"El continuo lineal no puede ser agotado por la interpolación de nuevas unidades.
Y no puede por lo tanto ser pensado como una mera colección de unidades.". L. E. J. Brouwer.

L. E. J. Brouwer, en la lente de Paul R. Halmos en esta foto de 1953[1]. Brouwer fue creador del Teorema del Punto Fijo que lleva su nombre y del enfoque intuicionista de las matemáticas. Dos buenas razones para figurar en la historia de las matemáticas.

5.7 – Brouwer, Heyting y el Intuicionismo.

Al igual que el logicismo, el intuicionismo buscaba dar a las matemáticas una fundamentación firme. Mientras que Frege y Russell recurrían a la lógica, los defensores del intuicionismo iban casi en contravía de la lógica. Leopold Kronecker (1823-1891), el precursor del intuicionismo, rechazó de plano y duramente la teoría de Cantor en relación con los cardinales transfinitos. Kronecker fue esencialmente constructivista en el sentido de exigir que los objetos matemáticos fueran creados por procesos algorítmicos específicos, y no introducidos en las matemáticas *a priori,* como lo hizo Cantor, a través de las definiciones abstractas de la teoría de conjuntos.

El matemático holandés L. E. J. Brouwer (1881-1966), inició con su tesis de grado en 1908 toda una escuela filosófica relacionada con los fundamentos de las matemáticas. La situación histórica en la que se inició el intuicionismo con Brouwer, era de gran conflicto por cuanto la postura del matemático holandés, fue demasiado radical al oponerse de plano a la concepción de los logicistas y a la escuela formalista, a la cabeza de la cual estaba David Hilbert. Decíamos antes que los logicistas no estaban para cuestionar las matemáticas clásicas, mas bien buscaban simplemente

---

[1] Foto tomada de: HALMOS, P. R. *I Have a Photographic Memory.* American Mathematical Society. Providence. 1987.

mostrar que éstas formaban parte de la lógica. Los intuicionistas, al contrario pensaban que las matemáticas clásicas estaban plagadas de errores, a tal punto que, las paradojas que estudiamos en la teoría de Cantor eran apenas la punta del iceberg. Alrededor de 1908 las paradojas en la teoría de conjuntos de Cantor ya habían hecho su aparición, y, paradoja al fin de cuentas, significaba contradicción en una teoría que era más intuitiva que axiomática. Para los logicistas, las paradojas eran errores comunes, causados por la inhabilidad de algunos matemáticos, y no exactamente, por falla estructural de las matemáticas. Para Brouwer, sin embargo, la teoría de conjuntos de Cantor fue hecha amañadamente sin ningún enfoque axiomático. Lo que dio origen a las paradojas, que interpretadas como lo que realmente son (contradicciones en la teoría), hacía que las matemáticas estuvieran lejos de ser perfectas y por tanto, había la exigencia de reconstruirlas desde sus mismas bases.

Para los intuicionistas las bases de las matemáticas estaban en la explicación del origen, o la esencia de los números naturales 1, 2, 3,… Para la filosofía intuicionista, todo ser humano tiene una intuición congénita en relación con los números naturales. Esto significa en primer lugar que tenemos una certeza inmediata de lo que significamos con el número “**1**”, y en segundo lugar, que el proceso mental que originó el numero **1** puede repetirse. La repetición de este proceso, induce la creación del número **2**, una nueva repetición y aparece el número **3**. En esta forma, el ser humano puede construir cualquier segmento inicial **1, 2, 3,…, n,** donde **n** es un natural arbitrario. Esta construcción mental de un número natural tras de otro, nunca podría darse, si no tuviéramos dentro de nosotros, una <u>preconcepción del tiempo</u>. Cuando afirmamos **2** va después de **1**, el término “después” tiene una connotación de tiempo, y en ese aspecto Brouwer se adhiere al filósofo Immanuel Kant (1724-1804) para quien la mente humana tiene una apreciación inmediata de la noción de tiempo. Kant usó la palabra “intuición” para “apreciación inmediata”, y *es de allí de donde proviene el término “intuicionismo”*.

Vale la pena observar que la construcción intuicionista de los números naturales, sólo permite la construcción de segmentos de longitud finita con punto inicial, como **1, 2, 3,…, n**. Este procedimiento no nos permite construir de golpe todo el conjunto **N** de números naturales, tan familiar a las matemáticas clásicas. También es importante notar que, esta construcción es, a la vez, <u>inductiva y efectiva</u>; inductiva en el sentido de que si queremos construir, digamos el número **2**¸ uno tiene que recorrer el proceso mental de construir el número **1** y luego el número **2**. Es decir al número **2** no lo podemos sacar como el mago saca de su sombrero una paloma. El proceso es efectivo (entendido como causa-efecto) en el sentido de que una vez hemos logrado la construcción de un número natural dado, él queda ya como un *constructo* mental completo, listo a convertirse en objeto de estudio. Cuando alguien dice que ha terminado la construcción del número **6**, por ejemplo, su situación es similar a aquella, en la que está el albañil, cuando ha pegado uno a uno hasta el último ladrillo y dice, “he terminado este muro”.

Según la filosofía intuicionista, *las matemáticas podrían definirse como una actividad mental* y no como un conjunto de teoremas en el sentido del logicismo. Para el matemático intuicionista, las *matemáticas son una actividad que consiste en llevar a cabo, una tras otra, aquellas construcciones mentales*, que son inductivas y efectivas, entendidas como se entiende, la construcción intuicionista de los números naturales: inductiva y efectiva. El intuicionismo sostiene que los seres humanos son capaces de reconocer si una construcción mental tiene o no estas dos propiedades. Nos referiremos a las construcciones mentales que tienen estas dos propiedades como un “constructo”; y así una definición intuicionista de matemáticas dice: *las matemáticas son una actividad mental, que consiste en realizar constructos, uno detrás del otro*.

Una consecuencia mayor de esta definición es que, todas las matemáticas intuicionistas son efectivas, o, “constructivas”, como usualmente se dice. Usaremos de ahora en adelante el adjetivo “constructivo” como sinónimo de “efectivo”. Es decir, cada constructo es constructivo, y las matemáticas intuicionistas no serán otra cosa que tratar, uno tras otro, los constructos mentales. Por ejemplo, si un número real *r* ocurre en una prueba o en un teorema intuicionista, el número nunca estará allí en virtud de una prueba de existencia. Estará allí porque se construyó previamente desde el fondo hasta el tope. Esto implica, por ejemplo, que cada lugar decimal en su expansión decimal de *r* puede en principio computarse. Brevemente, *todas las pruebas intuicionistas, teoremas, definiciones, etc., son enteramente constructivas.*

Otra consecuencia importante de la definición intuicionista de las matemáticas es que las matemáticas no pueden ser reducidas a otra ciencia, como por ejemplo, a la lógica. Tal definición comporta demasiados procesos mentales para considerar esa reducción posible, lo que hace resaltar la gran diferencia entre el logicismo y el intuicionismo. En efecto, la actitud intuicionista hacia la lógica es precisamente la opuesta a la actitud del logicista. Para los intuicionistas, los procesos lógicamente válidos se dan, porque ellos son constructos y así, *la parte válida de la lógica clásica es parte de las matemáticas*. Cualquier ley de la lógica clásica no compuesta de constructos es para el intuicionista una combinación de palabras sin sentido. Esto implica que la clásica ley del tercero excluido, no sea más que una combinación de palabras sin significado, y así este principio tan importante en las matemáticas clásicas, no puede usarse indiscriminadamente en matemáticas intuicionistas. De pronto podría usarse con limitaciones, pero no siempre.

Una vez que la definición de matemáticas se ha entendido y aceptado, lo que resta hacer es, construir matemáticas a la manera intuicionista. Así pues, hay aritmética, álgebra, análisis, teoría de conjuntos, desarrolladas, todas ellas, con el enfoque intuicionista. Sin embargo, en cada una de estas ramas de las matemáticas, ocurren teoremas clásicos los que no están compuestos de constructos y, serán para los intuicionistas, meras combinaciones de palabras sin ningún sentido. Consecuentemente, se puede decir, que los intuicionistas no han podido, al menos hasta ahora, reconstruir todo el espectro de las matemáticas clásicas. Pero esto no los molesta, por cuanto que, todo aquello que no se deja tratar, según sus propios patrones, simplemente, no es matemático. No está en el programa intuicionista la justificación de todas las matemáticas clásicas, su propósito es dar una definición válida de las matemáticas y entonces “esperar y mirar” que tipo de matemáticas resulta de esta definición. Observamos aquí otra diferencia de bulto entre el logicismo y el intuicionismo: los logicistas buscaron justificar todas las matemáticas clásicas, mientras los intuicionistas se dedicaron a hacer sus propias matemáticas. Para formarse una idea del alcance de su propósito es bueno dar una ojeada a la obra Heyting[2], donde uno encontrará matemáticas de gran valor. Heyting fue discípulo de Brouwer y otro gran exponente de las matemáticas intuicionistas.

Arend Heyting estudió en la Universidad de Ámsterdam bajo la dirección de Brouwer y obtuvo su doctorado en 1925, con una tesis sobre la axiomatización intuicionista de la geometría proyectiva. En 1930 publicó una obra relacionada con la formalización de las teorías intuicionistas de Brouwer, obra ésta que no solo hizo de Heyting un personaje destacado de la filosofía intuicionista, sino que además, las teorías de su maestro llegaron a ser más asequibles. Recordamos aquí a Heyting en el Simposio de Königsberg, el 7 de Septiembre de 1930,

[2] HEYTING, A. *Intuitionism. An introduction,* Elsevier, Ámsterdam. 1966

defendiendo sus teorías intuicionistas, frente a Rudolph Carnap (1891-1970) y a John von Neumann (1903-1957), quienes harían lo propio, representando al logicismo y al formalismo, respectivamente.

En 1934 apareció su libro *Intuicionismo y Teoría de la Prueba* en el cual a la manera de Hilbert busca sustentar la lógica intuicionista en el plano de las metamatemáticas. A partir de 1937 fue profesor de la Universidad de Ámsterdam hasta su retiro en 1968. A lo largo de su carrera profesional escribió artículos y libros que divulgaban y sustentaban sus principios intuicionistas en diferentes terrenos, desde el álgebra hasta en los espacios de Hilbert. Aun puede conseguirse copias de su obra clásica: *Intuitionism: An Introduction* (Primera edición, 1956).

Examinemos ahora, qué tan exitosa ha sido la labor de la escuela intuicionista en el sentido de dar una fundamentación aceptable a las matemáticas, y que sea reconocida por la mayoría de los matemáticos. Insistimos de nuevo que hay honda diferencia en la forma en que esta pregunta se responde en el caso presente y en el caso de los logicistas. Aún los más connotados líderes del logicismo han admitido que su escuela ha fallado en el propósito de dar a las matemáticas una fundamentación firme, al menos, al 20% de las matemáticas clásicas. Sin embargo, los más destacados líderes de la escuela intuicionista se sostienen en la posición de que su escuela ha dado a las matemáticas una fundamentación enteramente satisfactoria. Hay que poner de presente la definición de matemáticas que dimos arriba, y la definición de filosofía intuicionista, que nos dice por qué, los constructos nunca pueden dar origen a contradicciones y así, las matemáticas intuicionistas están libres de contradicciones. En efecto, no sólo eso, si no también todos los demás problemas concernientes a la naturaleza de los fundamentos, han recibido soluciones perfectamente satisfactorias dentro del intuicionismo. Pero, aunque reconozcamos las atractivas características del intuicionismo ya mencionadas, ¿ha avalado la comunidad matemática esta posición intuicionista? Aún, si uno mira al intuicionismo desde fuera, o sea, en la perspectiva de un matemático clásico, uno tiene que decir que el intuicionismo ha fallado en el logro del objetivo de dar a las matemáticas una fundamentación adecuada.

Una razón para ello es que los matemáticos clásicos no están dispuestos a alejarse de muchos de los hermosos problemas y teoremas que, para los intuicionistas no son más que combinación de palabras sin sentido. Un ejemplo de los primeros es la *Hipótesis del Continuo,* que David Hilbert puso a encabezar entre sus veintitrés problemas propuestos en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, celebrado en París[3]. Un ejemplo de los segundo ocurre en topología y análisis matemático, y es el *teorema del punto fijo de Brouwer*, el cual es rechazado por los mismos intuicionistas, porque el punto fijo no puede construirse y sólo puede mostrarse la existencia del punto fijo a través del recurso de una prueba existencial y no constructivista. Este teorema lo formuló y demostró el mismo Brouwer en su época preintuicionista cuando lideró el desarrollo de la topología, sin embargo, fue rechazado por él y su escuela, al reconocer que no podía acomodarse, en las matemáticas intuicionistas. Una versión de este teorema para funciones continuas de variable y valor real dice:

[3] Para verificar la forma en que califica el mismo Brouwer este problema ver su discurso inaugural como profesor de la Universidad de Ámsterdam de 1912: *Intuisionism and Formalism.* Bulletin of The American Mathematical Society. Vol. 20. 1913. Pags. 81-96. Fue reproducido en: New Series of the Bulletin of The American Mathematical Society. Vol. 37, No. 1. January 2000, Pags. 55-64

TEOREMA DEL PUNTO FIJO DE BROUWER.
Toda función continua de un intervalo cerrado en si mismo, tiene al menos, un punto fijo. Esto es, existe un punto $x_0 \in [a, b]$, *tal que* $f(x_0) = x_0$. Ver *Fig.*5.8.1.

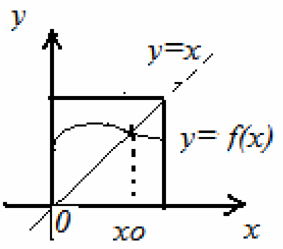

Fig. 5.8.1. Toda función continua definida en un intervalo cerrado [a, b] con rango en el mismo intervalo tiene un punto fijo, es decir, existe un punto $x_0 \in [a, b]$, tal que, $f(x_0) = x_0$.

Otra razón para el rechazo del intuicionismo, se origina en teoremas que pueden probarse tanto en matemáticas clásicas como en matemáticas con enfoque intuicionista. Con frecuencia ocurre que estos teoremas tienen pruebas cortas, elegantes e increíblemente recursivas en matemáticas clásicas, pero son, no constructivas. Los intuicionistas desde luego las rechazan y las sustituyen a su modo por pruebas constructivas. Sin embargo, estas pruebas constructivas se convierten en pruebas mucho más largas, y en su apariencia, al menos para los matemáticos clásicos, han perdido toda su elegancia. Un ejemplo es el teorema fundamental del álgebra[4], cuya prueba en matemáticas clásicas se hace en media página, pero la misma demostración en matemáticas intuicionistas es diez veces más larga. Los matemáticos clásicos se resisten a creer que las elegantes pruebas de sus teoremas no tengan sentido, sólo por ser no constructivas.

Finalmente están los teoremas que valen en el intuicionismo y son falsos en las matemáticas clásicas. Un ejemplo es el teorema intuicionista que afirma que: *Toda función de valor real definida en todo **R** es continua*. Este teorema no es tan traído de los cabellos, como aparenta ser, cuando se tiene en cuenta la forma cómo se define, en el terreno intuicionista, una función. Para ellos una función de valor real en todo **R** se define, sólo si, para cada real r cuya construcción intuicionista se ha completado, también el número $f(r)$ puede ser construido. Para un matemático clásico, las funciones continuas no satisfacen ese criterio, las funciones discontinuas, menos. De aquí que, matemáticas que reconozcan este enunciado como teorema, no pueden ser aceptadas como tales, entre los matemáticos clásicos.

Las anteriores razones que usan los matemáticos clásicos para rechazar el intuicionismo no son, ni racionales, ni científicas. Tampoco son razones pragmáticas, basadas en la convicción de que las matemáticas clásicas son mejores, para las aplicaciones en la física o en otras ramas de la ciencia, donde no han entrado las matemáticas intuicionistas. Todas ellas son, esencialmente, razones emotivas, arraigadas en sentimientos profundos de apego a las matemáticas en las que tradicionalmente nos hemos desenvuelto. Aquí enfrentamos entonces la segunda crisis de las matemáticas, que consiste en la falla de la escuela intuicionista de convencer a la mayoría de la comunidad matemática para que siga sus lineamientos.

---

[4] El teorema fundamental del álgebra tiene que ver con la existencia de raíces de una ecuación polinómica. Más exactamente, el polinomio P con coeficientes reales y de grado n, tiene exactamente n ceros, es decir hay n valores de x (contando multiplicidades) para los cuales $P(x) = 0$.

Es importante anotar que, al igual que el logicismo, el intuicionismo también tiene sus raíces en la filosofía. Cuando por ejemplo, los intuicionistas establecen su definición de matemáticas, ellos usan estrictamente lenguaje filosófico y no matemático. La actividad mental que conduce a las matemáticas, puede definirse en términos filosóficos, pero debe, por necesidad, usar términos que no pertenecen a la actividad que pretende definir. Al igual que el logicismo está ligado al realismo, el intuicionismo está emparentado con una escuela filosófica a veces denominada: "*conceptualismo*". Esta escuela sostiene que las entidades abstractas existen, solamente en la medida, en que ellas sean construidas por la mente humana. Esta es, en verdad, la actitud de los intuicionistas, para quienes las entidades abstractas que ocurren en matemáticas, ya sean sucesiones, relaciones de orden, o lo que se use, son construcciones mentales. Además, esta es, precisamente la razón, por qué, uno no encuentra en el intuicionismo la gran variedad de entidades abstractas que encuentra en las matemáticas clásicas y por consiguiente en el logicismo. El contraste entre logicismo e intuicionismo en las matemáticas, es muy similar entonces, al que existe entre *realismo y conceptualismo.*

No dejemos pasar la oportunidad, ahora que estamos hablando de intuicionismo, para traer a cuento al matemático ruso Andrei N. Kolmogórov (1903-1987), quien mantuvo correspondencia con Heyting en relación con el intuicionismo. Al matemático ruso lo recordaremos, no sólo por sus grandes contribuciones al análisis matemático, a las ecuaciones diferenciales y a otros campos de las matemáticas y de la física, sino también por la formalización que hizo de la teoría de probabilidades, usando lógica y teoría de medida.

Buena parte de esta sección es la traducción y adaptación de un artículo de Snapper[5], que tiene el mérito de haber sido premiado por la *Mathematical Association of America* (MAA) con la distinción *Carl B. Allendoerfer Award* al mejor artículo expositivo del año 1980 en el *Mathematics Magazine*.

Arend Heyting (1898-1980), fue discípulo de Brouwer y fue además quien formalizó la teoría intuicionista de su maestro en relación con las matemáticas.[6]

Siguiente Sección: *Hilbert y el Formalismo*

[5] Snapper, Ernst. The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism, and Formalism, *Mathematics Magazine*. 52 (1979), 207-216.

[6] Foto tomada de Mac Tutor: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Heyting.html.