Parte I. FUNCIONES. LÍMITES Y CONTINUIDAD. ACOTACIÓN

I.1. DEFINICIONES.

Una función real de variable real (f: *Domf* $\subset \mathbb{R} \rightarrow$ *Recf* $\subset \mathbb{R}$) es una relación que a cada elemento ***x*** de un subconjunto de $\mathbb{R}$ (***Domf)*** le asigna un <u>**único**</u> elemento ***y*** de un subconjunto de $\mathbb{R}$ (***Recf)***.

A las magnitudes que intervienen en una función se les llama **variables**. Una de ellas es la **variable independiente** y la otra, cuyos valores se deducen (dependen) de los valores de la primera, se llama **variable dependiente**.

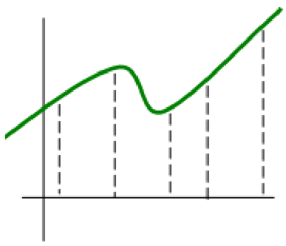
La **variable independiente** se designa por ***x*** y sus valores son representados en el **eje horizontal** (**eje de abscisas**). La **variable dependiente** se designa por ***y*** y sus valores son representados en el **eje vertical** (**eje de ordenadas**).

La gráfica de una función es el conjunto de todos los puntos cuyas coordenadas son (x,f(x)), con x $\in$ ***Domf***.

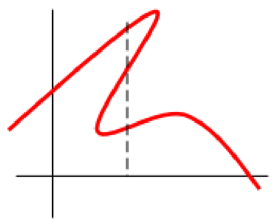
Una función se puede describir verbalmente, con una tabla de valores, dando su gráfica, o por medio de su fórmula o expresión algebraica.

I. 2. DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN.

El conjunto ***Domf*** o ***Df***, es decir <u>el conjunto de todos los valores x que tienen imagen</u>, se llama **dominio de f**. El conjunto ***Recf***, es decir <u>el conjunto de todas las imágenes</u> se llama **recorrido de f (a veces también rango de f)**.



SI ES UNA FUNCIÓN

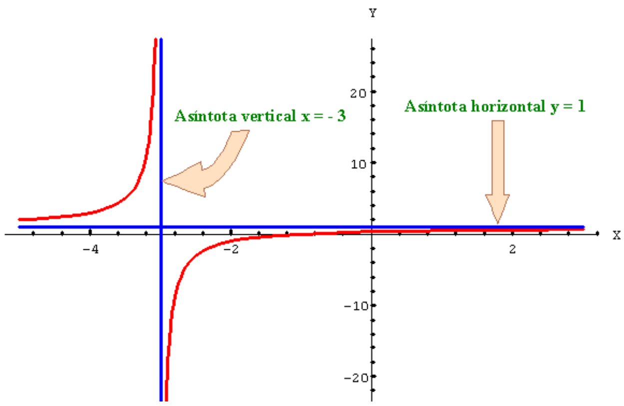


NO ES UNA FUNCIÓN

Si a$\in$Domf ⇨ a tiene imagen ⇨ **el punto (a,f(a)) está en la gráfica de f y ningún otro punto de abscisa a está en la gráfica de f** (puesto que a sólo tiene una imagen).

Si a$\notin$Domf ⇨ a no tiene imagen ⇨ **no hay ningún punto de la gráfica de f cuya abscisa sea a ⇨ la gráfica de f no cruza la recta x = a (A. Vertical)**

Si b$\notin$Recf ⇨ no existe a del dominio cuya imagen sea b ⇨ no hay ningún punto de la gráfica de f cuya ordenada sea b ⇨ **la gráfica de f no cruza la recta y = b (A. Horizontal).**



El dominio de una función puede estar determinado por:

- la definición de la función,
- por la propia naturaleza de la magnitud cuyas cantidades son los valores de la variable independiente, o
- por las operaciones que aparecen en la expresión algebraica de la función, que pueden no estar definidas para ciertos valores.

<u>**Dominios de algunos modelos de funciones:**</u>

Las funciones polinómicas, las exponenciales (a^x), senx, cosx, arctgx, $\sqrt[n]{x}$ con n impar, están definidas en todo R. ¡Ojo! El dominio de f(x) = sen(g(x)) será el dominio de g(x). El dominio de f(x) = $a^{g(x)}$ será el dominio de g(x), etc.

- f(x) = $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ → Domf = { x $\in \mathbb{R}$ / Q(x) ≠ 0 } = $\mathbb{R}$ \ {x $\in \mathbb{R}$ / Q(x) = 0}

- f(x) = tgx → Domf = { x ∈ ℝ / x ≠ $\frac{\pi}{2}$+k π , k ∈Z };

  f(x) = tg(g(x)) → Domf = { x ∈ ℝ / g(x) ≠ $\frac{\pi}{2}$+k π , k ∈Z };

- f(x) = arcsenx ó f(x) = arccosx → Domf = [-1,1]

  f(x) = arcsen(g(x)) ó f(x) = arccos(g(x)) → Domf = { x ∈ ℝ / g(x) ∈ [-1,1] };

- f(x) = $\sqrt[n]{g(x)}$ con n par → Domf = { x ∈ ℝ / g(x) ≥ 0 }

- f(x) = log $_a$ g(x) con a >0 a ≠ 1 → Domf = {x ∈ ℝ / g(x) > 0 }

I. 3. GRÁFICAS DE ALGUNOS MODELOS FUNCIONALES.

Relaciona lo anterior con las gráficas que se muestran a continuación:

Funciones polinómicas

$\boxed{y = f(x) = ax^2 + bx + c}$ **Parábola**

1º) Calculamos el Vértice $\begin{cases} x_v = \dfrac{-b}{2a} \\ y_v = f(x_v) \end{cases}$ $V(x_v, y_v)$

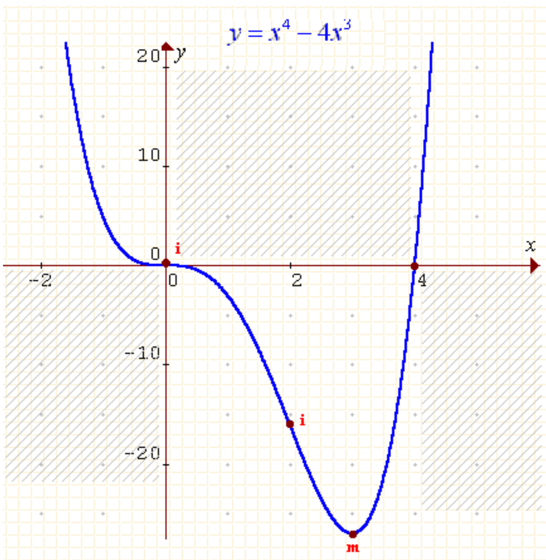
2º) Puntos de corte con los ejes:

$\boxed{\text{Eje x}}$ $y = 0 \Rightarrow 0 = ax^2 + bx + c$

$\boxed{\text{Eje y}}$ $x = 0 \Rightarrow y = c$

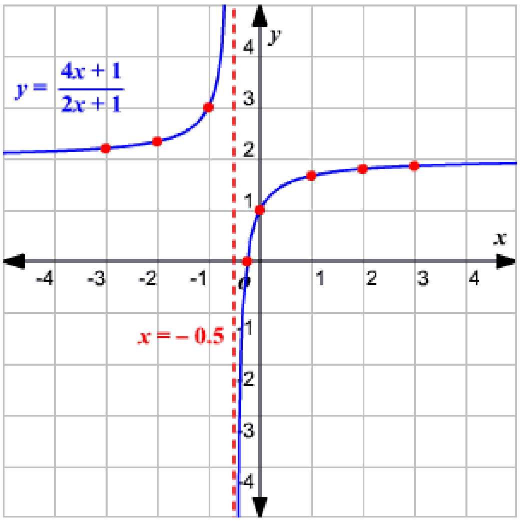
3º) $\boxed{a > 0}$ $\Rightarrow$  $\boxed{a < 0}$ $\Rightarrow$ 

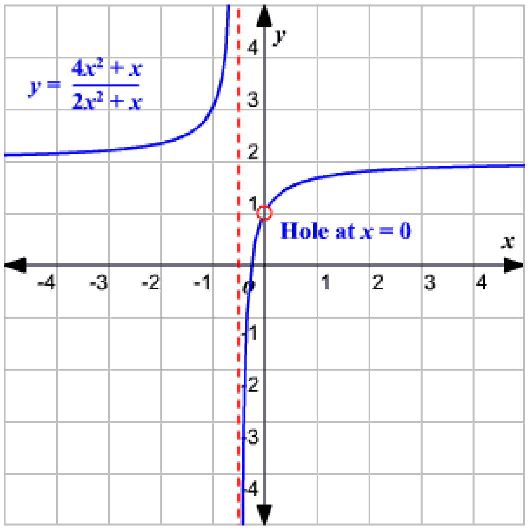
4º) <u>Tabla de valores</u>: Damos valores a la x para obtener más puntos de la parábola.



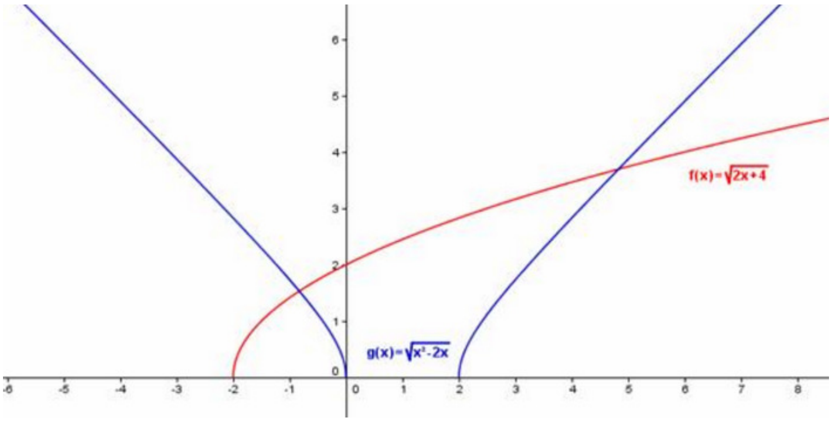
	x	y
	-2.75	140.3789
	-2.5	101.5625
	-2.25	71.1914
	-2.0	48.0
	-1.75	30.8164
	-1.5	18.5625
	-1.25	10.2539
	-1.0	5.0
	-0.75	2.0039
	-0.5	0.5625
	-0.25	0.0664
i	0	0
	0.25	-0.0586
	0.5	-0.4375
	0.75	-1.3711
	1.0	-3.0
	1.25	-5.3711
	1.5	-8.4375
	1.75	-12.0586
i	2.0	-16.0
	2.25	-19.9336
	2.5	-23.4375
	2.75	-25.9961
m	3.0	-27.0
	3.25	-25.7461
	3.5	-21.4375
	3.75	-13.1836
>>	4.0	0
	4.25	19.1914

Funciones racionales

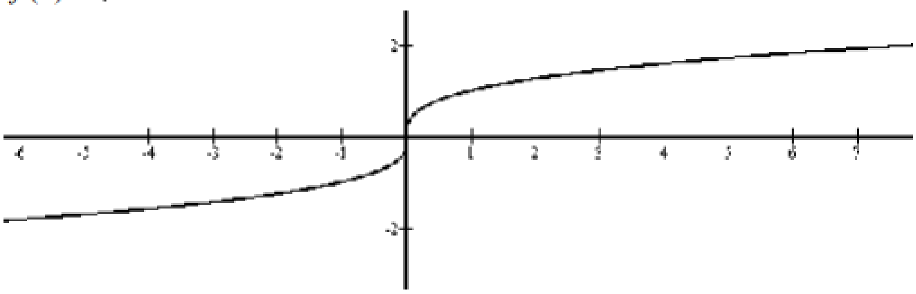




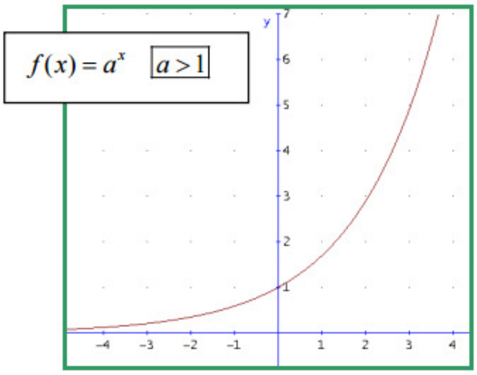
Funciones radicales

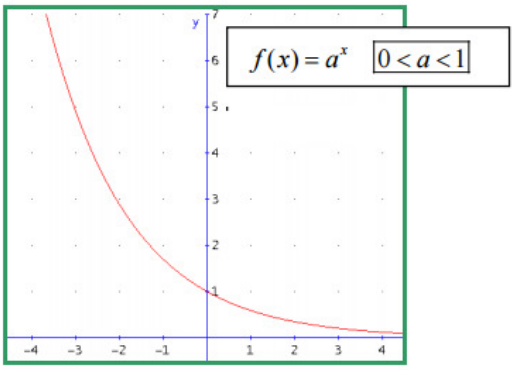


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

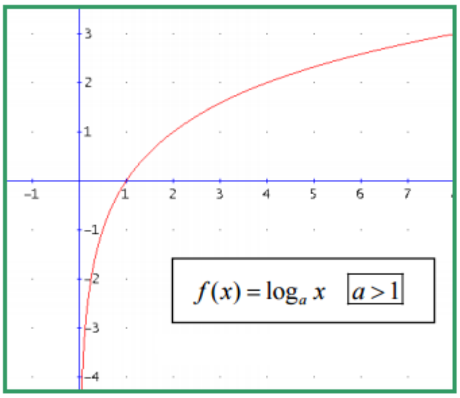


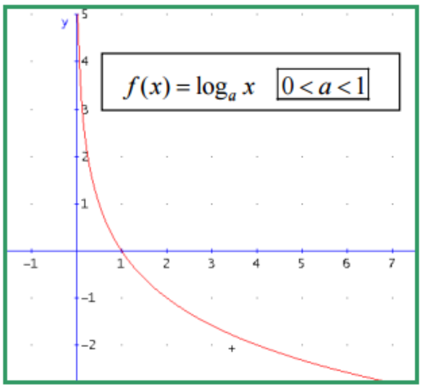
$\boxed{y = f(x) = a^x}$ **Función exponencial**



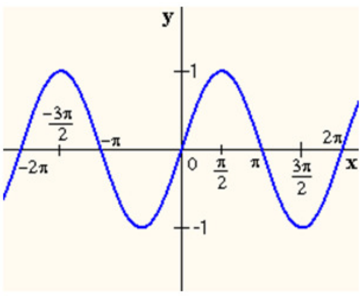


$\boxed{y = f(x) = \log_a x}$ **Función logarítmica**

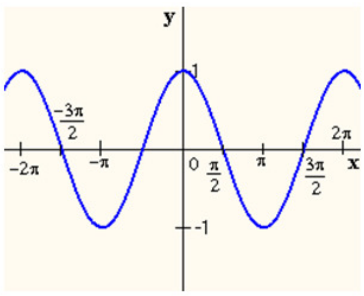




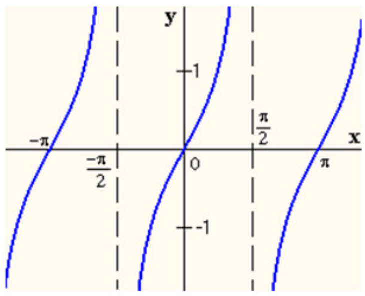
Funciones trigonométricas



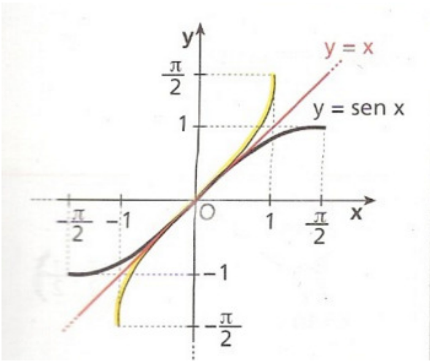
$y = \operatorname{sen} x$

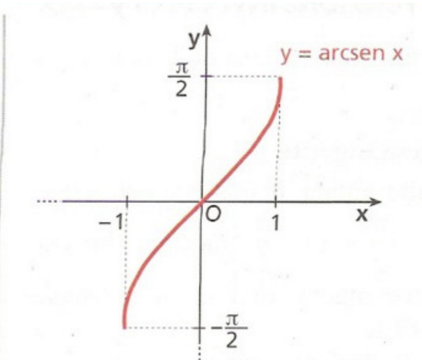


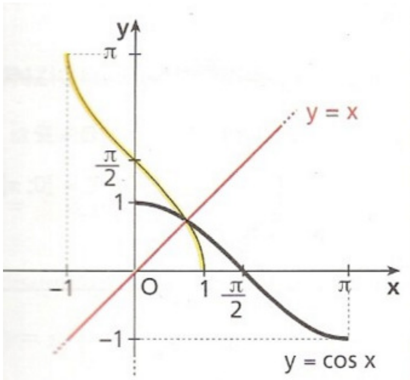
$y = \cos x$

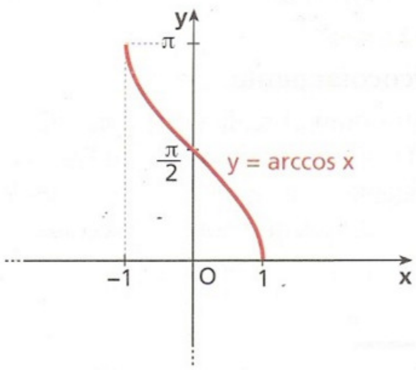


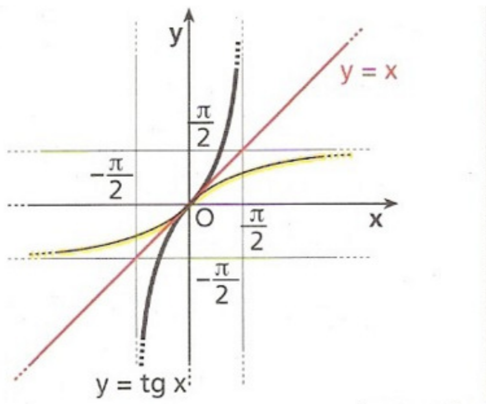
$y = \tan x$

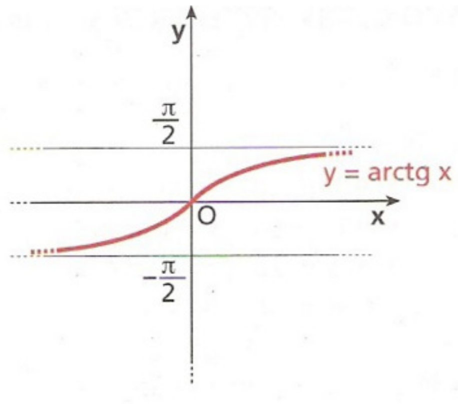




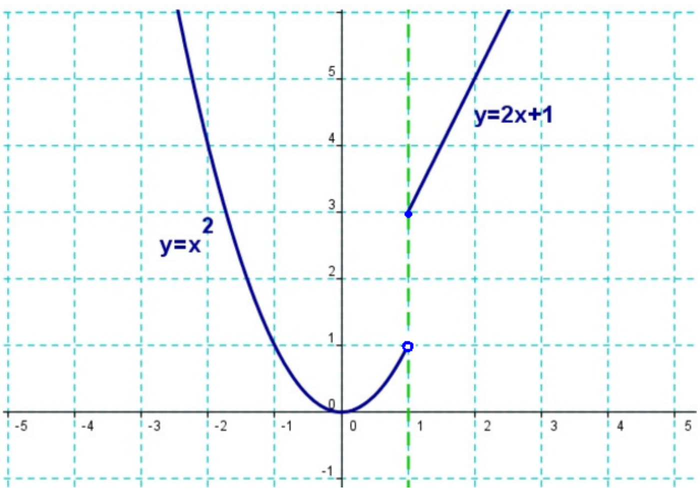






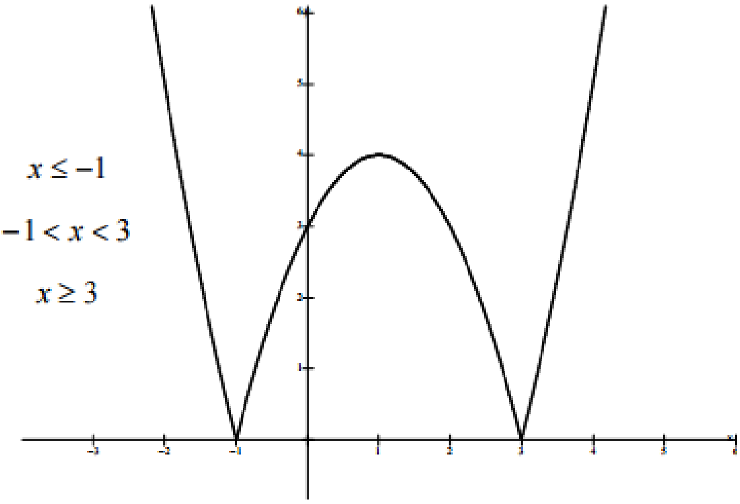


Funciones a trozos



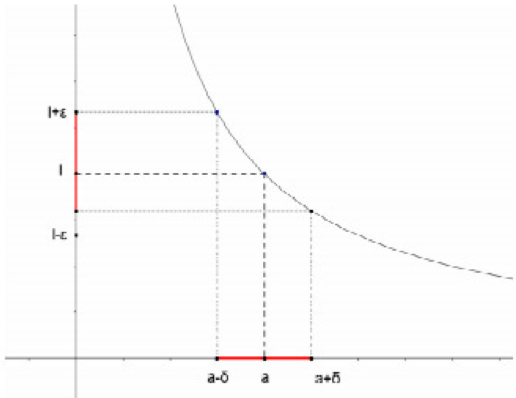
$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x<1 \\ 2x+1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$$|x^2-2x-3| = \begin{cases} x^2-2x-3 & x \le -1 \\ -x^2+2x+3 & -1 < x < 3 \\ x^2-2x-3 & x \ge 3 \end{cases}$$



I. 4. LÍMITES.

I. 4. 1. Límites de una función en un punto. Límites laterales. Definiciones.



<u>**Definición 1:**</u> Se dice que **el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia a es l, o que converge a l,** si: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; si \; |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x = a$. Lo escribiremos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

<u>**Nota 1:**</u> Hemos de tener en cuenta que la definición de límite no depende del valor de la función en $x = a$, es decir, no tiene porqué cumplirse que $f(x) = l$, de hecho, ni siquiera tiene que estar definida la función en $x = a$. La idea de límite analiza lo que ocurre con las imágenes cuando nos acercamos, sin llegar a alcanzar (en principio) el valor $x = a$.

En determinadas funciones, como por ejemplo las definidas a trozos, los valores que toma alrededor de un punto, dependen si nos acercamos por la izquierda o por la derecha y el comportamiento puede ser muy distinto en ambas direcciones.

*Por ello, además de las definiciones de límite, conviene llevar a cabo definiciones que tengan en cuenta dicha circunstancia. Nos referimos a las definiciones de **límites laterales** que vamos ver a continuación.*

Definición 2:

Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende hacia a por la izquierda,** si: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; si \; a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$,es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x = a$, a través de valores menores que a. Lo escribiremos $\underset{x \to a^-}{Lím} f(x) = l$.

Definición 3:

Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende hacia a por la derecha es l** si: $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; si \; a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$,es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x = a$, a través de valores mayores que a. Lo escribiremos $\underset{x \to a^+}{Lím} f(x) = l$.

Una función tiene límite en un punto si los límites laterales en dicho punto existen y son iguales.

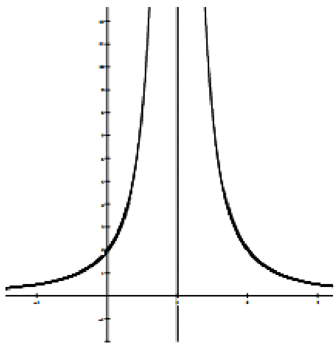
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L}$$

El límite de una función en un punto, en caso de existir, es único.

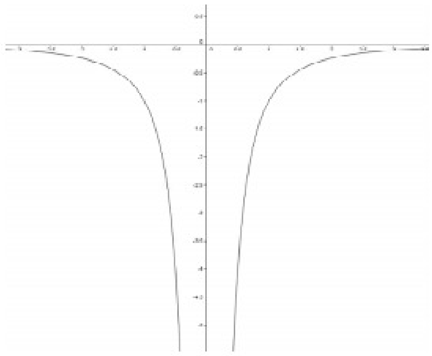
Nota 2: Una de las nociones fundamentales en esta unidad y que ya estudiamos durante el curso pasado es la de **continuidad**. Intuitivamente, se puede decir que una función es continua en un punto $x = a$ si su gráfica se puede trazar alrededor de dicho valor sin levantar el lápiz del papel, es decir, de un solo trazo. Como ya veremos más adelante, esto se traduce en que $\exists \underset{x \to a}{Lím} f(x) = f(a)$.

Ahora bien, la inmensa mayoría de las funciones elementales que ya conocemos son continuas en la mayoría de los puntos de su dominio, así pues, es evidente que un buen método para comenzar a calcular límites sencillos es empezar **sustituyendo x por a en la expresión de la función** ya que, cuando exista $f(a)$ será el valor del límite.

Definición 4: Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de $x = a$. Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende hacia a es más infinito, o que diverge a más infinito,** si: $\forall M > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; / \;\; si \; |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ tome valores positivos tan grandes como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x = a$. Lo escribiremos $\underset{x \to a}{Lím} f(x) = +\infty$



Definición 5: Sea $f(x)$ una función definida en un entorno reducido de $x=a$. Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende hacia a es menos infinito, o que diverge a menos infinito,** si: $\forall N<0 \ \exists \delta>0 \ / \ si \ |x-a|<\delta \Rightarrow f(x)<N$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ tome valores negativos tan pequeños como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente próximos al valor $x=a$. Lo escribiremos $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$



Nota 3: De la misma forma que en el límite puntual, el comportamiento del límite depende de lo que ocurra "alrededor" del punto y no del valor en el propio punto. También, de la misma forma que en el caso de límites finitos, se pueden definir los límites laterales

Ejemplo Sea $f(x)=\dfrac{3x^2-1}{2}$. Veamos algunos de sus límites puntuales:

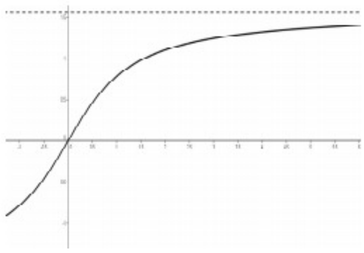
a) $\lim_{x\to 0} f(x)=\dfrac{0-1}{2}=\dfrac{-1}{2}$ b) $\lim_{x\to 1} f(x)=\dfrac{3-1}{2}=1$ c) $\lim_{x\to -2} f(x)=\dfrac{12-1}{2}=\dfrac{11}{2}$

Ejemplo Sin más que ir dando valores en la calculadora, podemos observar que:

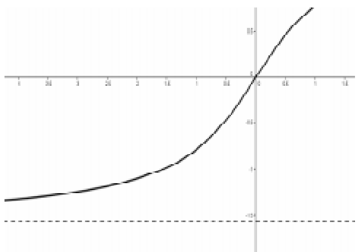
a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{2}{(x-1)^2}=+\infty$ b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{-3}{x^4}=-\infty$ c) $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{5}{x-1}=-\infty$; $\lim_{x\to 1^+}\dfrac{5}{x-1}=+\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x\to 1}\dfrac{5}{x-1}$

I. 4. 2. Límites en el infinito. Definiciones.

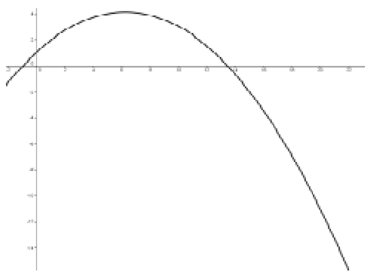
Definición 6: Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende a más infinito es l, o que converge a l,** si: $\forall \varepsilon>0 \ \exists M>0 \ / \ si \ x>M \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente grandes. Lo escribiremos $\lim_{x\to +\infty} f(x)=l$



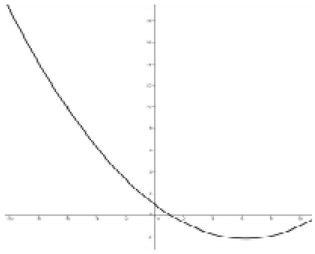
Definición 7: Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende a menos infinito es l, o que converge a l,** si: $\forall \varepsilon>0 \ \exists N<0 \ / \ si \ x<N \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ se aproxime a l tanto como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente pequeños. Lo escribiremos $\lim_{x\to -\infty} f(x)=l$.



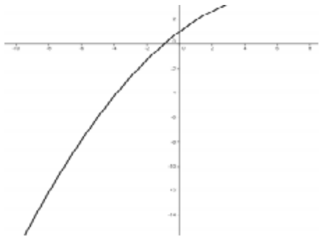
Definición 9: Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende a más infinito es menos infinito, o que diverge a menos infinito,** si: $\forall M>0 \ \exists N<0 \ / \ si \ x>M \Rightarrow f(x)<N$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan pequeño como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente grandes. Lo escribiremos $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$.



Definición 10: Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende a menos infinito es más infinito, o que diverge a más infinito,** si: $\forall M>0 \ \exists N<0 \ / \ si \ x<N \Rightarrow f(x)>M$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan grande como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente pequeños. Lo escribiremos $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x)=+\infty$



Definición 11: Se dice que **el límite de** $f(x)$ **cuando x tiende a menos infinito es menos infinito, o que diverge a menos infinito,** si: $\forall M<0 \ \exists N<0 \ / \ si \ x<M \Rightarrow f(x)<N$, es decir, si podemos hacer que $f(x)$ sea tan pequeño como queramos sin más que tomar valores de x suficientemente pequeños. Lo escribiremos $\underset{x\to-\infty}{Lím} f(x)=-\infty$.



I. 4. 3. Álgebra de límites.

(Suma)

a) $a+b \to a+b$

b) $a\pm\infty \to \pm\infty$

c) $+\infty+\infty \to +\infty$

d) $-\infty-\infty \to -\infty$

e) $\pm\infty\mp\infty \to ¿?\ (IND)$

(Producto)

a) $a\cdot b \to a\cdot b$

b) $a\cdot(\pm\infty) \to \pm\infty$ (*regla de signos*) con $a\neq 0$

c) $0\cdot(\pm\infty) \to ¿?\ (IND)$

d) $\pm\infty\cdot(\pm\infty) \to \pm\infty$ (*regla de signos*)

(Cociente)

a) $\frac{a}{b} \to \frac{a}{b}$ con $b\neq 0$

b) $\frac{a}{0} \to \pm\infty$ (*regla de signos / laterales*) con $a\neq 0$

c) $\frac{0}{0} \to ¿?\ (IND)$

d) $\frac{a}{\pm\infty} \to 0$

e) $\frac{0}{\pm\infty} \to 0$

f) $\frac{\pm\infty}{a} \to \mp\infty$ (*regla de signos*)

g) $\frac{\pm\infty}{0} \to \mp\infty$ (*regla de signos / laterales*)

h) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \to ¿?\ (IND)$

(Potencia de base positiva)

a) $a^b \to a^b \;\; con\; a \neq 0$

b) $0^b \to \begin{cases} 0 & si\;\; b>0 \\ +\infty & si\;\; b<0 \\ ¿?\;(IND) & si\;\; b=0 \end{cases}$

c) $a^{+\infty} \to \begin{cases} +\infty & si\;\; a>1 \\ 0 & si\;\; 0<a<1 \\ ¿?\;(IND) & si\;\; a=1 \end{cases}$

d) $a^{-\infty} \to \begin{cases} 0 & si\;\; a>1 \\ +\infty & si\;\; 0<a<1 \\ ¿?\;(IND) & si\;\; a=1 \end{cases}$

e) $+\infty^b \to \begin{cases} +\infty & si\;\; b>0 \\ 0 & si\;\; b<0 \\ ¿?\;(IND) & si\;\; b=0 \end{cases}$

f) $+\infty^{+\infty} \to +\infty$

g) $+\infty^{-\infty} \to 0$

Nota: Cuando la base tiende a cero, tiene que ser desde valores positivos

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^x = 0 \quad \left(\left(0^+\right)^{\infty} \to 0\right) \quad y \quad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{-x} = \infty \quad \left(\left(0^+\right)^{-\infty} \to \infty\right)$$

*Según acabamos de ver, existen en total **7 indeterminaciones** que son:*

$$\boxed{\infty - \infty \;,\; 0\cdot\infty \;,\; \frac{0}{0} \;,\; \frac{\infty}{\infty} \;,\; 0^0 \;,\; \infty^0 \;\; y \;\; 1^{\infty}}$$

I. 4. 4. Resolución de indeterminaciones.

Resolución de la indeterminación $\frac{0}{0}$

Este tipo de indeterminaciones aparece normalmente en expresiones del tipo: $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ siendo $f(x)$ y $g(x)$ expresiones polinómicas o, eventualmente, expresiones con radicales, una de ellas o ambas. En el caso de las polinómicas, basta simplificar los factores del tipo $x-a$ mediante factorización. Si hay radicales, hay que transformarlos en expresiones sin radicales antes de llevar a cabo lo anterior. Esto se consigue multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada conveniente.

Ejemplo Veamos un ejemplo de cada tipo:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2-8}{x^2+x-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]^{IND} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2(x-2)}{(x-1)} = \dfrac{8}{3}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]^{IND} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x^2-x)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(\sqrt{x+4}-2)\left(\sqrt{x+4}+2\right)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(x-1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x+4-4} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x}(x-1)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0} (x-1)\left(\sqrt{x+4}+2\right) = -4$

Resolución de la indeterminación $\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots\ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots\ldots b_1 x + b_0} = \begin{cases} \pm\infty & si\ n>m \\ \dfrac{a_n}{b_m} & si\ n=m \\ 0 & si\ n<m \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x^4+2x^2-5}{4x^4-7} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\ \textbf{IND}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x^4}{4x^4} = \dfrac{-3}{4}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x+1}{\sqrt{3x^4-x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\ \textbf{IND}\right] = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x}{\sqrt{3x^4}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4x}{\sqrt{3}x^2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-4}{\sqrt{3}x} = \left[\dfrac{-4}{\infty}\right] = 0$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2}{\sqrt{3x+1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\ \textbf{IND}\right) \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2}{\sqrt{3x+\ldots}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2}{\sqrt{3x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^2}{\sqrt{3}\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5}{\sqrt{3}} x^{3/2} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{4x+2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\ \textbf{IND}\right) \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{4x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^{2/3}}{4x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^{2/3-1}}{4} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^{-1/3}}{4} = \dfrac{0}{4} = 0$

Resolución de la indeterminación $\infty-\infty$

Este tipo de indeterminaciones aparece normalmente en expresiones del tipo: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-g(x))$ siendo alguna de las dos funciones expresiones radicales. Para resolverlas, se transforma en una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ multiplicando y dividiendo por la expresión conjugada $(f(x)+g(x))$.

Ejemplo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right)}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{\sqrt{x^2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-4x}{2x}=-2$$

Algunas indeterminaciones, del tipo $\infty-\infty$, se "deshacen" en algunos casos operando.

$$\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-6}{x^2-3x}-\frac{1}{x-3}\right)=\infty-\infty=\text{INDTDO}=\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{1}{x-3}\right)=\lim_{x\to3}\left(\frac{x^2-6}{x(x-3)}-\frac{x}{x(x-3)}\right)=$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x(x-3)}\overset{0/0}{=}\lim_{x\to3}\frac{(x+2)\cancel{(x-3)}}{x\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to3}\frac{x+2}{x}=\frac{5}{3}$$

Resolución de indeterminación 1^{∞}

La indeterminación 1^{∞} se puede resolver aplicando la siguiente fórmula

$$\boxed{\lim f(x)^{g(x)}=1^{\infty}=e^{\lim[f(x)-1]\cdot g(x)}}$$

Ejemplo

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}\right)^{3x-1}=1^{\infty}=\text{INDTDO}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-1\right)(3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2+2}-\frac{x^2+2}{x^2+2}\right)(3x-1)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x^2+2}\right)(3x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-10x+3}{x^2+2}}=e^3$$

Infinitésimos equivalentes

- Se dice que una función f(x) es un **infinitésimo** en x = a si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$

- Si f(x) y g(x) son dos infinitésimos en x = a y además se cumple que $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ entonces f(x) y g(x) son **infinitésimos equivalentes** en x = a, y se escribe: $f(x)\backsim g(x)$

- Son **infinitésimos equivalentes en x = 0:**

$$x \sim \operatorname{sen} x \qquad x \sim \operatorname{tg} x \qquad x \sim \ln(1+x) \qquad x \sim e^x - 1$$

$$x \sim \operatorname{arcsen} x \qquad x \sim \operatorname{arctg} x \qquad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

- Son **infinitésimos equivalentes en x = 1:** $\boxed{x - 1 \sim \ln x}$

Reglas prácticas:

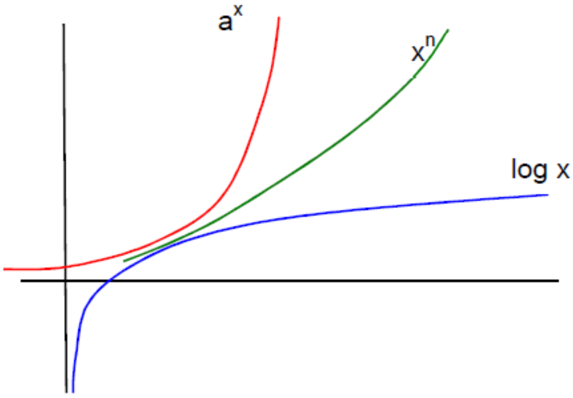
- «Cualquier función exponencial (de base > 1) es un infinito de orden superior a cualquier potencia»

$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{P(x)} = \infty}$ o bien, $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0}$ (donde a>1)

- «Las potencias son infinitos de orden superior a los logaritmos».

Por lo tanto, podemos concluir que,

$\boxed{\text{en el infinito, } \log_a x < P(x) < a^x}$



I. 5. CONTINUIDAD.

Continuidad en un punto y en un intervalo

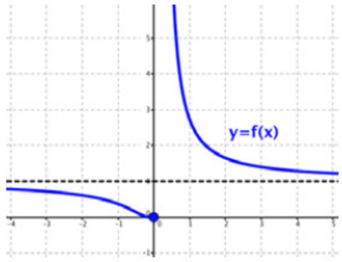
Una función $y = f(x)$ es **continua en un punto** $x = x_0$ si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. Existe $f(x_0)$, es decir, $x_0 \in \operatorname{Dom} f(x)$
2. Existe $\lim_{x\to x_0} f(x)$, es decir, $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$
3. Los dos valores anteriores coinciden. $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$

Continuidad lateral en un punto

La función $y = f(x)$ no es continua en $x = 0$, sin embargo, tiene límite finito cuando x tiende a 0 por la izquierda y coincide con el valor que toma la función en $x = 0$.

Por esta razón, afirmamos que esta función es continua por la izquierda en $x = 0$.



Una función es **continua por la izquierda** en un punto de abscisa x_0 si existe límite por la izquierda en ese punto y coincide con el valor de la función en x_0:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

De la misma manera, se dice que una función es **continua por la derecha** en un punto de abscisa x_0 si existe límite por la derecha en ese punto y coincide con el valor de la función en x_0:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

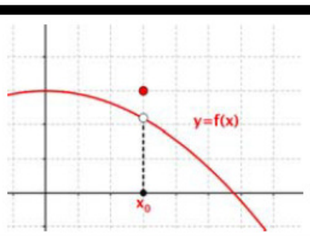
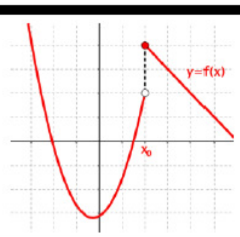
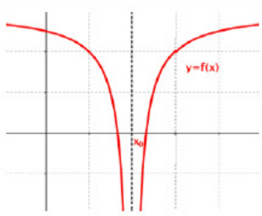
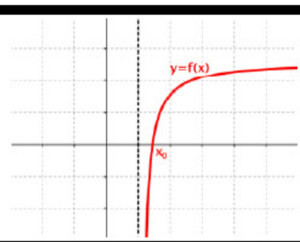
Continuidad en un intervalo

Una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo abierto** (a,b) si y sólo si es continua en todos los puntos de dicho intervalo

Una función $y = f(x)$ es **continua en un intervalo cerrado** $[a,b]$ si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- f es continua en el intervalo abierto (a,b)
- f es continua por la derecha en $x = a$
- f es continua por la izquierda en $x = b$

Las **funciones elementales**: polinómicas, valor absoluto, racionales, raíces, exponenciales, logarítmica, trigonométricas y las inversas de las trigonométricas **son continuas en sus respectivos dominios.**

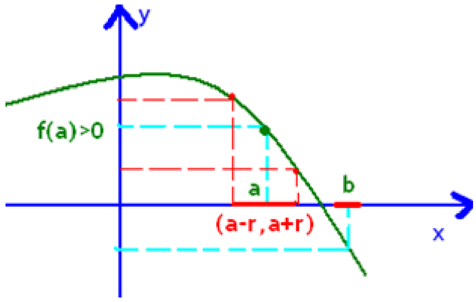
DISCONTINUIDAD EVITABLE	DISCONTINUIDAD NO EVITABLE		
	1ª ESPECIE		2ª ESPECIE
	Salto finito	Salto infinito	
			

I. 6. TEOREMAS DE CONTINUIDAD EN INTERVALOS.

Teorema de conservación del signo

$$\left.\begin{array}{l} f \ \text{continua en } a \\ f(a) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r \in R \,/\, \forall x \in (a-r, a+r),\ f(x) > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} f \ \text{continua en } b \\ f(b) < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists r' \in R \,/\, \forall x \in (b-r', a+r'),\ f(x) < 0$$

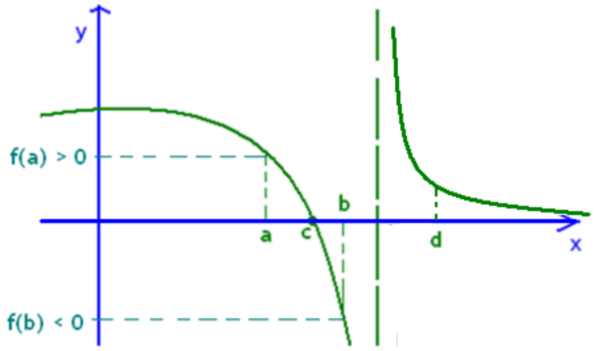


Teorema de Bolzano

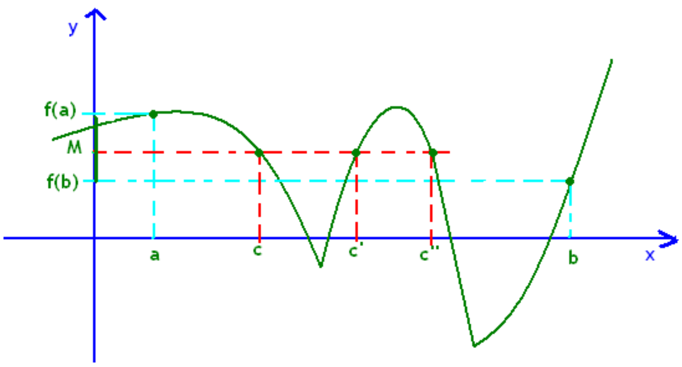
$$\left.\begin{array}{l} f \ \text{continua en } [a,b] \\ signof(a) \neq signof(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = 0$$

Nota: el teorema no afirma que c sea único. Puede haber más de un valor c

Observa en la figura que en el intervalo (b,d) no existe c tal que f(c) = 0, porque no se cumple una de las hipótesis (la de la continuidad)



Teorema de los valores intermedios



$$\left.\begin{array}{l} f \ \text{continua en } [a,b] \\ f(a) \geq f(b) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall M \in (f(b), f(a))\ \exists c \in (a,b) \,/\, f(c) = M$$

Aplicaciones de los teoremas anteriores

1. Demostrar que la ecuación f(x) = 0 tiene solución / soluciones.

Ejemplo **Comprobar que la ecuación x^3 - 3x +40 = 0 tiene alguna raíz real. Aproximar su valor hasta las centésimas.**

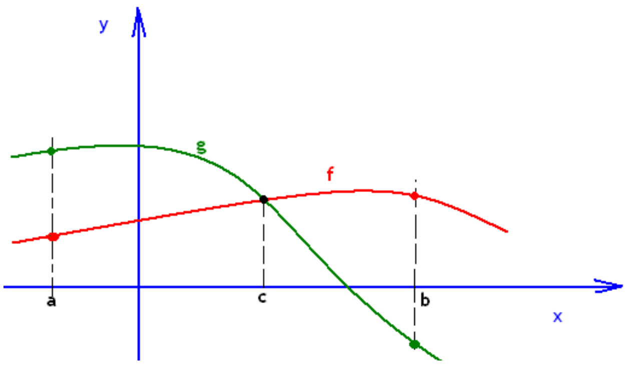
Consideremos la función f(x) = x^3 - 3x +40 = 0, continua en todos los reales por ser una función polinómica.

Tanteando, encontramos que f(-4) = -12, f(-3)=22.

Entonces, f es continua en [-4,-3] y como f(-4) <0 y f(-3) >0, se cumple el teorema de Bolzano, por tanto existe un c ∈ (-4, 3) tal que f(c) = 0. La raíz de la ecuación es c.

Ahora tanteando con valores decimales, obtenemos f(-3,8) = -3,472, f(-3.7) = 0,447. Por lo tanto, podemos asegurar que el número -3,7 se aproxima en menos de una décima a una raíz de la ecuación dada.

2. Demostrar que dos funciones se cortan (toman el mismo valor en una misma c de su dominio)



Ejemplo: **Demuestra que las funciones f(x) = e^x y g(x) = $\frac{1}{x}$ se cortan en un punto si x > 0**

Definimos h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1/x. Si h(x)=0 entonces f(x)=g(x) y las funciones se cortarán.

Veamos que cumple Bolzano y por tanto h(x)=0:

a) es continua para x>0 (no se anula el denominador).
b) busquemos un intervalo donde cumpla Bolzano, por ejemplo [0.1,1]: h(0.1)=$e^{0.1}$-1<0 ; h(1)=e-1>0

Luego cumple Bolzano ∃c∈(0.1,1): h(c)=0, y por tanto f(c)=g(c) cortándose en c estas dos funciones

3.- Demostrar que una función toma el valor K.

Ejemplo: Probar que la función f(x) = x(sen x +1) toma el valor 2.

La función es continua en toda $\mathbb{R}$ por ser el producto de dos funciones continuas.

Tomamos el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ y estudiamos el valor de las imágenes de los extremos:

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 < 2$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi > 2$

Por tanto existe un $c \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ tal que f(c) = 2.

También lo podemos hacer demostrando que la función f(x) = x(senx+1) – 2 toma el valor 0, utilizando el teorema de Bolzano.

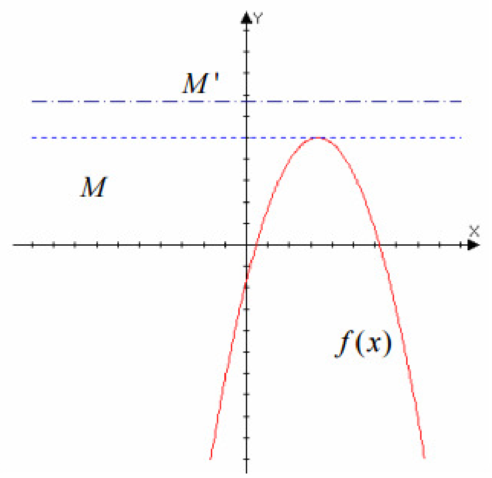
Teoremas de acotación en intervalos cerrados

Funciones acotadas superiormente.

Una función f se dice que está acotada superiormente si existe un número real M tal que

$$f(x) \leq M \quad \forall\, x \in Dom(f)$$

Este número real M recibe el nombre de **COTA SUPERIOR** de la función f. Geométricamente significa que ninguna imagen es superior al valor M y, por tanto, la gráfica de la función f estará por debajo de la recta $y = M$.



NOTA: Si M es una cota superior de la función f, cualquier otro número real M' mayor que M, también es cota superior de f. En consecuencia, si una función está acotada superiormente siempre tendrá un conjunto de cotas superiores.

Análogamente se definiría lo que es una función **acotada inferiormente** y las **cotas inferiores** de una función.

Una función se dice que está acotada si lo está inferior y superiormente.

Es decir que $\exists\, m, M \,/\, m \leq f(x) \leq M \quad \forall\, x \in Dom(f)$

lo cual significa que todas las imágenes de nuestra función estarían comprendidas entre m y M y, por tanto, geométricamente, la gráfica de la función f estaría en la banda comprendida entre las rectas $y = m$ e $y = M$.

Extremo superior. Máximo absoluto.

Se llama extremo superior de una función f a la menor de las cotas superiores de dicha función. Se representa por $\sup(f)$.

Si este valor lo alcanza la función en algún punto de su dominio, recibe el nombre de **máximo absoluto**.

Por tanto, se dice que una función f tiene un máximo absoluto o global en un punto $a \in D$ si se verifica que $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in D$.

Extremo inferior. Mínimo absoluto.

Se llama extremo inferior de una función f a la mayor de las cotas inferiores de dicha función. Se representa por $\inf(f)$.

Si este valor lo alcanza la función en algún punto de su dominio, recibe el nombre de **mínimo absoluto**.

Por tanto, se dice que una función f tiene un mínimo absoluto o global en un punto $a \in D$ si se verifica que $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in D$.

Máximos y mínimos relativos de una función.

Sea f una función definida de D en $\mathbb{R}$ y sea a un punto perteneciente a D.

Se dice que una función f tiene un ***máximo relativo*** en un punto $a \in D$ si existe un entorno de a, $V(a,r)$, en el cual se verifica que $f(x) \leq f(a) \quad \forall x \in V(a,r) \cap D$.

Se dice que una función f tiene un ***mínimo relativo*** en un punto $a \in D$ si existe un entorno de a, $V(a,r)$, en el cual se verifica que $f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in V(a,r) \cap D$.

Teorema de Weiestrass

Si una función es continua en el intervalo cerrado [a,b], entonces está acotada en [a,b].

Como consecuencia de este resultado se tiene que:

Si una función f(x) está definida y es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces f(X) alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo [a, b].

Es decir, que hay al menos dos puntos x_1, x_2 pertenecientes a [a, b] donde f alcanza valores extremos absolutos:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \qquad Si\ \ x \in [a,b]$$