"*La esencia de las matemáticas es su libertad*". G. Cantor

3.2 Observaciones relacionadas con la axiomática de los Elementos.

Esta sección se basa en los libros de Aaboe[1] en lo que tiene que ver con geometría euclidiana y en Kline[2] en lo relativo a geometrías no euclidianas. La axiomatización de una teoría exige que los axiomas cumplan las siguientes propiedades[3]:

1) *Completitud.* Todo lo necesario para el desarrollo de la teoría debe aparecer explicitado en los axiomas.
2) *Consistencia.* Los axiomas no pueden llevar a proposiciones contradictorias.
3) *Independencia.* Ningún axioma debe ser consecuencia de los otros.

Euclides, al igual que otros matemáticos posteriores, dudaron de la solidez y completitud de los postulados de la geometría. Euclides, por ejemplo, usa con mucha prudencia el postulado de la prolongación de un segmento en sus dos extremos, evitando hablar de la prolongación de estos segmentos hacia el infinito. Recurre a este axioma en la medida que las demostraciones, usando gráficas, así lo exigen. Algo parecido pasa con el quinto postulado, cuya aparición como requisito en una demostración, muy poco aparece.

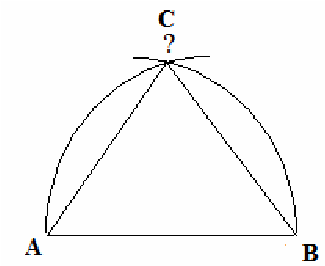


Fig. 3.3.1 *¿Qué nos garantiza que el punto C existe?*

Las demostraciones, desde el punto de vista lógico, no han sido cuestionadas, pero algunos procedimientos si. Sin ir más lejos, la construcción de un triángulo equilátero, dado uno de sus lados (Fig. 3.3.1), asume la existencia del punto de intersección de las circunferencias centradas en los extremos del intervalo y con radio igual a la longitud del mismo. Pero ni en los axiomas, ni en los postulados aparece algo que garantice que los dos arcos construidos, tengan un punto en común, que dé origen al tercer punto implicado en la determinación del triángulo. Se podría argüir que el gráfico así lo "demuestra". Sin embargo los gráficos o dibujos, no pueden ser parte de la prueba, solamente son ayudas o guías para una mejor comprensión de los pasos del racionamiento y en ningún modo el soporte de la prueba. En el capítulo I de estas notas, destacábamos los aportes de Hilbert, a la formalización de la geometría a través de su obra *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la Geometría) de 1899, con lo cual se completaba la axiomatización y partiendo de allí la correspondiente formalización. El concepto de formalización se estudiará en detalle en la sección 5.9 de estas notas.

En su versión más simple, el V Postulado afirma que por un punto P, exterior a una recta L puede pasar una recta y sólo una. Este axioma en apariencia evidente, porque a nivel local, es decir en

[1] AABOE, A. *Matemáticas: Episodios Histórico desde Babilonia hasta Ptolomeo.* Editorial Norma. Cali. 1964.
[2] KLINE, M. *Mathematics in Western Culture.* Oxford University Press. London. 1980.
[3] Para un estudio más detallado de la axiomatización, ver la sección 5.9 de estas notas.

cercanías al mundo que nos rodea, aparece como algo obvio, no lo es cuando nuestro enfoque se amplía, por ejemplo, a la geometría proyectiva, donde las paralelas tienen un punto en común en el infinito o en la geometría esférica, para la cual, "rectas paralelas", como son los meridianos, se tocan en los polos (*Fig.* 3.3.2).

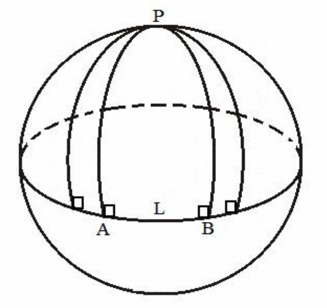


*Fig.*3.3.2
Los meridianos (rectas "paralelas") *se tocan en los polos.*

El V postulado, como decíamos, fue puesto en duda desde la antigüedad, pero sólo hasta el siglo XVIII Girolamo Sacheri (1667-1733), profesor de la Universidad de Pavía, se propuso atacar el postulado con una idea muy original. Dada una recta L y un punto P exterior a ella (*Fig.* 3.3.3), Sacheri consideró las tres posibles alternativas: a) existe exactamente una paralela a L que pasa por P. b) no hay ninguna recta paralela a L que pasa por P. c) hay al menos dos rectas paralelas a L y que pasan por P. La primera alternativa es precisamente el V postulado. Si al suponer la alternativa (b) o la alternativa (c) y los nueve axiomas restantes de Euclides llegáramos a una contradicción; no quedaría más alternativa que aceptar (a) o sea que el axioma de las paralelas quedaría como único posible.

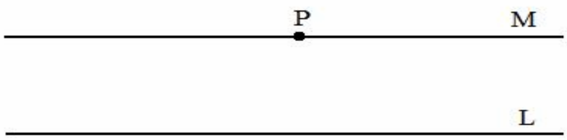


Fig. 3.3.3
Por P *pasa sólo una recta paralela a* L.

Al tomar (b) y los otros axiomas, Sacheri descubrió teoremas en el sistema que se contradecían entre si. Esto significaba que el no aceptar la existencia de paralelas a una recta dada que pasen por un punto exterior a L, conduce a contradicciones y por lo tanto esa alternativa debe desecharse. Quedaría entonces considerar que pasa con la tercera alternativa. Aunque Sacheri encontró resultados extraños con la inclusión de (c), no logró encontrar contradicciones en la geometría. El encuentro de estos extraños resultados, hizo pensar a Sacheri que Euclides estaba en lo correcto con su V postulado y como consecuencia de su análisis, decidió escribir la obra, *Euclides ab ovni naevo vendicatus* (Euclides reivindicado de todo error), en la que daba por sentado que, Euclides había escogido la única alternativa correcta. El fracaso de Sacheri de abrir las puertas a las geometrías no euclidianas, pudo deberse al peso histórico de más de dos mil años de la geometría de Euclides. Sin embargo, en buena medida, la Revolución Francesa de fines del siglo XVIII, aceleraría el uso de la razón como el mayor paradigma para cuestionar, tanto lo pasado, como lo presente, en todas las áreas del conocimiento. Este movimiento revolucionario generó además, patrones de pensamiento que irrumpieron en el siglo XIX con un ímpetu nunca antes visto en el desarrollo de las ciencias. Fue dentro de este plano antidogmático donde aparecieron, casi simultáneamente, los ataques al V postulado. Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1782-1856) en la Universidad de Kazán, János Bolyai (1802-1860) en Hungría y Carl Friedrich Gauss (1777-1855) en la Universidad de Gotinga, prepararon el terreno para dar a luz las geometrías no euclidianas. Lobatchevsky y Bolyai publicaron sus artículos sobre estos temas, uno muy cerca del otro, pero sin conocer el resultado del otro. Gauss siguió la línea de Sacheri pero no se asustó ante los extraños resultados que encontró, si no que aceptó que se podía construir otras geometrías diferentes a la euclidiana. Los resultados de sus investigaciones en estos temas, se encontraron después de su muerte entre sus manuscritos no publicados.

3.3. Origen de las geometrías no euclidianas.

Para mejor comprensión de la forma en que se crearon las geometrías no euclidianas consideremos la recta L (*Fig.*3.4.1) y un punto P exterior a ella.

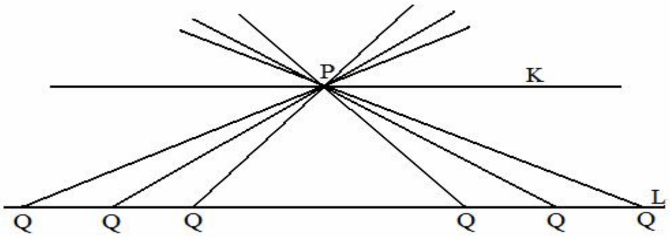


Fig. 3.4.1
En la geometría euclidiana todas las rectas QP tienden a la recta K, *tanto, cuando el punto Q se aleja por la izquierda o se aleja por la derecha*.

El V postulado afirma que existe sólo una recta K que pasa por P y paralela a L. Sea Q un punto arbitrario de L que se mueve a lo largo de la recta. En la geometría euclidiana, las rectas que unen a Q y P siguen el sentido contrario al de las manecillas del reloj, si Q se desplaza a la derecha y siguen el sentido de las manecillas del reloj si Q se mueve hacia la izquierda. Cuando Q se desplaza a la derecha, las rectas QP, digamos, tienden a aproximarse a K. De igual modo cuando Q se mueve a la izquierda, las rectas que unen a Q con P, también se aproximan cada vez más a la recta K por la izquierda.

Bolyai y Lobatchevsky, sin embargo, pensaron que las rectas de la izquierda podrían aproximarse n a una recta límite N, diferente a la recta límite M a la cual se aproximan las rectas QP de la derecha (*Fig.* 3.4.2).

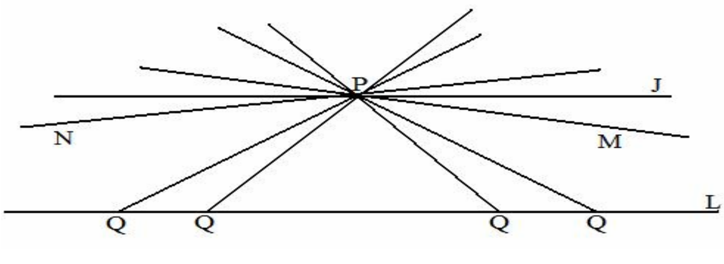


Fig. 3.4.2. *En las geometrías no euclidianas las rectas* QP *de la izquierda tienden a la recta* N, *mientras que las rectas* QP *de la derecha se aproximan a la recta* M *a medida que* Q *se aleja de* P.

Más aun, asumieron que cada recta J que esté entre N y M no intercepta a la recta L, y así podría haber infinitas rectas paralelas a L y que pasan por el punto P. Mencionábamos antes que las gráficas no son argumentos que prueben, o no, determinado enunciado matemático; aquí podría argüirse que las rectas M y N mostradas, si se prolongan lo suficiente, tocarían la recta L en algún punto, pero lo que buscamos son razones lógicas para sustentar la posibilidad de construir más de una recta paralela a L que pase por P, y precisamente lo que hicieron Lobatchevsky y Bolyai, fue demostrar que con esta asunción y el resto de los axiomas de Euclides se podía demostrar todo lo de Euclides, que no tuviera que ver con el V postulado, sin que se presentara contradicciones dentro de la teoría.

Al igual que en la geometría de Euclides, las pruebas en las geometrías no euclidianas recurren a la lógica usual. Sin embargo, las gráficas no son muy buena ayuda para la mejor interpretación de las demostraciones. Los teoremas nuevos de estas geometrías sorprenden por su exotismo a nuestros ojos acostumbrados a los resultados de la geometría tradicional. Es el caso, por ejemplo, en la geometría de Bolyai y Lobatchevsky, para la cual, l*a suma de los ángulos interiores de un triángulo es siempre menor que dos rectos*, y más aun, *entre dos triángulos el que tiene mayor área es aquel, para el cual, la suma de sus ángulos interiores es menor*.

Hay contrastes sorprendentes en los dos tipos de geometrías: en la euclidiana, *dos triángulos semejantes pueden tener distinto tamaño pero sus ángulos correspondientes son iguales.* En la geometría hiperbólica (la geometría de Bolyai-Lobatchevsky), *si dos triángulos son semejantes ellos son congruentes (idénticos).* Otro teorema de la geometría hiperbólica, afirma que la distancia entre dos rectas paralelas tiende a cero en una dirección y a infinito en la otra. La geometría de Euclides siempre se interpretó como una forma genuina, digámoslo así, de describir el espacio físico. Pero, entonces podemos preguntarnos: ¿**puede esta nueva geometría describir nuestro mundo físico o algún otro**? Adentrémonos un poco en su estudio para poder responder a esta pregunta.

Otra pregunta de fondo es ¿si la geometría de Euclides es correcta, cómo es posible que otra geometría que conduce a resultados contrarios pueda ser correcta? Y aun más. ¿Cómo pueden los extraños teoremas que aquí aparecen aplicarse a nuestro propio mundo? También tenemos que preguntarnos que tan correcta es la geometría de Euclides, cuando nuestra realidad está tan limitada en el espacio, y no estamos en capacidad de confrontar esta geometría en la vastedad del universo.

Ante estas preguntas Gauss, propuso un criterio para ver qué tan correcta era la geometría de Euclides: específicamente en lo atinente a que, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es dos rectos. Propuso el experimento de medir los ángulos de un triángulo “muy grande” formado por las cimas de tres distantes montañas. Después de hacer las mediciones de rigor, observó que la suma de los tres ángulos daba dos segundos menos que dos rectos. Esta diferencia podría atribuirse, a errores de redondeo, pues los instrumentos de medición no son exactos, o, al hecho de que los rayos de luz que llevan la información visual de un instrumento al otro se curvan en forma imperceptible. Sin embargo el experimento no fue conclusivo y no pudo confirmarse, que la geometría euclidiana fuera incorrecta. Queda entonces, la posibilidad de argüir en favor de la geometría euclidiana con respecto a los triángulos semejantes, para la cual triángulos semejantes implica ángulos iguales. En la geometría hiperbólica, triángulos semejantes no existen. Sin embargo si se hacen mediciones en el espacio pequeño que manejamos las diferencias entre triángulos grandes y pequeños de la geometría no euclidiana, vamos a encontrar que las pequeñas diferencias que aparecen pueden atribuirse a errores de medición. y así el experimento, de nuevo es inconcluyente. La conclusión entonces es que tampoco se puede descartar que la geometría hiperbólica describa el espacio físico del universo que nos rodea.

Otra forma de ver el problema, de si la nueva geometría describe o no al espacio físico es volviendo a la geometría de Euclides, interpretada físicamente como si el plano euclidiano de las rectas y los puntos, fuera una enorme hoja de papel. Imaginemos que se puede doblar nuestra hoja de papel un poco hacia arriba a la izquierda y a la derecha, formando una superficie curvada como se muestra en la figura 3.4.3.

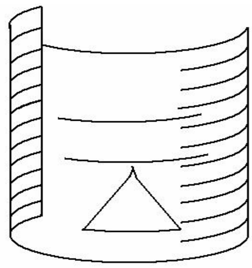


Fig. 3.4.3. *Las rectas euclidianas en este modelo se vuelven curvas. Estas curvas que representan a las rectas del plano reciben el nombre de geodésicas en el modelo curvado de la geometría plana.*

Esta superficie cilíndrica, se supone que se extiende indefinidamente en todas direcciones. Como es de suponer, las rectas de este plano se curvan, pero sigue valiendo el hecho de que la distancia entre dos puntos es la línea recta, aunque en este caso sea curva. Estas curvas se llaman *geodésicas*. Las rectas paralelas en el plano corresponderán a geodésicas paralelas, es decir, geodésicas "curvas", que no se interceptan como rectas en la hoja de papel. Los triángulos del plano, se convertirán en figuras formadas por geodésicas que se cortan en la hoja de papel, pero los seguiremos llamando triángulos. Las circunferencias del plano serán también circunferencias en la superficie cilíndrica. Lo interesante del asunto es que, todos los axiomas de Euclides se siguen cumpliendo, sólo sobre el supuesto, que interpretemos los términos, recta, triángulo, circunferencia, etc. como mencionamos antes en la geometría euclidiana normal. Igual, los teoremas de la geometría de Euclides siguen valiendo, como es el caso de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º.

Las consideraciones anteriores tienen por objeto mostrar que el modelo donde las geometrías aplican pueden cambiarse, siempre y cuando se respeten los términos primitivos, los axiomas, y desde luego, las reglas de la lógica, cuando de demostrar se trata. Para el caso de la geometría hiperbólica uno puede escoger un modelo donde se puede describir el "mundo físico" al que se quiere aplicar esta geometría. Un modelo físico donde puede tener cabida la geometría hiperbólica, se denomina *seudoesfera* (*Fig.*3.4.4) y corresponde a una superficie de revolución donde la generatriz es la hipérbola con sus dos ramas. En este modelo vemos cómo, por un punto P, exterior a L pueden pasar, al menos, dos rectas paralelas a la recta dada L. Se observa también, que los triángulos aquí lucen distintos a como se presentan en el modelo euclidiano, con sus ángulos algo distorsionados, lo que hace que la suma de sus medidas sea menor que dos ángulos rectos.

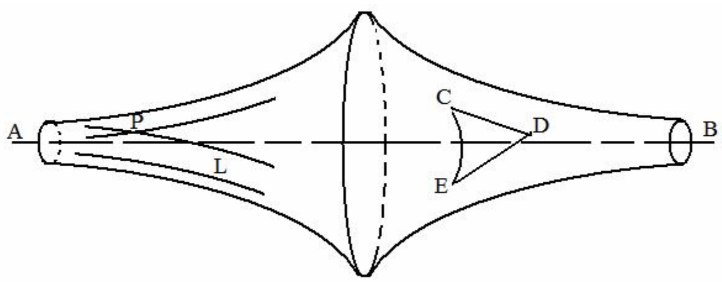
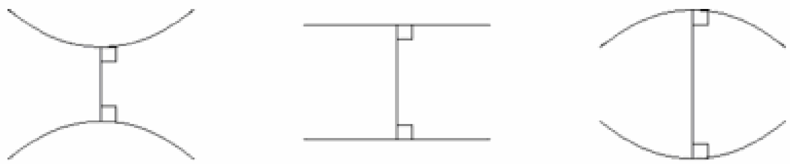


Fig. 3.4.4
Esta superficie (seudoesfera) *sirve de modelo para representar la geometría Hiperbólica de Bolyai-Lobatchevsky.*

Las rectas en la seudoesfera, son curvas que determinan la menor distancia entre dos puntos de la superficie. Estas curvas, se llaman aquí también, geodésicas. El axioma que afirma que dos puntos determinan una geodésica, es también válido aquí. Como muestra la figura por un punto exterior a una geodésica pueden pasar infinitas geodésicas que no interceptan a L. La seudoesfera permite la visualización de una geometría no euclidiana, con el pequeño sacrificio de ver las rectas convertidas en geodésicas, pero que satisfacen todos los postulados de Euclides, excepción hecha, del V postulado.

Al volver a nuestra pregunta de si la geometría hiperbólica puede describir el espacio donde vivimos, tenemos que convenir que la geometría del espacio físico depende del significado que le demos al concepto de línea recta. Por la experiencia diaria, asociamos una recta a un hilo tensionado. Para este caso, la geometría euclidiana responde muy bien. Pero la situación real, no siempre se acomoda al modelo del hilo tenso. Si se vive en un país montañoso como el nuestro, por ejemplo, la menor distancia entre dos puntos no siempre es la línea recta, debemos acomodarnos a la topografía del sector para buscar la geodésica que minimice la distancia. Desde luego que en este modelo no todos los axiomas de Euclides se van a cumplir; verbigracia, puede haber más de una geodésica entre A y B que minimice la distancia entre estos dos puntos.

En distancias astronómicas el modelo del hilo tenso ya no aplica y debemos recurrir al rayo de luz para modelar el concepto de línea recta. Sin embargo, como Albert Einstein (1879-1955) demostró, los rayos de luz se curvan cuando atraviesan campos de alta gravitación y así tampoco los rayos lumínicos pueden representar las rectas ideales de la geometría euclidiana. Una perpendicular común a dos geodésicas tiene distinta representación dependiendo de la geometría en que se haga el trazado. Esta observación corresponde al hecho de que en un triangulo, la suma de los ángulos interiores es, menor que 180º, exactamente 180º, o mayor que 180º, según se trate en geometría hiperbólica (Bolyai-Lobachevsky), en geometría euclidiana, o en geometría elíptica (Riemann). [Ver *Fig*. 3.4.5].



Geometría Hiperbólica Geometría Euclidiana Geometría Riemanniana

Fig. 3.4.5. Así se verían dos rectas (Geodésicas) con una perpendicular común en cada una de las geometrías descritas.

Al contar la historia del origen de las geometrías no euclidianas los textos de historia de las matemáticas[4], omiten el aporte de Franz Adolph Taurinus (1794-1874) y de su tío F. K. Schweikart. La contribución de Taurinus y Schweikart se hizo, digamos, desde fuera de los dominios de las matemáticas académicas, por cuanto que, ambos fueron abogados de profesión y tenían a las matemáticas sólo como un *divertimento*. Taurinus mantuvo correspondencia con Gauss sobre estos temas. En 1826 comprobó que no había contradicciones en las geometrías no euclidianas y publicó en Colonia, Alemania ese mismo año, su obra *Geometriae Prima Elementa*, donde aceptaba que había otra geometría para la cual la suma de los ángulos de un triángulo era menor que 180º. A esta geometría la denominó *Geometría Esferologarítmica*. También estudió la trigonometría no euclidiana con aplicación a problemas elementales de resolución de triángulos esféricos. Su mayor mérito es haber propuesto la idea de que una geometría elíptica podía realizarse en la superficie de la esfera y que era posible extender el número de geometrías no euclidianas hasta el infinito.

Siguiente Sección: *Geometría de Riemann*

[4] Ver por ejemplo, EVES, H. *An Introduction to the History of Mathematics.* Holt, Reinhart and Winston. New York. 1976, o, BOYER, C. B. *A History of Mathematics.* John Wiley & Sons, Inc. New York. 1989.