan  
Col. Ex-Rancho Almaráz  
54000 Cuautitlán, Izcalli  
91-591-333-11 ext. 27

FAC. DE INGENIERIA DE LA U.A.E.M.  
Cerro de Coatepec  
Toluca, Edo. de México  
91-721-545-12



PABLO RUIZ LOPEZ  
 Isla Magdalena No. 47  
 Col. Prado Vallejo  
 54170 Tlalnepantla, Edo. de México  
 567-3733

EMILIO TOVAR VALDEZ  
 Bosques de Brasil No. 63  
 Col. Bosques de Aragón  
 Estado de México  
 559-1501

EDUARDO SANCHEZ VELASCO  
 Prol. Tajín No. 911  
 Col. Sta. Cruz Atoyac  
 Deleg. Benito Juárez  
 México, D. F.  
 688-6917

BRAULIO ALARCON ORNELAS

INSTITUTO MEXICANO DEL PETROLEO  
 Av. Eje Central Lázaro Cárdenas No. 152  
 Deleg. Gustavo A. Madero  
 México, D. F.  
 167-6600 ext. 20296

IPESA CONSULTORES  
 n Lorenzo No. 153  
 Col. Del Valle  
 México, D. F.  
 575-4077

COMISION FEDERAL DE ELECTRICIDAD  
 Alejandro Volta No. 755  
 Col. Electricistas  
 Morelia, Mich.  
 436-49

IPESA CONSULTORES? S. C.  
 San Lorenzo No. 153  
 Col. Del Valle  
 Deleg. Benito Juárez  
 03100 México, D. F.  
 575-4077