"La probabilidad de que el sol salga mañana es prácticamente uno". G.-L. Leclerc, Conde de Buffon.

5.4 – Paradoja de Banach - Tarski.

Hay varias formas de definir una función biyectiva (uno a uno y sobre) en un intervalo abierto de **R**, cuya imagen sea todo **R.** Por ejemplo la función $f(x) = x/(1 - x^2)$, sirve para el caso. La función f aplica, el intervalo (-1 , 1) en todo **R.** De allí sacamos la conclusión de que hay tantos números reales en (-1 , 1) como los hay, en todo **R**.

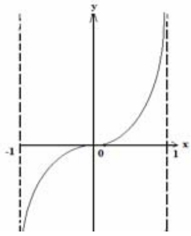


Fig. 5.5.1 La curva de la gráfica corresponde a la función biyectiva $f(x) = x/(1 - x^2)$. Esto prueba que puede establecerse una correspondencia biunívoca entre el intervalo (-1, 1) y todos los números reales.

Con el propósito de facilitar la comprensión de los temas que siguen, repasemos algunas definiciones básicas de teoría de conjuntos.

Definición 1. Se dice que dos conjuntos *A* y *B* tienen el mismo cardinal, o que son *equipotentes* (o que tienen la misma potencia), si existe una función *f*, *biyectiva* (uno a uno y sobre) que aplica *A* en *B*. El sentido de esta definición es que $f(A) = B$ y $f^{-1}(B) = A$. Aquí f^{-1} representa la función inversa de *f*.

Definición 2. El *cardinal* de un conjunto *A*, notado #*A* (se lee cardinal de *A*), se define como el número de elementos que el conjunto posee.

Definición 3. Un conjunto se llama *finito*, si es equipotente con un subconjunto finito de **N**, el conjunto de los números naturales.

Se llama *continuo*, al conjunto de todos los números reales. Es usual interpretar como "el continuo", al conjunto de todos los puntos de una recta. Cuando se interpretan los números reales como puntos de la recta, se habla de la *recta real*. Los cardinales de conjuntos infinitos se conocen como *cardinales transfinitos*.

Una función como "**#**"**,** es una *función de conjunto*, que convierte conjuntos, en cardinales, es decir **#**, asocia a un conjunto su número de elementos. Este tipo de funciones son difíciles de manejar. Algunas de ellas requieren toda una teoría para poderlas comprender. Un ejemplo, es la función que asocia a cada intervalo su longitud, o a una superficie plana su área o en general a ciertos conjuntos de números reales su medida. Para ciertos conjuntos, llamados medibles según *Lebesgue*, se define su medida, conocida como medida de Lebesgue, en honor a Henri Lebesgue (1875-1941). Otra medida diferente a las aquí mencionadas es la medida de probabilidad definida en una clase específica de subconjuntos, a cada uno de los cuales asigna un número del intervalo [0 , 1], su probabilidad. Esta clase de conjuntos sobre los que se define la probabilidad, se conoce como espacio muestral y tiene una estructura algebraica conocida como σ - álgebra.

Un intervalo tan pequeño como se quiera es equipotente a todo el conjunto **R**, como vimos arriba. Esta afirmación parece contra evidente, sin embargo, a la luz de la teoría de Cantor, es un hecho perfectamente válido. La teoría de los cardinales transfinitos asocia a un intervalo (a , b), tan pequeño como se quiera, el mismo cardinal que a todo el conjunto de los reales. En la teoría de Cantor, el menor cardinal transfinito es $\aleph_0$, el cardinal asociado a los números naturales. Esto significa que **#N** = $\aleph_0$. Es de anotar que Cantor probó que **#N = #Q** y más aun que el conjunto de los *números algebraicos*, aquellos reales que son soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros, tienen también como su cardinal a $\aleph_0$. Con esto se muestra que la función **#** no es una función uno a uno, es decir, esta función puede asociar a diferentes conjuntos, el mismo cardinal.

Definición 4. – Un conjunto A se dice infinito si existe un subconjunto propio B (subconjunto de A, pero no igual a A), tal que $\#A = \#B$. Esta propiedad, en apariencia contradictoria, es precisamente la que caracteriza a los conjuntos infinitos. Aristóteles caería de espaldas al ver que su sagrado principio de que, “el todo es mayor que cada una de sus partes”, ya no sigue valiendo cuando se trata de conjuntos de cardinal transfinito. Por ejemplo, el conjunto de los números pares, **P**={2, 4, 6, … 2n,… }, se constituyen en un subconjunto propio de **N,** pero es equipotente al conjunto que lo contiene, es decir a todo **N** = {1, 2, 3, … , n, …}. La razón es que existe, la función biyectiva f: **N** $\rightarrow$ **P** que convierte a n en $2n$, y así los conjuntos tienen el mismo cardinal; o lo que es lo mismo: son equipotentes.

Definición 5. – Los conjuntos que tienen el mismo cardinal que **N**, se conocen como *enumerables*. Dicho en otros términos, un conjunto es *enumerable*, si se puede poner en correspondencia uno a uno con los números naturales. Por ejemplo, las sucesiones $\{a_n\}$, asociadas a las series vistas en la sección 5.1, corresponden a conjuntos enumerables. El rango de estas sucesiones, por estar asociadas a funciones con dominio en **N**, indudablemente es enumerable, aunque sea un conjunto infinito de números reales. Por ejemplo: la sucesión s: **N** $\rightarrow$ **R**, tal que a cada n, natural, le asocia el real $\frac{1}{2^n}$, tiene por rango el conjunto $\{\frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\} = \{\frac{1}{2^n}\}$, que es enumerable por definición.

Hipótesis del Continuo. Cantor conjeturó que todo subconjunto infinito del continuo es, o enumerable o tiene la potencia del continuo. Este enunciado se conoce como hipótesis del continuo. Esta hipótesis es hasta la fecha, un problema abierto. Hilbert la puso a encabezar su famosa lista, de 23 problemas no resueltos hasta el comienzo del siglo XX.

La introducción del infinito actual dentro de las matemáticas generó un sin número de paradojas, entre ellas, las antes estudiadas. Cuando en geometría se habla de longitud, área o volumen, por ejemplo, sus definiciones vienen dadas en términos numéricos asociados a medidas respectivamente de longitud de intervalos, área de superficies o volúmenes de sólidos. En todos estos conceptos aparece la noción de medida. Esta noción es de suma importancia en matemáticas. No fue sino hasta comienzos del siglo XX que el concepto de medida entró a formar parte de los objetos de estudio por parte de los matemáticos. La medida nada tiene que ver con el número de puntos en un intervalo, en una superficie o en un sólido; entre otras cosas, todos estos entes geométricos tienen el mismo número de puntos, exactamente ***c***, el cardinal de **R**. La medida va a depender de la definición, pongamos por caso: para los intervalos (a, b) de los extremos a y b; para las superficies, de sus dimensiones en el plano; y para el volumen, de sus dimensiones en el espacio tridimensional, con las características propias de cada caso.

El volumen de sólidos regulares, aprendemos a calcularlo en la educación media, siguiendo lineamientos trazados por Euclides, hace más de dos mil años. Pero las figuras regulares son pocas, al menos, las descritas por Platón (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro). Desde el siglo XIX sabemos que cualquier polígono puede decomponerse, en un número finito de pedazos, de tal manera que, al rearreglarlos se logra formar un cuadrado. Sin embargo esto no es cierto para superficies limitadas por una curva: este es el caso, por ejemplo, de la circunferencia que delimita al círculo. Para este último caso enfrentamos el problema clásico de la cuadratura del círculo, que propone encontrar un procedimiento, usando sólo regla y compás, para construir un cuadrado de área igual a un círculo de radio dado. Este problema lo estudiamos en detalle en la sección 4.4 en conexión con la cuadratrix, tratada por Newton.

Las cosas que la realidad y la fantasía nos presentan para medir, son muchísimo más complejas que las mediciones propuestas por los griegos. Extrañas cosas apareen en matemáticas. Este es el caso de un cuadrado, en el que Peano situó una curva que se enrolla dentro de él, de tal forma que cada punto del cuadrado es tocado por esta curva de longitud infinita (Fig. 5.5.2). Otro caso es el de las superficies fractales, de las que ahora se habla mucho. ¿Cómo entonces, calcular el área que encierra la curva de Peano y que cubre el cuadrado; o como estimar el valor del área de una superficie fractal?

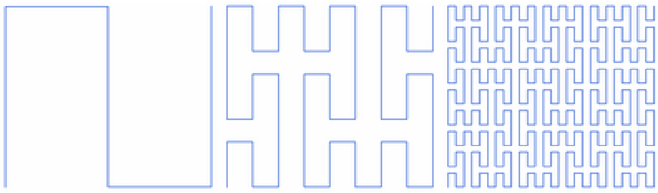


Fig. 5.5.2. La curva de Peano. Estas son las primeras iteraciones del proceso que conduce a la *Curva de Peano*, caracterizada por tener longitud infinita y por llenar todo el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$. Para mirar un "*applet*" que genera esta curva, seguir el vínculo: http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Peano.shtml. La función que la define es continua y tiene la particularidad de establecer una correspondencia biunívoca entre puntos del intervalo, [0,1] y el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$, en el plano. Con esto se prueba que hay tantos puntos en un intervalo, como hay en un cuadrado unitario[1].

Problemas similares, empezaron a tratarse usando el recurso de un nuevo campo de las matemáticas que hoy conocemos como *Teoría de la medida*. Henri L. Lebesgue, el pionero del estudio del concepto de medida, extendió el alcance del cálculo integral, de tal forma que se pudieran integrar funciones para las cuales la integral de Riemann no aplicaba. El concepto de integración se extendió entonces, a funciones medibles según Lebesgue, las que cubren un espectro mayor, dentro del análisis matemático.

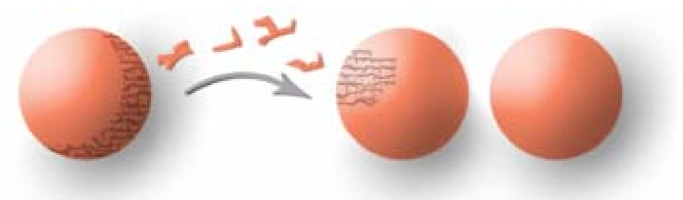
[1] En el sitio Web citado se encuentra material muy interesante para la enseñanza y la motivación de temas matemáticos. En relación con las curvas de Peano hay asociadas a ellas, laberintos, que despiertan interés entre los estudiantes. Quien dirige este sitio es el matemático ruso, residenciado en Estados Unidos, Alex Bogomolny.

El volumen es un tipo de medida asociado a los sólidos, y como tal, tiene sus problemas. A diferencia del área de los polígonos, el volumen de los poliedros, en general no puede expresarse en términos de volúmenes más sencillos como es el cubo. El *Problema de la medida* para espacios de dimensión mayor que dos se puede enunciar así:

Problema de la medida para espacios n-dimensionales.
¿Es posible asignar un número, como medida a cada subconjunto acotado *A* de un espacio n-dimensional tal que:
i) Si *A* se corta en un número finito de partes disyuntas, a partir de las cuales se forma el conjunto *B*, entonces la medida de *A* es igual a la medida de *B.*
ii) La medida de la unión de dos conjuntos disyuntos es la suma de las medidas de los conjuntos separadamente.
iii) La medida del cubo n-dimensional unitario es igual a uno?

En 1914 Felix Hausdorff (1868-1942) probó que el problema tiene solución negativa para $n \geq 3$. Esto implica que no hay una definición de volumen que satisfaga las condiciones establecidas arriba en: i) - iii). Su prueba se fundamenta en una aplicación del *Axioma de Elección,* ya mencionado en una sección anterior.

En los años treinta del siglo pasado, Stefan Banach (1892-1945), el matemático polaco, creador de los llamados, espacios abstractos y Alfred Tarski (de quien ya hemos hablado en conexión con la lógica) descubrieron una paradoja, que lleva el nombre de Banach-Tarski[2].



La Paradoja de Banach-Tarski. Esta paradoja acierta que, una esfera puede descomponerse en un número finito de pedazos, a partir de los cuales podemos armar dos nuevas esferas, dada una de ellas, de igual volumen que la esfera inicial. La figura es tomada de Wikipedia, donde encontraremos mayor información sobre esta interesante paradoja. El portal es: http://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox.

Esta paradoja nos conduce a aceptar que existe una disección de una esfera en un número finito de piezas, de tal forma que al rearmarlas se puede encontrar una esfera de volumen igual al doble del volumen de la esfera inicial. Aún más, una arveja podría dividirse en un número finito de partes y con ellas formar una esfera de las dimensiones del mismo sol. Las piezas de la partición, desde luego no serán como las que resultan al partir una manzana con un cuchillo. Estas partes son productos de la acción de ciertos grupos de rotaciones, definidos en la esfera, que conducen a crear figuras con la extraña propiedad de que una de las partes es congruente con toda la esfera. Esta paradoja, al igual que la paradoja de Russell en teoría de conjuntos, nos induce a reflexionar sobre conceptos tan básicos como son: el de volumen, y en general sobre el concepto de medida.

Próxima Sección: *Paradoja de Epiménides*

[2] Para un descripción de la paradoja en un contexto histórico, mirar el libro reciente de Solomon Feferman. *Alfred Tarski. Life and Logic.* Cambridge University Press. New York. 2004. Págs. 43-44.