

Juan Grompone

# Curso de Electromagnetismo



La flor del Itapebí  
2013

## La danza de Shiva

Libro I: El nacimiento de las sociedades de clases

Libro II: Las sociedades feudales

Libro III: Las sociedades esclavistas

Libro IV: La sociedad capitalista

Libro V: La construcción del futuro

Libro VI: El materialismo histórico

Agradezco los comentarios, sugerencias y correcciones que hicieron los primeros lectores de este libro. Rafael Grompone fue mi asesor permanente en  $\text{\LaTeX}$ . Sin todos ellos este libro no podría ser el que hoy se publica

Primera edición electrónica: Abril de 2013

© Todos los derechos reservados, Juan Grompone, 2013.

e-mail: [jgrompone@ieee.org](mailto:jgrompone@ieee.org)

Web: [www.grompone.org](http://www.grompone.org)

© Editorial La Flor del Itapebí, Olmer S.A., 2013.

26 de marzo 1185, ap. 201, Montevideo, Uruguay.

tel: +598 2709 1620

e-mail: [itapebi@itapebi.com.uy](mailto:itapebi@itapebi.com.uy)

Web: [www.itapebi.com.uy](http://www.itapebi.com.uy)

Armado en  $\text{\LaTeX}$ .

# Contenido

Prólogo	7
Acerca de este libro . . . . .	7
Prólogo de la primera edición . . . . .	7
<b>Capítulo preliminar: Mecánica</b>	<b>11</b>
Fuerza . . . . .	11
Campos de fuerzas . . . . .	12
Cinemática del punto . . . . .	14
Movimiento del punto en caída libre . . . . .	21
Movimiento de un punto sometido a fuerzas . . . . .	25
Movimiento de un sistema de puntos . . . . .	29
Primera ley de movimiento de los sistemas materiales . . . . .	36
Segunda ley de movimiento de los sistemas materiales . . . . .	41
Trabajo . . . . .	46
Energía . . . . .	50
Movimiento relativo . . . . .	51
<b>Campo electrostático en el vacío</b>	<b>55</b>
Naturaleza eléctrica de la materia . . . . .	55
Campo eléctrico . . . . .	56
Potencial del campo de una carga puntual . . . . .	58
Flujo del campo de una carga puntual . . . . .	61
Sistemas de cargas . . . . .	63
Campo de sistemas de cargas . . . . .	65
Realización física de los sistemas de cargas . . . . .	73
<b>Campo electrostático en presencia de materia</b>	<b>75</b>
Conductores en el vacío . . . . .	75
Capacidad entre conductores . . . . .	78
Energía de los conductores . . . . .	83
Dieléctricos . . . . .	87
Campo eléctrico en un dieléctrico . . . . .	89

Cálculo de fuerzas de origen eléctrico . . . . .	92
<b>Corriente eléctrica</b>	<b>95</b>
Densidad de corriente . . . . .	95
Ley de Ohm . . . . .	97
Campo eléctrico de una corriente indefinida . . . . .	102
Generadores de corriente eléctrica . . . . .	103
Leyes de Kirchoff . . . . .	105
Conducción eléctrica en los metales . . . . .	110
Semiconductores y aislantes . . . . .	116
Conducción electrolítica: pilas y acumuladores . . . . .	118
Conducción en gases . . . . .	124
Emisión y conducción en el vacío . . . . .	126
<b>Campo magnetostático en el vacío</b>	<b>131</b>
Definición del campo . . . . .	131
Leyes del campo magnético . . . . .	134
Trabajo realizado por una espira en un campo magnético . . . . .	140
Self y mutua . . . . .	142
<b>Campo magnetostático en presencia de materia</b>	<b>145</b>
Polarización magnética . . . . .	145
Propiedades magnéticas de la materia . . . . .	146
Circuitos magnéticos . . . . .	152
<b>Ley de Faraday</b>	<b>161</b>
Campos en sistemas en movimiento . . . . .	161
Primer enunciado de la ley de Faraday . . . . .	165
Instrumento de cuadro móvil . . . . .	172
Energía del campo magnético . . . . .	174
Fuerzas de origen magnético . . . . .	178
Segundo enunciado de la ley de Faraday . . . . .	180
<b>Elementos de circuitos</b>	<b>185</b>
Hipótesis de la teoría de circuitos . . . . .	185
Ejemplos de circuitos en régimen transitorio . . . . .	190
Régimen alterno o sinusoidal . . . . .	198
Teoría de los vectores . . . . .	203
Empleo del cálculo simbólico (complejo) . . . . .	208

<b>Campo electromagnético</b>	<b>217</b>
Corrientes de desplazamiento . . . . .	217
Leyes del campo electromagnético . . . . .	220
Campo electromagnético cilíndrico . . . . .	223
Ecuación de Poynting . . . . .	227
Onda libre . . . . .	229
Leyes de la refracción . . . . .	233
Fibras ópticas . . . . .	238
Dependencia del índice de refracción con la frecuencia . . . . .	238
Nociones sobre las acciones retardadas . . . . .	239
Formulación puntual de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	240
<b>Campo electromagnético en presencia de conductores</b>	<b>243</b>
Onda en un conductor . . . . .	243
Presión de radiación . . . . .	246
Cavidades resonantes . . . . .	247
Conductor coaxial . . . . .	251
Guías de onda . . . . .	258
Emisión y absorción de ondas . . . . .	261
<b>Elementos de relatividad</b>	<b>265</b>
Sistemas en movimiento . . . . .	265
Transformación de coordenadas entre sistemas galileanos . . . . .	267
Cinemática relativista . . . . .	273
Ecuaciones de transformación de los campos . . . . .	276
Mecánica relativista . . . . .	282
Dinámica relativista . . . . .	287
<b>Apéndices</b>	<b>289</b>
Temas de ampliación . . . . .	289



# Prólogo

## Acerca de este libro

Esta obra obtuvo el Premio «Labor 50 años» en la especialidad Electricidad o Electrónica Constituyeron el Jurado los señores:

Francisco Planell Riera Doctor Ingeniero Industrial Director Honorario de la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Barcelona De la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

Enrique Ras Oliva Doctor Ingeniero Industrial Catedrático de la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Barcelona De la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

José García Santesmases Catedrático de la Universidad de Madrid Director del Instituto de Electricidad y Automática del C. S. I. C. Miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Carmelo Chueca Goitia Ingeniero Industrial Catedrático de la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Bilbao

Valentín M. Parra Prieto Catedrático de Electrotecnia de la E. T. S. de Ingenieros Industriales de Madrid

## Prólogo de la primera edición

Un prólogo es una declaración de principios donde un autor confiesa las aspiraciones que tuvo para su libro y define cuál es su lector ideal.

Dentro de la literatura científica hay indudablemente obras maestras, verdaderas aventuras del pensamiento donde el lector se siente empujado por un autor deslumbrante que le guía por caminos jamás sospechados. Este prólogo ha sido concebido tomando como base dos de estas obras maestras: La primera, obra cumbre de Ernst Mach, es la meta de mis aspiraciones en este campo; el espíritu de este libro es antimetafísico en el más amplio de los sentidos. Hoy vemos avanzar a pasos agigantados un nuevo fantasma en la ciencia pura, el fantasma de la teoría. Ayer, hace unos siglos, era el fantasma metafísico quien ocultaba el sentido crítico de la ciencia oficial; hoy, el éxito enorme alcanzado por los estudios teóricos de Albert Einstein hace que se estudie a fondo la creación de teorías y que se dedique un esfuerzo mínimo a su crítica. Vemos, por ejemplo, el pequeño caos de la Mecánica cuántica, tan lejos de una teoría satisfactoria, tan vacío de contenido filosófico, tan poco humano. Algo similar ocurre con la teoría del átomo, donde varias decenas de partículas elementales y algunos campos

hipotéticos se disputan las excelencias de una teoría.

Es evidente que procediendo de este modo se obtienen resultados prácticos y que la ciencia al fin y al cabo no es más que eso, resultados. Pero éstos deben estar ordenados, deben poseer un espíritu, y deben reflejar los infinitos rincones del pensamiento. Nuevamente la imagen de Poincaré es acertada: no hay que apilar ladrillos, es necesario construir edificios.

Contra esta tendencia el pensamiento lúcido de Mach se levantó para construir un libro antimetafísico. Es con el mismo espíritu que he intentado hacer este libro. Se exponen argumentos falsos y se revisan continuamente los hechos experimentales aportados, tratando de separar las ideas distintas e independientes. En una palabra, se prepara al lector para que el día de mañana, cuando sea necesario aprender otra teoría diferente porque la actual ya no sirva, no se sorprenda demasiado y aprenda que la propia Ciencia es un cambio continuo, es una revisión permanente de las ideas y es un ajuste ininterrumpido con la experiencia. Naturalmente que el día en que la teoría del electromagnetismo de Maxwell y Einstein falle, ello no estará previsto en este libro, pero sí lo estará la posibilidad de fallar.

La segunda obra maestra a que hace mención este prólogo es uno de los trabajos de divulgación realizado por Einstein en colaboración con Léopold Infeld: *L'évolution des idées en Physique*. Obra maestra, porque muestra el espíritu joven de Einstein, el espíritu del hombre genial de 1905 que fue capaz de explicar satisfactoriamente el fracaso de los experimentos científicos que intentaban poner de manifiesto el movimiento absoluto de la tierra (respecto al éter) y concibió su famosa teoría de la relatividad. Esta obra nos muestra con una claridad perfecta que es posible hacer Ciencia sin Matemáticas, nos indica los extremos alcanzados por el pensamiento matemático, que, nacido de las nociones físicas, ha terminado por ocultar bajo la forma de una herramienta cómoda, una noción física que fue lograda con siglos de pensamiento y de esfuerzo humano. Tal es el caso del cálculo integral y de la teoría de vectores.

Precisemos las bases sobre las cuales está escrito este libro. El lector al cual está dirigido debe poseer una virtud esencial, debe tener interés. Este libro es parco en palabras, porque cuando se intenta convertir las ideas en frases interminables no se hace sino disolverlas y complicar la lectura haciendo difícil la comprensión. Más de una vez, el lector se verá obligado a volver atrás y repasar conceptos, pero esto no debe desanimarlo, porque muchas veces ésta es la intención con que se ha redactado el texto.

El lector ideal a quien está dirigido este libro debe manejar con soltura el análisis de las funciones de una variable y el cálculo vectorial. Esta exigencia es imperiosa y no puede pretenderse hacer un estudio razonablemente sólido en física prescindiendo de estas dos nociones básicas, que, por otro lado, nacieron a impulsos de la Física y fueron creadas por físicos. Posiblemente de aquí provenga su asombrosa fecundidad.

El texto ha sido redactado sin miras especiales, aspirando solamente a que el lector



adquiera conocimientos al nivel de un bachillerato científico. Desde el punto de vista físico, sólo necesita nociones elementales, también a la altura de un bachillerato. Se ha tenido la precaución de incluir un capítulo preliminar en el que se desarrollan, en forma breve, las nociones básicas de la Mecánica, porque así como la Física no se concibe sin el cálculo integral ni la teoría de vectores, menos se estudia sin la Mecánica.

El capítulo de introducción puede parecer quizás un poco trivial e insistente pero ello es consecuencia del punto de vista adoptado. Con toda seguridad, las ideas que en la primera lectura sean abandonadas, volverán con toda su fuerza una vez leído el capítulo final sobre relatividad. Más aún, es de lamentar que no sea posible incluir un capítulo sobre esa cenicienta de la Física que es la Geometría, lo cual sería obligado en un estudio de la relatividad generalizada.

Los capítulos I y II sirven para edificar la noción de campo electrostático a partir de las ecuaciones integrales. Se ha restringido el estudio a aquellos ejemplos que pueden tratarse en forma elemental, pero, que al mismo tiempo, poseen un interés básico para la comprensión del resto del libro o para las aplicaciones científicas o técnicas.

El capítulo III, uno de los más extensos, está dedicado al estudio de la conducción eléctrica. En él se incluyen nociones elementales, de divulgación, podría decirse, sobre la estructura de la materia. Esto es así, no tanto porque la mecánica estadística se salga fuera de los límites de este libro, sino por la presunta carencia de nociones de termodinámica de nuestro lector ideal.

Los capítulos IV y V tratan del campo magnético. Y he aquí la mancha negra del libro: debo confesar no haber encontrado una manera satisfactoria de exponer las leyes del campo magnético a partir de los hechos experimentales, sin torcer abiertamente el significado físico de los fenómenos; tal es el caso del campo creado por un elemento de corriente, imagen ideal que no constituye el límite de ningún elemento real y que por lo tanto queda fuera de toda posible experiencia crítica. Si bien es posible edificar una teoría del campo a partir de una nueva noción ideal, la espira cerrada ? ésta sí, límite de una espira real ? y llegar a las leyes del campo en forma correcta sin más evidencia experimental que los trabajos de Ampère, hay que realizar un considerable esfuerzo matemático que nuestro lector ideal no podría superar.

El capítulo VI, posiblemente el más difícil de todos, estudia la ley de Faraday y el problema de los sistemas en movimiento.

El capítulo VII está dedicado a la teoría de circuitos en régimen variable. Se expone con la intención de introducir al lector en los métodos de trabajo basados en la transformada de Laplace para los circuitos en régimen transitorio y los métodos empleados en los circuitos en corriente alterna. Nada, o casi nada, se indica sobre la topología de los circuitos. Lamentablemente, es un defecto que se encuentra con demasiada frecuencia el intentar «demostrar» teoremas de circuitos con unos argumentos interminables que en esencia constituyen solamente el más perfecto círculo

vicioso.

En el capítulo VIII se estudian los fenómenos electromagnéticos dinámicos y se introducen las corrientes de desplazamiento. Es posible que este capítulo sorprenda algo al lector ideal, pues introduce subrepticamente las funciones de más de una variable, si bien ello se ha procurado subsanar añadiendo el apéndice B. Este capítulo contiene un resumen de la teoría de la luz y de las leyes de refracción.

El capítulo IX está dedicado a estudiar algunos de los problemas de mayor importancia técnica, al mismo tiempo que demuestra la incapacidad de la teoría de circuitos para explicar los fenómenos dinámicos.

El libro finaliza con un capítulo destinado a la relatividad. Ninguna oportunidad mejor puede presentarse para exponer la nueva mecánica que un texto de electromagnetismo, puesto que aquélla es una consecuencia del mismo. Las exposiciones de la relatividad que siguen a continuación de la Mecánica clásica tienen dos graves defectos: el primero, es no poder justificar adecuadamente la constancia de la velocidad de la luz como consecuencia necesaria del principio de relatividad, con lo cual siempre queda un vacío imposible de llenar; el segundo, que el orden de estas exposiciones constituye una flagrante violación del orden histórico y conceptual.

Hay que hacer resaltar, que el texto ha sido concebido, teniendo presente dos niveles constantes de estudio. El *superficial*, en el cual se sitúa a nuestro lector ideal, al cual se ha dedicado un conjunto de obras que figuran al final de cada capítulo bajo el título de *Lecturas recomendadas*, que le permiten poseer una visión histórica del desarrollo del electromagnetismo. El *oculto*, dirigido a un segundo lector, cómplice, capaz de entender lo sobreentendido, al cual se ha dirigido la *Bibliografía*. Este segundo lector puede ser el profesor que ha adoptado este libro como texto y que se coloca en un plano superior a nuestro lector ideal.

Este libro pretende, en fin, servir de puente entre los estudios realizados en el bachillerato y los estudios a nivel universitario. Se encuentra, pues, en una situación especial, precisamente por estar entre dos niveles, pero espero que pueda ser de utilidad al técnico industrial que busca elevar sus conocimientos en el electromagnetismo, al estudiante universitario que busca por mera curiosidad científica una introducción a la materia y al profesor, a quien puede proporcionar algunas ideas que tal vez no le sean familiares.

# Capítulo preliminar: Mecánica

## Fuerza

Para poder definir una idea física, es necesario, ante todo, precisar su método de observación. Existe una idea vulgar de fuerza: hacemos fuerza cuando tiramos o empujamos algo, cuando levantamos un peso, cuando doblamos un alambre. Para expresar estas ideas de modo objetivo se recurre a un instrumento de observación: el dinamómetro. El dinamómetro, Figura 1, no es más que un resorte, de forma variada y de material conveniente, dotado de un indicador sobre una escala graduada que señala su longitud en cada experiencia a que es sometido. El cero de la escala corresponde al punto de equilibrio del extremo **B** del resorte, cuando éste queda libre. La graduación de las restantes divisiones, se hace siguiendo un procedimiento que veremos más adelante. La medida estática de una fuerza se efectúa colocando el extremo **A** del dinamómetro aplicado al cuerpo que realiza la fuerza, y el extremo **B** al cuerpo que la recibe. El valor del alargamiento o contracción del resorte leído en la regla graduada dará la medida de la fuerza. La unidad de medida de fuerzas se llama *newton*.

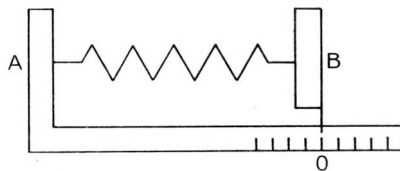


Figura 1: Esquema de un dinamómetro.

Cabe hacer dos observaciones: el extremo **B**, puede desplazarse hacia **A** o alejarse de **A**, según que se *empuje* o se *tire* del mismo.

Para utilizar correctamente el instrumento es necesario hacerle adoptar una cierta dirección; por ejemplo, la medición de la fuerza que se realiza con una cuerda, se efectúa colocando el dinamómetro en la dirección de la cuerda.

Tenemos pues cuatro elementos diferentes en la medición de una fuerza:

1. La unidad: en nuestro caso, el *newton*.
2. La medida: el número que nos mide la longitud del resorte.
3. El sentido: ya sea tirar o empujar.

4. La dirección: la adoptada por el instrumento.

Naturalmente, nos interesa condensar estos elementos en una fórmula matemática que permita expresar cómodamente todos los hechos experimentales enunciados. Sabemos ya que la unidad está representada por el *newton* y que la medida es un número, y nos falta sólo expresar la dirección y el sentido. En cuanto a la primera, no se presenta dificultad alguna: será la dirección de la recta **AB**. Sin embargo, la definición del sentido es algo delicada. Supongamos que el cuerpo **1** actúa sobre el cuerpo **2**, con una cierta fuerza, y que de acuerdo con nuestro procedimiento de medida, colocamos **A** contra **1** y **B** contra **2**. Diremos que la fuerza que el cuerpo **1** aplica sobre el cuerpo **2** está dirigida desde **1** hacia **2** si **AB** se acorta, y desde **2** hacia **1**, si **AB** se alarga. Esta definición es convencional y podríamos perfectamente haber hecho la convención contraria. Hasta ahora la definición del sentido no plantea mayores dificultades; la dificultad surge cuando intentamos saber cuál es el cuerpo que aplica la fuerza y cuál el que la recibe. Como es natural, si invertimos la posición del dinamómetro, permanecen invariables la la dirección y la intensidad de la fuerza, y el acortamiento o alargamiento del resorte no varían; no obstante, nuestras convenciones nos indican que si el cuerpo **2** aplicara una fuerza sobre el **1**, ésta sería igual y contraria a la que aplica el cuerpo **1** sobre el **2**. Por otro lado, nuestra definición de fuerza nos indica que igual podemos decir que el cuerpo **1** aplica una fuerza sobre el **2**, como lo contrario. Cabe entonces preguntarse, si es posible distinguir cuál de los dos cuerpos aplica la fuerza y cuál la recibe, analizando otros fenómenos.

La respuesta es negativa: no es posible tal distinción. Veamos algunos ejemplos. Al empujarse dos personas situadas en dos botes diferentes, se mueven ambas hacia atrás. Cuando una escopeta dispara una bala, el cazador recibe un culetazo hacia atrás. Si se empuja con un dedo un cuerpo, el dedo se aplasta y se siente la presión ejercida.

Lo anteriormente expuesto encierra un resultado muy importante, una ley fundamental de la mecánica:

*Ley de acción y reacción.* La fuerza que aplica el cuerpo **1** al **2** es igual y de sentido contrario a la fuerza que aplica el cuerpo **2** sobre el **1**.

Veamos ahora cuál es la representación matemática de todos los fenómenos estudiados. La fuerza viene representada por un vector cuyo módulo es la magnitud de la fuerza y su dirección y sentido, los asignados a la misma. En general será necesario especificar además el punto de aplicación.

## Campos de fuerzas

La tendencia de los cuerpos a caer nos conduce a una situación interesante. Si unimos nuestro dinamómetro a la Tierra y suspendemos un cuerpo en B, el resorte se defor-

mará hasta adquirir una posición de equilibrio. La fuerza que indica el instrumento se denomina peso del cuerpo. Usualmente se habla de peso de un cuerpo sin tomar ninguna otra referencia, y ello es posible porque cambiando el lugar en que medimos el peso, la lectura varía muy poco. Sin embargo, a grandes alturas o en otras regiones de la Tierra, nuestra lectura puede ser bastante diferente y la dirección de la fuerza puede haber cambiado radicalmente (piénsese que la Tierra es redonda y que el peso se dirige siempre hacia su centro).

Estamos pues frente a los siguientes hechos experimentales:

1. Suspendido un cuerpo del dinamómetro, éste señala un cierto valor.
2. La indicación cambia en cada punto de la Tierra, en magnitud, dirección y sentido.
3. El instrumento de medida está unido siempre a la Tierra.

Este último es un hecho importante. Se dice habitualmente que la Tierra atrae el cuerpo, y, precisamente, al fijar el dinamómetro a la Tierra, lo estamos interponiendo entre los cuerpos que realizan la fuerza. Por otra parte, si fijamos el dinamómetro a otro cuerpo que no sea la Tierra, las lecturas pueden cambiar radicalmente: En una nave en órbita, el instrumento no señalará fuerza alguna; en un ascensor, la indicación variará en los momentos de arranque y parada; en un tiovivo que gira, el « peso » tendrá una dirección distinta de la vertical y una intensidad algo mayor que la normal.

Vemos pues que las cosas pasan como si los cuerpos materiales estuvieran sometidos a fuerzas que dependieran de su posición en el espacio. Estos estados se denominan campos de fuerzas.

Los tres elementos que caracterizan el campo de fuerzas serán entonces:

1. El cuerpo de prueba unido a nuestro dinamómetro.
2. La lectura del instrumento en cada punto del espacio.
3. El cuerpo rígido, al cual está unido el dinamómetro.

Cabe ahora estudiar cuál será la representación matemática de un campo de fuerzas. Las fuerzas no ofrecen dificultad; serán vectores. El cuerpo rígido de referencia para las diferentes posiciones del dinamómetro se representará por un sistema de ejes coordenados. Por consiguiente, el campo estará representado por un sistema de ejes coordenados y un vector que definirá en cada punto la medida del instrumento si éste se coloca en la posición del vector.

## Cinemática del punto

Pasemos ahora a estudiar el movimiento de los cuerpos. Procediendo como anteriormente, intentemos reducir los fenómenos a casos precisos y sencillos. Si queremos definir la posición de un cuerpo, necesitamos conocer una serie de datos, de medidas y de ángulos, que nos permiten situar el cuerpo perfectamente. Piénsese, además, que un plano refleja sencillamente las proyecciones de la posición de cada una de las partes de un cuerpo complejo. Sin embargo, hay un caso particularmente simple: para representar un cuerpo de reducidas dimensiones frente a las distancias que nos interesa considerar, nos basta con indicar tres distancias a otros cuerpos de referencia. Este cuerpo *de reducidas dimensiones* constituye el elemento primario de nuestro estudio y lo llamaremos, *cuerpo puntual*; o también, *punto material*.

Matemáticamente, representaremos la posición de un cuerpo puntual, *respecto a otros cuerpos*, por un punto geométrico en un sistema de coordenadas. Hay que hacer resaltar que no es posible hablar de posición de un punto si no es con referencia a *otros* cuerpos. Piénsese, por ejemplo, que carece de significado hablar de la posición de la Luna, sin tomar como referencia la Tierra; o de la posición del Sol, sin referirla a las estrellas, etc.

El movimiento de un cuerpo, no es sino el cambio de su posición respecto a otros para los diferentes valores del tiempo. Aquí hemos introducido una nueva noción física: el tiempo, y debemos precisar de nuevo el mecanismo de la observación, para tener una idea física objetiva. El instrumento de medida del tiempo es bien conocido: el reloj, y la unidad de medida es el segundo. Pero cabe preguntarse qué es exactamente el segundo, es decir, la forma en que calibramos nuestros relojes y cómo sabemos si funcionan *bien*. Disponemos de tres maneras diferentes para calibrarlos:

1. Por comparación con el movimiento de los astros.
2. Por comparación con fenómenos atómicos de oscilación.
3. Por comparación con la velocidad de la luz.

En otras palabras, disponemos de tres “relojes” naturales, cuya concordancia (hasta los límites conocidos por el hombre) es perfecta. Antes se empleaba el primer método, pero ha sido sustituido actualmente por el segundo debido a las excelentes ventajas experimentales que presenta, y parece probable que en el futuro se emplee el tercer método de calibración. El segundo método, establecido en el año 1965, define un intervalo de tiempo indicado por un reloj patrón de resonancia atómica, construido mediante ciertas técnicas complejas que no detallaremos.

Busquemos ahora el modelo matemático del movimiento de un punto. Como es natural, si la posición quedaba determinada con respecto a un sistema de coordenadas

de referencia, el movimiento del punto quedará definido por el cambio de coordenadas en función del tiempo; es decir, que la ley del movimiento será una terna de funciones de  $t$ , variable tiempo, que representarán la evolución de cada una de las coordenadas del punto.

Introduzcamos ahora la noción de *velocidad*. Un punto que se desplaza en línea recta y recorre espacios iguales en tiempos iguales posee una notable propiedad de regularidad. Para dar un significado físico a la idea de regularidad y a la rapidez de este movimiento, parece razonable decir que la rapidez viene medida por la longitud en metros que recorre el cuerpo en un segundo. Pero, en general, existen movimientos que no poseen esta regularidad (el lector puede imaginarlos fácilmente) y será necesario precisar nuevamente qué entendemos en estos casos por rapidez o *velocidad*, tal como se denomina físicamente. El camino es tomar un intervalo de tiempo pequeño, dentro del cual sea poco notable la falta de regularidad y aplicar seguidamente la definición de movimiento regular o uniforme.

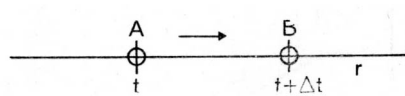


Figura 2: La velocidad instantánea.

Si en el movimiento del cuerpo que recorre la recta  $r$ , Figura 2, consideramos dos instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  en que el cuerpo pasa de la posición **A** a la **B**, la llamada velocidad instantánea en el momento  $t$  será:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$$

Matemáticamente, si  $x = f(t)$  es la ecuación que define la posición del punto en función del tiempo, tendremos:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t) = \dot{x}$$

La derivación respecto al tiempo aparece con tal frecuencia, que se reserva un símbolo especial para indicarla:  $\dot{f}(t)$  o  $\dot{x}$  en lugar de  $f'(t)$  o  $x'$  como es usual en matemáticas.

Falta determinar las unidades y los instrumentos de medida de la velocidad. Tal como ha sido definida, la velocidad es el cociente entre una distancia y un tiempo, y por lo tanto, su unidad será naturalmente el *m/seg*.

Aplicando la definición de velocidad, se puede determinar ésta con la ayuda de una regla que mida longitudes y un reloj para medir los tiempos, o bien, utilizando *tacómetros* o *velocímetros* que indiquen directamente su valor.

Estudiaremos ahora el movimiento de un punto en una curva. En primer lugar, consideraremos una curva plana, y más adelante, indicaremos cómo se generaliza este caso en el espacio. La noción de *velocidad* puede definirse de tres formas distintas:

*Primera definición.* Análogamente al movimiento rectilíneo, tomamos la longitud del arco  $S$  o de la cuerda  $AB$  en la Figura 3, y lo dividimos por el tiempo  $\Delta t$  empleado en recorrerlo.

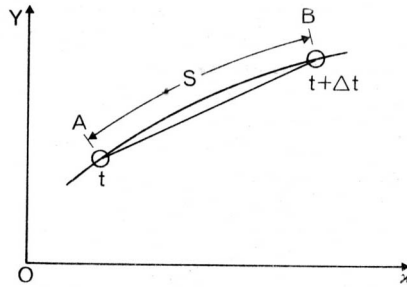


Figura 3: La velocidad en un movimiento curvilíneo.

Se define la velocidad como:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AB}}{\Delta t}$$

que es la llamada velocidad lineal o instantánea del punto. El velocímetro de un automóvil indica esta velocidad. Matemáticamente, si  $x = f(t)$  e  $y = g(t)$ , resulta:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{[f(t + \Delta t) - f(t)]^2 + [g(t + \Delta t) - g(t)]^2}}{\Delta t}$$

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sqrt{\left[ \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \right]^2 + \left[ \frac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t} \right]^2}$$

$$v = \sqrt{\dot{f}(t)^2 + \dot{g}(t)^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

Si el movimiento ocurre en el espacio, se deduce inmediatamente

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

*Segunda definición.* Tomemos ahora el vector  $\overrightarrow{AB}$  de la Figura 3 y hallemos el límite de la relación

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t}$$



Este límite, que nos da la velocidad instantánea, es un vector cuya dirección es tangente a la curva y de sentido el del movimiento. Matemáticamente, este vector tiene por componentes sobre el eje  $x$ :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \dot{f}(t) = \dot{x}$$

De modo análogo, las otras dos componentes del vector son  $\dot{f}(t) = \dot{y}$  y  $\dot{h}(t) = \dot{z}$ . Se define entonces el *vector velocidad*  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  cuyo módulo vale:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v$$

$\vec{v}$  representa el sentido del movimiento, la dirección de la tangente a la trayectoria y el módulo de la velocidad lineal o instantánea.

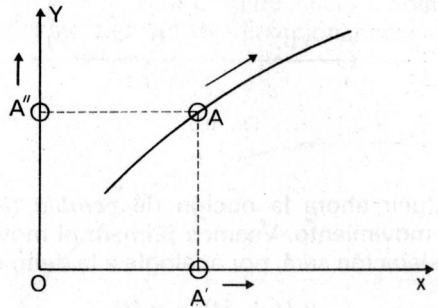


Figura 4: La composición de la velocidad.

*Tercera definición.* Al moverse el punto  $A$  sobre la curva, se genera el movimiento de dos puntos  $A'$  y  $A''$ , proyecciones de  $A$  según los ejes, ver Figura 4. Tanto  $A'$  como  $A''$  tienen un movimiento rectilíneo y podemos calcular sus velocidades. Si las coordenadas de  $A$  son  $f(t)$  y  $g(t)$ , resulta:

$$\overline{OA'} = f(t) \quad \overline{OA''} = g(t)$$

$$v_{A'} = \dot{f}(t) = \dot{x} \quad v_{A''} = \dot{g}(t) = \dot{y}$$

De estas ecuaciones deducimos que el movimiento de  $A$  es la composición de los movimientos de  $A'$  y  $A''$ , o también, que el movimiento de  $A$  se ha descompuesto en los dos de  $A'$  y  $A''$ . *En cada uno de los movimientos, tenemos una velocidad  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  respectivamente.*

Es evidente que las *componentes* del vector velocidad coinciden con las velocidades de cada movimiento descompuesto. Esta manera de tratar el movimiento, por descomposición en otros sencillos, será de mucha utilidad en lo sucesivo.

Puede parecer, a primera vista, que las definiciones segunda y tercera son idénticas; sin embargo, es ésta una idea profundamente equivocada. La noción *matemática* de vector oculta una diferencia *física* esencial entre las dos definiciones: es una *definición matemática* que la suma de vectores se haga tomando la diagonal del paralelogramo formado por los vectores sumandos; en cambio, es un *hecho experimental* el que esto pueda hacerse con las velocidades. Realmente, la definición matemática ha sido ideada con destino a la aplicación física, y sólo establecido *posteriormente* después de conocida la ley física. Debe señalarse, que la teoría de la relatividad indica que los vectores velocidad no se suman con la regla del paralelogramo.

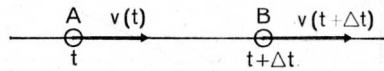


Figura 5: El cambio de la velocidad.

Interesa introducir ahora la noción de *cambio de velocidad* o de *aceleración* de un movimiento. Veamos primero el movimiento rectilíneo de la Figura 5. La aceleración será, por analogía a la definición de velocidad,

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$$

que, expresada en función de la derivada segunda de  $x$  respecto al tiempo, queda:

$$a = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$

La unidad de medida para la aceleración es: (m/seg)/seg= m/seg<sup>2</sup>. Los instrumentos de medida son los llamados *acelerómetros*, que permiten medir directamente los valores de la aceleración.

Para ampliar la noción de aceleración a un movimiento curvilíneo podemos proceder de igual modo que hicimos para la velocidad.

*Primera definición.* Tomar simplemente el cambio de velocidad lineal:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

*Segunda definición.* Considerar el cambio de velocidad vectorial. La aceleración estará representada por un vector cuya componente, según  $x$ , es:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t)$$

Luego, se puede definir el vector aceleración:  $\vec{a} = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ . Es interesante observar que aun suponiendo que el módulo de  $\vec{v}$  permanezca constante al variar el tiempo,

existirá  $d\vec{v}$  siempre que  $\vec{v}$  cambie de dirección. Por consiguiente, la primera definición de aceleración no da realmente el módulo del vector aceleración. La dirección de  $\vec{a}$  tampoco es la dirección de la tangente a la curva, como se ve inmediatamente analizando la Figura 6. El vector  $\vec{v}' - \vec{v}$  está dirigido hacia “adentro” de la curva, puesto que la velocidad cambia de dirección hacia ese “lado”.

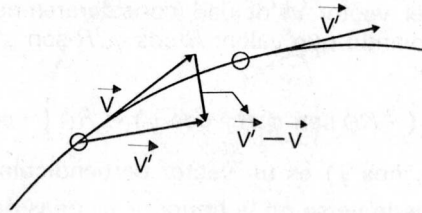


Figura 6: El cambio del vector velocidad.

*Tercera definición.* La descomposición del movimiento de un punto **A** en los movimientos de **A'** y **A''**, ver Figura 4, nos permite definir dos aceleraciones componentes. De modo análogo al indicado en la tercera definición de la velocidad tenemos como expresiones de las aceleraciones de **A'** y **A''**:

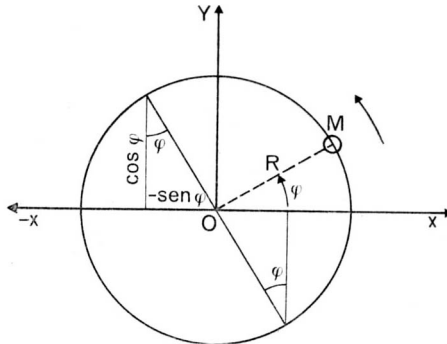


Figura 7: Análisis del movimiento circular.

*Ejemplo.* Consideremos un punto **M**, ver Figura 7, que describe una circunferencia (ya sea porque se desliza por una guía, o bien por estar sujeto a un hilo **OM** que le impide otro movimiento). Calcularemos su velocidad y su aceleración.

Lo primero que especificaremos será la ecuación del movimiento. Como el ángulo  $\varphi$  determina perfectamente la posición del punto, el movimiento quedará definido por una función  $\varphi(t)$  que nos dé el ángulo  $\varphi$  en función del instante  $t$  considerado.

Para calcular el vector velocidad consideraremos las coordenadas del punto **M**, observando que valen:  $x = R \cos \varphi$  e  $y = R \sin \varphi$  y derivando respecto al tiempo:

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) = (-R\dot{\varphi} \sin \varphi, R\dot{\varphi} \cos \varphi) = R\dot{\varphi} (-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

Pero  $(-\text{sen } \varphi, \text{cos } \varphi)$  es un vector perpendicular a  $\mathbf{OM}$  y de módulo 1 tal como puede verse en la figura.  $\vec{v}$  es pues perpendicular a  $\mathbf{OM}$  y por lo tanto tangente a la circunferencia (como ya sabíamos) y de módulo  $R\dot{\varphi}$ . La función del tiempo  $\dot{\varphi}(t)$  recibe el nombre de velocidad angular del movimiento y se la representa con la letra  $\omega$ ;  $\omega = \dot{\varphi}(t)$ .  $\omega$  se mide en *ángulos/segundo* o sea en *radianes/segundo*. En los cálculos técnicos se suele emplear como unidad las R.P.M. (revoluciones por minuto), cuya equivalencia con las anteriores es:

$$2\pi \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}} = 1 \frac{\text{revoluciones}}{\text{segundo}} = 60 \text{ R.P.M.}$$

o sea

$$1 \frac{\text{radianes}}{\text{segundo}} = \frac{60}{2\pi} \text{ R.P.M.}$$

El cálculo del vector aceleración puede efectuarse derivando una vez más las componentes del vector velocidad respecto al tiempo:

$$\vec{a} = (-R\dot{\varphi}^2 \text{cos } \varphi - R\ddot{\varphi} \text{sen } \varphi, -R\dot{\varphi}^2 + R\ddot{\varphi} \text{cos } \varphi)$$

$$\vec{a} = -R\omega^2 (\text{cos } \varphi, \text{sen } \varphi) + R\dot{\omega} (-\text{sen } \varphi, \text{cos } \varphi)$$

es decir, que  $\vec{a}$  es la suma de dos vectores: un vector  $-R\omega^2 (\text{cos } \varphi, \text{sen } \varphi)$  opuesto a  $\overrightarrow{OM}$ , de módulo  $R\omega^2$ , llamado *aceleración radial*  $a_R$  o *normal*  $a_N$  o *centrípeta* y un vector  $R\dot{\omega} (-\text{sen } \varphi, \text{cos } \varphi)$  perpendicular a  $\overrightarrow{OM}$ , de módulo  $R\dot{\omega}$ , llamado *aceleración tangencial*,  $a_T$ .

Vemos pues que el vector aceleración tiene una componente según la tangente a la circunferencia y otra según la normal principal a la circunferencia. La aceleración tangencial es la causa del cambio de la velocidad lineal y la aceleración normal origina la variación de dirección de la velocidad en los diversos puntos de la circunferencia. En resumen tendremos, ver Figura 8:

$$v = R\omega = R\dot{\varphi}$$

$$a_N = R\omega^2 = \frac{v^2}{R} = R\dot{\varphi}^2$$

$$a_T = R\dot{\omega} = \dot{v} = R\ddot{\varphi}$$

En particular, se denomina movimiento circular uniforme al movimiento de un punto sobre una circunferencia, tal que *los arcos recorridos en tiempos iguales son iguales*; es decir, que  $\dot{\varphi} = \omega$  es constante. Si  $T$  es el tiempo que tarda en dar una vuelta

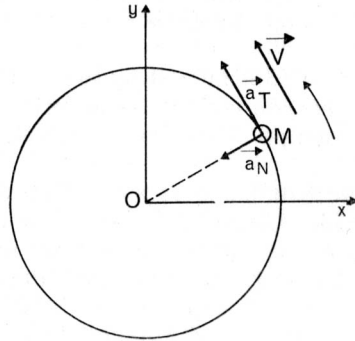


Figura 8: Velocidad y aceleración en el movimiento circular.

completa (período) y  $f$  es el número de vueltas en la unidad de tiempo (frecuencia) resulta:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad f = \frac{1}{T}$$

$$v = R\omega$$

$$a_N = R\omega^2 \quad a_T = 0$$

### Movimiento del punto en caída libre

Estudiaremos ahora la caída de los cuerpos siguiendo la marcha de investigación de Galileo. Será necesario considerar nuevamente un proceso de idealización y de simplificación del fenómeno. Es bien sabido que el aire puede modificar el movimiento de los cuerpos; piénsese, por ejemplo, en el viento arrastrando una hoja, en la caída “lenta” del paracaídas o en la ascensión de los globos de gas. Debemos experimentar en condiciones en las que el aire no complique el movimiento de los puntos. Estas condiciones se logran aproximadamente cuando no existen corrientes de aire, los cuerpos son muy densos y poseen una *forma* adecuada. Como es natural, también se puede trabajar haciendo el vacío.

El primer hecho que deducimos al observar el movimiento de caída de los cuerpos es que éste se verifica en un plano vertical y aceleradamente, puesto que un cuerpo abandonado sin velocidad, la adquiere en pocos instantes.

El primer caso que estudiaremos será el de un cuerpo deslizando sobre un plano inclinado. Lanzamos el cuerpo hacia abajo con lo cual aumenta su velocidad descendente y resulta un movimiento acelerado. Si ahora consideramos planos cada vez más horizontales disminuye la aceleración del movimiento, hasta que en la posición *horizontal* del plano, el cuerpo tiene un movimiento retardado y termina por detenerse. Téngase presente que *las causas* que hacen detener el cuerpo *pueden ser disminuidas* de modo que aquél se frene cada vez menos, puliendo más las superficies y utilizando

cuerpos más duros. Se comprende fácilmente, *por un proceso de idealización*, que el punto no se detendría si no lo frenara el rozamiento del aire y del plano. *Aceptaremos* en consecuencia:

*Ley de inercia.* Un cuerpo moviéndose en un plano horizontal, conserva la velocidad con la que es lanzado.

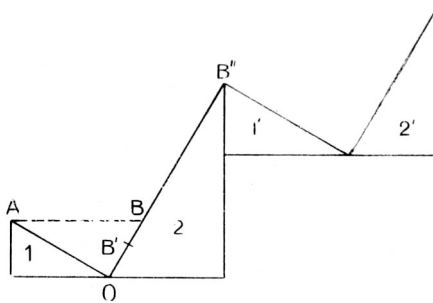


Figura 9: Caída de los cuerpos en planos inclinados.

Supongamos ahora que dejamos caer desde **A** un cuerpo sobre un plano inclinado **1**, ver Figura 9, y luego al llegar a **O**, la velocidad adquirida le hace subir por el plano **2**. Es claro, desde el punto de vista experimental, que el cuerpo se va frenando a medida que sube por el plano **2**, hasta que por último llega a detenerse en algún punto y entonces comienza su descenso. El cuerpo no puede subir hasta **B''** que está más alto que **A**, puesto que de ser así, colocando otro plano **1'** igual a **1**, y otro **2'** igual a **2**, y así sucesivamente, lograríamos hacerlo subir tanto como quisiéramos *por la acción de su propio peso*, lo cual está en contradicción con los hechos experimentales conocidos. Si el cuerpo llega al punto **B'**, más bajo que el **A**, es porque la acción de los rozamientos de los planos y del aire frena su movimiento. En efecto, si no lo frenaran estas acciones, *tanto en el ascenso como en el descenso*, podríamos invertir su movimiento y dejarlo caer desde **B'**, pero entonces, para subir por **1** hasta llegar a **A**, tendría que hacerlo por la acción de su propio peso. Análogas comprobaciones pueden hacerse con un péndulo; éste asciende hasta una altura igual a la que partió.

La primera consecuencia que podemos extraer de los razonamientos anteriores, es que la velocidad final de caída de un cuerpo que se desliza en un plano inclinado depende sólo de la altura de caída; si las velocidades finales fueran diferentes, sería posible repetir el argumento de los planos inclinados. Ninguna razón impide que el plano sea *vertical*, pero entonces, el cuerpo al caer verticalmente no desliza sobre el plano y, por tanto, éste no modifica en nada su movimiento. En conclusión, la velocidad de caída libre depende sólo de la altura de caída. Por otro lado, las diversas velocidades de descenso coinciden con las respectivas velocidades de ascenso, pues de otro modo

sería posible repetir el razonamiento expuesto sobre los planos inclinados; luego, para estudiar el movimiento ascendente de los cuerpos, basta estudiar su descenso desde el reposo.

Imaginemos ahora dos cuerpos iguales, uno encima de otro, que se sueltan a la vez. Es evidente que ambos caen con la misma velocidad y, por tanto, sin tocarse mutuamente, *siempre que prescindamos de la pequeña resistencia* con que el aire frena el movimiento del cuerpo que va delante. Esto muestra que los dos cuerpos caen con igual velocidad como si estuvieran unidos entre sí; luego, *a menos de considerar la influencia del aire, las velocidades de caída son independientes del peso de los cuerpos.*

Este resultado, extraordinariamente importante, merece algunas consideraciones adicionales. Si imaginamos la caída de una hoja de papel y de una bolita del mismo papel, vemos que caen en forma diferente, a pesar de que poseen el *mismo* peso. Así, pues, la causa de las diferentes velocidades observadas debe buscarse en la resistencia que opone el aire, la cual no depende del peso, sino de la forma del cuerpo. Puede verificarse que en el vacío todos los cuerpos caen del mismo modo. Por otro lado, la diferencia de las velocidades de caída de dos trozos de metal de peso diferentes y de forma similar, es despreciable, aun para grandes diferencias de peso.

Por último, para completar el estudio de la caída de los cuerpos, falta determinar la ley de variación de la velocidad. El problema puede estudiarse en un plano inclinado en el que disminuye la aceleración de la caída sin modificar sus leyes y el movimiento se hace observable. Resulta, entonces, que el espacio recorrido es proporcional al cuadrado del tiempo empleado en recorrerlo. Además, se ve inmediatamente que la aceleración es constante, y como es igual en todos los cuerpos podemos enunciar:

*Ley de caída de los cuerpos.* El movimiento de caída libre de los cuerpos es uniformemente acelerado; la aceleración es vertical, descendente y constante de valor aproximado 9,8 m/seg<sup>2</sup>.

La aceleración de caída libre, que se representa usualmente por  $g$ , varía un poco con los diferentes lugares de la Tierra y según la altura a que se mida, pero a efectos de un cálculo técnico, se puede considerar constante.

Si *fuera correcto* estudiar el movimiento por la *composición* de otros dos, tal como muestra la Figura 10, parece natural suponer, que el movimiento vertical tiene lugar con una aceleración  $g$ , descendente y que el movimiento horizontal, al verificarse como si el peso no actuara, es uniforme. *Los resultados obtenidos experimentalmente* muestran que el movimiento ocurre efectivamente de este modo. Podemos pues enunciar el:

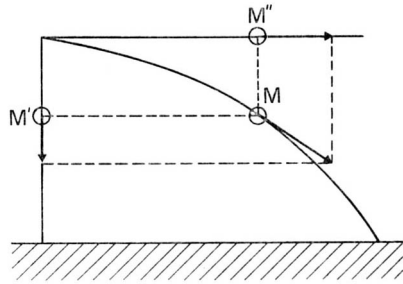


Figura 10: Composición del movimiento de caída libre.

*Principio de superposición.* El movimiento de un punto puede descomponerse en otros dos simultáneos, llamados *movimientos componentes*, que tienen lugar en dos direcciones arbitrarias y estudiar *separadamente* cada uno de ellos.

Es interesante recordar las observaciones que se hicieron a propósito de la definición de velocidad. La experiencia es el único medio que permite comprobar la validez de la regla del paralelogramo para la composición de velocidades. Podría haber ocurrido perfectamente que el rozamiento anterior fuera falso y que la experiencia negara tal principio de superposición. Volveremos a insistir más adelante sobre el contenido de este enunciado del principio de superposición.

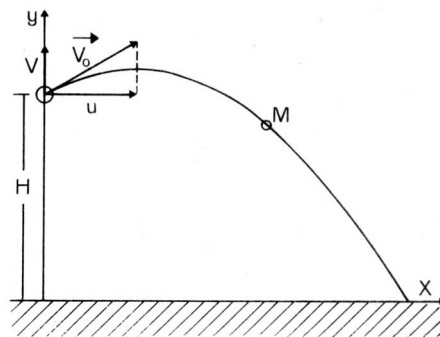


Figura 11: Movimiento de caída libre.

Calcularemos, por último, las ecuaciones del movimiento de un punto en caída libre: supongamos que en el instante  $t = 0$  lanzamos el cuerpo  $M$  desde una altura  $H$  con una velocidad  $v_0$  cuyas componentes son la velocidad horizontal  $u$  y la velocidad vertical  $v$ , ver Figura 11.

*Movimiento según el eje de las  $x$ .* Este movimiento es uniforme, y su velocidad vale  $\dot{x} = u$ . Integrando, resulta:

$$x = ut + C$$



donde  $c$  es una constante de integración que se determina porque para  $t = 0$  (comienzo del movimiento),  $x(0) = C = 0$ . Luego

$$x = uy$$

*Movimiento según el eje de las  $y$ .* Este movimiento es uniformemente acelerado y descendente, con aceleración  $g$ ; luego:

$$\ddot{y} = -g$$

Integrando una vez, se obtiene

$$\dot{y} = -gt + C$$

La constante de integración se determina para  $t = 0$ , porque  $\dot{y}(0) = v_y = v$ ; luego

$$\dot{y} = -gt + v$$

Integrando nuevamente

$$y = -\frac{gt^2}{2} + vt + C$$

La constante de integración se determina para  $t = 0$ , porque para  $t = 0$ ,  $y = H$ , luego

$$y = -\frac{gt^2}{2} + vt + H$$

Estas ecuaciones paramétricas muestran que la trayectoria es una parábola de eje vertical.

## Movimiento de un punto sometido a fuerzas

Estudiaremos ahora la conexión entre el campo de fuerzas gravitatorio y la caída de los cuerpos. Es una experiencia cotidiana que una fuerza aplicada a un cuerpo le comunica un movimiento; por tanto, es natural suponer que el peso, que es una fuerza aplicada al cuerpo, le comunique precisamente el movimiento de caída libre.

Sabemos que el campo gravitatorio (para un cierto cuerpo de ensayo) es constante, vertical y está dirigido hacia el centro de la Tierra; que un cuerpo en caída libre participa de un movimiento con aceleración cero en dirección horizontal y de un movimiento con aceleración constante y descendente en dirección vertical. Estos hechos se interpretan diciendo que *las fuerzas determinan las aceleraciones* de los movimientos, de tal modo que la aceleración del movimiento que toma *el mismo cuerpo* (de ensayo) es un vector proporcional a la fuerza a que está sometido.

Newton, autor de esta idea genial, generalizó inmediatamente esta ley de proporcionalidad a otros tipos de movimiento. El fenómeno de caída de los cuerpos le lleva

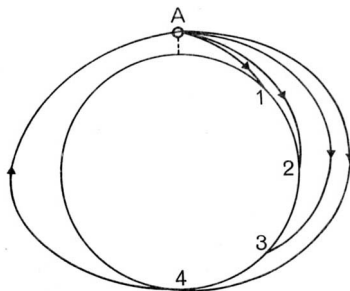


Figura 12: El movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra.

directamente a estudiar el movimiento de los planetas. Un cuerpo lanzado horizontalmente desde A, ver Figura 12, con una cierta velocidad inicial, cae en un punto 1 de la superficie de la Tierra.

Si aumentamos progresivamente la velocidad de salida, el cuerpo cae en los puntos 2, 3, 4, hasta que, para una velocidad suficientemente grande, la trayectoria del movimiento no corta ya a la Tierra, y el cuerpo gira a su alrededor. En este tipo de movimiento las fuerzas *cambian* la velocidad del cuerpo y le hacen girar alrededor de la Tierra, *en lugar de seguir una trayectoria rectilínea* como lo exige la ley de inercia. Siguiendo este razonamiento, Newton logra explicar el gran enigma del movimiento de la Luna –¿qué es lo que la sostiene?– y plantea exactamente el problema al revés diciendo que la Luna no abandona a la Tierra, porque su peso la hace girar alrededor de ésta. El éxito obtenido por Newton al formular la ley del mecanismo del movimiento planetario y la brillante confirmación de los resultados satisfactorios obtenidos en la *mecánica celeste* han constituido la prueba más importante de la proporcionalidad de fuerzas y aceleraciones. Esto permite enunciar:

*Ley de Newton.* La fuerza  $\vec{F}$  aplicada a un cuerpo de masa  $m$  le provoca un movimiento de aceleración dada por la ecuación  $\vec{F} = m\vec{a}$ .

Estudiemos ahora la constante de proporcionalidad  $m$ . En principio, esta constante de proporcionalidad *es propia de cada cuerpo*, puesto que cuerpos distintos tienen pesos diferentes y, cuando se abandonan al campo gravitatorio terrestre o en el vacío, su aceleración de caída es independiente de los mismos. Esta constante  $m$ , propia de cada cuerpo, que establece la proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración, se denomina *masa del cuerpo*.

Para medir la masa de un cuerpo, podemos hallar primero su peso con un dinamómetro y el valor de  $g$  con nuestras reglas y relojes; el cociente del peso expresado en *newton* y de la aceleración en metros por segundo nos dará la masa del cuerpo en *kilogramos*.

Falta estudiar un punto delicado, la definición del *newton*. Es posible proceder de cualquiera de estas formas:

1. Recordando que la graduación de nuestros dinamómetros es arbitraria y que todavía no hemos expuesto la forma de realizarla, podemos elegir una graduación definida como estándar y medir en consecuencia las masas.
2. Podemos tomar un cuerpo como patrón y atribuirle una masa unidad: luego medir  $g$  con nuestras reglas y relojes y calcular el peso del cuerpo aplicando la ley de Newton, calibrando en consecuencia los dinamómetros.

Originalmente se procedió en la segunda forma, *definiendo la masa con un cuerpo patrón* y la fuerza como unidad derivada. El cuerpo elegido es una masa de platino iridiado que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, en Sèvres. Las razones que han llevado a adoptar la masa como medida primaria en lugar de la fuerza son varias:

1. La facilidad de reproducción del cuerpo patrón y su buena conservación. Es notoriamente más fácil conservar una pesa que un instrumento bien calibrado. Por otra parte, es más fácil de reproducir y de transportar.
2. La necesidad de dar, a través de la ley de Newton, una definición dinámica de la fuerza como *dependiente de la masa*, hecho que concuerda mejor con la idea física; en efecto, los cuerpos poseen masa aunque no posean peso. No parece razonable pues, dar mayor importancia a la fuerza que a la masa.
3. En la Teoría de la Relatividad es necesario tener sumo cuidado en usar la noción de fuerza; en cambio, la noción de masa es directa y primaria.

De todo lo expuesto, se desprende que el *newton* es la fuerza necesaria para comunicar al kilogramo-masa, la aceleración de 1 m/seg en cada segundo.

Pasemos ahora a estudiar el movimiento de un punto material sometido a varias fuerzas. Aplicando a este caso el principio de superposición de movimientos de Galileo resulta: *admitiendo que los movimientos y en consecuencia las aceleraciones se superponen igual que los vectores*, se deduce, por la ley de Newton, que las fuerzas se superponen del mismo modo que los vectores. Esto permite enunciar el

*Principio de superposición.* Cada una de las fuerzas que actúa sobre un punto crea un movimiento que es independiente de la presencia de las otras fuerzas sobre el punto. Es decir, el movimiento resultante del punto es el mismo que se obtiene sustituyendo todas las fuerzas aplicadas al mismo por su suma vectorial.

Con la ley de Newton y el principio de superposición es posible estudiar el problema fundamental de la dinámica del punto: dada la resultante  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$  de las fuerzas que actúan sobre un punto material de masa  $m$ , determinar su movimiento. Entonces:

$$m \ddot{x} = F_x$$

$$m \ddot{y} = F_y$$

$$m \ddot{z} = F_z$$

Las fuerzas aplicadas al punto pueden depender de la posición de éste, como ocurre en el caso del peso, de su velocidad; como ocurre con la resistencia que ofrece el aire al movimiento y del tiempo; como ocurre cuando movemos un cuerpo de modo arbitrario.

Supongamos entonces conocida la ley de variación de las fuerzas aplicadas; si en un cierto instante, sabemos la posición  $P(t)$  y la velocidad  $v(t)$  de un punto, podemos calcular inmediatamente la fuerza que actúa sobre él y, a través de la ley de Newton, la aceleración que posee en ese instante. Si consideramos un intervalo de tiempo  $\Delta t$  pequeño, valdrá aproximadamente, en el instante  $t$ :

$$P = (x, y, z) \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

En el instante  $t + \Delta t$  se tiene entonces:

$$P' = (x + v_1 \Delta t, y + v_2 \Delta t, z + v_3 \Delta t) \quad \vec{v}' = (v_1 + a_1 \Delta t, v_2 + a_2 \Delta t, v_3 + a_3 \Delta t)$$

Luego, el conocimiento del estado del movimiento en el instante  $t$  nos permite calcular el movimiento en un instante posterior  $t + \Delta t$ . Se comprende entonces que conocida la posición y la velocidad en un instante dado queda determinada perfectamente la trayectoria del punto. Podemos enunciar, pues, el:<sup>1</sup>

*Principio de determinismo.* Conocido el sistema de fuerzas que actúa sobre un punto material y la posición y la velocidad en un instante dado, el movimiento del punto está perfectamente determinado en todos los instantes posteriores.

---

<sup>1</sup> Téngase presente que el principio del determinismo es una consecuencia matemática de la ley de Newton y de la forma con que hemos considerado las fuerzas, pero esta ley y esta forma sólo pueden ser sancionadas por la experiencia. En efecto, en Relatividad la ley de Newton no es válida, pero sí lo es el principio de determinismo; en Mecánica Cuántica, la ley de Newton es aproximadamente válida y no lo es el principio enunciado; en Mecánica Estadística el principio carece de sentido.

## Movimiento de un sistema de puntos

Estudiaremos ahora el movimiento de puntos materiales que se influyen mutuamente unos a otros. Tomando la Tierra como referencia podemos definir la posición de cada uno de los puntos en función del tiempo. Si no hay interacción entre puntos, sus trayectorias serán parábolas como las ya estudiadas. Pero, si las trayectorias no son parábolas, cada punto modificará la trayectoria del otro. Conocidas la posición y las velocidades de los puntos, podemos determinar las acciones que cada punto realiza sobre los restantes, y aplicar luego el principio de superposición y la ley de Newton. En muchos casos, las fuerzas dependen únicamente de las distancias que separan a los puntos y, por lo tanto, es posible estudiar la dependencia con un dinamómetro; tal es el caso de dos puntos unidos con un resorte; en otros casos, la dependencia es más complicada y será necesario estudiar los movimientos de otra forma. Veamos algunos ejemplos.

*Ejemplo 1.* La atracción de la Tierra sobre un cuerpo  $M$ , Figura 13, depende de la distancia de  $M$  a la Tierra. Por el principio de acción y reacción,  $M$  debe a su vez atraer a la Tierra con una fuerza igual y contraria, que comunicará a la Tierra un movimiento acelerado hacia el punto  $M$ . Pero debido a la masa inmensa de la Tierra, esta aceleración es extraordinariamente pequeña. Sin embargo, este planteamiento presenta un problema grave. Decimos que, aunque sea imperceptiblemente, la Tierra sufre un movimiento y el problema es respecto a qué. Un caso más general lo encontramos en un tiovivo, donde veremos que aparecen “fuerzas” que sobre la Tierra no teníamos, “fuerzas” que impulsan a los cuerpos al exterior, transversalmente a la trayectoria, y que se denominan *centrífugas*. El problema es entonces, saber las fuerzas que hay que considerar y cuál es la referencia que hay que tomar al estudiar los movimientos.

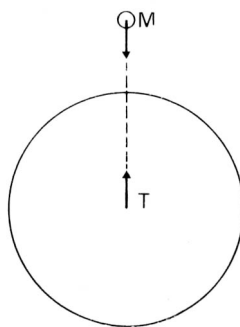


Figura 13: La atracción gravitatoria de la Tierra.

Se ha encontrado, experimentalmente, que *el sistema de coordenadas en el cual es válida la ley de Newton es el formado por las “estrellas fijas”*. Respecto a éstas, la Tierra

posee dos movimientos simultáneos: uno de giro diario alrededor de sí misma, denominado rotación sidérea, de casi 24 horas, y otro de órbita alrededor del Sol, que dura aproximadamente 365 1/4 días; por consiguiente, la Tierra no está fija respecto a las estrellas y en ella *no es completamente válida la ley de Newton* (sólo lo es aproximadamente gracias a la lentitud de los movimientos terrestres). Al estudiar ciertos movimientos es necesario tener en cuenta que nuestro sistema de coordenadas gira con respecto a las estrellas y que el movimiento no sigue exactamente la ley de Newton (por el mismo orden de fenómenos que provocan la aparición de las “fuerzas” centrífugas en un tiiovivo). Más adelante volveremos a insistir sobre este problema de la aceleración de los sistemas de coordenadas respecto a las estrellas.

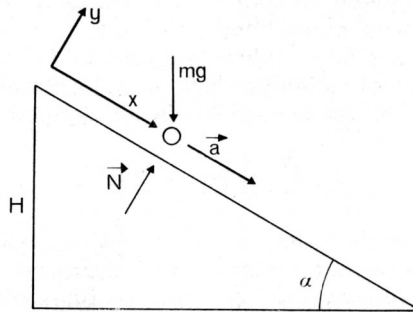


Figura 14: Movimiento en un plano inclinado.

*Ejemplo 2.* Supongamos un punto que se desliza sobre un plano inclinado, en ángulo dado con respecto a la horizontal, Figura 14. La presencia del plano obliga al punto a moverse en forma diferente a como lo haría en caída libre. La ley de Newton nos dice que los puntos del plano obran sobre el cuerpo con fuerzas tales que le hacen mover en todo momento en contacto con el plano. *Supongamos* que la acción del plano se traduce en una fuerza  $N$  perpendicular a él. Para que el movimiento se realice sobre el plano, el cuerpo no debe poseer aceleraciones normales y, por tanto, la ley de Newton da

$$N - mg \cos \alpha = 0 \quad N = mg \cos \alpha$$

y para la componente según el eje de las  $x$  se tendrá

$$ma = mg \sin \alpha \quad a = g \sin \alpha$$

expresión que indica que el movimiento es uniformemente acelerado con aceleración menor que la de caída libre. Integrando, resulta

$$v = gt \sin \alpha \quad x = \frac{gt^2}{2} \sin \alpha$$

Al final del plano la distancia recorrida vale:  $x = H/\sin \alpha$ ; luego, la velocidad final adquirida por el punto es

$$v = gt \sin \alpha = g \sqrt{\frac{2H}{g \sin^2 \alpha}} \sin \alpha = \sqrt{2gH}$$

y depende sólo de la altura  $H$  del plano tal como estudiamos oportunamente en una sección anterior. Por tanto, queda verificada nuestra suposición inicial sobre la fuerza  $N$ .

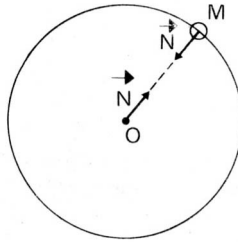


Figura 15: Movimiento circular uniforme.

*Ejemplo 3.* Supongamos un punto  $M$  que describe una circunferencia con movimiento circular uniforme. La aceleración se reduce a  $a_N$  y está dirigida hacia el centro  $O$  de la circunferencia, ver Figura 15. Aplicando la ley de Newton tenemos:

$$N = mR\omega^2$$

Este movimiento se logra sujetando el cuerpo puntual con un hilo que impida que se mueva en forma rectilínea tal como lo exige la ley de inercia. El hilo tira del cuerpo con una fuerza  $N$  y, a su vez, el cuerpo –ley de acción y reacción– aplica una fuerza  $N$  sobre el hilo dirigida hacia el exterior. Una situación idéntica se presenta al circular el punto por un carril que le obliga a describir la circunferencia.

*Ejemplo 4.* Consideremos, ver Figura 16 un cuerpo  $M$  que puede moverse en un plano horizontal y que está unido al punto fijo  $O$  con un resorte  $r$  y sea  $l$  la longitud natural del resorte  $r$  (sin deformación). Estudiemos el movimiento de este sistema. Las fuerzas que actúan sobre  $M$  son:

1. Peso del cuerpo, que vale  $mg$ .
2. La reacción  $N$  del plano perpendicular a él.
3. La fuerza  $F$  por la deformación del resorte.

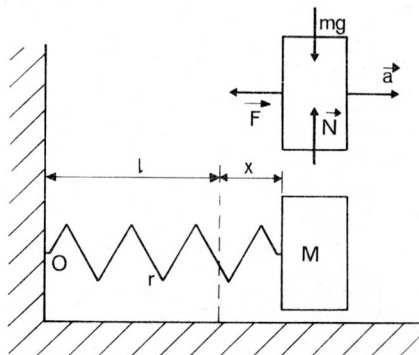


Figura 16: Oscilación de un resorte.

La fuerza  $F$  está relacionado con la longitud del resorte mediante una ley que es necesario determinar en forma experimental. Se puede comprobar que para pequeños alargamientos del resorte comprendidos dentro de los límites de elasticidad, vale:

$$F = Kx$$

donde  $x$  es la deformación adquirida por el resorte y  $K$  es un coeficiente que define la dureza del resorte, llamado *constante elástica*. Esta ley establece que la fuerza es proporcional al alargamiento del resorte. La fórmula es válida con su signo, puesto que si el resorte se alarga,  $x > 0$  y  $F > 0$ , cuando el resorte tira; y si  $x < 0$ ,  $F < 0$ , es decir, el resorte empuja.

Si aplicamos la ley de Newton tendremos:

$$\begin{aligned} N - mg &= 0 & N &= mg \\ m\ddot{x} &= -F = -Kx & \ddot{x} + \frac{K}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

Supongamos que para  $t = 0$  dejamos en libertad el sistema desde una distancia  $x = a$ . La expresión

$$x = a \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$$

verifica la ecuación de Newton y las condiciones iniciales; luego, es la *ecuación de movimiento* de acuerdo con la ley de determinismo. El movimiento obtenido es oscilante, la amplitud de las oscilaciones vale  $a$ , el período es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$



la frecuencia es

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

y la *pulsación* o *velocidad angular* –por similitud a un movimiento circular– es

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

*Ejemplo 5.* Consideremos un péndulo formado por un cuerpo **M** suspendido de un punto **O** por un hilo o varilla rígida inextensible y desprovista de peso. Aplicando la ley de Newton para la aceleración tangencial (y observando que la tensión  $N$  del hilo debe ser normal a la circunferencia) resulta, Figura 17:

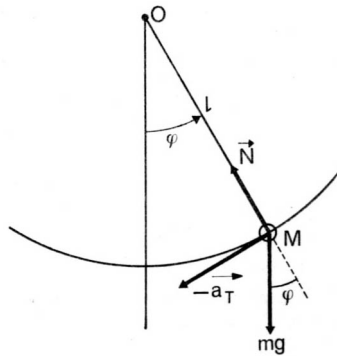


Figura 17: Oscilaciones de un péndulo.

$$m a_T = ml \dot{\omega} = ml \ddot{\varphi} = -mg \operatorname{sen} \varphi$$

Esta ecuación se puede simplificar si consideramos ángulos  $\varphi$  pequeños (pequeñas oscilaciones) que permiten sustituir  $\operatorname{sen} \varphi$  por  $\varphi$ . Entonces tendremos:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

Esta ecuación puede resolverse de modo análogo al *Ejemplo 4*, conocido el ángulo  $\varphi_0$  desde el cual se abandona el péndulo. Esta determinación se deja a cargo del lector, si bien podemos adelantar que la integral es

$$\varphi = \varphi_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t$$

que define un movimiento oscilatorio armónico de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

*Ejemplo 6.* Consideremos el circuito de la Figura 18 constituido por un resorte  $r$ , un cuerpo  $M$  y un amortiguador a similar a los empleados en los automóviles. La función del amortiguador es agregar una fuerza opuesta a la velocidad del movimiento comunicado a un émbolo que se mueve en un baño de aceite. Puede admitirse que la resistencia del medio vale  $-bv$  donde  $b$  es una constante propia del amortiguador y  $v$  la velocidad del émbolo.

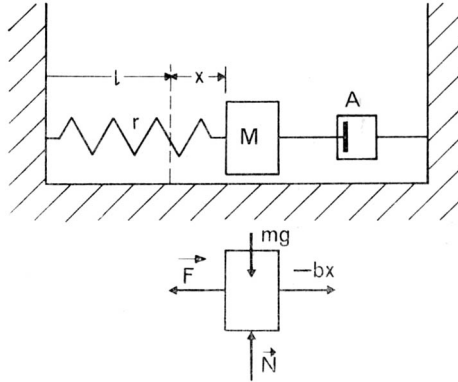


Figura 18: Movimiento oscilatorio amortiguado.

La ley de Newton nos da la ecuación del movimiento del sistema

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x}$$

o sea, bajo la forma de una ecuación diferencial clásica

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

Introduciendo los parámetros

frecuencia angular del sistema  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

factor de amortiguación del sistema  $\delta = \frac{b}{2m}$

factor de calidad del sistema  $Q = \frac{\sqrt{Km}}{b}$

resulta la ecuación

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son esencialmente diferentes según los valores de  $Q$ . Si  $Q \leq 1/2$  toda solución tiende a cero al crecer  $t$ . Este caso que corresponde a *gran amortiguamiento* (fluido muy viscoso,  $b$  grande) el sistema es llamado *estable o asintótico*. Si  $Q > 1/2$  toda solución es del tipo

$$x = A e^{-\delta t} \cos \left( \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} t \right)$$

Es una solución oscilante de amplitud decreciente. Obsérvese que la rapidez de decrecimiento de estas oscilaciones depende del valor de  $d$ , llamado por esta razón factor de amortiguación, y que la frecuencia propia de las oscilaciones es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Si el sistema tuviera amortiguamiento muy pequeño obtendríamos  $\omega \approx \omega_0$ . Por otra parte, cuando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow 0$ ; el sistema oscila alrededor del punto de equilibrio y tiende a él.

Supongamos ahora que sobre el sistema actúa una fuerza sinusoidal, cuya acción está representada (eligiendo convenientemente el origen de tiempos) por el término  $a \text{ sen } \omega t$  y está destinada a sostener o alterar la oscilación. La ley de Newton nos da ahora

$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x} + a \text{ sen } \omega t$$

que se puede escribir como

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a}{m} \text{ sen } \omega t$$

En este caso, la expresión de la integral solución es un poco más complicada y está formada de dos términos: uno que refleja la situación transitoria del sistema en el instante de aplicar la fuerza periódica y otro que representa la oscilación *permanente* o *forzada* debida a la fuerza aplicada. La *solución permanente* posee la misma pulsación  $\omega$  que la fuerza exterior y su amplitud depende esencialmente de  $\omega$ . En la Figura 19 puede verse la variación de amplitud con respecto a la fuerza sinusoidal exterior para diversas pulsaciones  $\omega$  referidas a la pulsación propia  $\omega_0$  y diversos valores del factor de calidad  $Q$ .

Puede observarse que si  $Q > 1/2$ , para pulsaciones cercanas a  $\omega_0$  la amplitud posee un máximo que es tanto más pronunciado cuanto mayor es  $Q$ . He aquí, pues, un resultado interesante que confirma la experiencia: las oscilaciones forzadas tienen amplitud máxima para una frecuencia de la fuerza exterior próxima a la frecuencia

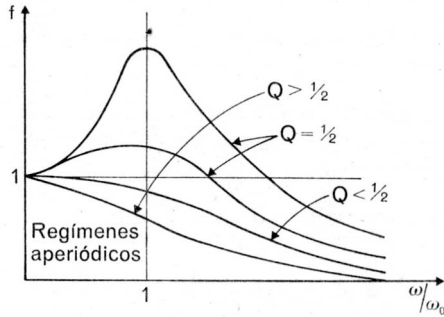


Figura 19: Respuesta del sistema según la frecuencia.

propia de oscilación libre del sistema (frecuencia angular característica  $\omega_0$ ) llamada *frecuencia de resonancia*.

En primera aproximación, todo sistema unido a un resorte se comporta de modo similar al estudiado. Muchas veces ocurre que el sistema no posee realmente un amortiguador, pero los rozamientos inevitables del movimiento (por ejemplo, con el aire) hacen aparecer en la ecuación de la ley de Newton un término de resistencia que depende de la velocidad. Un ejemplo de sistema *asintótico* puede verse en la suspensión de un automóvil, la cual está dotada de amortiguadores, mientras que un ejemplo de sistema oscilante lo encontramos en el *diapasón*, cuyo amortiguamiento es pequeño por ser debido únicamente a la deformación del propio metal y al rozamiento del aire.

### Primera ley de movimiento de los sistemas materiales

Consideremos un conjunto de puntos materiales, cada uno de los cuales tiene una masa determinada  $m_i$  y está definido por las coordenadas  $(x_i; y_i; z_i)$ . Llamamos *baricentro* del sistema de puntos al punto del espacio definido por las ecuaciones:

$$X = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad Y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad Z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

El baricentro, centro de gravedad del sistema, es un punto que está perfectamente determinado en el espacio, y es independiente de la posición y orientación de los ejes coordenados elegidos. Comprobaremos este hecho solamente para una traslación del sistema. Si  $a$  es la magnitud de la traslación en la dirección del eje  $x$ , cada punto pasará a ocupar una posición  $(x_i + a, y_i, z_i)$  y la componente  $X'$  del baricentro será:

$$X' = \frac{\sum m_i (x_i + a)}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} + a \frac{\sum m_i}{\sum m_i} = X + a$$

Los valores de  $Y$  y  $Z$  no cambian. Esto indica que el baricentro se ha desplazado también una cantidad  $a$  sobre el eje  $x$ . Lo mismo vale para cualquier otro desplazamiento.

Si el sistema de puntos materiales es rígido, las distancias mutuas entre sus puntos no se modifican al aplicar fuerzas sobre el conjunto, de modo que el baricentro del sistema es un punto fijo, cualquiera que sea el movimiento que éste adquiera.

Como aplicación de lo expuesto examinemos algunos casos particulares de cálculo de baricentros.

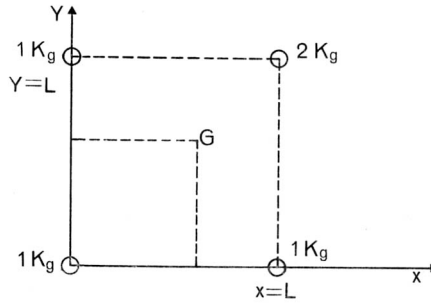


Figura 20: Ejemplo de cálculo del baricentro.

*Ejemplo 1.* Sea el sistema plano de la Figura 20; calculemos el baricentro aplicando directamente la definición dada anteriormente. Los ejes adoptados permiten simplificar los cálculos.

$$X = \frac{1 \times L + 2 \times L}{1 + 1 + 1 + 2} = \frac{3}{5} L$$

$$Y = \frac{1 \times L + 2 \times L}{1 + 1 + 1 + 2} = \frac{3}{5} L$$

*Ejemplo 2.* Sea una barra homogénea, Figura 21, que imaginamos dividida en trozos de longitud  $\Delta x$ ; podemos considerarla formada por una serie de puntos materiales, de igual forma y volumen, cada uno de los cuales corresponde a un trozo de la misma y posee su misma ubicación con la misma masa.

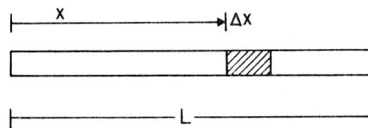


Figura 21: Baricentro de una barra.

Si  $p$  es la densidad de la barra y  $A$  su sección, la masa del “punto” es:

$$m = pA \Delta x$$

Luego el baricentro será aproximadamente

$$X = \frac{\sum pAx \Delta x}{\sum pA \Delta x} = \frac{\sum x \Delta x}{\sum \Delta x}$$

Para calcular su posición exacta, pasamos al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  y tendremos

$$X = \frac{\int_0^L x dx}{\int_0^L dx} = \frac{L^2/2}{L} = \frac{L}{2}$$

Podríamos haber llegado al mismo resultado, observando simplemente que la barra es simétrica respecto a su punto medio. Tomando éste como origen de coordenadas resulta que a cada punto con  $x$  positiva corresponde otro idéntico de  $x$  negativa y con la misma masa. Luego la suma total de productos  $x dx$  vale 0.

*Ejemplo 3.* El razonamiento anterior podemos aplicarlo a una figura homogénea que tenga un centro de simetría y encontraremos que éste es el baricentro. Se comprende que si la figura tiene un eje de simetría, su baricentro se hallará sobre dicho eje.

Estudiaremos ahora el movimiento de un sistema arbitrario de puntos materiales sometidos a fuerzas exteriores al sistema (es decir, fuerzas aplicadas por otros puntos exteriores al sistema considerado). Las fuerzas que solicitan a cada uno de los puntos se pueden clasificar en dos grupos diferentes:

1. Fuerzas aplicadas al punto desde el exterior o fuerzas exteriores.
2. Fuerzas debidas a otros puntos del mismo sistema que actúan sobre el punto considerado o fuerzas interiores.

Las fuerzas del segundo grupo, son iguales y opuestas dos a dos como exige el principio de acción y reacción. Escribiendo para cada punto  $i$  la ley de Newton:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}$$

donde  $\vec{F}_i^{ext}$  es una fuerza exterior y  $\vec{F}_i^{int}$  es una fuerza interior ejercida por algún punto del sistema. Si sumamos las ecuaciones correspondientes a todos los puntos del sistema tendremos:

$$\sum_{total} m_i \vec{a}_i = \sum_{total} \vec{F}_i^{ext} + \sum_{total} \vec{F}_i^{int}$$

pero  $\sum \vec{F}_i^{int} = 0$  porque las fuerzas interiores son dos a dos iguales y opuestas. Resulta finalmente:

$$\sum_{total} m_i \vec{a}_i = \sum_{total} \vec{F}_i^{ext} = R^{ext}$$

donde  $R^{ext}$  es la resultante de las fuerzas externas. Esta ecuación puede escribirse de dos formas interesantes.

La expresión  $\sum m_i \vec{a}_i$  coincide con la derivada respecto al tiempo de  $\sum m_i \vec{v}_i$  que es la *cantidad de movimiento* del sistema. Por tanto, la ecuación puede enunciarse como:

*Ecuación de la cantidad de movimiento.* La resultante de las fuerzas exteriores que actúan sobre un sistema es igual a la derivada respecto al tiempo de la cantidad de movimiento del sistema.

La cantidad de movimiento del sistema puede expresarse en función de la velocidad del baricentro, derivando respecto al tiempo las ecuaciones

$$\sum_{total} m_i x_i = X_G \sum_{total} m_i = X_G M_{total}$$

y lo mismo para las otras coordenadas. De esto resulta

$$M_{total} \vec{a}_G = R^{ext}$$

ecuación que puede traducirse en:

*Ecuación del baricentro.* El baricentro de un sistema se mueve como un punto material de masa igual a la del sistema, impulsado por la suma vectorial de las fuerzas externas aplicadas.

Veamos algunos ejemplos de aplicación.

*Ejemplo 1.* Consideremos un sistema sin fuerzas exteriores aplicadas. El primer enunciado de la ecuación de la cantidad de movimiento nos indica que la cantidad de movimiento del sistema permanece invariable en el tiempo.

Apliquemos este resultado al fenómeno de choque entre dos puntos materiales. Mientras dura el choque, aparecen fuerzas internas en el sistema que obedecen al principio de acción y reacción, de modo que la cantidad de movimiento del sistema coincide en todo instante con el valor que poseía antes del choque. Supongamos, ver Figura 22, dos partículas que después de chocar continúan unidas en su movimiento; la ley de conservación de la cantidad de movimiento, según las direcciones de los ejes coordenados, permite escribir las ecuaciones:

$$m v = (m + M) v' \quad \text{cantidad de movimiento según el eje } x$$

$$M u = (m + M) u' \quad \text{cantidad de movimiento según el eje } y$$

que determinan la velocidad de los puntos materiales después del choque del sistema.

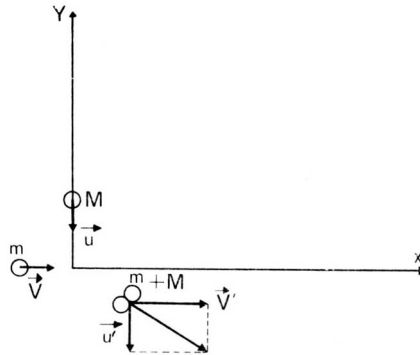


Figura 22: Esquema de un choque de dos puntos materiales.

La ecuación del baricentro se traduce en un hecho interesante cuando es nula la resultante de las fuerzas exteriores. El baricentro del sistema no puede desplazarse sin el auxilio de fuerzas exteriores y conserva su posición inicial. La experiencia cotidiana nos enseña que para movernos nos es necesario “apoyarnos” en algo, y que por el sólo movimiento de nuestro cuerpo no podemos avanzar en ninguna dirección. Es imposible, por ejemplo, impedir que el baricentro de una persona que cae libremente describa la parábola de caída que exige la ley del movimiento. Una aparente contradicción la plantea el cohete retropropulsor que parece desplazarse sin apoyo alguno. Sin embargo el cohete sólo puede moverse a expensas de lanzar gases de combustión hacia atrás. La cantidad de movimiento del cohete en un instante dado es igual a la suma de las cantidades de movimiento del cuerpo del cohete que se mueve hacia adelante y de los gases de combustión lanzados hacia atrás. Por este mecanismo de distribución de masas, se consigue que se desplacen en sentidos contrarios, diversas partes del sistema, sin que su baricentro se aparte de su posición inicial.

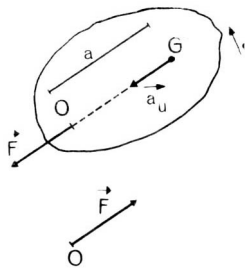


Figura 23: Cuerpo sólido que gira sobre un eje.

*Ejemplo 2.* Consideremos un cuerpo que gire alrededor de un eje fijo que pasa por O y es perpendicular al plano del dibujo, Figura 23. Sea G el baricentro del cuerpo y supongamos que gira con una velocidad angular constante  $\omega_0$ . El eje fijo de giro



impide que el baricentro describa un movimiento rectilíneo uniforme y lo somete necesariamente a una fuerza cuyo valor es, aplicando la ecuación del baricentro, es

$$F = M a \omega^2$$

Naturalmente el principio de acción y reacción exige que el cuerpo solicite al eje con fuerzas iguales y opuestas, las que son absorbidas por los cojinetes de apoyo.

*Ejemplo 3.* Para que un sistema se encuentre en reposo, es necesario que sea nula la aceleración de su baricentro. Entonces debe ocurrir que la resultante de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema valga 0. Sin embargo, esta condición no supone que el sistema esté en reposo, pues puede presentar un movimiento de deformación, como ocurría en el caso del cohete, o puede girar alrededor del baricentro, o bien, puede sencillamente desplazar su baricentro con movimiento rectilíneo y uniforme.

Hay que señalar además, que es posible dividir arbitrariamente el sistema original en trozos menores y aplicar a cada uno de ellos la condición necesaria de reposo que hemos encontrado. Se obtienen así condiciones suplementarias de equilibrio, que en algunos casos pueden ser suficientes para asegurar el reposo del sistema.

## Segunda ley de movimiento de los sistemas materiales

Consideremos, Figura 24, un vector  $\vec{a}$  en el plano  $\alpha$  y un punto  $O$  del plano; llamamos momento de  $\vec{a}$  respecto a  $O$  a un vector  $\vec{M}$  perpendicular a  $\vec{a}$ , de módulo el producto del módulo del vector  $\vec{a}$  por la distancia de éste al punto  $O$  y de sentido tal que colocando en  $O$  el pulgar de la mano derecha, el sentido del movimiento de los dedos al cerrar la mano, es el vector  $\vec{a}$ . O bien, el sentido está representado por el de un sacacorchos que, al avanzar en la dirección de  $\vec{M}$  giraría en el mismo sentido que el del vector  $\vec{a}$ . La expresión  $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{a}$ , tal como muestra la figura.

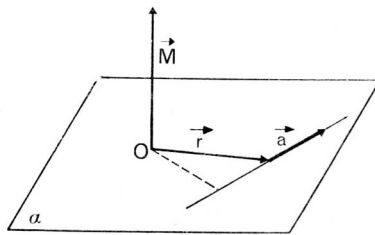


Figura 24: Momento de una fuerza.

Con estos elementos estudiaremos el movimiento de un sólido alrededor de un eje fijo. Consideremos primero un cuerpo rígido plano que gira alrededor de un eje  $\mathbf{e}$ , Figura 25, perpendicular al plano del cuerpo, y supongamos que durante el movimiento actúan únicamente las fuerzas contenidas en el plano del cuerpo.

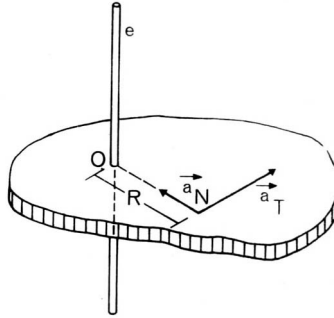


Figura 25: Giro de un sólido con un eje.

La ley de Newton aplicada a un punto del cuerpo es

$$m\vec{a} = \vec{F}^{ext} + \sum \vec{F}^{int}$$

Todos los vectores de esta ecuación están contenidos en el plano del cuerpo. Si tomamos entonces el momento respecto a  $\mathbf{O}$  de dichos vectores obtendremos otros en la dirección del eje  $\mathbf{e}$ . El momento del vector  $\vec{a}$  se reduce al momento del vector componente  $a_T$ , o sea,  $R\dot{\omega}R = R^2\dot{\omega}$ . Si llamamos  $\vec{M}^{ext}$  y  $\vec{M}^{int}$  a los momentos de las fuerzas externas e internas respectivamente, tendremos para los módulos de los vectores

$$mR^2\dot{\omega} = M^{ext} + M^{int}$$

Podemos observar todavía que la suma total de los  $\vec{M}^{int}$  vale 0, puesto que las fuerzas internas son dos a dos iguales y opuestas y sus vectores momento se anulan. Si sumamos entonces todas las igualdades de la forma anterior, para los diversos puntos del cuerpo tendremos:

$$\dot{\omega} \sum_{total} mR^2 = \sum_{total} M^{ext}$$

Dentro de la suma  $\sum M^{ext}$  deberíamos considerar también *las fuerzas que el cuerpo ejerce sobre el eje de giro*, pero éstas, tienen momento nulo respecto a  $\mathbf{O}$ . La expresión  $K = \sum mR^2$  depende solamente del cuerpo y no de su movimiento ni de las fuerzas aplicadas y se denomina *momento de inercia del cuerpo respecto al eje e*.

Pasemos ahora a estudiar el movimiento de un cuerpo en el espacio alrededor de un eje de giro. Como es natural, las fuerzas aplicadas, que son paralelas al eje, no producen movimiento alguno y son contrarrestadas por el propio eje. El estudio del movimiento se reducirá, pues, a considerar las componentes de las fuerzas aplicadas, perpendiculares al eje de giro. El momento de éstas respecto al eje será igual a la suma de los productos de las fuerzas por sus respectivas distancias al eje. Por otro lado, el

momento de inercia del sólido será la suma de los productos de las masas de los puntos materiales por los cuadrados de sus distancias al eje, de modo análogo al caso plano. La ecuación del movimiento del cuerpo en el espacio se deducirá, por un procedimiento similar al seguido en el caso plano, y su forma es análoga. Dejamos al cuidado del lector el desarrollo matemático de esta demostración. Es interesante hacer notar que, aunque sólo consideramos fuerzas paralelas al eje, las fuerzas internas pueden no serlo como es fácil comprender si imaginamos las acciones mutuas que tienen lugar entre los diversos puntos del cuerpo y que hacen que éste se mantenga unido.

Veamos algunos ejemplos de cálculo de momentos de inercia.

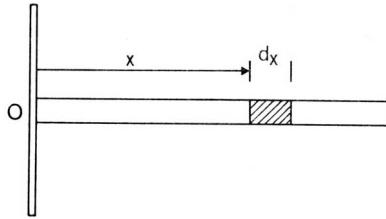


Figura 26: Momento de inercia de una barra homogénea.

*Ejemplo 1.* Momento de inercia de una barra homogénea de densidad  $p$ , sección  $A$ , longitud  $L$  y masa  $M$ , respecto a uno de sus extremos, Figura 26. Dividiendo la barra por el procedimiento ya conocido, tendremos

$$K = \int_0^L Ap x^2 dx = \frac{ApL^3}{3} = \frac{ML^3}{3}$$

*Ejemplo 2.* Cilindro hueco de revolución de dimensiones indicadas en la Figura 27 y masa total  $M$ . Si dividimos el cilindro en “tubos” de radio  $r$ , espesor  $dr$  y la densidad del material es  $p$ , tendremos, siguiendo un procedimiento similar al del ejemplo anterior

volumen de un “tubo”	$2\pi H r dr$
masa de un “tubo”	$2\pi H p r dr$
distancia a eje	$r$

El momento de inercia es

$$K = \int_{R_1}^{R_2} r^2 2\pi H p r dr = 2\pi p H \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2\pi p H}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

y como  $M = \pi H p (R_2^2 - R_1^2)$  es la masa del cuerpo, queda

$$K = M \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$$

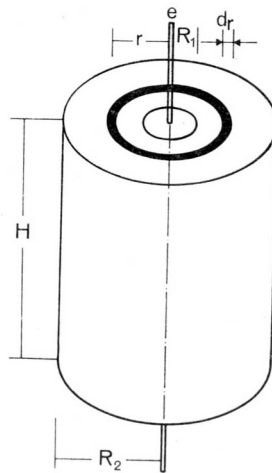


Figura 27: Momento de inercia de un cilindro hueco.

Veamos ahora cómo calcular el momento de las fuerzas aplicadas respecto al eje de giro.

*Ejemplo 1.* Supongamos que sobre el cuerpo actúan dos fuerzas paralelas, iguales y opuestas, situadas en rectas diferentes, Figura 28. Este sistema constituye lo que se llama un *par de fuerzas*. El cálculo del momento de este par *respecto a cualquier punto del espacio* está representado por el vector  $\vec{M}$  y vale el producto de una de las fuerzas por la distancia que separa a ambas, es perpendicular al plano determinado por las fuerzas y su sentido viene dado por la regla de la mano derecha o la del sacacorchos. En particular, el momento del par de fuerzas respecto a un eje normal a su plano es el producto de la fuerza por la distancia que separa a ambas que se llama *brazo del par*.

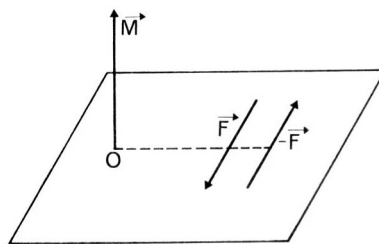


Figura 28: Momento de un par de fuerzas.

Generalizando incorrectamente la definición anterior, el momento de un sistema de fuerzas respecto a un eje se denomina también, *par del sistema*.

Consideremos, Figura 29, un cuerpo en un eje horizontal. Sea  $G$  el baricentro. Considerando aplicada en cada punto una fuerza igual a su peso el momento total de

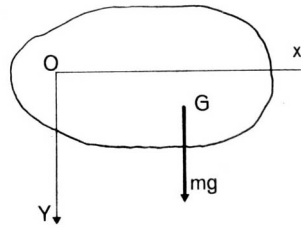


Figura 29: Baricentro y peso de un cuerpo.

estas fuerzas será

$$M = \sum mgx = g \sum mx = Mg X_G$$

Desde el punto de vista del momento aplicado, todo ocurre como si el peso total del cuerpo estuviera concentrado en su baricentro y por esta razón, se le conoce con el nombre de centro de gravedad. El resultado anterior sería también válido si el eje no fuera horizontal, como puede comprobar el lector procediendo en forma similar.

Lo expuesto nos permite aplicar la segunda ecuación de movimiento de los sistemas materiales a ejemplos sencillos.

*Ejemplo 1.* Consideremos un sistema en reposo, en el que tomamos un eje de giro cualquiera (que es fijo por estar el sistema en reposo); como la aceleración angular  $\dot{\omega}$ , vale cero, *el momento de las fuerzas exteriores respecto a dicho eje es cero*. Esta condición de reposo se añade a la obtenida en el ejemplo 3 de la sección anterior. Supongamos un *cuerpo rígido* que en un instante dado está en reposo, y que sean nulos la resultante de las fuerzas externas y el momento de las fuerzas externas respecto a tres ejes perpendiculares (o respecto a un punto): el cuerpo permanecerá en reposo. En efecto, como el cuerpo es rígido, no pueden existir desplazamientos relativos entre sus puntos; como la resultante de las fuerzas exteriores es cero, el baricentro no puede adquirir movimiento alguno; como los momentos de las fuerzas externas son nulos, el cuerpo no puede girar en ninguna dirección.

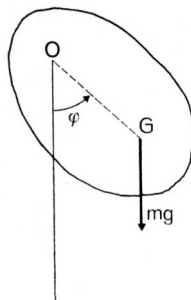


Figura 30: Movimiento de un péndulo compuesto.

*Ejemplo 2.* Consideremos, Figura 30, un cuerpo que posee un eje de giro horizontal (péndulo compuesto). La ecuación de movimiento nos da

$$K \ddot{\varphi} = -MgL_G \text{sen } \varphi$$

donde  $L_G$  es la distancia del eje al baricentro. Para ángulos  $\varphi$  pequeños, tendremos

$$\ddot{\varphi} + \frac{MgL_G}{K} = 0$$

Esta ecuación coincide con la del movimiento de un péndulo simple ya estudiado; el período de oscilación está dado entonces por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{MgL_G}}$$

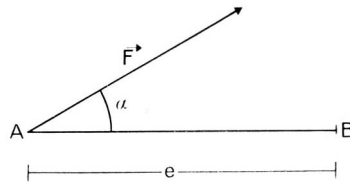


Figura 31: Trabajo de una fuerza.

## Trabajo

Consideremos una fuerza  $\vec{F}$ , constante, cuyo punto de aplicación recorre una distancia  $\vec{e}$ , tal como indica la Figura 31. Llamamos *trabajo de la fuerza  $\vec{F}$*  al producto

$$Fe \cos \alpha = \vec{F} \times \vec{e}$$

La unidad de medida del trabajo es el *newton-metro*, unidad que se ha denominado *joule*.

En muchos casos la fuerza no será constante o variará el ángulo  $\alpha$ , o incluso, el punto de aplicación se desplazará sobre una línea curva. En estos casos, para definir el trabajo es preciso recurrir al conocido procedimiento de dividir el recorrido en segmentos pequeños y luego tomar el límite de las sumas  $\sum \vec{F} \times \vec{e}$ . En el caso general dará origen a una integral. Calculemos, por ejemplo, el trabajo de deformación de un resorte, Figura 32. Ante todo, la fuerza  $\vec{F}$  que deforma el resorte es equilibrada en todo instante por la reacción propia de éste, tal como exige la ecuación de equilibrio. El *trabajo realizado por la fuerza exterior* (la mano, por ejemplo), será

$$T^{ext} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum F \Delta x = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} Kx dx = \frac{K}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

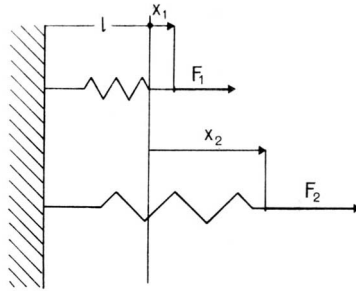


Figura 32: Trabajo de deformación de un resorte.

Si nos interesara determinar el trabajo *realizado por el resorte*, tendríamos que considerar la reacción de éste, es decir  $-F$ , y el trabajo valdría  $T^{res} = -T^{ext}$ . Este resultado posee carácter general, el trabajo exterior (trabajo de las fuerzas exteriores al sistema) es de signo opuesto al trabajo del sistema (trabajo de las fuerzas internas del sistema) como se comprende del ejemplo expuesto.

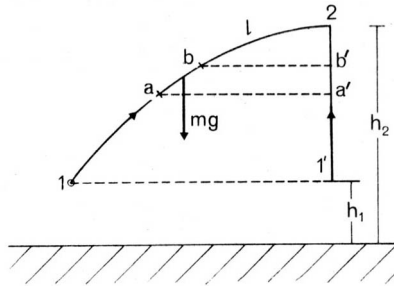


Figura 33: Trabajo de la fuerza de la gravedad.

Un campo de fuerzas plantea un caso interesante. Si elegimos una curva  $C$  en la Figura 33 podremos calcular el *trabajo de la acción del campo* al desplazar una masa  $m$  sobre la curva desde  $1$  a  $2$ . Si el campo de fuerzas fuera el gravitatorio, tendríamos, al ser  $\overline{ab} \cos \alpha = \overline{a'b'}$ , que el trabajo realizado desde  $1$  a  $2$  equivale al de  $1'$  a  $2'$ ; luego vale  $-(h_2 - h_1) mg$ .

Este resultado nos muestra que el trabajo del peso es igual a  $-(h_2 - h_1) mg$  *cualquiera que sea la curva elegida* que pasa por  $1$  a  $2$ . Si el campo de fuerzas que consideramos posee esta propiedad, es decir, si *el trabajo de la acción del campo entre dos puntos es independiente del camino seguido*, se dice que el campo es *conservativo*.

En un campo conservativo existe una función en cada punto del espacio, denominada *potencial del punto*, definida de la siguiente forma. Elegido un punto  $O$  como origen, el potencial de un punto  $A$  del espacio, es el trabajo de la acción del campo al

pasar desde **O** al punto **A** considerado y vale

$$U(A) = -T^{\vec{OA}}$$

En forma equivalente, podría decirse que el potencial de un punto del espacio, es el trabajo exterior realizado para pasar desde **O** al punto **A**. **O** se denomina origen de los potenciales puesto que su potencial vale cero. Es interesante hacer notar que el origen es arbitrario, y que *sólo una vez elegido* se puede hablar con propiedad del potencial de un punto. En el campo gravitatorio, el valor del potencial es  $mgh$ , donde  $h$  es la altura (con signo) del baricentro del cuerpo de masa  $m$  respecto a partir del nivel de referencia elegido.

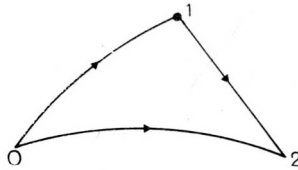


Figura 34: Esquema de cálculo de un potencial.

Si consideramos ahora dos puntos **1** y **2**, ver Figura 34, el trabajo realizado por la acción del campo en un recorrido arbitrario desde **1** hasta **2**, vale:  $T^{\vec{12}} = T^{\vec{10}} + T^{\vec{02}} = -T^{\vec{01}} + T^{\vec{02}} = U_1 - U_2$ . Este resultado tiene una importancia considerable y puede enunciarse el

*Teorema de la diferencia de potencial.* El trabajo de la acción del campo conservativo para desplazar un punto desde una posición inicial **1** hasta una posición final **2** es igual a la *disminución* del potencial en dicho recorrido.

Todos los puntos que poseen el mismo potencial forman, en general una superficie (cerrada o no, aun con varias capas o láminas) denominada superficie equipotencial. Cada punto del espacio pertenece a una única superficie equipotencial, puesto que su potencial es único. En el campo gravitatorio, las equipotenciales son esferas concéntricas con centro el de la Tierra. Puesto que el potencial no varía dentro una superficie equipotencial, el trabajo realizado por el campo a lo largo de una trayectoria cualquiera de esta superficie, vale cero. Se deduce entonces que el campo debe ser *nulo* o *perpendicular* a la superficie. Este resultado es de deducción inmediata en el campo gravitatorio.

La noción de trabajo generalizada a un sistema de fuerzas nos indica que el trabajo total es igual a la suma de los trabajos de cada una de ellas. Por analogía, parece natural ampliar la idea de potencial a este caso, siempre que *cada fuerza considerada por separado admita un potencial dado o efectúe un trabajo nulo*. El potencial del



sistema de fuerzas será la suma de los potenciales de cada una de ellas considerada independientemente. En el campo gravitatorio puede calcularse el trabajo de las fuerzas de atracción aplicadas a cada uno de sus puntos, conocidos el peso total y el desplazamiento de su baricentro. El potencial de un cuerpo resultará entonces igual a  $Mgh$ , donde  $h$  es la altura del baricentro del cuerpo respecto al nivel de referencia considerado.

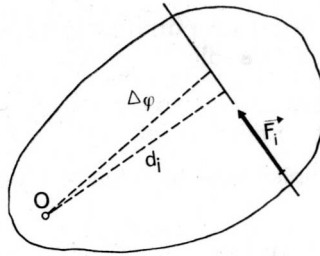


Figura 35: Rotación de un cuerpo.

Sea un cuerpo dotado de un movimiento de rotación alrededor de un eje fijo, solicitado por fuerzas exteriores, nos interesa calcular el trabajo exterior realizado al girar el cuerpo un ángulo dado. El trabajo de la fuerza  $\vec{F}_i$  para un ángulo  $\Delta\varphi$  pequeño vale, Figura 35,

$$F_i \Delta e_i = F_i d_i \Delta\varphi = M_i \Delta\varphi$$

donde  $M_i$  es el momento de la fuerza  $\vec{F}_i$ . El trabajo de las fuerzas en un giro del cuerpo es

$$T = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \sum M_i \Delta\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi$$

donde  $M$  es el momento de las fuerzas aplicadas. Si un motor desarrolla un trabajo empleando para ello un cierto tiempo, podemos medir la mayor o menor habilidad del aparato por el trabajo realizado en la unidad de tiempo. Sucede que, en general, el trabajo no se desarrolla en forma uniforme en el tiempo y entonces es necesario, para precisar nuestra definición, recurrir a intervalos de tiempo pequeños. Definimos como la *potencia* de la máquina al cociente

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

La unidad de medida de la potencia es el joule por segundo, unidad que se ha denominado *watt* o *vatio*. Así, por ejemplo, la potencia de un motor que ejerce un par  $M$ , que gira a la velocidad angular  $\omega$  viene expresada por la fórmula

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{M \Delta\varphi}{\Delta t} = M\dot{\varphi} = M\omega$$

## Energía

Si sobre un punto material actúa una fuerza  $\vec{F}$ , la ecuación de movimiento nos dice:

$$m \vec{a} = m \dot{\vec{v}} = \vec{F}$$

Si multiplicamos la ecuación por  $\vec{v} dt = d\vec{e}$  tendremos

$$m \vec{v} \times \dot{\vec{v}} dt = m \vec{v} \times d\vec{v} = m d\frac{v^2}{2} = \vec{F} \times d\vec{e} = dT$$

integrando, resulta

$$\frac{m v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2} = T^{\vec{1}\vec{2}}$$

donde  $T^{\vec{1}\vec{2}}$  es el trabajo efectuado por la fuerza a lo largo de la trayectoria descrita por el punto material, entre el punto 1 y el punto 2. Esta ecuación nos muestra que si el trabajo es positivo, la velocidad aumenta y si es negativo, disminuye. El trabajo aparece entonces como el determinante de velocidades, así como la fuerza determinaba las aceleraciones. La expresión  $E_c = m v^2/2$  se denomina *energía cinética* del punto. Se mide en  $\text{kg m}^2/\text{seg}^2$  o también en *newton-m* o *joule*. Los resultados anteriores pueden formularse bajo la forma de la

*Ley de la energía cinética.* El trabajo realizado por las fuerzas que obran sobre un punto es igual a su incremento de energía cinética.

Un caso particular se presenta cuando las fuerzas aplicadas sobre el punto admiten un potencial. El trabajo realizado es entonces

$$T^{\vec{1}\vec{2}} = U_1 - U_2$$

donde  $U_1$  y  $U_2$  son las energías potenciales del punto en esas posiciones. La ley de la energía cinética puede enunciarse ahora en una forma más expresiva

*Conservación de la energía mecánica.* La energía suma de las energías cinética y potencial,  $(E_c + U)$ , de un punto sometido a fuerzas conservativas, permanece constante durante el movimiento.

Este resultado puede aplicarse al campo gravitatorio y puede expresarse así

$$\frac{m v_1^2}{2} + m g h_1 = \frac{m v_2^2}{2} + m g h_2$$

Por último, estos resultados pueden generalizarse a un sistema de puntos materiales, sumando simplemente las ecuaciones de energía de cada punto individual. Veamos

solamente como ejemplo, la ecuación de la energía para un sólido con un eje de rotación fijo. Sea  $\omega$  la velocidad angular de un punto situado a la distancia  $r$  del eje de rotación. La energía cinética del cuerpo será

$$E_c = \sum_{total} \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum_{total} \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{total} m_i r_i^2 = \frac{K \omega^2}{2}$$

La ecuación de la energía puede escribirse entonces

$$\frac{K \omega_2^2}{2} - \frac{K \omega_1^2}{2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M(\varphi) d\varphi = T \vec{1}^2$$

### Movimiento relativo

El problema que estudiaremos en esta sección se refiere a observadores que se encuentran en movimiento entre sí. La idea central de todo este estudio se centra en una observación cotidiana: Viajando en línea recta, sin aceleraciones ni desviaciones es imposible conocer la velocidad a que nos desplazamos. En todos los casos prácticos en que nos es posible averiguarlo, intervienen circunstancias especiales, como por ejemplo, el movimiento de vaivén en un coche. Desde el punto de vista matemático el problema puede plantearse así: dado un sistema de coordenadas de referencia respecto al cual consideramos los movimientos (la Tierra, por ejemplo), que llamaremos fijo, y otro sistema de coordenadas animado de un movimiento respecto al fijo. Se trata de estudiar las leyes de la Mecánica para un observador situado en el sistema en movimiento.

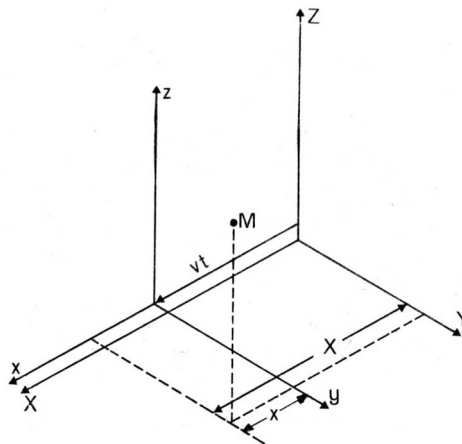


Figura 36: Estudio del movimiento relativo.

Ante todo, este observador dispone de reglas y relojes iguales a los nuestros en el sistema fijo. Consideremos el caso en que el sistema móvil está animado de un movimiento de traslación rectilíneo y uniforme y que la velocidad relativa  $v$  lleva la dirección del eje de las X, siendo éste común a ambos sistemas, Figura 36. Un punto M de coordenadas, X, Y, Z, en el sistema fijo, tendrá en el sistema móvil las coordenadas

$$\begin{aligned} X &= x + vt & Y &= y & Z &= z \\ x &= X - vt & y &= Y & z &= Z \end{aligned}$$

Un punto fijo se ve desde el sistema móvil como si estuviera dotado de un movimiento opuesto al sistema. Si ahora consideramos un punto en movimiento en el sistema fijo, su situación espacial en el sistema móvil vendrá definida por un punto que, en general, estará en movimiento con respecto a este sistema con una velocidad que llamaremos relativa, por oposición a la absoluta, considerada en el sistema fijo. Si derivamos respecto al tiempo las ecuaciones anteriores tendremos

$$\dot{X} = \dot{x} + v \quad \dot{Y} = \dot{y} \quad \dot{Z} = \dot{z}$$

pero  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  es la velocidad apreciada por el observador del sistema móvil, luego

$$\vec{V}_{abs} = \vec{V}_{rel} + \vec{V}_{sistema}$$

ecuación conocida con el nombre de *ley de adición de las velocidades*. Básicamente, esta ley no es sino una nueva versión del principio de superposición de los movimientos que ya hemos estudiado. Puede enunciarse en forma general (aun para sistemas en movimiento no uniforme ni rectilíneo)

*Ley del movimiento relativo.* La velocidad absoluta de un punto es igual a la velocidad relativa que posee respecto a un sistema de coordenadas de referencia, más la velocidad con que este sistema de coordenadas arrastra al punto.

Si derivamos una vez más respecto al tiempo tendremos

$$\ddot{X} = \ddot{x} \quad \ddot{Y} = \ddot{y} \quad \ddot{Z} = \ddot{z}$$

la *aceleración absoluta coincide con la aceleración relativa*. Si el sistema posee un movimiento acelerado, ya no es válida esta afirmación y aparece un sumando de aceleración de arrastre. En el caso de que el sistema de coordenadas gire, aparece una tercera componente de la aceleración que se denomina aceleración de Coriolis. El estudio de estos casos escapa de los límites de este libro.

Estudiemos la ecuación de movimiento en el sistema móvil. Procediendo a la ligera tendríamos

$$\vec{F} = m \vec{a}_{abs} \quad \vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} \quad \text{luego} \quad \vec{F} = m \vec{a}_{rel}$$

lo cual indica que la ley de Newton es válida también en el sistema relativo. Sin embargo, esta afirmación implica un grave error físico. Tanto la masa como la fuerza son físicamente medibles, y es necesario plantearse primero si un observador situado en el sistema móvil puede medirla y qué valores determina. La ecuación que hemos obtenido contiene la masa y la fuerza *medidas en el sistema fijo y no en el móvil* y, por consiguiente, si el observador del sistema móvil aplicara la ecuación de Newton escribiría en realidad  $m_{rel} \vec{a}_{rel} = \vec{F}_{rel}$  si pudiese medir la masa y la fuerza.

Es indudable que el observador en el sistema móvil puede medir fuerzas, le basta poseer un dinamómetro. Sin embargo, no es evidente que pueda medir masas. La masa fue definida como la constante de proporcionalidad entre la fuerza y la aceleración resultante, definición que implica la proporcionalidad de ambas y por lo tanto la validez de la ley de Newton. Nos encontramos en una situación tal que para medir masas, el observador del sistema móvil debe verificar antes la ley de Newton.

Por otra parte, nada nos asegura por el momento que la lectura de un dinamómetro en el sistema móvil coincida con la correspondiente en el sistema fijo. La única forma de resolver esta situación es recurrir a la experiencia.

*Validez de la ley de Newton.* La experiencia nos muestra que la ley de Newton es válida también en el sistema móvil y que la lectura del dinamómetro coincide con la realizada en el sistema fijo.

Obsérvese que la validez de la ley de Newton no implica que las fuerzas conserven su valor, puesto que sin dejar de ser proporcionales las fuerzas y las aceleraciones, aquéllas podrían, por ejemplo, duplicarse. Este hecho experimental encierra un contenido físico enorme. Una de sus consecuencias inmediatas es que

*Principio de relatividad de Galileo.* Las leyes de la mecánica son idénticas en dos sistemas en movimiento rectilíneo y uniforme entre sí.

Como ya sabemos, la ley de Newton es válida en un sistema de coordenadas solidario con las estrellas fijas, luego lo es también en todo sistema que posea un movimiento rectilíneo y uniforme respecto a ellas. Estos sistemas de coordenadas reciben el nombre de sistemas inerciales o de Galileo, por oposición a los sistemas acelerados, que son aquellos que no poseen esta propiedad y donde no vale la ley de Newton, como es el caso de la Tierra donde vale solamente como una aproximación.

Debe señalarse que el principio de relatividad es aún más importante que la ley de Newton como veremos en el capítulo final de este libro.

# Campo electrostático en el vacío

## Naturaleza eléctrica de la materia

Haremos una breve reseña de la estructura de la materia, que su pondremos conocida a grandes rasgos. La materia se encuentra formada (microscópicamente, en el sentido de estructura última) por agrupaciones complejas de gran estabilidad, denominadas átomos. El átomo es de reducidas dimensiones, del orden de  $10^{-9}$  cm, su masa es del orden de  $10^{-25}$ . kg y está constituido por partículas. El número de partículas que integran el átomo es variable y puede llegar a ser de varios cientos. El conjunto de todas ellas, en cantidad y calidad, rige las diversas propiedades de la materia. En una forma simplificada, las partículas constituyentes del átomo son:

<i>electrón</i>	masa	$9,109 \times 10^{-31}$ kg
	carga	$-1,602 \times 10^{-19}$ Coulomb
<i>protón</i>	masa	$1,672 \times 10^{-27}$ kg
	carga	$+1,602 \times 10^{-19}$ Coulomb
<i>neutrón</i>	masa	$1,672 \times 10^{-27}$ kg
	carga	cero

Estas partículas se agrupan en “sistemas solares”, los electrones giran alrededor del núcleo que está formado por protones y neutrones. El número de protones es igual al de electrones, de modo que el átomo es eléctricamente neutro.

Sin embargo, es posible mediante el frotamiento de dos cuerpos o estableciendo un estrecho contacto entre ambos, establecer una transferencia de cargas de un cuerpo a otro. Si entonces, se separan los cuerpos, quedan ambos cargados con cargas eléctricas iguales y de signo opuesto.

A fin de completar un poco la laguna creada por la exposición precedente, debemos aclarar que la carga eléctrica se mide en Coulomb, por procedimientos que veremos más adelante. Esta medición podría hacerse, de un modo ideal, contando el número de electrones y de pro-tones presentes en cada cuerpo, o en general, el número de partículas cargadas. Este procedimiento es consistente, puesto que todas las partículas elementales cargadas conocidas, poseen o bien la carga del electrón o bien la del protón.

Este hecho tiene un alcance teórico importante, porque fija una unidad natural

de medida de la carga. Es de esperar que algún día se defina la unidad macroscópica de medida (el Coulomb) con referencia a la carga elemental. Por otra parte el procedimiento evidencia la naturaleza discontinua de la carga eléctrica: sólo es posible obtener valores macroscópicos de carga en cantidades que son múltiplos de la carga elemental. Sin embargo, en la mayor parte de los casos pueden considerarse valores continuos debido a la pequeñez de la carga elemental frente a los errores experimentales cometidos en una medida macroscópica.

## Campo eléctrico

Aunque parezca paradójico, no existe todavía una definición precisa e inobjetable que caracterice a los fenómenos electromagnéticos. La dificultad física que se encuentra para lograr una definición adecuada, la introduce el campo gravitatorio. En el fondo de la realidad física los fenómenos gravitatorios y electromagnéticos presentan tales semejanzas que han inspirado teorías que identifican de un modo u otro estos conjuntos de fenómenos. No intentaremos, por tanto, dar una definición que oculte la verdadera naturaleza del problema. La situación que adoptaremos será trivial, y consideraremos que *los fenómenos electromagnéticos son los estudiados en este libro*.

En un cuerpo de prueba, situado en el espacio, en presencia de otros cuerpos cargados, aparecen fuerzas de origen eléctrico. Estamos, pues, frente a un campo de fuerzas, y al tema de la existencia de tales fenómenos responden en su mayor parte los estudios que seguirán.

La extensión natural del concepto de cuerpo puntual, generalizado al campo de fuerzas eléctrico, es la de *cuerpo puntual cargado* o *carga puntual*. Una carga puntual de ensayo nos permite medir la fuerza ejercida sobre ella en cada punto del espacio, utilizando el mismo dinamómetro que empleábamos en el campo de gravitación.

Los primeros hechos experimentales realizados, permiten deducir las siguientes propiedades:

1. Cualquiera que sea el cuerpo de ensayo, la dirección de la fuerza es la misma.
2. El sentido de la fuerza depende del signo de la carga de prueba y su intensidad es proporcional a ésta.

Matemáticamente, la fuerza ejercida sobre la carga  $q$  vale

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

donde  $\vec{F}$  es la fuerza ejercida y  $\vec{E}$  es un vector propio de cada punto que llamamos *intensidad de campo eléctrico* o más brevemente *campo eléctrico*. El campo eléctrico se define entonces como la fuerza ejercida sobre una carga puntual positiva de 1 *coulomb*. La unidad de medida será, naturalmente, el *newton/coulomb*.



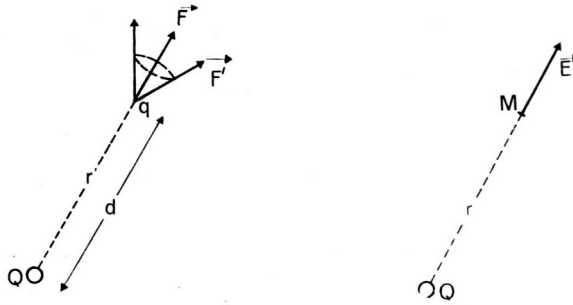


Figura 37: El campo eléctrico de una carga puntual.

Pasemos ahora a estudiar el campo eléctrico, que crea una carga  $Q$  en el vacío. Si colocamos una carga  $q$ , Figura 37, a una distancia  $d$  de  $Q$ , la fuerza ejercida sobre  $q$  debe poseer la dirección de la recta  $r$  que une ambas cargas; de otro modo, si fuera una fuerza tal como la  $\vec{F}$ ; girando las cargas alrededor de la recta  $r$ ,  $\vec{F}'$  también debería girar. Pero como la rotación de las cargas no afecta para nada la posición relativa de las mismas, el vector  $\vec{F}'$  debe permanecer fijo. Por otra parte, la fuerza sólo puede depender de la distancia  $d$  y no de la orientación de las cargas, puesto que, como hemos indicado, la situación relativa es la misma.

Todos nuestros razonamientos son confirmados por la experiencia, la cual nos muestra, además, que la fuerza depende de la distancia y de la magnitud de las cargas:

*Ley de Coulomb.* La fuerza ejercida entre dos cargas puntuales de magnitudes  $Q$  y  $q$ , separadas por una distancia  $d$ , es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ambas.

La fuerza será de atracción si ambas cargas  $Q$  y  $q$  tienen signos contrarios y de repulsión cuando son del mismo signo. La acción de  $Q$  sobre  $q$  es igual y contraria a la de  $q$  sobre  $Q$ , de acuerdo con la ley de acción y reacción.

Esta ley se puede expresar en la forma matemática como

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{d^2}$$

donde  $\epsilon_0$  es una *constante universal* denominada constante dieléctrica absoluta del vacío. Su valor es  $\epsilon_0 = 0,88542 \times 10^{-11} \approx 1/36\pi \times 10^{-9}$ .

Hay que hacer notar que los razonamientos expuestos sobre la dirección de la fuerza ejercida sobre  $q$ , pueden no ser convincentes, porque nada nos asegura que la fuerza dependa sólo de la situación relativa de las cargas, ya que podría depender de otras variables como, por ejemplo, la orientación de  $r$  respecto al eje de giro de la Tierra o cualquier otro elemento físico. Sin embargo, en lo sucesivo, recurriremos

en múltiples ocasiones a razonamientos similares al expuesto. La validez física de estos razonamientos basados en el *principio de simetría*, se apoya en que los fenómenos eléctricos dependen únicamente de la situación relativa de sus diversos elementos *sin que intervenga ninguna causa exterior determinante* (como podría ser el eje de giro de la Tierra). Esta afirmación no es sino una primera forma elemental del *principio de relatividad aplicado a los fenómenos eléctricos*.

Nos proponemos ahora investigar el campo creado por una carga puntual tomando como base la ley de Coulomb, Figura 37. Sea una carga de ensayo de  $q$  coulomb. La intensidad de campo eléctrico tiene por módulo

$$E = \frac{F}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Su dirección es radial y su sentido es saliente, si  $Q$  es positiva (las cargas se repelen) o entrante en el caso contrario.

### Potencial del campo de una carga puntual

Conviene recordar que las expresiones del tipo  $\sum \vec{F} \times \vec{e}$  se utilizaban para calcular el trabajo de una fuerza al desplazar su punto de aplicación dentro de una cierta trayectoria. En los estudios que seguirán tendremos necesidad reiterada de calcular expresiones similares para algunos vectores que ya no serán fuerzas. Esto hace conveniente introducir la siguiente definición:

Llamamos *circulación* del vector  $\vec{A}$  a lo largo de una curva definida, al límite cuando  $e_i \rightarrow 0$  de la sumatoria  $\sum \vec{A}_i \times \vec{e}_i$  en la que los vectores  $\vec{e}_i$  forman una poligonal que sigue al trazado de la curva. Lo escribimos *circ*  $\vec{A}$ .

Existe una relación directa entre la circulación del campo eléctrico  $\vec{E}$  a lo largo de la curva y el trabajo de la acción del campo sobre un cuerpo de ensayo de carga  $q$ , en la misma trayectoria

$$T = \lim \sum \vec{F} \times \vec{e} = \lim \sum q\vec{E} \times \vec{e} = q \lim \sum \vec{E} \times \vec{e} = q \text{ circ } \vec{E}$$

Consideremos el campo  $\vec{E}$  creado por una carga  $Q$  puntual. La circulación de  $\vec{E}$  sobre una curva cualquiera situada en una esfera de centro  $\mathbf{Q}$ , Figura 38, vale cero. En efecto, el campo es perpendicular a la curva en todos sus puntos y por lo tanto  $\vec{E} \times \vec{e} = 0$ .

La circulación de  $\vec{E}$  lo largo de dos segmentos radiales, comprendidos entre las mismas esferas de centro  $\mathbf{Q}$ , Figura 39, Circulación del campo eléctrico sobre una

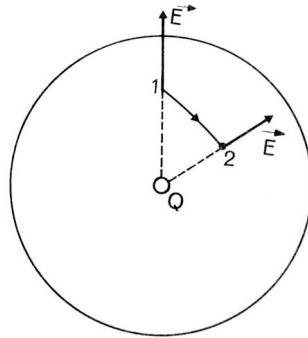


Figura 38: Circulación del campo eléctrico sobre una esfera.

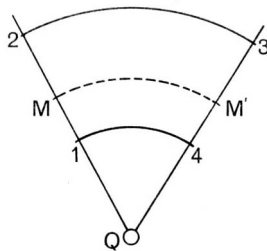


Figura 39: Circulación del campo eléctrico sobre un radio.

esfera, tiene el mismo valor. En efecto,  $\vec{E}$  y  $\vec{e}$  están en la misma recta y ambos dependen solamente de las distancias al centro  $Q$ , son iguales entre sí.

La circulación de  $\vec{E}$  sobre una curva cualquiera depende sólo de los puntos inicial y final, ver Figura 40. En efecto, si sustituimos la curva  $\widehat{12}$  por la quebrada  $\widehat{1a} \overline{a'b} \widehat{b'c} \overline{c'd} \dots \widehat{d'2}$ , de suficiente número de lados para que no se cometa error apreciable en la sustitución, tendremos

$$\begin{aligned}
 \text{circ } \widehat{1a} &= 0 \\
 \text{circ } \overline{aa'} &= \text{circ } \overline{1'a''} \\
 \text{circ } \widehat{a'b} &= 0 \\
 \text{circ } \overline{bb'} &= \text{circ } \overline{a''b''} \\
 &\dots \\
 \text{circ } \widehat{d'd''} &= 0 \\
 \text{circ } \overline{d'2} & \\
 \text{circ } \widehat{12} &= \text{circ } \widehat{1'2}
 \end{aligned}$$

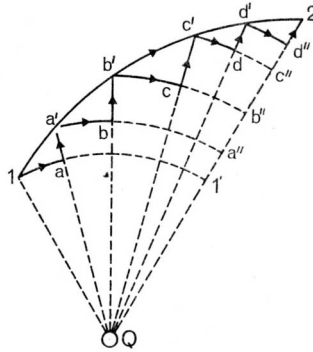


Figura 40: Circulación del campo eléctrico en una curva cualquiera.

Luego la circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de la curva  $\widehat{12}$  coincide con la circulación sobre el radio  $\widehat{1'2'}$  y *no depende de la forma de la curva*, solamente de los puntos extremos. Estamos precisamente ante un caso *conservativo*. Es posible definir pues un *potencial del campo  $\vec{E}$*  o *potencial eléctrico* como

$$circ_{12} \vec{E} = \varphi_1 - \varphi_2$$

y todavía tenemos libertad para elegir el origen de potenciales. *Se toma, siempre que esto sea posible, un potencial eléctrico de valor cero en el infinito*. Esta convención está fundada en varias razones de las cuales hay dos excelentes: la Tierra es un cuerpo extremadamente grande frente a los fenómenos eléctricos que habitualmente se estudian y, por tanto, puede considerarse infinita, y en ciertas hipótesis, se puede admitir que todos sus puntos están al mismo potencial, cuyo valor, de acuerdo con las convenciones tomadas, vale cero; la elección de este potencial nulo en el infinito tiene la ventaja de establecer *un criterio idéntico para todos los fenómenos que se estudian* lo cual resulta importante al aplicar el principio de superposición.

El potencial de un punto situado a una distancia  $r$  de la carga puntual  $Q$  será entonces, ver Figura 37,

$$\varphi(r) = circ \vec{E} = \int_r^\infty E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

a unidad de medida del potencial eléctrico es *newton-metro/coulomb=joule/coulomb*, unidad que, por su importancia, se llama *volt* o *voltio*.

Las superficies equipotenciales del campo son esferas de centro  $Q$ . Puede comprobarse de nuevo la perpendicularidad del campo y las superficies equipotenciales.

Por analogía con el trabajo de una fuerza sobre una carga  $q$  se deduce inmediatamente la relación entre el trabajo de la acción del campo y el potencial eléctrico

$$T_{12} = q circ \vec{E} = q (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Con esta relación, la ecuación de la energía mecánica de la partícula cargada es

$$\frac{mv^2}{2} + q\varphi$$

y es constante durante el movimiento en un campo eléctrico.

### Flujo del campo de una carga puntual

Consideremos una superficie  $S$ , Figura 41, limitada por una curva de contorno  $C$ . En la superficie podemos distinguir dos caras que pueden ser individualizadas perfectamente considerando la interior o parte cóncava, y la exterior o parte convexa. Llamamos normal a la superficie en un punto, a un vector de módulo 1, de dirección perpendicular a la superficie en el punto dado y de sentido, saliente a la cara que se considera.

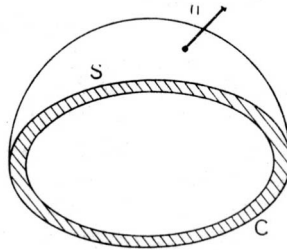


Figura 41: La definición de flujo.

Supongamos un campo de vectores  $\vec{A}$  (el campo eléctrico, por ejemplo) y elijamos una cara de la superficie. Supongamos que la superficie está dividida en elementos pequeños, de superficie  $\Delta S$ , y que para cada uno de ellos calculamos

$$\vec{n} \times \vec{A} \Delta S$$

donde  $\vec{n}$  es la normal saliente a la cara considerada. La suma de todas estas expresiones define el

*Flujo saliente de un campo de vectores sobre una superficie.* Se define como  $\lim \sum \vec{n} \times \vec{A} \Delta S$  cuando  $\Delta S \rightarrow 0$ . La suma se extiende a toda la superficie considerada.

Consideremos una carga puntual  $Q$  y una esfera con centro en la carga. El campo eléctrico de valor constante y normal a la esfera considerada, luego el flujo saliente del campo eléctrico vale

$$\Phi_S = \lim \sum \vec{n} \times \vec{E} \Delta S = E \lim \sum \Delta S = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

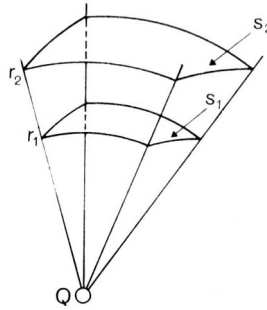


Figura 42: Flujo sobre dos trozos de esferas.

El flujo saliente del campo eléctrico que atraviesa dos trozos de superficie esférica delimitado por un cono, todos estos elementos con centro en la carga puntual, es igual. En efecto, ver Figura 42, como el campo es normal y constante, se obtiene

$$\Phi_1 = E_1 S_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{S_1}{r_1^2}$$

$$\Phi_2 = E_2 S_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{S_2}{r_2^2}$$

pero las superficies  $S_1$  y  $S_2$  están en la relación de los cuadrados de los radios, luego

$$\frac{S_1}{r_1^2} = \frac{S_2}{r_2^2}$$

y, por lo tanto,  $\Phi_1 = \Phi_2$ .

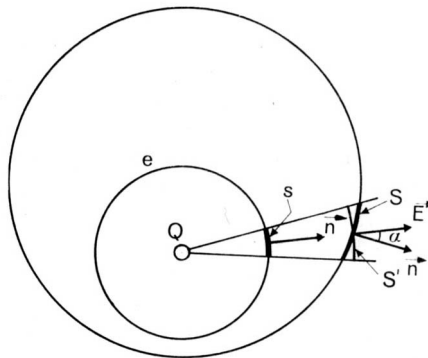


Figura 43: Flujo sobre una superficie que envuelve a la carga.

El flujo saliente de  $E$  que atraviesa una superficie cerrada cualquiera *que envuelva* el punto  $Q$  vale  $Q/\epsilon_0$ . En la Figura 43 si subdividimos la superficie en elementos

pequeños como el  $\Delta S$  y consideramos una esfera  $e$ , de centro  $Q$  y radio cualquiera, tendremos

$$\Delta\Phi = \vec{n} \times \vec{E} \Delta S = E \cos \alpha \Delta S$$

pero como  $\Delta S$  es un elemento de superficie, el producto  $\cos \alpha \Delta S$  coincide con el área de un elemento de superficie esférica  $\Delta S'$ , de centro en  $Q$ . Luego el flujo de  $\vec{E}$  sobre  $\Delta S$  coincide con el flujo sobre  $\Delta S'$  y con el flujo sobre  $\Delta s$ . Por consiguiente, el flujo que atraviesa la superficie dada es igual al de la esfera  $e$  y vale  $Q/\epsilon_0$ .

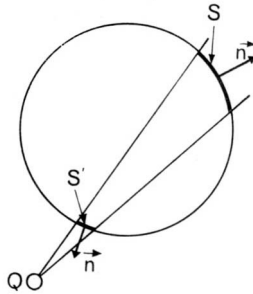


Figura 44: Flujo sobre una superficie que no envuelve a la carga.

El flujo saliente de  $\vec{E}$  que atraviesa una superficie cerrada cualquiera *que no envuelve* a  $Q$  vale cero. En efecto, si consideramos un cono de pequeña abertura que corte a la superficie en dos elementos  $\Delta S$  y  $\Delta S'$ , ver Figura 44, sabemos que los flujos que los atraviesan coinciden en valor —como podríamos demostrar razonando como antes— con la salvedad de que al tomar el flujo saliente de la superficie total hay que considerar *los flujos tienen signos opuestos*. Por consiguiente, el flujo total sobre la superficie es cero, ya que los flujos parciales son iguales y de signo contrario.

Los resultados obtenidos se pueden resumir en un enunciado muy sintético:

*Flujo del campo eléctrico.* El flujo saliente del campo en una superficie cerrada vale  $Q/\epsilon_0$  donde  $Q$  es la carga encerrada por la superficie.

## Sistemas de cargas

Todas las propiedades del campo eléctrico estudiadas hasta ahora se refieren a una carga puntual y son consecuencia directa de la ley de Coulomb. En caso de existir sistemas de cargas complejos es necesario introducir un *principio de superposición* que permita calcular las acciones de un sistema de cargas por la composición de las acciones independientes de cada carga. Naturalmente un principio de tal naturaleza *tiene un origen puramente experimental* y está justificado por la validez entre sus consecuencias y los resultados experimentales. Todo *argumento teórico* que intente demostrar el principio

de superposición no es correcto desde el punto de vista físico. La relatividad general nos muestra, por ejemplo, que para el campo gravitatorio no es válido un principio de superposición como el que enunciamos a continuación:

*Principio de superposición de los campos eléctricos.* El campo creado por un sistema de cargas, en cada punto del espacio, es la suma vectorial de los campos que crea cada carga por separado.

Se puede pensar que este principio es idéntico al de adición de fuerzas; sin embargo, no es así. Si bien una carga individual ejerce en cada punto una fuerza dada por la ley de Coulomb, podría ocurrir que cada par de cargas ejerciera *además* una fuerza suplementaria, que fuera, por ejemplo, proporcional al producto de ambas. El principio de superposición expresa algo nuevo, más allá de la adición de fuerzas.

Como consecuencia del principio de superposición, el potencial eléctrico en cada punto es la suma de los potenciales de cada carga. En efecto, si calculamos la circulación de  $\vec{E}$  sobre una curva tendremos

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i \quad \vec{E} \times \vec{e} = \sum \vec{E}_i \times \vec{e}$$

luego, la circulación del campo eléctrico es la suma de las circulaciones de los campos de cada carga individual. Como consecuencia:

*La circulación del campo eléctrico.* La circulación del campo eléctrico no depende de la curva elegida y sólo depende del punto origen y del destino. El campo eléctrico es *conservativo*.

Como la circulación del campo eléctrico no depende del camino seguido, *admite un potencial* que es igual a

$$\text{circ}_{12} \vec{E} = \sum (\varphi_{1,i} - \varphi_{2,i}) = \sum \varphi_{1,i} - \sum \varphi_{2,i}$$

luego  $\varphi = \sum \varphi_i$ . Por otra parte, si los potenciales individuales se anulan en el infinito, el potencial suma también lo hará.

El flujo saliente del campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada es la suma de los flujos de cada campo individual, como el lector puede comprobar en forma inmediata, por un procedimiento similar al anterior. Tenemos entonces:

*Flujo del campo eléctrico.* El flujo saliente del campo eléctrico que atraviesa una superficie cerrada vale  $Q/\epsilon_0$  donde  $Q$  es la carga total encerrada por la superficie.



En ciertos problemas se presenta el caso de una distribución de cargas sobre una línea. Desde el punto de vista de cálculo, es incómodo considerarla como una agrupación de cargas puntuales y es más simple estudiarla como una distribución continua de cargas. Hablaremos entonces de una *densidad lineal de cargas*. En forma análoga podemos estudiar las distribuciones de cargas en superficies o volúmenes utilizando la descripción matemática continua y una *densidad superficial de cargas* o *densidad volumétrica de cargas*. El paso del caso discreto al caso continuo no presenta ninguna novedad y se lo ha utilizado en varias ocasiones.

Es importante puntualizar que la electricidad es *discontinua* y que se comete un error conceptual cuando se explica un fenómeno tomando como base una descripción continua, adoptada por razones de comodidad. Por ejemplo, al definir físicamente el campo eléctrico de un sistema de cargas consideramos la introducción de una carga de ensayo que puede modificar ligeramente la distribución de las cargas presentes y, por tanto, el campo a medir. Si la carga es pequeña, la modificación también lo es, y *puede hacerse tan pequeña como se desee* disminuyendo suficientemente el valor de la carga de prueba considerada. Esta definición es correcta si se refiere a un fenómeno *macroscópico*, pero no lo es al nivel del electrón. En efecto, en este caso sólo se puede introducir como mínimo un electrón como carga de prueba y no menos. Al estar el campo creado por unos pocos electrones, *la modificación inevitable será grande e imposible de disminuir*.

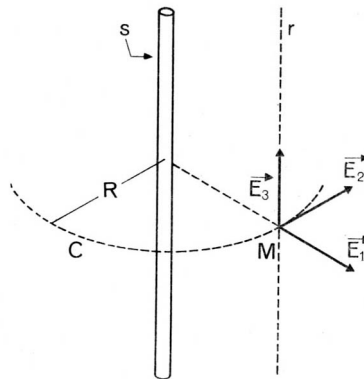


Figura 45: Campo eléctrico de una recta infinita.

## Campo de sistemas de cargas

*Ejemplo 1.* Consideremos una distribución de cargas en una recta, Figura 45. Sea  $s$  coulomb/metro la densidad de carga, que supondremos constante. Nos proponemos hallar el campo  $\vec{E}$  creado por este sistema de cargas. En un punto  $M$  se puede suponer

que la intensidad de campo consta de tres componentes  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  como se indica en la figura. El valor de  $\vec{E}$  debe ser igual en todos los puntos de la circunferencia  $C$ , dibujada a trazo discontinuo, puesto que la situación relativa entre el punto considerado y la recta indefinida de distribución de cargas es la misma. Si ahora tomamos la circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de la circunferencia tendremos

$$\text{circ } \vec{E} = 2\pi R E_2 = 0$$

pero por tratarse de una curva cerrada, se confunden el punto inicial y el final y coinciden sus potenciales, luego la circulación vale cero. Como consecuencia  $E_2 = 0$ .

Consideremos ahora una recta  $r$  paralela a la recta de las cargas. En todos los puntos de  $r$  el campo debe ser el mismo, porque de nuevo la situación relativa entre el punto considera y las cargas es idéntica. Por otra parte, si se simetrizan las cargas respecto a un plano perpendicular a la recta de las cargas, el campo debería invertirse por la simetría y no debería porque la situación relativa es igual, luego debe ocurrir  $\vec{E}_3 = 0$ .

Queda entonces solamente un campo radial cuya intensidad como sabemos, depende solamente de la distancia a la recta cargada. Consideremos un cilindro de radio  $R$  y altura  $H$ , con el eje sobre la recta de distribución de cargas, Figura 46. Calculemos el flujo de  $\vec{E}$  en este cilindro.

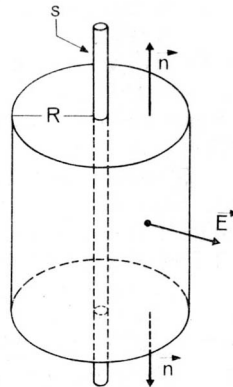


Figura 46: Campo eléctrico de una recta cargada.

El flujo del campo en la superficie lateral del cilindro es el producto de la intensidad de campo por el área, puesto que el campo es constante en la superficie y normal a ella. El flujo en las bases del cilindro es nulo, puesto que la intensidad de campo es perpendicular a la normal a la superficie. El flujo total es, pues,  $\Phi = 2\pi R H E_1$ . Por otra parte, la ley del flujo, nos da  $\Phi = Hs/\epsilon_0$  por la carga contenida dentro de la superficie. Se tiene entonces

$$E_1 = \frac{s}{2\pi\epsilon_0 R}$$

Hemos obtenido la expresión completa del campo creado por el sistema de cargas. Para el cálculo del potencial eléctrico, procederemos a una sencilla integración a lo largo de una recta radial

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_1 dR = \frac{s}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

En este caso resulta imposible referir el potencial cero a un punto del infinito, ya que entonces su valor sería infinitamente grande, tal como muestra la ecuación de diferencias de potencial. Ésta es una situación frecuente cuando se estudian sistemas de cargas ilimitados, tal como ocurre en el presente caso. Sin embargo, en las aplicaciones prácticas sólo se presentan diferencias de potencial entre puntos separados por una distancia finita. En forma intuitiva podemos imaginar que existen cargas en el infinito que hacen que allí el potencial sea también infinito.

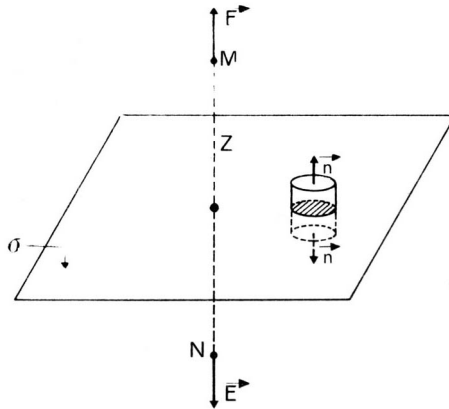


Figura 47: Campo de un plano cargado.

*Ejemplo 2.* Consideremos una distribución de cargas en un plano indefinido según la Figura 47. Sea  $\sigma$  la densidad de carga por unidad de superficie (*coulomb/metro<sup>2</sup>*) que supondremos constante. La intensidad de campo en un punto M debe ser perpendicular al plano, puesto que la situación es idéntica en todas las direcciones paralelas al plano. Por la misma razón la intensidad de campo en el punto N simétrico especular de M respecto al plano debe ser también igual y simétrica. El principio de simetría nos indica que los puntos que están a la misma distancia  $z$  del plano deben tener la misma intensidad de campo. Consideremos ahora el cilindro de la figura y calculemos el flujo saliente del campo eléctrico. El flujo que atraviesa las superficies laterales es cero, por ser  $\vec{n}$  y  $\vec{E}$  perpendiculares a las mismas. En las bases del cilindro se tiene  $\Phi = 2S E$ .

La carga encerrada por el cilindro vale  $Q = S\sigma$ , luego la ley del flujo da

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

El campo es constante. Es sencillo calcular la diferencia de potencial entre dos puntos del espacio. Si referimos el potencial cero al plano de distribución de cargas, el potencial de cada punto del espacio vale

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$$

*Ejemplo 3.* Consideremos una distribución de cargas en dos planos paralelos indefinidos, Figura 48. Suponemos nuevamente que la densidad superficial de carga  $\sigma$ , es constante en cada plano y de signo opuesto en ambos. Estudiaremos el campo dividiendo el espacio en tres zonas diferentes. De modo análogo al ejemplo 2, las intensidades de todos los campos son perpendiculares a los planos. Las intensidades en las zonas 1 y 3 en los puntos simétricos respecto al plano ideal medio de la zona 2 son iguales y poseen la misma dirección, puesto que a igualdad de separación existen cargas iguales pero de signo opuesto.

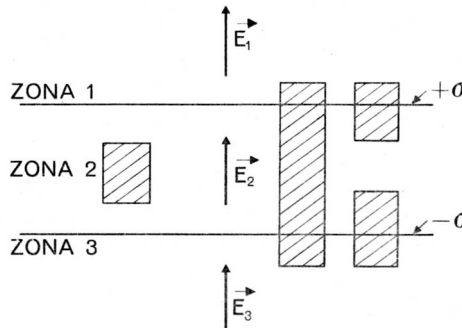


Figura 48: Campo eléctrico de los planos cargados y paralelos.

Considerando un cilindro con sus bases en las zonas 1 y 3 y aplicando la ley del flujo, como la carga total encerrada por el cilindro es cero, resulta  $E_1 = E_3 = E$ . El campo en la zona 2 es constante porque un cilindro en esta zona no encierra carga. Si consideramos un cilindro con una base en la zona 1 y otra en la zona 2 tendremos, aplicando la ley del flujo

$$S(E - E_2) = \frac{S\sigma}{\epsilon_0}$$

En las zonas 2 y 3 tendremos, análogamente, el mismo resultado. En este caso ya no es posible deducir más ecuaciones a partir de la ley del flujo. Sin embargo, encontramos

que, en ausencia de cargas distribuidas en los planos, la intensidad de campo debe ser cero. Esto implica que para  $\sigma = 0$ , debe ser  $E_2 = 0$ . Como disponemos de la ecuación suplementaria  $E = 0$ , que queda

$$E_2 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Esta solución elimina la posibilidad (existente en las primeras ecuaciones obtenidas) de la existencia de un campo constante aplicado, exterior al sistema.

Este caso se puede resolver por otro camino, aplicando el principio de superposición a dos planos paralelos de cargas distribuidas iguales a los estudiados en el *Ejemplo 2*. Obtenemos inmediatamente

campo	creado por	valor
zona 1	plano $+\sigma$	$+\sigma/2\epsilon_0$
zona 1	plano $-\sigma$	$-\sigma/2\epsilon_0$
zona 1	suma	0
zona 2	plano $+\sigma$	$-\sigma/2\epsilon_0$
zona 2	plano $-\sigma$	$-\sigma/2\epsilon_0$
zona 2	suma	$-\sigma/\epsilon_0$

La intensidad del campo en la zona 3 también vale 0 y el cálculo es idéntico al de la zona 1. Obtenemos, por aplicación directa del principio de superposición, que el campo es nulo en las zonas 1 y 3. Vale  $-\sigma/\epsilon_0$  en la zona 2 y está dirigido desde el plano cargado  $+$  hacia el plano cargado  $-$  (sentido contrario al dibujo de los vectores en la figura considerada). La diferencia de potencial entre los planos, si  $e$  es la separación entre ambos es

$$\frac{\sigma e}{\epsilon_0}$$

*Ejemplo 4.* Consideremos una distribución espacial de cargas en un semiespacio indefinido, Figura 49, de densidad  $\rho$  (*coulomb/metro*<sup>3</sup>) constante. Por consideraciones similares a los casos anteriores, la intensidad de campo es normal al plano de separación y depende sólo de la distancia  $z$  a él. En el semiespacio inferior  $z < 0$ , el campo es constante y de valor  $E$ , puesto que un cilindro de eje normal al plano de separación encierra carga nula. Aplicando la ley del flujo a un cilindro con bases en los dos semiespacios, tendremos

$$S (E(z) - E) = \frac{S z \rho}{\epsilon_0}$$

Como en ausencia de cargas, el campo  $E(z)$  es nulo, debe cumplirse  $E = 0$  luego el campo creado por las cargas vale 0 para  $z < 0$  y en  $z > 0$  vale

$$E(z) = \frac{z \rho}{\epsilon_0}$$

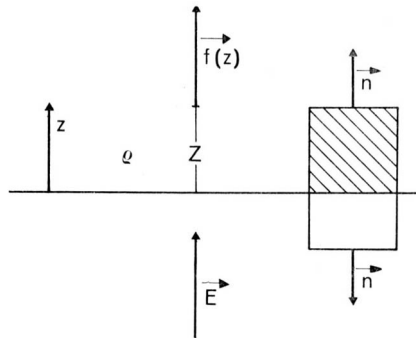


Figura 49: Campo de un semiespacio cargado.

*Ejemplo 5.* Aplicando el principio de superposición al resultado del Caso 4, puede hallarse el campo creado por una banda cargada, de espesor  $e$ , comprendida entre dos planos paralelos. El valor de la diferencia de potencial entre los bordes de la banda es

$$\frac{e^2 \rho}{2\epsilon_0}$$

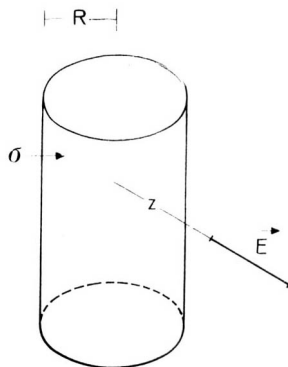


Figura 50: Campo de un cilindro infinito cargado en su superficie.

*Ejemplo 6.* Consideremos una distribución superficial de cargas, de densidad constante  $\sigma$ , sobre un cilindro de revolución de longitud indefinida, Figura 50. Este ejemplo es similar al primero por lo que prescindimos de los detalles de razonamiento. No obstante, daremos el resultado final. En el interior del cilindro el campo es nulo. En el exterior vale

$$E(z) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 z}$$

donde  $z$  es la distancia radial medida desde el eje del cilindro. Si ahora consideramos dos cilindros concéntricos de radios  $R$  y  $r$  con la misma carga  $s$  por unidad de longitud (*coulomb/metro*), el principio de superposición nos da:

zona	valor
$z < r$	0
$r < z < R$	$s/2\pi\epsilon_0 z$
$z > R$	0

La diferencia de potencial entre los cilindros es

$$\frac{s}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

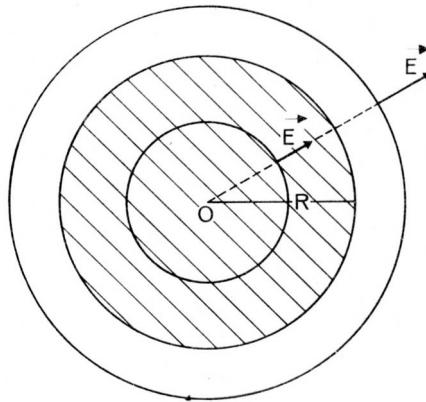


Figura 51: Esfera cargada con una densidad volumétrica constante.

*Ejemplo 7.* En el capítulo siguiente se estudia una distribución superficial de cargas sobre una esfera, por lo cual no estudiaremos aquí este caso. En su lugar estudiaremos una esfera con cargas volumétricas distribuidas. Supongamos, como tal puede verse en la Figura 51, una esfera de radio  $R$  cargada uniformemente en todo su volumen con una carga total encerrada  $Q$ . Debido a la simetría volumétrica del problema, los campos son todos radiales. La intensidad del campo exterior a la esfera, en todos los puntos de una esfera concéntrica a la dada valdrá, según la ley del flujo

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

donde  $r$  es la distancia del punto al centro de la esfera. En una esfera interior a la dada, la ley del flujo nos da

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3}$$

Este ejemplo posee un interés adicional. Como el campo gravitatorio cumple las mismas leyes que el campo eléctrico (la ley de gravitación universal es la correlativa de la ley de Coulomb), los resultados obtenidos muestran la variación de  $g$  en el interior de la Tierra.

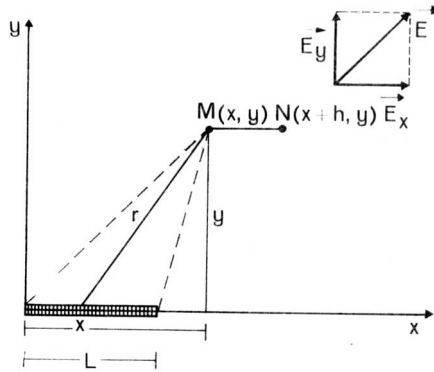


Figura 52: Campo eléctrico de un segmento cargado.

*Ejemplo 8.* En toda la exposición precedente, los ejemplos tratados poseían particularidades especiales de simetría que permitían aplicar directamente las leyes generales del campo. Además de estos métodos geométricos que acaban de describirse, el principio de superposición permite estudiar casos más complicados y laboriosos. En particular, veremos un método de cálculo, basado en la superposición, que posee un carácter general y es representativo de los métodos de cálculo de campos. Consideremos, Figura 52, un segmento de longitud  $L$ , con una densidad de carga lineal  $\sigma$  constante. Nos proponemos hallar el potencial en un punto de coordenadas  $(x, y)$  situado en el plano del segmento. Dividiendo el segmento en trozos  $\Delta u$  muy pequeños, aplicando el principio de superposición de los potenciales, e integrando, tendremos

$$\varphi(x, y) = \lim \sum \frac{\sigma \Delta u}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{\sigma du}{\sqrt{(x-u)^2 + y^2}}$$

Esta integral es sencilla de calcular y se encuentra en las tablas.

Una vez determinado el potencial de un punto del plano, calcularemos el campo por un procedimiento que es inverso al cálculo de la circulación y obtendremos las componentes según los ejes  $x$  e  $y$ . La circulación del vector  $\text{circ}\vec{E}$  a lo largo del



segmento  $\overline{MN}$  desde el punto  $M(x, y)$  al punto  $N(x + h, y)$ , considerando  $h$  pequeño como para que la variación del campo sea pequeña, es  $E_x h$ . Por otra parte, el potencial cambia y se puede escribir

$$E_x h = \varphi(x, y) - \varphi(x + h, y)$$

de donde se obtiene

$$E_x = -\frac{\varphi(x + h, y) - \varphi(x, y)}{h}$$

Si pasamos al límite con  $h \rightarrow 0$ , resultará finalmente

$$E_x = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}$$

(se emplea el símbolo  $\partial/\partial x$  en lugar de  $d/dx$  puesto que se refiere a derivadas parciales tomada respecto a una de las variables) expresión que permite calcular  $E_z$  por derivación de la ecuación del potencial. Toda la dificultad del método se encuentra en la realización efectiva de los cálculos. Para la componente del campo según  $y$  el resultado es análogo

$$E_y = -\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}$$

En un problema en el espacio se agrega la componente  $z$  y la derivada parcial del potencial.

### Realización física de los sistemas de cargas

Es fácil imaginar la realización física de una distribución lineal de cargas, pensando en la electrización por frotamiento de un hilo delgado. La distribución superficial de cargas puede naturalmente conseguirse electrizando por frotamiento una superficie de vidrio o papel. Sin embargo, la obtención práctica de distribuciones volumétricas de carga es un problema casi insoluble. Es difícil introducir cargas dentro de un material y más difícil aún conservarlas en su interior, debido a la repulsión natural que se ejercen mutuamente y que las traslada, distribuyéndolas en la superficie del cuerpo. En un capítulo siguiente se estudiará este caso. Podemos adelantar que en los diodos termoiónicos existe una carga espacial mantenida a expensas de un gasto de energía exterior. Los líquidos y los gases constituyen otro medio posible para la obtención de distribuciones volumétricas de cargas, pero siempre existe la posibilidad de que los fenómenos de conducción eléctrica trasladen las cargas a las superficies.



# Campo electrostático en presencia de materia

## Conductores en el vacío

En los ejemplos del capítulo anterior, se han considerado sistemas de cargas “unidas” entre sí en forma ideal. Se comprende fácilmente que las cargas de igual signo, que están dispuestas en una línea, superficie o volumen, se repelen mutuamente. Para lograr realmente una distribución cualquiera de cargas es necesario que existan fuerzas que actúen sobre ellas a fin de mantenerlas en las posiciones deseadas.

Una manera de aplicar fuerzas sobre las cargas consiste en colocarlas en un cuerpo material de forma conveniente, de modo que éste reaccione sobre ellas. El objeto de este capítulo es estudiar las relaciones recíprocas entre los sistemas de cargas y los cuerpos materiales.

En forma esquemática, los cuerpos materiales pueden clasificarse en dos grupos, de acuerdo con sus propiedades frente a un campo existente en su interior:

- *Conductores*. La presencia de un campo eléctrico determina un desplazamiento de cargas que permanece en tanto se mantenga el campo.
- *Dieléctricos* o *aislantes*. La presencia de un campo no crea desplazamientos de cargas al nivel macroscópico. En cambio, tienen lugar fenómenos a nivel microscópico, que modifican el valor del campo.
- *Semiconductores*. Materiales que tienen propiedades intermedias a los dos tipos anteriores.

En general, los materiales conductores eléctricos, conducen bien el calor y son opacos a la luz. Los dieléctricos, en cambio, son aislantes térmicos y, en general, transparentes a la luz. Son conductores, los metales (especialmente la plata y el cobre), los electrolitos (es decir, las soluciones de ácidos, bases y sales), y los gases ionizados. El estudio particular de los diversos conductores se hará en el capítulo siguiente. En una sección más adelante se da una lista de los principales materiales aislantes.

Nos proponemos ahora definir los conductores de otro modo a los efectos de este capítulo. *Es imposible conseguir una distribución volumétrica de cargas en el interior de un conductor*. Esta afirmación será demostrada en el capítulo siguiente, pero es fácil comprender que las fuerzas de repulsión ejercidas entre las cargas, obligan a éstas a moverse, extenderse por toda la superficie del conductor y permanecer allí. Si las cargas están en equilibrio, *el campo eléctrico en la superficie debe ser normal y la superficie*

del conductor debe ser una equipotencial, ya que en caso contrario se producirían movimientos de cargas y el conductor no estaría en equilibrio eléctrico. El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio es nulo, de otro modo existiría un movimiento de cargas y no habría equilibrio. En resumen, un conductor en equilibrio posee las siguientes características:

1. Las cargas se encuentran solamente en la superficie.
2. El campo eléctrico en el interior del conductor es nulo.
3. El campo eléctrico en la superficie es normal a ella.

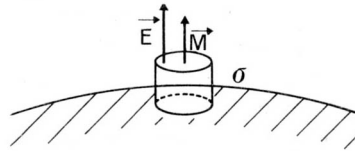


Figura 53: Campo eléctrico en la superficie de un conductor.

Si ahora consideramos, Figura 53, una pequeña porción de la superficie de un conductor contenida en un cilindro con sus bases dentro y fuera del conductor, y aplicamos la ley del flujo tendremos  $E S = S\sigma/\epsilon_0$ , donde  $S$  (pequeña) es la superficie del cilindro y  $\sigma$  la densidad de carga superficial del conductor. Si la superficie tiende a 0 la ecuación queda

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

expresión que relaciona la intensidad de campo en la superficie de un conductor con la distribución de las cargas existentes.

Consideremos ahora un conjunto de conductores rígidos colocados en posiciones fijas en el espacio, a los que comunicamos individualmente una carga, eventualmente puede ser cero. Es evidente que, una vez distribuidas las cargas en cada uno de los conductores, se llegará a una situación de equilibrio en la que deben verificarse todas las propiedades enunciadas.

Podemos afirmar que, *dadas las cargas de cada conductor y el sistema de conductores, la distribución final de las cargas y del campo es única*. Este resultado se conoce con el nombre de *unicidad del campo* o *problema de Neumann*. Para demostrarlo nos basaremos en el principio de superposición y en el hecho evidente de que, en ausencia de cargas sobre los conductores, el campo resultante es cero. Consideremos, para fijar las ideas, dos conductores únicos, que llamaremos 1 y 2. Sean  $Q_1$  y  $Q_2$  sus cargas respectivas y supongamos que pudieran existir dos distribuciones de cargas y dos campos

distintos según se indica a continuación:

$$\begin{array}{cccccc} Q_1 & Q_2 & \sigma_1 & \sigma_2 & \vec{E} \\ Q_1 & Q_2 & \sigma'_1 & \sigma'_2 & \vec{E}' \end{array}$$

Como es inmediato, si cambiamos de signo las cargas  $Q_1$  y  $Q_2$ , debe invertirse el signo de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  así como la dirección del campo, pero conservar su valor. Por consiguiente, aparecerá la distribución:

$$-Q_1 \quad -Q_2 \quad -\sigma'_1 \quad -\sigma'_2 \quad -\vec{E}'$$

Si ahora aplicamos el principio de superposición a la primera y a la última distribución, tendremos *otra situación posible* que será:

$$0 \quad 0 \quad \sigma_1 - \sigma'_1 \quad \sigma_2 - \sigma'_2 \quad \vec{E} - \vec{E}'$$

Este resultado indica que la carga total de los conductores es cero, lo cual implica la imposibilidad de lograr dos distribuciones distintas de carga y campo, en los conductores, puesto que entonces *existiría campo eléctrico sin cargas aplicadas*. El principio de superposición establece la unicidad del campo eléctrico. Si  $\vec{E} - \vec{E}' = 0$ , también lo son  $\sigma_1 - \sigma'_1 = 0$  y  $\sigma_2 - \sigma'_2 = 0$  puesto que en la superficie del conductor 1 se tiene

$$\vec{E} - \vec{E}' = \frac{\sigma_1 - \sigma'_1}{\epsilon_0}$$

y análogamente para el conductor 2. En virtud de ello, queda demostrada la unicidad de la distribución de cargas.

Sin embargo, este planteamiento del problema presenta un grave inconveniente desde el punto de vista físico; nos hemos basado en un *hecho nuevo*: en ausencia de cargas, el campo es cero. Obsérvese que no se trata ya de lo que afirmamos en el *Ejemplo 3* del capítulo anterior, puesto que en un conductor *hay cargas* de ambos signos en cantidades iguales y neutralizadas totalmente que forman un cuerpo neutro. Nada impide al acercar dos conductores neutros, se separen las positivas de las negativas y se llegue a una situación de equilibrio en que las cargas positivas de un conductor atraigan a las negativas del otro. La posibilidad de esta situación nos enfrenta a *una nueva verdad experimental* que no se puede deducir de los razonamientos anteriores. La afirmación que el campo es cero en ausencia de cargas es tan clara y comprensible, que si la experiencia la hubiera negado habría complicado extraordinariamente la teoría, especialmente desde el punto de vista matemático.

Nos proponemos ahora comprobar la teoría precedente. Consideremos la disposición de la Figura 54 formada por un conductor hueco A y varios cuerpos cargados

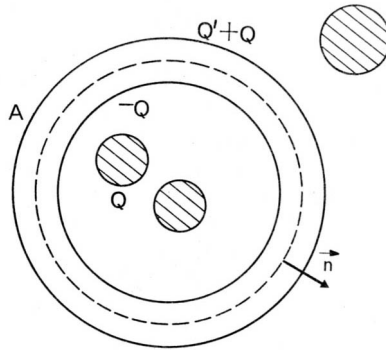


Figura 54: La "pantalla de Faraday".

situados en su interior y en el exterior. Sea  $Q$  la carga total de los cuerpos interiores. Si tomamos una superficie cerrada dentro del cuerpo hueco conductor, la ley del flujo nos indica que la carga total encerrada vale cero puesto que el campo en la superficie dibujada a trazos discontinuos es nulo (por ser interior a un conductor). Por consiguiente, en la superficie interior del conductor **A** debe existir una carga  $-Q$ .

Si  $Q'$  era la carga inicial del conductor **A**, se tendrá en su superficie exterior una carga  $Q' + Q$ , ya que las cargas se han desplazado para neutralizar el cuerpo. *El cambio de posición de los cuerpos interiores no modifica el valor de la carga  $-Q$  en la pared interior de **A** (la distribución de cargas sí puede cambiar) y, por tanto, la carga  $Q' + Q$  en la pared exterior no varía.* El principio de unicidad nos dice que *el campo exterior a **A** permanece inalterado*, puesto que cada conductor exterior conserva su posición y su carga y el hecho de que **A** sea hueco no influye en el conjunto. Por otra parte, si cambiamos la posición relativa de los conductores de **A**, tampoco se modifica la carga interior  $-Q$  y, por tanto, *no cambia el campo interior*. La situación es singular, pues existe una independencia total entre los campos interno y externo al conductor **A**. De aquí el nombre de *pantalla de Faraday* o *blindaje electrostático* que recibe el conductor cerrado **A**. En la práctica se emplea este dispositivo para aislar eléctricamente un fenómeno de las influencias exteriores. La experimentación comprueba estas propiedades así como la validez del principio de unicidad. La verificación experimental del fenómeno constituye la comprobación más importante del principio de superposición enunciado.

## Capacidad entre conductores

De acuerdo con el principio de unicidad, una vez elegidas las cargas aplicadas a cada conductor, queda determinado el campo en cada punto del espacio y, por tanto, los potenciales. Establecemos siempre un potencial cero en el infinito. El cálculo efectivo

de la distribución general del campo queda fuera del alcance de este libro, por lo que no será estudiado, si bien se determinarán los potenciales de cada conductor, en relación con las cargas aplicadas. Elegido el origen de potenciales, existe un potencial único para todos los puntos de cada conductor. En efecto:

- En el interior del conductor no hay campo, la circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de una curva interior al conductor es cero y, por lo tanto, es nula la diferencia de potencial entre dos puntos interiores.
- La superficie es una equipotencial.

Supongamos ahora un sistema de conductores formado por un solo cuerpo. Aplicada una carga  $Q$  el cuerpo adquiere un potencial  $V$  que, de acuerdo con el principio de superposición, es *proporcional a la carga*:  $V = pQ$ . El coeficiente de proporcionalidad  $p$  se denomina *coeficiente de inducción eléctrica* del cuerpo y depende sólo de la forma de éste. Puede definirse también el coeficiente inverso,  $C = 1/p$ , llamado *capacidad* del cuerpo. La unidad de capacidad es *coulomb/volt*, llamado *farad* o *faradio* (abreviaturas de Faraday) y la unidad de medida de los coeficientes de inducción eléctrica es la inversa.

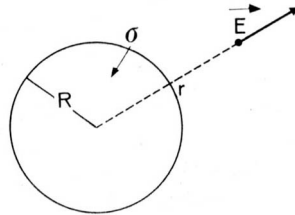


Figura 55: Campo y potencial de un conductor esférico.

*Ejemplo 1.* Consideremos, Figura 55, una esfera conductora de radio  $R$ . Debido a la simetría esférica, el campo es radial y su intensidad depende sólo de la distancia  $r$ . La ley del flujo aplicada a una esfera de radio  $r$  puede escribirse

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

El potencial de la esfera es entonces

$$\varphi = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

tenemos entonces para la expresión de la capacidad

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\epsilon_0 R = \frac{1}{p}$$

En la práctica, el *farad* es una unidad enorme (actualmente las capacidades máximas que pueden obtenerse en forma cómoda son del orden de 1 farad) y en su lugar es más frecuente el empleo de unidades submúltiplos, el *microfarad* o el *picofarad*. Así por ejemplo, la capacidad de una esfera de 1 metro de radio es aproximadamente 110 *picofarad*.

Consideremos ahora dos cuerpos cargados **1** y **2** (para un número mayor de cuerpos los resultados se pueden generalizar rápidamente). Aplicando el principio de superposición se tiene el esquema:

<b>conductor 1</b>		<b>conductor 2</b>	
carga	potencial	carga	potencial
1	$p_{11}$	0	$p_{12}$
0	$p_{21}$	1	$p_{22}$
$Q_1$	$p_{11}Q_1 + p_{21}Q_2$	$Q_2$	$p_{12}Q_1 + p_{22}Q_2$

Las ecuaciones que relacionan las cargas y los potenciales son lineales

$$\varphi_1 = p_{11} Q_1 + p_{21} Q_2$$

$$\varphi_2 = p_{12} Q_1 + p_{22} Q_2$$

y también las relaciones inversas, obtenidas despejando las cargas en las ecuaciones anteriores

$$Q_1 = C_{11} \varphi_1 + C_{21} \varphi_2$$

$$Q_2 = C_{12} \varphi_1 + C_{22} \varphi_2$$

Según ya habíamos indicado, los coeficientes  $p$  se denominan *coeficientes de inducción eléctrica* y los coeficientes  $C$  de *capacidad*. Las unidades medida son las mismas que las definidas para un cuerpo único. Este resultado se puede generalizar a una cantidad cualquiera de conductores y se obtienen ecuaciones lineales similares.

*Ejemplo 2.* Consideremos, Figura 56, dos conductores esféricos concéntricos y sean  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  los radios de las sucesivas superficies. Si la esfera interior posee una carga  $Q_1$ , en la cara interior de la esfera externa hay una carga  $-Q_1$  como resulta de la ley del flujo y en su cara externa hay una carga  $Q_1 + Q_2$ , donde  $Q_2$  es la carga de la esfera exterior. Por simetría todos los campos son radiales y se pueden aplicar las ecuaciones de la esfera conductora ya analizado, tanto a la corona interior como al exterior del conjunto. Las expresiones de los potenciales de cada conductor son

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$



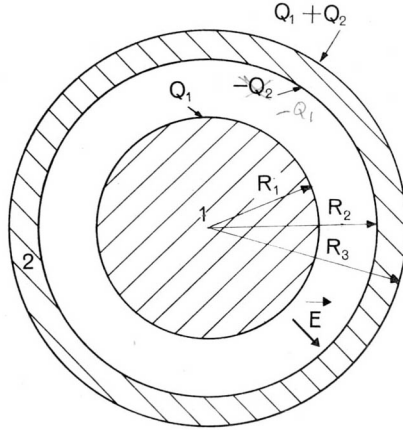


Figura 56: Esferas conductoras concéntricas.

$$\varphi_2 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_2}^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

que pueden escribirse en forma lineal general

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right] Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} Q_2$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} Q_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} Q_2$$

o las ecuaciones inversas

$$Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2} \varphi_1 - \frac{4\pi\epsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2} \varphi_2$$

$$Q_2 = -\frac{4\pi\epsilon_0}{1/R_1 - 1/R_2} \varphi_1 + 4\pi\epsilon_0 \left[ R_3 + \frac{1}{1/R_1 - 1/R_2} \right] \varphi_2$$

Estas ecuaciones permiten identificar inmediatamente cada uno de los coeficientes  $p$  y  $C$ .

Recibe el nombre de *condensador* o *capacitor* un sistema cualquiera de dos conductores que se caracteriza porque los coeficientes de capacidad poseen valores determinados. El dispositivo más elemental para construir un condensador está formado por dos placas metálicas paralelas de superficie conveniente separadas una distancia pequeña. En general, las placas conductoras del condensador trabajan con cargas iguales y opuestas.

*Ejemplo 3.* Si en el *Ejemplo 2* consideramos que el conductor esférico exterior es muy delgado, que  $R_1$  es muy próximo a  $R_2$  y llamamos  $e$  a la diferencia  $R_2 - R_1$ . Obtenemos entonces las ecuaciones aproximadas

$$Q_1 = C \varphi_1 - C \varphi_2$$

$$Q_2 = -C \varphi_1 + C \varphi_2$$

donde

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{e}$$

En estas ecuaciones se ha considerado  $R_1 \approx R_2 \approx R_3 = R$  y  $e/R \ll 1$ . Como  $S = 4\pi R^2$  es la superficie de las esferas, deducimos la conocida ecuación de la capacidad de un condensador

$$C = \frac{S\epsilon_0}{e}$$

Dentro de la aproximación de los cálculos realizados, al ser  $e/R \ll 1$ , puede considerarse uniforme el campo existente entre los conductores. Si ahora imaginamos dos láminas conductoras de forma cualquiera, iguales y separadas una distancia  $e$  muy pequeña frente a sus dimensiones tendremos un campo prácticamente homogéneo y podremos, en primera aproximación, aplicar la ecuación obtenida. Es evidente que en los bordes de las láminas, esta aproximación es grosera (los bordes diferencian una superficie cerrada de una abierta) pero es tanto más válida cuanto menor sea el perímetro de las láminas. En esta forma están construidos los condensadores de uso corriente en electrotécnica.

*Ejemplo 4.* Supongamos que las esferas del *Ejemplo 2* están unidas eléctricamente por un conductor delgado cuya capacidad pueda considerarse despreciable; tendremos las ecuaciones (cuya demostración omitimos)

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$$

$$Q = 4\pi\epsilon_0 R_3 \varphi$$

Este resultado era de esperar, puesto que el conductor interior no influye en la capacidad total y el sistema se ha convertido en una única superficie esférica.

*Ejemplo 5.* Supongamos que conectamos dos condensadores en paralelo en la forma indicada en la Figura 57. Las ecuaciones correspondientes serán

$$Q_1 = C_1 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

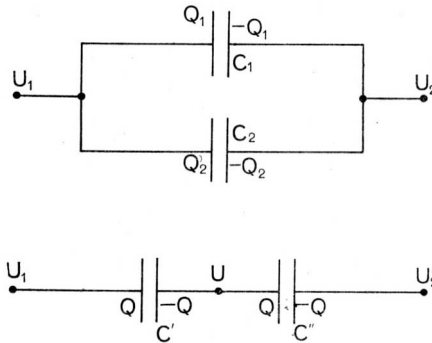


Figura 57: Paralelo y serie de condensadores.

$$Q_2 = C_2 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

donde  $C_{eq}$  representa un condensador equivalente con la misma capacidad que los dos en paralelo. Si conectamos dos condensadores en serie, como también muestra la Figura 57, tendremos

$$Q = C_1 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Q = C_2 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Q \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

donde  $C_{eq}$  representa un condensador equivalente con la misma capacidad que los dos en serie.

## Energía de los conductores

Consideremos nuevamente dos conductores **1** y **2** en el espacio y supongamos que se trasladan cargas desde el infinito hasta ellos. (En cuanto al significado del infinito en electricidad, ya se ha indicado que en la mayoría de los fenómenos, la Tierra puede ser considerada como un conductor que se extiende hasta el infinito. Transportar cargas desde el infinito equivale, desde el punto de vista práctico, a trasladar cargas desde la Tierra.) Procederemos primero a cargar el cuerpo **1** desde cero hasta  $Q_1$  y luego el cuerpo **2**, desde cero hasta  $Q_2$ .

Supongamos que en un cierto instante del proceso, la carga del conductor **1** sea  $q$ . El potencial valdrá entonces

$$\varphi_1 = p_{11} q$$

Para incrementar la carga en  $dq$ , transportándola desde el infinito hasta **1**, es necesario efectuar un trabajo exterior

$$-dT = (0 - \varphi_1) dq = -p_{11} q dq \quad dT = p_{11} q dq$$

Este trabajo es “almacenado” en forma de energía potencial en el sistema. Luego, si  $W_1$  es la energía almacenada, tendremos

$$dW_1 = p_{11} q dq$$

La energía que posee el conductor **1** cargado con la carga  $Q_1$  vale, por integración de la expresión anterior,

$$W_1 = \int_0^{Q_1} p_{11} q dq = p_{11} \frac{Q_1^2}{2}$$

Si procedemos ahora a cargar el conductor **2**, con la carga  $q$ , se tendrá

$$\varphi_2 = p_{12} Q_1 + p_{22} q$$

El trabajo exterior necesario para incrementar la carga en  $dq$  es

$$dT = p_{12} Q_1 dq + p_{22} q dq$$

por tanto, la energía almacenada  $W_2$  en este nuevo proceso, resulta

$$W_2 = \int_0^{Q_2} (p_{12} Q_1 + p_{22} q) dq = p_{12} Q_1 Q_2 + p_{22} \frac{Q_2^2}{2}$$

La energía total almacenada por los conductores será, entonces

$$W = W_1 + W_2 = p_{11} \frac{Q_1^2}{2} + p_{12} Q_1 Q_2 + p_{22} \frac{Q_2^2}{2}$$

Si el proceso se hubiera realizado en orden inverso, es decir, si se hubiera cargado primero el cuerpo **2** y luego el cuerpo **1**, el resultado final sería el mismo y por lo tanto la energía almacenada no cambia; pero, por otra parte, se invierte el papel que juegan los conductores **1** y **2**, de modo que la expresión final de la energía toma la forma

$$W = p_{11} \frac{Q_1^2}{2} + p_{21} Q_1 Q_2 + p_{22} \frac{Q_2^2}{2}$$

Comparando las dos expresiones obtenidas se obtiene

$$p_{12} = p_{21}$$

Este resultado puede verificarse en el *Ejemplo 2*. De la igualdad de los coeficientes  $p$  se deduce la igualdad de los coeficientes  $C$

$$C_{12} = C_{21}$$

puesto que basta sustituir las cargas por sus expresiones en función de los potenciales. Esta simetría es válida también en el caso de más de dos conductores. Las igualdades obtenidas con los coeficientes de inducción eléctrica  $p$  y de capacidad  $C$  constituyen el llamado *principio de reciprocidad*.

Para obtener el principio de reciprocidad hemos tenido que recurrir a una nueva ley experimental: *la conservación de la energía aplicada a los fenómenos eléctricos*. En efecto, si, por ejemplo, en el primer proceso de carga se almacenara mayor cantidad de energía que en el segundo, al efectuar la descarga del sistema a través del segundo proceso se obtendría un excedente de energía utilizable, de modo que por sucesivas cargas y descargas del sistema, *tendríamos una ganancia neta de energía*. La imposibilidad de obtener un proceso de esta naturaleza, *cualquiera que sea el mecanismo empleado*, constituye una de las leyes básicas de la física, conocida con el nombre de *principio de conservación de la energía* o *primer principio de la termodinámica*. Este principio constituye el resumen de una gran cantidad de experiencias físicas con fenómenos diversos, dentro de los cuales se incluyen naturalmente los fenómenos eléctricos. Posee una importancia extraordinaria en todas las ramas de la Física lo cual justifica sobradamente su enunciado:

En todo sistema que experimente un proceso *cíclico* o *repetitivo*, el trabajo realizado por las fuerzas exteriores es igual al trabajo recibido del sistema.

El principio de reciprocidad y las relaciones entre las cargas y los potenciales, permiten escribir la energía de un sistema de conductores en la forma

$$W = C_{11} \frac{\varphi_1^2}{2} + \frac{C_{12} + C_{21}}{2} \varphi_1 \varphi_2 + C_{22} \frac{\varphi_2^2}{2}$$

*Ejemplo 1.* En un conductor aislado, la energía almacenada viene dada por

$$W = \frac{C \varphi^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Es interesante verificar que la integral extendida a todo el espacio de la expresión

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$$

donde  $dV$  es la diferencial de volumen, coincide con la energía  $W$ . Éste es un resultado general, cuya demostración queda fuera del alcance de este libro. Sin embargo, puede comprobarse en el caso de que el conductor sea esférico. Si imaginamos el espacio dividido en “capas” esféricas de espesor  $dr$  y radio  $r$  el volumen diferencial es  $dV = 4\pi r^2 dr$ . El campo eléctrico vale

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Como el campo es nulo en el interior de la esfera conductora, el valor de la integral es

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{4\pi r^2 dr}{r^4} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Pero

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

que coincide con la expresión final anterior. Este resultado permite una interpretación singular: la energía del campo queda almacenada en todo el espacio, con una densidad de energía por unidad de volumen  $\epsilon_0 E^2/2$ . Esta interpretación conduce a fecundos resultados, que no detallaremos por salirse de los límites de esta obra.

*Ejemplo 2.* La energía almacenada en un condensador vale

$$W = \frac{1}{2} [C \varphi_1^2 - 2C \varphi_1 \varphi_2 + C \varphi_2^2] = \frac{1}{2} C (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

Si admitimos que entre las placas del condensador el campo es uniforme, su intensidad vale  $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/e$ , donde  $e$  es la separación entre las placas conductoras. La energía total almacenada en todo el espacio será, de acuerdo con la noción de densidad de energía, igual a

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2 S e = \frac{S \epsilon_0}{2e} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

pero recordando la expresión de la capacidad de un condensador, tendremos:

$$C = \frac{S \epsilon_0}{e}$$

luego

$$W = \frac{C}{2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = \frac{S \epsilon_0}{2e} (\varphi_1 - \varphi_2)^2$$

que coincide con la energía calculada por la densidad de volumen.

## Dieléctricos

En la primera sección de este capítulo habíamos llamado *dieléctricos* a los materiales que frente a un campo eléctrico no presentaban desplazamientos de cargas. En realidad, la situación es diferente, pues nace una separación de cargas al nivel molecular y precisamente en forma de un desplazamiento “exiguo” de las cargas que se presentan macroscópicamente como *dipolos*. Un dipolo, no es más que un par de cargas iguales y de signo contrario, dispuestas a una distancia relativamente pequeña frente a las restantes dimensiones consideradas. Un dipolo se puede pensar, Figura 58, como dos cargas unidas por una pequeña barra rígida. Un dipolo colocado en un campo eléctrico uniforme adopta su dirección, como puede verse analizando las fuerzas que obran sobre cada carga.

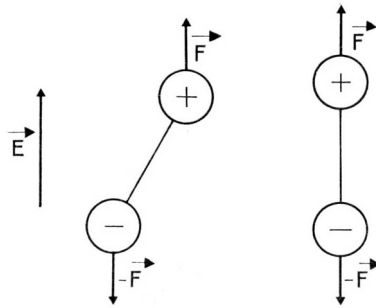


Figura 58: Un dipolo sometido a un campo eléctrico.

El campo eléctrico aplicado a un aislante, *determina la aparición de dipolos* que se orientan (aproximadamente) según su dirección. Este fenómeno recibe el nombre de *polarización de un dieléctrico*. Las cargas que forman los dipolos se llaman *cargas de polarización*. Es importante hacer notar que el dieléctrico en conjunto permanece en estado neutro puesto que las cargas dipolares no pueden separarse y sólo modifican el campo eléctrico presente en la materia.

El proceso de polarización de un dieléctrico (o sea la aparición de dipolos) puede resultar de diversos fenómenos físicos:

- *Polarización por orientación*. Las moléculas, si bien son neutras, poseen cargas de signo contrario. Puede ocurrir que no exista simetría en la distribución de las cargas positivas y negativas y que la molécula se comporte como un dipolo. En ausencia de campo, las moléculas se encuentran desordenadas y no se tiene efecto macroscópico alguno. Al aplicar un campo sobre el cuerpo, sus moléculas se orientan y aparece el consiguiente efecto macroscópico por los dipolos dirigidos según la misma dirección del campo eléctrico aplicado.

- *Polarización iónica.* Una molécula puede estar constituida por iones unidos entre sí por acción electrostática. Si se aplica un campo eléctrico aparecen fuerzas de sentido contrario sobre las cargas de signo opuesto lo que provoca una separación de los iones. Los iones “desplazados” forman dipolos que tienen efecto a escala macroscópica.
- *Polarización electrónica.* La “nube” de electrones que giran alrededor de cada núcleo atómico experimenta un “alargamiento” en la dirección contraria al campo aplicado, ya que tales elementos están sujetos a la acción de fuerzas de sentido contrario motivadas por el campo externo; este corrimiento de las órbitas electrónicas respecto al núcleo da lugar a dipolos.

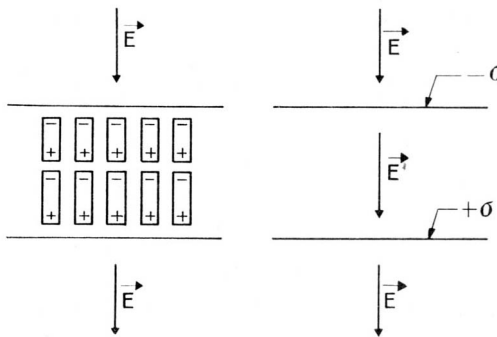


Figura 59: Polarización de una lámina de dieléctrico.

La aparición de dipolos en un dieléctrico es independiente de su carga inicial, y está condicionada solamente por el campo existente en la materia. Las leyes del campo eléctrico siguen siendo válidas, siempre que se consideren las cargas reales existentes en la materia y las cargas de polarización provenientes de los dipolos microscópicos. La única dificultad que se encuentra para aplicar las leyes del campo reside en la valoración correcta de las cargas de polarización.

Estudiaremos el caso de una lámina de caras paralelas, indefinida, sometida a un campo exterior  $\vec{E}$ , perpendicular a ella, Figura 59. El campo eléctrico orientará a los dipolos en la forma indicada en la figura. Un punto interior al dieléctrico se encuentra rodeado por las cargas dipolares y por lo tanto la acción del campo sobre él es nula. Algo diferente ocurre en un punto de la superficie donde la situación es asimétrica, por tener a un lado las cargas dipolares y al otro el vacío. En consecuencia, admitiremos que las cargas de polarización se manifiestan solamente en la superficie de la lámina, como una distribución superficial de cargas de densidad  $\sigma$ .

Planteado el problema de este modo, es fácil calcular el campo existente en cada punto. Si el campo aplicado es  $E$ , el campo interior a dieléctrico es  $E' = E - \sigma/\epsilon_0$ .



Para la resolución completa del problema, sólo resta conocer la relación existente, *para cada material dieléctrico*, entre  $E$  y  $\sigma$ . La relación experimental encontrada, válida para la mayoría de los aislantes, establece que  $\sigma$  es *proporcional al campo eléctrico aplicado*, con una constante de proporcionalidad propia de cada material. Así, puede escribirse

$$E' = \frac{E}{k}$$

La constante  $k$  recibe el nombre de *constante dieléctrica relativa del material*. En el Cuadro 1, tomado de [?], se presentan valores para algunos materiales. El ángulo de pérdidas se define más adelante.

Cuadro 1: Propiedades físicas de algunos aislantes.

material	$k$	ángulo de pérdidas
agua	80,37	
diamante	5,5	
epoxy	3,62	0,019
mica	6,9 a 9,2	0,0015 a 0,002
nylon	3,5	0,03
poliester	4 a 5,2	0,006 a 0,052
caucho	3	0,006
parafina	2 a 2,5	0,003
cera carnauba	2,75 a 3	
porcelana	6 a 8	0,01 a 0,006
cuarzo	3,75 a 4,1	0,0002
vidrios	3,8 a 9,5	0,04 a 0,00038

Hay que señalar que ciertos materiales dieléctricos, pueden permanecer polarizados de modo permanente sin que exista un campo eléctrico aplicado. En estos materiales ya no es válida la teoría simple del vector  $\vec{D}$  analizada, pero su estudio queda fuera del alcance de este libro. Esta polarización permanente la adquieren ciertos materiales a base de cera cuando solidifican en presencia de un campo intenso. Los dipolos quedan “aprisionados” en el proceso de solidificación y una vez retirado el campo conservan su orientación. Un material con polarización eléctrica permanente recibe el nombre de *electret*.

### Campo eléctrico en un dieléctrico

El resultado obtenido puede escribirse en una forma más expresiva. Sean dos láminas de materiales diferentes en contacto situadas en un campo exterior de intensidad  $E$  y dirección normal a las láminas. La ecuación anterior da para cada material

$$E_1 = \frac{E}{k_1}$$

$$E_2 = \frac{E}{k_2}$$

de donde puede obtenerse una relación independiente de  $E$

$$k_1 E_1 = k_2 E_2$$

y llamando  $\epsilon_1 = k_1 \epsilon_0$  y  $\epsilon_2 = k_2 \epsilon_0$ , constantes dieléctricas del material, tenemos

$$\epsilon_1 \vec{E}_1 = \epsilon_2 \vec{E}_2 = \epsilon_0 \vec{E}$$

Las unidades de medida de la constante dieléctrica coinciden con las unidades de medida de  $\epsilon_0$  puesto que  $k$  es una relación sin dimensiones.

Los procesos de polarización conducen a introducir un nuevo vector vinculado al campo eléctrico en el caso de existir presente trozos de materia. Se llama  $\vec{D}$ , *desplazamiento eléctrico*, al vector definido mediante la fórmula  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ . Recordando las unidades de medida del campo eléctrico resulta como unidad de medida del desplazamiento eléctrico es coulomb/metro<sup>2</sup>. Las ecuaciones obtenidas pueden resumirse en

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_2 = \vec{D}$$

Este resultado, si bien fue obtenido para dos láminas dieléctricas en contacto, es general, puesto que sólo hace referencia al campo en cada material. Otra derivación posible de esta igualdad es que en el vacío  $k = 1$ , como exigen las ecuaciones obtenidas. Para estudiar los fenómenos en el aire, como es el caso usual, es necesario introducir la constante dieléctrica del aire. Las medidas experimentales de  $k$  para el aire dan resultados prácticamente coincidentes con 1, por lo que no se justifica, en general, la distinción entre el vacío y el aire atmosférico.

La introducción del desplazamiento eléctrico parece ser una complicación innecesaria. En la mayoría de los casos, los dieléctricos  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  son proporcionales y en la misma dirección, sin embargo, hay algunos dieléctricos particulares, algunos cristales por ejemplo, en que esto no es así y justifica diferenciar uno y otro campo. En la medida que los fenómenos ocurren en el vacío (o el aire) y con dieléctricos isótropos, la distinción prácticamente no es necesaria.

Estudiaremos ahora la ley del flujo en términos del vector  $\vec{D}$ . Si consideramos cargas en ausencia de materia, al ser  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , el flujo de  $\vec{D}$  que atraviesa una superficie cerrada vale  $Q$ , donde  $Q$  es la carga encerrada por la superficie. Sin embargo, en presencia de dieléctricos, pero sin cargas,  $\vec{D}$  no cambia de valor al atravesar la superficie de separación de dos medios, luego el flujo de  $\vec{D}$  que pasa a través de una superficie cerrada vale cero. Por consiguiente, en un caso cualquiera, aceptaremos el siguiente enunciado:

*Ley del flujo del campo eléctrico.* El flujo saliente de  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  que atraviesa una superficie cerrada, es igual a la carga encerrada por la superficie.

*Ejemplo 1.* Consideremos una carga puntual sumergida en un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$ . La ley del flujo aplicada a una esfera de radio  $r$  da

$$4\pi r^2 D = Q$$

pero como  $D = \epsilon E$ , el campo eléctrico resulta

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r^2}$$

La fuerza ejercida sobre una carga  $q$  a una distancia  $d$  vale, en virtud de la definición de campo es

$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon d^2} = \frac{1}{k} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

que muestra que la fuerza ejercida en un medio de constante dieléctrica  $\epsilon$  es  $k$  veces menor que en el aire. Este resultado justifica la explicación sencilla de la ionización de un electrolito en el agua. Al tener  $k$  un gran valor, disminuye mucho la atracción electrostática que mantiene unida a la molécula y es posible que los iones constituyentes queden en libertad. Naturalmente, ésta es una interpretación demasiado ligera y rápida puesto que la ecuación obtenida tiene sólo validez macroscópica, y, a la escala molecular, sería necesario considerar el comportamiento dipolar del cuerpo y no su constante dieléctrica, que representa solamente al nivel macroscópico las propiedades microscópicas de la materia.

*Ejemplo 2.* Consideremos el condensador del *Ejemplo 2* de la página 80, modificado en el sentido de que el espacio entre conductores está ocupado por un dieléctrico de constante  $\epsilon$ . Para el campo en el dieléctrico tendremos

$$4\pi r^2 D = 4\pi k \epsilon_0 r^2 E = Q$$

en lugar de

$$4\pi \epsilon_0 r^2 E = Q$$

Si consideramos además las hipótesis simplificativas del *Ejemplo 3*, página 81 tenemos

$$Q_1 = C (\varphi_1 - \varphi_2)$$

en la que

$$C = \frac{S\epsilon}{e} = k \frac{S\epsilon_0}{e}$$

vemos que la capacidad de un condensador aumenta en un factor  $k$  al introducir un dieléctrico entre las placas, en el caso de un dieléctrico de mica se puede multiplicar del orden de 8 la capacidad, con poliéster, por 5, ver el cuadro de la página ?? . Esta propiedad se utiliza ampliamente en la fabricación de los condensadores de uso en la electrotécnica y la electrónica.

### Cálculo de fuerzas de origen eléctrico

Las fuerzas ejercidas por el campo eléctrico sobre cargas o sobre la materia pueden calcularse por diversos procedimientos. Por limitaciones de espacio no es posible exponer una teoría general en este libro; no obstante, se ilustrarán diversos procedimientos posibles.

*Método directo.* La fuerza sobre cargas puntuales, se deduce aplicando la propia definición de campo

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

Este procedimiento ha sido empleado en varios ejemplos.

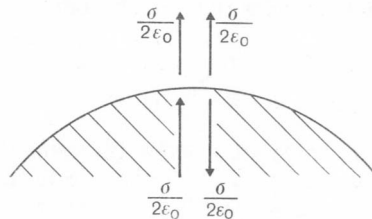


Figura 60: Composición del campo en la superficie de un conductor.

*Presión de campo.* Consideremos, Figura 60, la superficie de un conductor. El campo en un punto de la superficie se compone del creado por las cargas próximas al punto y del originado por la totalidad de las cargas restantes. Por analogía con el plano de cargas distribuidas (ver *Ejemplo 2* de la página 67), el campo creado por las cargas próximas puede estimarse igual a  $\sigma/2\epsilon_0$ , perpendicular a la superficie y saliente. Como el campo en el interior del conductor es nulo, el creado por las restantes cargas debe valer  $\sigma/2\epsilon_0$  para equilibrar al de las cargas locales. Por superposición de tales campos obtendremos el campo en la superficie es  $\sigma/\epsilon_0$  y nulo en el interior. La coincidencia de este resultado con el valor real del campo en la superficie de un conductor (ver página 76) justifica la hipótesis hecha sobre el campo de las cargas locales. Para calcular la fuerza que experimentan las cargas superficiales es necesario considerar *solamente* el campo provocado por las restantes carga y no el campo local local, puesto que las cargas locales no actúan sobre sí mismas. La fuerza ejercida sobre un trozo  $S$  de la

superficie del conductor vale entonces

$$F = S\sigma \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \frac{S\sigma^2}{\epsilon_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S$$

Existe entonces una presión de sentido saliente al conductor (puesto que depende del cuadrado de  $E$  y, por tanto, es independiente del signo de la carga) cuyo valor es

$$\vec{p} = \frac{\vec{F}}{S} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \vec{n}$$

Este resultado concuerda con la exposición ya presentada: la presión del campo es una consecuencia de la repulsión entre las cargas. Puede imaginarse el conductor como un globo ‘inflado’ por la repulsión electrostática.

Como aplicación calcularemos la fuerza ejercida entre las armaduras de un condensador plano. El campo entre las láminas vale

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{e}$$

Si  $S$  es la superficie de las placas del condensador, la fuerza total ejercida sobre cada cara del dieléctrico vale

$$F = pS = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{e} \right)^2 S$$

que es una fuerza mecánica que atrae las armaduras, puesto que la superficie cargada es la interna y el sentido de la fuerza es saliente a la superficie del conductor. Esta fórmula es el fundamento del instrumento denominado voltímetro electrostático que fue ideado por Lord Kelvin.

*Método energético.* Nos proponemos calcular la fuerza de atracción entre las armaduras de un condensador plano mediante consideraciones energéticas. La energía almacenada en el condensador vale

$$W = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} Sx$$

en la que  $\sigma$  es la densidad superficial de carga,  $S$  es la superficie del condensador y  $x$  la separación de las armaduras. El cálculo de esta expresión se efectúa a partir de la densidad de energía o bien mediante la ecuación que relaciona las cargas y la energía. Si se deja en libertad una placa del condensador, ésta sufre un desplazamiento  $dx$  y varía el contenido de energía  $dW$  en

$$dW = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} Sdx$$

Si  $dx > 0$ , la energía del condensador aumenta. Este aumento energético es suministrado por el campo exterior que debe actuar contra la fuerza de atracción entre las armaduras a fin de separarlas. La ecuación de conservación de la energía exige, si  $F$  es la fuerza de atracción de las placas

$$dW = Fdx$$

luego, la fuerza vale

$$F = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0} S$$

*Fuerzas sobre dieléctricos.* El cálculo completo de los esfuerzos mecánicos sobre materiales dieléctricos es en general muy complicado, presenta dificultades conceptuales y matemáticas muy grandes que no justifican su exposición en forma elemental, por lo que no son estudiados en este libro.

# Corriente eléctrica

## Densidad de corriente

Un campo eléctrico es capaz de aplicar fuerzas sobre las cargas de un conductor y, por tanto, de comunicarles movimiento. Toda carga en movimiento puede estudiarse desde dos puntos de vista diferentes: como *problema mecánico* de movimiento, donde interesa determinar la trayectoria y velocidades de cada partícula cargada y como *problema eléctrico* de transporte de cargas en un conductor. En general la trayectoria es conocida (el propio conductor) e interesa solamente estudiar el flujo de cargas eléctricas y la distribución del campo resultante.

Desde el punto de vista mecánico, el problema no ofrece dificultades nuevas y la ley de Newton resuelve completamente el movimiento.

Desde el punto de vista eléctrico, conviene definir magnitudes que estén relacionadas con el transporte de cargas. La ley fundamental que rige el mecanismo del transporte de cargas puede enunciarse en la forma:

*Ley de conservación de la carga.* La carga eléctrica no puede crearse ni desaparecer.

Esta ley ha sido confirmada experimentalmente por todos los fenómenos macroscópicos observados. Desde el punto de vista de las partículas elementales, es posible que una partícula positivas colisiones con una negativa y surja una partícula sin carga. Debe señalarse que es una ley algebraica, y, por lo tanto, las cargas deben necesariamente contarse con su signo.

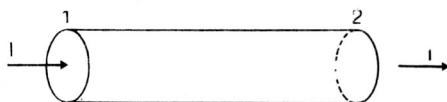


Figura 61: Corriente en un conductor eléctrico.

Consideremos un conductor recorrido por la corriente, Figura 61, y admitamos que las condiciones experimentales son tales que las cargas se mueven sin atravesar la superficie lateral del conductor (véase sección más adelante). Si consideramos una sección del mismo, podemos definir la magnitud  $I$ , *intensidad de corriente eléctrica*, como la carga que atraviesa la sección del conductor en la unidad de tiempo. La unidad

de medida de la corriente será entonces *coulomb/segundo*, unidad que se llama *amper* o *ampere*.

Como ya es habitual, esta definición es solamente válida para intervalos muy breves de tiempo, de modo que la definición correcta de  $I$  es:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Si consideramos dos secciones **1** y **2** del conductor, la ecuación del balance de cargas que atraviesan cada sección del conductor es

$$(I_1 - I_2) dt = dQ$$

donde  $dQ$  representa el incremento de carga en el conductor, entre las secciones **1** y **2**. Esta ecuación expresa que la carga que entra en el segmento  $\overline{12}$  de conductor, en el tiempo  $dt$ , coincide con el aumento de carga en el conductor. No se crea ni desaparece carga.

La expresión obtenida, si bien es de una gran sencillez, no tiene en cuenta un aspecto esencial del transporte de cargas: su dirección y su sentido. A fin de completarla, se define una magnitud *vectorial*  $\vec{J}$ , llamada *densidad de corriente*, ligada al fenómeno de transporte, que relaciona la intensidad de corriente con su dirección y sentido. Se caracteriza por las siguientes propiedades:

- La dirección de  $\vec{J}$  en cada punto es la misma en que se mueven las cargas.
- El sentido de  $\vec{J}$  es el que corresponde al movimiento de las cargas positivas y opuesto al movimiento de las cargas negativas.
- La intensidad de  $j$  es tal, que en una pequeña sección, orientada perpendicular al movimiento, la corriente se puede expresar como  $I = JS$  donde  $S$  es el área de la sección considerada.

Sentadas estas bases, estudiemos lo que ocurre al circular la corriente en el conductor. En el caso que su sección  $S$  es de reducidas dimensiones frente a su longitud (*conductor filiforme*), la corriente se distribuye uniformemente en toda su sección; la dirección de  $\vec{J}$  es la del eje del conductor, el sentido, el del movimiento de las cargas positivas y el módulo es constante en toda la sección. Considerando una sección del conductor, perpendicular al eje, tendremos

$$J = \frac{I}{S} \quad \text{amperes/m}^2$$

En un conductor no filiforme –o en casos de corriente variable en el tiempo– la densidad de corriente no puede considerarse uniforme. En estas situaciones es necesario definir la intensidad del vector  $\vec{J}$  eligiendo un trozo pequeño de superficie  $\Delta S$ ,



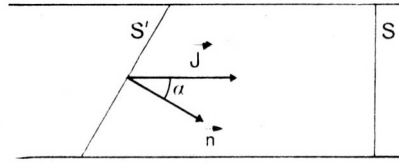


Figura 62: La corriente que atraviesa un elemento de superficie.

no necesariamente perpendicular a la dirección de la corriente eléctrica, y medir la corriente  $\Delta I$  que lo atraviesa. Se tiene entonces, ver Figura 62,

$$J = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\cos \alpha \Delta S}$$

donde  $\alpha$  es el ángulo que forma la normal  $\vec{n}$  con la dirección de la corriente eléctrica en esa zona del conductor.

La carga que atraviesa un elemento de superficie  $\Delta S$  puede escribirse, en el caso general, como

$$dQ = \Delta S \vec{n} \times \vec{J} dt \quad I = \Delta S \vec{n} \times \vec{J}$$

Si consideramos una superficie cualquiera, se puede descomponer en elementos de superficie y tomar la suma

$$I = \sum \vec{n} \times \vec{J} \Delta S$$

De esta expresión, deducimos un resultado general:

*El flujo de  $\vec{J}$  que atraviesa una superficie.* La corriente que pasa por una superficie es el flujo de  $J$  que la atraviesa en la dirección considerada.

Si consideramos una superficie cerrada, la carga *que entra* a través de la superficie es

$$dQ = \text{flujo } \vec{J} dt$$

y esta carga se acumula en el interior de la superficie. Un caso importante, denominado *régimen estacionario* o *continuo*, se presenta cuando no existe ni acumulación ni disminución de cargas. En estas condiciones  $dQ = 0$ , no existe aumento ni disminución en interior de la superficie, luego la carga neta que penetra en la superficie debe ser cero: las cargas que entran en la superficie deben salir. En consecuencia, el flujo total de  $\vec{J}$  debe ser cero.

## Ley de Ohm

Como ya se ha indicado, un campo eléctrico aplicado a un conductor produce un desplazamiento de cargas. El mecanismo del desplazamiento desde el punto de vista

microscópico se verá más adelante en la sección 6. Desde el punto de vista macroscópico, la relación entre la corriente y el campo aplicado, válida para muchos conductores, es muy sencilla y viene dada por la:

*Ley de Ohm.* Un campo de intensidad  $\vec{E}$ , aplicado a un conductor, origina en cada punto un vector densidad de corriente que cumple  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ ,  $\gamma$  es una constante propia del conductor, denominada *conductividad*.

La conductividad  $\gamma$  se mide en *amper/volt metro*. Introduciendo la unidad de *resistencia eléctrica ohm = volt/amper* puede expresarse también en *1/ohm metro*. Se acostumbra a definir la conductividad de un material por su valor recíproco, llamado *resistividad*  $\rho = 1/\gamma$ , medido en *ohm metro*.

Esta ley muestra que los portadores microscópicos que fluyen por la acción del campo eléctrico crean un movimiento de las cargas positivas en la dirección del campo y un movimiento de las negativas en sentido opuesto. El campo aplicado acelera las cargas y, si el conductor no reaccionara con fuerzas adicionales opuestas, las cargas acelerarían su movimiento y el vector  $\vec{J}$  iría aumentando, en función del tiempo, para el campo aplicado. Desde el punto de vista microscópico, la ley de Newton indica la existencia de fuerzas adicionales que mantienen constante la velocidad de las cargas, a pesar de la acción aceleradora del campo.

La ley de Ohm suele formularse para los dos terminales de un conductor. Consideremos el conductor de la Figura 61 en la hipótesis de distribución uniforme de corriente en toda la sección. Tendremos entonces

$$J = \frac{I}{S} = \gamma E \quad E = \frac{\rho I}{S}$$

Por la hipótesis de distribución homogénea de corriente  $J$  es constante en toda la sección y debido al régimen estacionario también lo es a lo largo del conductor, de modo que la diferencia de potencial entre las secciones 1 y 2 es

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^L E \, dl = \frac{\rho L}{S} I = R I$$

donde  $R = \rho L/S$  recibe el nombre de *resistencia* del conductor  $\overline{12}$ . La ley de Ohm se transforma entonces en  $V = R I$ . La unidad de medida de  $R$  es *volt/amper = ohm*. Ésta es la forma común de la ley de Ohm y su enunciado es:

*Ley de Ohm, enunciado técnico.* La corriente que circula en un conductor es proporcional a la diferencia de potencial aplicada entre sus bornes.

En el lenguaje corriente, la diferencia de potencial se designa también como *tensión* eléctrica o *voltaje*. En el Cuadro 2 se presentan las resistividades de diversos conductores, datos tomados de [?]. Vale la pena señalar que estos valores dependen de la temperatura a la cual se encuentra el conductor.

Cuadro 2: Resistividad de algunos conductores.

<b>material</b>	<b>resistividad a 20°</b> $\mu\text{ ohm cm}$
aluminio	2,824
antimonio	41,7
bronce	7
constantan	49
cobre comercial	1,7241
oro	2,44
hierro	10
plomo	22
magnesio	4,6
manganina	44
mercurio	95,783
nichrome	100
níquel	7,8
platino	10
plata	1,59
tungsteno	5,6
zinc	5,8

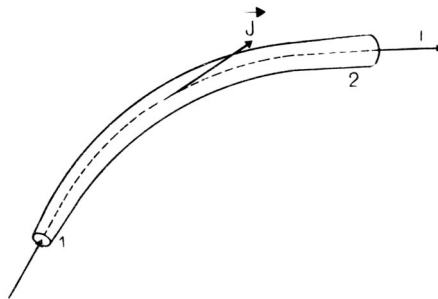


Figura 63: Corriente en un conductor filiforme.

Si consideramos un conductor que no es rectilíneo, Figura 63, tendremos, sobre su eje,

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E}(l) \times d\vec{l} = \int_1^2 \rho \vec{J}(l) \times d\vec{l}$$

Pero la dirección de  $\vec{J}$  en cada punto es la del eje del conductor filiforme y su valor puede calcularse admitiendo una distribución uniforme de la corriente en la sección del conductor (esta hipótesis sólo es razonable si el conductor no presenta *codos pronunciados* frente a las dimensiones de la sección, en cuyo caso se presentan distribuciones no uniformes de corriente o si la corriente *varía en el tiempo*) y resulta  $J(l) = I/S(l)$ .

La circulación del campo eléctrico a lo largo de la línea media del conductor es

$$V = \int_1^2 \frac{\rho I}{S(l)} dl = R I$$

donde

$$R = \int_1^2 \frac{\rho}{S(l)} dl$$

Si el conductor presenta codos o alguna variación de sección, no despreciables frente a su longitud, la distribución de corriente deja de ser uniforme y por lo tanto la expresión anterior de la resistencia será falsa. Ello ocurre, por ejemplo, en las uniones realizadas en los terminales del conductor donde la distribución de corriente es bastante compleja y no es posible determinar una relación sencilla entre la resistencia y las dimensiones del conductor. Por este motivo, el segundo enunciado de la ley de Ohm, si bien es consecuencia del primero, *sólo ha sido demostrado en los conductores filiformes* en los que la corriente es homogénea.

Se comprende que, si se dobla la tensión aplicada, la intensidad de campo  $\vec{E}$  y el vector  $\vec{J}$  se duplican en cada punto y lo mismo ocurre con la corriente, de modo que continúa manteniéndose la proporcionalidad entre la tensión y la corriente. Sin embargo, es necesario demostrar este nuevo “principio de superposición” que hemos empleado. Este “principio” puede no cumplirse, por ejemplo, en el caso que la resistividad del conductor dependa apreciablemente de la temperatura y, por lo tanto,

Siempre será preferible trabajar con el segundo enunciado de la ley de Ohm y evitar las dificultades prácticas del « método de superposición » esbozado.

De la ley de Ohm puede derivarse una importante consecuencia sobre el comportamiento de los conductores. Supongamos, por ejemplo, que en un determinado instante, que llamaremos  $t = 0$ , hay una distribución de cargas del conductor en el volumen, con una densidad  $\rho_0$ . Si consideramos un volumen de pequeñas dimensiones del conductor, de volumen  $v$  y llamamos  $\rho(t)$  a la densidad de carga en un instante cualquiera, la ecuación de conservación de cargas puede escribirse en la forma

$$\text{flujo } \vec{J} dt = -dQ = -v d\rho$$

donde se considera el flujo saliente de  $\vec{J}$  en la superficie del trozo de elemento de conductor elegido. Como  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ , esta ecuación se convierte en

$$\gamma \text{flujo } \vec{E} dt = -v d\rho$$

donde se considera el flujo saliente de  $\vec{E}$  a través de la misma superficie. Pero, por otra parte, la ecuación del flujo del campo eléctrico nos dice que es igual a la carga contenida en el volumen, luego

$$\text{flujo } \vec{E} = \frac{\rho v}{\epsilon_0}$$

Combinando ambas expresiones obtenemos la evolución de la densidad de cargas en función del tiempo

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} \rho$$

lo que traducido al lenguaje corriente nos dice que, en cada instante, la densidad de cargas decrece en forma proporcional a la densidad actual, de modo que luego de transcurrido un cierto tiempo, cabe esperar que la carga volumétrica habrá desaparecido prácticamente. En efecto, la ecuación anterior puede escribirse también

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} dt$$

que, integrada, da

$$\ln \rho = -\frac{\gamma}{\epsilon_0} t + C \quad \rho = \rho_0 e^{-\gamma t/\epsilon_0}$$

teniendo en cuenta que para  $t = 0$ ,  $\rho = \rho_0$  y podemos determinar la constante de integración. Es ilustrativo calcular el tiempo en que la carga disminuye a un millonésimo de su valor inicial. Para ello se sustituye  $\gamma/\epsilon_0$  por su valores representativos del orden de magnitud de  $\gamma$  en la tabla de resistividades de los diversos materiales. Podemos tomar como valor representativo para los metales  $1/\gamma = 10 \mu\text{ohm cm} = 10^{-7} \text{ ohm metro}$  y  $\epsilon_0 \approx 10^{-11}$ . Para calcular el tiempo que demora en reducirse la carga volumétrica del conductor a la millonésima parte, se resuelve la ecuación

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 10^{-6} = e^{10^{18}t}$$

o sea

$$t = \frac{6 \times 10^{-18}}{\log e} \approx 10^{-17} \text{ segundos}$$

En todos los fenómenos en que este tiempo sea despreciable puede considerarse que  $\rho = 0$ , puesto que la densidad de carga, caso de que existiera al comenzar el fenómeno, disminuye a valores muy pequeños en este tiempo indicado. En los estudios que seguirán la evolución en el tiempo de los fenómenos es enormemente más lenta que  $10^{-17}$  segundos, por lo cual admitiremos siempre que

*Cargas en un conductor.* La densidad de cargas de volumen de un conductor es cero. Sólo pueden existir cargas en su superficie

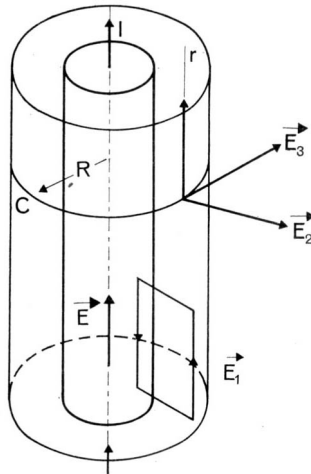


Figura 64: Corriente en un conductor cilíndrico indefinido.

### Campo eléctrico de una corriente indefinida

Consideremos una corriente  $I$  que recorre un conductor rectilíneo de longitud indefinida de forma cilíndrica, tal como puede verse en la Figura 64. Si admitimos una corriente homogénea en toda la sección, tendremos

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{S\gamma}$$

en el interior del conductor. En el exterior, están presentes los campos  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$  y  $\vec{E}_3$ . El campo exterior no cambia al desplazarnos a lo largo de la circunferencia  $C$  o de la recta  $r$ , es inmediato aplicando el principio de simetría al sistema. La circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de la circunferencia  $C$  es

$$2\pi R E_3 = 0$$

luego  $E_3 = 0$ . Si consideramos el flujo de  $\vec{E}$  saliente de un cilindro de radio  $R$  y altura  $h$ , concéntrico al conductor tendremos el flujo sobre la base superior es igual y opuesto al flujo en la base inferior (puesto que en los puntos correspondientes de ambas bases el campo es el mismo y las normales se toman en sentidos opuestos). Queda solamente el flujo sobre la superficie lateral que es

$$2\pi R h E_2 = 0$$

puesto que la densidad volumétrica de cargas en un conductor vale cero y suponemos que el conductor no está cargado electrostáticamente. Luego  $E_2 = 0$ . Si calculamos la

circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de un rectángulo como el indicado en la figura resulta

$$h(E_1 - E) = 0 \quad E_1 = E = \frac{I}{S\gamma}$$

En general, esta intensidad de campo es muy pequeña, comparada con los campos que se obtienen en los materiales dieléctricos de los condensadores. En la práctica es extremadamente difícil detectar su valor con los instrumentos de que se dispone. Si el conductor tuviese una carga electrostática, se aplica el principio de superposición con el *Ejemplo 6* de la página 70.

## Generadores de corriente eléctrica

Hasta aquí, hemos estudiado los conductores que transportan una corriente, sin explicar nunca el mecanismo por el cual se crea la corriente. Es fácil comprender que el paso de una corriente por un conductor implica un suministro de energía. En efecto: en un intervalo  $dt$ , se transporta una carga  $dQ = I dt$  a través del conductor, mediante un salto de potencial  $V = \varphi_1 - \varphi_2$ . De acuerdo con las ecuaciones del trabajo eléctrico, el trabajo  $dT$  realizado por el campo es:

$$dT = (\varphi_1 - \varphi_2) dQ = VI dt$$

que debe ser suministrado por el dispositivo que crea el campo en el conductor. Como ya sabemos, las cargas se mueven con velocidad constante debido a las fuerzas opuestas al campo, provenientes del conductor.

La energía suministrada por el generador a las cargas es cedida al conductor a través de las fuerzas que se oponen al movimiento. Esta energía transmitida al conductor se manifiesta al nivel macroscópico en forma de calor (ver más adelante en este capítulo).

De acuerdo con el principio de conservación de la energía, el calor desarrollado en un conductor en un intervalo  $dt$  será:

$$dW = VI dt.$$

Si la corriente y la tensión permanecen constantes en un intervalo de tiempo de duración  $t$ , el calor liberado es:

$$W = VIt.$$

Si consideramos un conductor cerrado, Figura 65 a, no obtendremos corriente alguna. Para que pase una corriente por él, debe existir algún elemento capaz de mover las cargas (es decir, un aparato que genere un campo en el conductor). Ya sabemos que por medios electrostáticos es imposible lograr un campo en el interior de un conductor, puesto que la presencia de cuerpos cargados situados en el exterior del conductor

no puede crear una corriente. (Es diferente la situación si en el espacio exterior existen cargas en movimiento, tal como se estudia más adelante, en el capítulo VI). Sin embargo, sí es posible intercalar en el circuito un elemento capaz de producir una corriente mediante un gasto de energía en otra forma. Tal aparato se denomina *generador*.

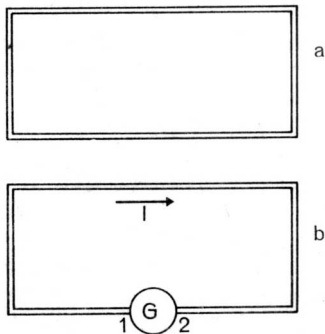


Figura 65: Corriente en un circuito conductor.

Consideremos, Figura 65 b, un generador  $G$  intercalado en el conductor. Sean sus bornes 1 y 2 supongamos que genera una corriente dirigida desde 1 hacia 2. Tendremos, entonces:

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = RI,$$

de acuerdo con la ley de Ohm. El generador es capaz de transportar las cargas desde el borne 2 al borne 1, es decir es capaz de *elevantar* el potencial de las mismas entre sus bornes, con lo cual realiza un trabajo  $VI dt$ . Esta energía es transportada por las cargas circulantes, las cuales a medida que disminuye su potencial, la ceden al conductor en forma de calor. Un generador *cede energía al exterior* y por lo tanto debe ocurrir:

1. *Perder la energía que tenía almacenada.* Éste es el caso de los generadores químicos: *pilas* y *acumuladores* que transcurrido un cierto tiempo de su funcionamiento agotan toda la energía almacenada y cesa la corriente.
2. *Recibir energía del exterior.* Éste es el caso de las *máquinas generadoras* que reciben energía mecánica; de las *pilas térmicas*, excitadas por calor; de las *células fotovoltaicas*, alimentadas por la acción de la luz. Estos generadores, mantienen la corriente en el conductor en tanto se mantenga el suministro de energía exterior.

La potencia de un generador puede escribirse en la forma sencilla:

$$w = \frac{dW}{dt} = VI$$



El salto de potencial  $V = \varphi_1 - \varphi_2$  que el generador es capaz de dar, se denomina *fuerza electromotriz* la cual depende, generalmente, de la corriente  $I$  que produce. Por tanto, cada generador posee una curva característica tensión corriente que le es propia. Así, por ejemplo, si un generador recibe iguales cantidades de energía del exterior en tiempos iguales, su potencia es constante, luego la ecuación que relaciona  $V$  con  $I$ , será  $VI = w$ . De aquí que un aumento de corriente provoque siempre una caída en su fuerza electromotriz.

Se define el llamado *generador ideal* como aquel cuya fuerza electromotriz es independiente de la corriente generada. En la práctica es posible construir generadores que se aproximen al comportamiento ideal en ciertas zonas de variación de la corriente generada. En el generador real es usual que la fuerza electromotriz disminuya al aumentar la corriente. Cualquiera que sea su tipo puede asimilarse a un generador ideal en serie con una resistencia propia que termina en los bornes de conexión. Así, al aumentar la corriente establecida, la caída de tensión en la resistencia origina una disminución en la diferencia de potencial en los bornes del generador real. Por este motivo se suele decir que los generadores reales poseen una *resistencia interna*.

Es necesario individualizar los bornes de un generador al objeto de poder conocer el sentido de circulación de la corriente. La convención general es designar los bornes con los signos  $+$  y  $-$ , de modo que si  $\varphi_1 > \varphi_2$  el borne **1** es el  $+$ , y el borne **2** el  $-$ . Entonces, la corriente *en el conductor* circulará desde el borne  $+$  al borne  $-$  y *dentro del generador* lo hará en sentido inverso.

## Leyes de Kirchoff

En un conjunto de diversos conductores conectados a varios generadores, es posible calcular las corrientes que circulan en cada conductor mediante la ley de Ohm. Es conveniente proceder en forma sistemática al objeto de efectuar los cálculos con el máximo de sencillez.

Consideremos el circuito de la Figura 66. Llamamos *nudos* del circuito, a las uniones de más de un conductor, tales como **A**, **B**, **C** y **D**.

Llamamos *mallas*, a los circuitos cerrados de conductores, como **ABDCA**, **ABDA** o **ABCA**. En cada conductor tomamos un sentido *arbitrario* para medir las corrientes. Este sentido no tiene nada que ver con el sentido real de paso de la corriente por el conductor; es sólo una convención e indica que la corriente circula en el sentido elegido cuando la consideramos positiva, y en sentido contrario, si es negativa.

Llamamos *caída de tensión entre dos puntos de un circuito*, recorridos en cierto sentido, a la diferencia de potencial: potencial inicial  $-$  potencial final. La caída de potencial en un conductor, recorrido en igual sentido que la corriente, Figura 67 a,

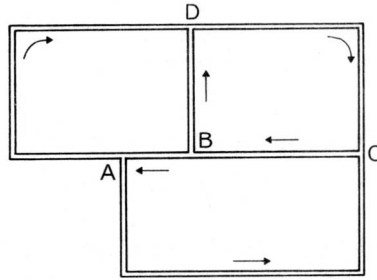


Figura 66: Esquema de circuito complejo.

vale, de acuerdo con la ley de Ohm:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = RI.$$

Si el conductor es recorrido en sentido contrario a la corriente, vale:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -RI.$$

La caída de tensión en un generador cuyos bornes están dispuestos tal como indica la Figura 67 b y es recorrido en el sentido de la flecha vale:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E$$

y, recorrido en sentido contrario al anterior, se tiene:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -E$$

Esta exposición permite enunciar dos leyes sobre los circuitos, debidas a Kirchoff:

*Ley de los nudos.* En cada nudo de un circuito, la suma algebraica de las intensidades de las corrientes que a él llegan y de las que de él parten vale cero.

Esta ley es inmediata, pues de lo contrario en el nudo se acumularía o desaparecería la carga.

*Ley de las mallas.* La suma de las caídas de potencial en una malla de un circuito vale cero.

La suma de las caídas de potencial, tal como ha sido definida, no es otra cosa que la diferencia de potencial entre los puntos inicial y final, de modo que si éstos coinciden, la diferencia de potencial es cero.

La aplicación de las leyes de Kirchoff es inmediata y se ilustrará a través de diversos ejemplos.

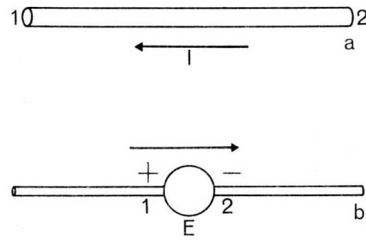
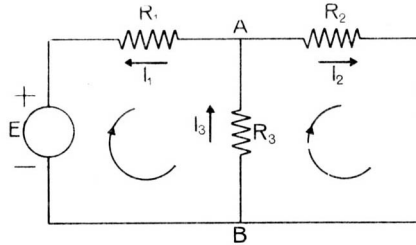


Figura 67: La caída de potencial.

*Ejemplo 1.* En el circuito de la Figura 68 elegimos sentidos arbitrarios de recorrido en cada conductor. (Se ha representado cada conductor por una línea en zig-zag, símbolo de resistencia en electrotecnia. Las líneas restantes representan conductores de resistencia despreciable. El generador se representa por un círculo en el cual se indica la polaridad de sus bornes).

Figura 68: *Ejemplo 1* de circuito.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nudo **A** tendremos:

$$I_3 - I_1 - I_2 = 0.$$

Es inútil aplicar la ley al nudo **B** porque se obtiene nuevamente la misma ecuación. En general, la primera ley de Kirchhoff puede aplicarse a *todos los nudos menos uno*, puesto que si la carga se conserva en los nudos anteriores, no puede dejar de hacerlo en el último, de modo que la ecuación que se obtiene para éste, debe ser consecuencia de las anteriores:

Podemos ahora aplicar la segunda ley de Kirchhoff. En la figura se han indicado los sentidos de circulación elegidos para sumar las caídas de tensión. Tendremos entonces en las dos mallas indicadas:

$$-E - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$R_3 I_3 + R_2 I_2 = 0$$

Se puede escribir todavía una ecuación de mallas suplementaria, para la malla formada por el generador,  $R_1$  y  $R_2$ , pero como disponemos ya de tres ecuaciones para determinar las tres corrientes incógnita, ello no resulta necesario. Por otra parte es fácil verificar que la ecuación correspondiente a la tercera malla es una consecuencia de las dos anteriores. *Se presenta aquí una dificultad:* por un lado, la necesidad de disponer de tantas ecuaciones como incógnitas y por otro, el hecho de que algunas ecuaciones de mallas sean consecuencia de otras ya escritas. Como físicamente, una vez dado el circuito, las corrientes están determinadas, es posible (a menos que la teoría sea falsa) escribir tantas ecuaciones como sean necesarias para resolver el problema. El procedimiento para asegurarse de que una ecuación de mallas es *independiente* de otras es que la nueva malla *posea un generador o un conductor que no aparecen en las mallas anteriores*. Así, en nuestro ejemplo, la segunda ecuación de mallas, difiere de la primera en el conductor  $R_2$ . Si por el contrario todo elemento, generador o conductor del circuito pertenece a alguna de las mallas estudiadas, la nueva ecuación de malla será consecuencia de las anteriores y por tanto superflua. La demostración de las afirmaciones precedentes es demasiado delicada para ser incluida en este libro elemental.

Una vez establecido un número de ecuaciones independientes igual al de incógnitas del circuito, basta resolver el problema algebraico. El resultado es completamente independiente del grupo de ecuaciones de nudo y de malla que se hayan escogido.

*Ejemplo 2.* Consideremos dos conductores (resistencias) en serie, como muestra la Figura 69 a. La ley de Ohm nos da:

$$\begin{aligned}\varphi_1 - \varphi_2 &= R_1 I, \\ \varphi - \varphi_2 &= R_2 I, \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= (R_1 + R_2) I, \\ R_{eq} &= R_1 + R_2.\end{aligned}$$

Es decir, dos resistencias en serie pueden sustituirse por una única resistencia suma de ambas.

Si consideramos dos resistencias en paralelo, Figura 69 b, tendremos:

$$\begin{aligned}I &= I_1 + I_2, \\ \varphi_1 - \varphi_2 &= R_1 I = R_2 I_2, \\ (\varphi_1 - \varphi_2) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) &= I, \\ (\varphi_1 - \varphi_2) &= \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I,\end{aligned}$$

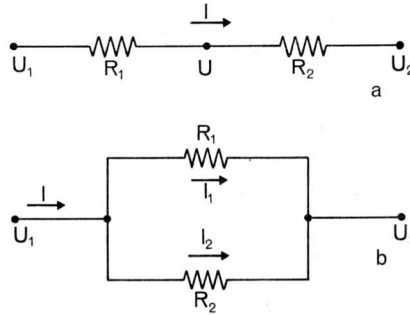


Figura 69: Ejemplo 2 de circuito.

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

O sea, dos resistencias en paralelo pueden sustituirse por una única resistencia cuyo valor está dado por:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

*Ejemplo 3.* Consideremos el circuito de la figura 3.10. La segunda ley de Kirchoff aplicada a la malla conduce a la única ecuación que es posible plantear

$$E_1 - E_2 - Ri = 0,$$

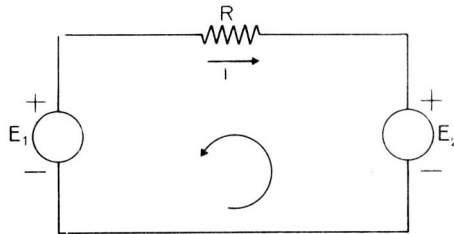


Figura 70: Ejemplo 3 de circuito.

luego, tenemos:

$$I = \frac{E_1 - E_2}{R},$$

de la que se deduce que dos generadores en serie pueden sustituirse por un único generador cuya fuerza electromotriz sea la suma algebraica de las fuerzas electromotrices de cada uno. En cambio, *es imposible colocar generadores en paralelo de diferente fuerza electromotriz*, puesto que la diferencia de potencial en bornes del conjunto es única y debe coincidir con las fuerzas electromotrices de cada generador. En los generadores

reales, la conexión en paralelo trae como resultado la aparición de una corriente entre los generadores, que tiende a igualar las tensiones en cada uno de ellos.

*Ejemplo 4.* Si en el Ejemplo 1 interesase sólo determinar la corriente  $I_1$ , podría sustituirse  $R_2$  y  $R_3$  por su resistencia equivalente  $R'$ , puesto que ambas están en paralelo:

$$R' = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Además,  $R_1$  y  $R'$  están en serie, de modo que pueden sustituirse por la resistencia  $R''$ :

$$R'' = R' + R_1$$

Tendremos, en definitiva:

$$I = -\frac{E}{R''} = -\frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}$$

## Conducción eléctrica en los metales

En las secciones que seguirán en este capítulo se estudiará, desde el punto de vista microscópico, el mecanismo de conducción de diversos conductores de uso frecuente en la técnica. Será necesario introducir algunas nociones adicionales sobre la estructura de la materia.

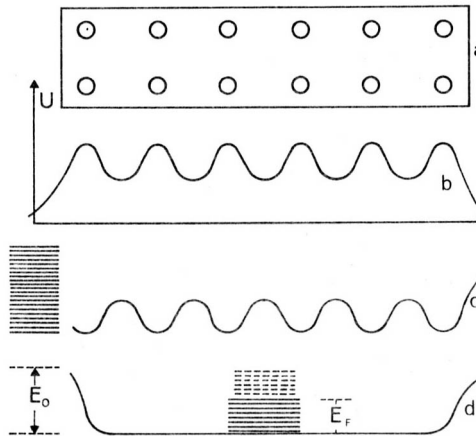


Figura 71: Esquema microscópico de un metal.

Desde el punto de vista microscópico, el estado sólido se caracteriza por una agrupación *regular y periódica* de los núcleos atómicos denominada *red cristalina*. La Figura

71 a es un diagrama esquemático de una posible red cristalina con una separación entre dos núcleos próximos del orden de  $10^{-10}$  metros. Desde el punto de vista eléctrico, la estructura de la red se traduce en un campo periódico, cuyo potencial se representa en la Figura 71 b, eligiendo como origen del potencial un punto situado en el infinito. Los electrones del material se encuentran sometidos al potencial de la red cristalina y adoptan una cierta distribución en el espacio. Es importante destacar que *no es posible* asignar una “nube” de electrones a cada núcleo de una red cristalina, sino que es necesario considerar el conjunto como un todo global.

La uniformidad interna del sólido se manifiesta al nivel macroscópico en la regularidad geométrica de los *cristales* y las *agrupaciones de cristales* que forman el metal.

La experiencia ha demostrado que el estudio del comportamiento de los electrones difiere radicalmente del previsto por las ecuaciones de Newton. La mecánica de Newton, presupone que una partícula, cual-quiera que sea su potencial, puede poseer *cualquier energía por encima de la energía potencial a que está sometida*. Sin embargo, los electrones, para cada distribución de potencial, sólo pueden poseer *ciertos valores discretos de energía*, denominados niveles de energía posibles. El estudio de los niveles posibles ha dado nacimiento a una nueva formulación de la mecánica, conocida con el nombre de *Mecánica cuántica*.

Para el estudio de las energías de los electrones es conveniente introducir una nueva unidad de energía:

$$e = \frac{E}{q}$$

donde  $E$  es la energía medida en Joule,  $q$  es la carga del electrón y  $e$  es la energía medida en la nueva unidad. Se deduce inmediatamente que esta nueva unidad no es otra que el voltio (llamada frecuentemente *electrón-voltio*, para recordar que se trata de una unidad de energía). De acuerdo con estas convenciones se han dibujado en la Figura 71 c, la energía potencial de un electrón sometido al potencial de la red periódica y los niveles posibles de energía en función del potencial aplicado. En la Figura 71 d se indica solamente un potencial *promedio*, con el objeto de mostrar claramente que, en la superficie del sólido, existen “barreras” de potencial que impiden, en cierta medida, que los electrones abandonen el cristal. El salto de energía potencial del electrón entre un punto central del cristal y el potencial al infinito lo llamamos  $E_0$ .

Hasta aquí, la exposición se ha desarrollado para un único electrón. Cuando se generaliza el estudio a una gran cantidad de electrones se presenta una nueva dificultad. Por un lado, cambia el potencial a que está sometido cada electrón, debido a la presencia de los restantes, pero esta modificación es pequeña y puede admitirse, sin error considerable, que el potencial efectivo sobre cada electrón coincide con el potencial producido por la red cristalina. Por otro lado, una interacción de origen cuántico da lugar a una modificación importante: *en cada uno de los estados que están permitidos*

hay un electrón y sólo uno (con la salvedad de que puede haber varios estados diferentes permitidos al electrón que posean la misma energía, la cual será necesariamente una de las energías permitidas). Esta ley se conoce por *principio de exclusión* y es debida a Pauli. Este principio revela que el comportamiento del electrón difiere en dos aspectos del comportamiento de una partícula: ciertos estados y ciertas energías son las únicas permitidas y todo estado ocupado por un electrón no puede ser ocupado por otro.

Tanto la red cristalina como los electrones, se encuentran en movimiento cuya intensidad depende de la energía que poseen: Los electrones en un intercambio incesante y caótico entre sus estados posibles; la red cristalina en un movimiento vibratorio de los núcleos, alrededor de su posición asignada en la red. Como es natural, el movimiento microscópico *no es detectable como movimiento físico* a escala macroscópica, pero en cambio se manifiesta en forma de la *temperatura* del cuerpo. Al aumentar ésta las vibraciones de la red aumentan de amplitud y el movimiento desordenado de los electrones se intensifica, mientras que al disminuir la temperatura se presentan los efectos indicados pero en sentido contrario. El estudio de la conexión entre el movimiento a escala microscópica y la temperatura a escala macroscópica ha dado lugar a una nueva rama de la mecánica: la *Mecánica estadística*.

Al disminuir la temperatura de un sólido, baja la intensidad del movimiento de los electrones y por lo tanto éstos deben ocupar los niveles permitidos de menor energía; pero cuando se llega a una determinada temperatura lo suficientemente baja, los electrones ocupan todos los niveles energéticos que siguen al menor permitido. Algo semejante ocurre con las vibraciones de la red cristalina, pero hay que resaltar un fenómeno importante: en todos los sólidos, la temperatura a que los electrones ocupan todos los niveles inferiores permitidos es siempre la misma y es igual a la necesaria para llegar al mínimo de vibraciones en la red cristalina. Esta temperatura se conoce con el nombre de *cero absoluto* y vale  $-273,16$  grados centígrados. Como en la escala centígrada, la temperatura cero se ha elegido en forma arbitraria (hielo fundente), es conveniente definir una nueva escala cuyo origen sea el cero absoluto. Llamarnos temperatura absoluta o Kelvin a la temperatura  $T$  definida por la ecuación:

$$T = t + 273,16$$

donde  $t$  es la temperatura centígrada. De este modo, la escala de temperaturas absolutas parte del cero absoluto como origen.

A la temperatura del cero absoluto los electrones ocupan un nivel máximo, denominado *energía de Fermi* del cristal considerado. En la Figura 71 d se ha dibujado con línea llena los niveles ocupados y con línea punteada los niveles vacíos en el cero absoluto. La diferencia de energías  $E_0 - E_F$  se denomina *función de trabajo* del metal.

Si ahora procedemos a elevar la temperatura del cuerpo se producirá un aumento de movimiento en la estructura microscópica. Si la temperatura no supera algunos



miles de grados Kelvin (por otra parte la temperatura de fusión indica el aumento máximo de la temperatura del sólido antes de perder la estructura cristalina) la energía comunicada a los electrones es pequeña comparada con el nivel de Fermi. Como debe cumplirse el principio de exclusión, los únicos electrones que incrementan su energía son solamente los que ocupan los niveles cercanos al de Fermi, de modo que al aumentar la temperatura el incremento total de movimiento de los electrones no es demasiado importante. La situación en la red cristalina es diferente. En el cero absoluto, se encuentra en un estado de mínima energía vibratoria y no existiendo ninguna restricción del tipo del principio de exclusión para el incremento de sus vibraciones los aumentos de temperatura por pequeños que sean producen un incremento significativo de las vibraciones. Podemos admitir entonces que la elevación de temperatura en un cuerpo se traduce esencialmente en el aumento de las vibraciones de su red cristalina.

Cuadro 3: Propiedades eléctricas de algunos metales.

material	nivel de Fermi	función de trabajo
	voltios	voltios
Litio	4,72	2,49
Sodio	3,12	2,28
Potasio	2,14	2.24
Cesio	1,53	1,81
Cobre	7,04	4,46
Plata	5,51	4,73
Aluminio (monovalente)	6,63	4,08
Hierro		4,40
Tungsteno		4,49
Mercurio		4,53
Níquel		5,01
Plomo		3,94
Zinc		4,28

Consideremos dos metales en contacto a la misma temperatura, como en la Figura 72. Luego de un posible flujo de electrones de un metal al otro, se alcanza un equilibrio cuya condición es que las energías características de los niveles de Fermi deben coincidir, puesto que en el caso contrario, existirían diferencias de energía entre los electrones de ambos metales. La figura indica que las superficies de los metales se encuentran a potenciales diferentes. Esta diferencia de potencial establecida, se denomina *potencial de contacto* entre los metales. Se deduce inmediatamente que *el potencial de contacto de dos metales es la diferencia de sus funciones de trabajo*.

En un circuito cerrado formado por metales diferentes que se encuentran a la misma temperatura, no circula corriente alguna, puesto que la suma de los potenciales de

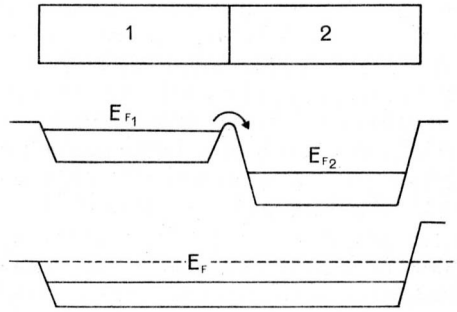


Figura 72: Contacto de dos metales.

contacto vale cero:

$$(E_{T1} - E_{T2}) + (E_{T2} - E_{T3}) + (E_{T3} - E_{T1}) = 0,$$

donde  $E_{T1}$ ,  $E_{T2}$  y  $E_{T3}$  son las funciones de trabajo de tres metales que forman un circuito cerrado.

Al aplicar un campo a un metal, se modifica el potencial de cada electrón y éste recibe una energía adicional. El electrón se encuentra sometido por un lado a su movimiento caótico de origen térmico y por otro al movimiento acelerado comunicado por el campo. Por consiguiente, acelera su movimiento hasta el instante en que “cho-ca” con algún núcleo de la red cristalina. El resultado de este “choque” es doble: la red cristalina recibe energía del electrón y aumenta su movimiento vibratorio; a su vez, el electrón cede energía y modifica la dirección de su movimiento. Desde el punto de vista macroscópico los efectos que se manifiestan son varios. El movimiento resultante de cada electrón es la superposición debido a la agitación térmica, del acelerado provocado por el campo y del resultante de los choques con la red. Por consiguiente, se produce un movimiento de transporte de electrones de promedio uniforme y de dirección la que impone el campo aplicado. A su vez, la red cristalina recibe energía de los electrones y aumenta su movimiento vibratorio, es decir la temperatura del cuerpo. Los efectos macroscópicos que se presentan se traducen en la ley de Ohm y en la elevación de la temperatura del metal.

Consideremos ahora, Figura 73, una barra de un metal cuyos extremos se encuentran a dos temperaturas diferentes,  $T_1 > T_2$ . La diferencia de temperaturas en los extremos de la barra provoca diferentes estados de movimiento en la estructura microscópica. En el extremo caliente existirán vibraciones de gran amplitud en la red cristalina y en el extremo frío, la amplitud será pequeña. Como indica la experiencia macroscópica, en un sistema capaz de vibrar, se producen fenómenos de propagación de vibraciones (una barra elástica golpeada en un extremo conduce el movimiento vibratorio al otro extremo, y la propagación de las vibraciones está acompañada de un

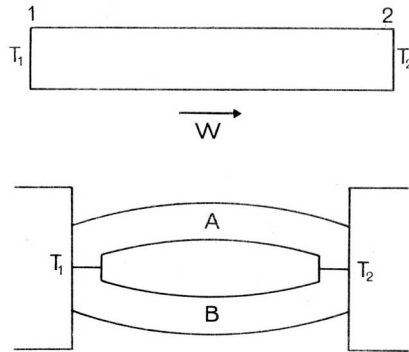


Figura 73: Metales en contacto con diferente temperatura.

transporte de energía, puesto que el extremo que las recibe puede realizar un trabajo, por ejemplo, agitar agua), con una determinada distribución a lo largo de la barra, de mayor a menor amplitud y con un transporte de energía adicional. Desde el punto de vista macroscópico se observa una distribución de temperaturas descendente a lo largo de la barra y un transporte de energía (calor) desde el extremo caliente al frío. A su vez, la diferente agitación térmica que está presente en cada punto de la barra provoca una redistribución de los electrones, de modo que en el extremo caliente hay mayor densidad de los mismos que en el extremo frío. Se observa también una diferencia de potencial  $\varphi_1 < \varphi_2$  puesto que el extremo caliente es más “negativo”.

En campo exterior y una diferencia de temperaturas aplicados simultáneamente a la barra se traduce en la superposición de los fenómenos estudiados.

Un caso interesante lo constituye la unión eléctrica de dos barras de diferentes materiales cuyos extremos están a temperaturas diferentes, Figura 73. Antes de efectuar el contacto eléctrico, existe una diferencia de potencial entre los extremos de cada barra. Si estas diferencias de potencial son distintas, al establecer la unión eléctrica se creará un circuito cerrado por el cual circula una corriente mantenida por los focos térmicos que establecen la diferencia de temperaturas. En efecto, si éstos se suprimen, las cargas se distribuyen de nuevo y una vez repartidas, nos encontramos ante el caso de los potenciales de contacto en dos metales y por tanto cesa la corriente. Si, por el contrario, manteniendo artificialmente la diferencia de temperaturas ocurriera que la corriente generada fuese nula, cada barra se podría estudiar independientemente de la otra y llegaríamos a la conclusión de que tendrían que ser iguales las diferencias de potencial en cada barra para que no existiera corriente alguna; lo cual está en contradicción con la realidad.

Un dispositivo como el estudiado recibe el nombre de *par termoeléctrico*. De acuerdo con nuestras definiciones, es un generador cuya fuerza electromotriz no es otra que la diferencia de potencial que existe entre los metales, cuando se interrumpe el con-

tacto eléctrico en una de las uniones. Se ve inmediatamente que es la diferencia de los potenciales establecidos en cada barra. Cada una se comporta como un generador, de modo que se pueden calcular las corrientes resultantes del circuito termoelectrico en la misma forma del Ejemplo 3 de la sección anterior.

En el Cuadro 4 se presenta la fuerza electromotriz de un par termoelectrico cobre-constantan, con la temperatura de la soldadura fría 0° C.

Cuadro 4: Termocupla cobre-constantan.

<b>soldadura caliente</b> ° C	<b>fuerza electromotriz</b> voltios
-100	-3,35
50	-1,81
0	0
50	2,03
100	4,28
150	6,70
200	9,29
250	12,01
300	14,86
350	17,82
400	20,87

## Semiconductores y aislantes

Como ya hemos visto en la sección anterior, las propiedades de conducción eléctrica estaban ligadas a la posibilidad de que existieran electrones capaces de desplazarse por acción de un campo eléctrico aplicado. Estos electrones se denominan electrones de conducción. Un material será conductor o aislante según posea o no electrones de conducción.

Las energías permitidas a un electrón están determinadas por el potencial creado por la red cristalina y constituyen un conjunto discreto de valores. La distancia de cada nivel de energía con su inmediato siguiente es variable, dependiendo de la estructura cristalina y del nivel considerado. Los niveles permitidos se presentan agrupados en conjuntos tal como se indica en la figura 74. Dentro de cada grupo o banda, la diferencia de energías entre dos niveles consecutivos es muy pequeña, pero en cambio, entre el último nivel de una banda y el primero de la banda siguiente puede existir una separación de varios electrón-voltios.

En el cero absoluto, tal como exige el principio de exclusión, los electrones ocupan todos los niveles inferiores posibles. Se presentan entonces dos situaciones diferentes:

1. El último nivel ocupado cae en el centro de una banda.

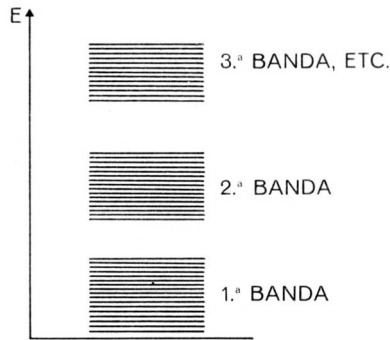


Figura 74: Bandas de energía de un cristal.

2. El último nivel ocupado es el último de una banda.

En el caso 1, mediante un campo aplicado será posible aumentar la energía de los electrones para que éstos pasen a los niveles libres restantes de la banda. Si el cuerpo posee una gran cantidad de electrones de conducción, el material es un *conductor*.

En el caso 2, mientras no se aplique un campo suficientemente intenso o se eleve la temperatura en formó conveniente, no será posible que un electrón reciba energía suficiente para que pueda saltar a la banda superior. No se poseen entonces electrones de conducción y el material es un *aislante*.

Un aislante que posea una diferencia de energías pequeñas entre la última banda ocupada y la primera libre se denomina semiconductor. Un material tal será aislante mientras la temperatura sea conveniente-mente baja.

Podría pensarse que un aumento de energía de unos pocos electrón-volt es insignificante, pero si consideramos un campo intenso aplicado, por ejemplo, de 100 kvolt/cm tendremos una diferencia de potencial entre dos núcleos de la red cristalina de:

$$10^7 \frac{\text{voltios}}{\text{metro}} \times 10^{-10} \text{ metros} = 0,001 \text{ electrón-voltios}$$

Por otra parte, una elevación de temperatura del orden de 1000° K produce un aumento de energía medio en los electrones de 0,1 electrón-voltios aproximadamente.

Si modificamos la red cristalina, sustituyendo algunos núcleos originales por núcleos de otro elemento (impurezas), la estructura de bandas se modificará y aparecerán nuevos niveles permitidos en las regiones normalmente prohibidas. La presencia de impurezas en el material disminuye la energía necesaria que hay que comunicar a un electrón de la región prohibida para hacerle pasar de una banda a otra. El agregado de impurezas a un aislante disminuye su resistencia. La adición controlada de impurezas a un semiconductor permite regular sus propiedades de conducción y constituye el punto clave de las aplicaciones prácticas de los semiconductores.

## Conducción electrolítica: pilas y acumuladores

Suponemos conocida la teoría elemental de la ionización de los electrolitos en disolución acuosa, por lo cual, en esta sección precisaremos sólo algunas ideas que pueden ser útiles al lector.

Si conocemos la composición química de un electrolito podemos calcular la masa de una molécula sumando las masas de cada átomo. La *masa atómica* (o *peso atómico*) de un elemento se define como la masa real de  $6,023 \times 10^{23}$  átomos, expresada en gramos y es una cantidad extremadamente pequeña. La *masa molecular* es la suma de las masas atómicas de los átomos componentes de la molécula, es la masa real de  $6,023 \times 10^{23}$  moléculas. Este número, llamada *número de Avogadro*, se ha elegido convencionalmente al atribuir una masa atómica arbitraria a un elemento (actualmente, en 1965, se atribuye una masa de 12 gramos al  $C^{12}$ ). En el Cuadro 5 se presentan algunos pesos atómicos.

Cuadro 5: Pesos atómico de algunos elementos.

<b>elemento</b>	<b>gramos</b>
Aluminio	26,98
Antimonio	121,75
Cloro	35,45
Cobre	63,54
Hidrógeno	1,0079
Hierro	55,84
Plomo	207,19
Mercurio	200,59
Níquel	58,71
Nitrógeno	14,0067
Oxígeno	15,9994
Plata	107,87
Azufre	32,064
Zinc	65,37

Si consideramos ahora un ion, podremos definir una masa iónica, que coincidirá con la masa del átomo, si se trata de un elemento, o con la masa del grupo de átomos, si se trata de un ion más complejo (la masa de los electrones adquiridos o cedidos es insignificante frente a las masas de los núcleos atómicos del ion. El número de electrones ganados o perdidos por el ion del elemento considerado lo llamamos *valencia*  $v$ , de modo que la carga que transporta un ion es  $vq$ , donde  $q$  es la carga del electrón.

La presencia de iones en un electrolito disuelto hace pensar en la posibilidad de una conducción eléctrica que, según vimos al estudiar los conductores, el hecho fun-

damental que determina las propiedades de conducción de las sustancias es el número de portadores de carga libres capaces de movimiento. Cabe esperar que la conductividad de un electrólito venga determinada por la concentración de los iones presentes, es decir, en forma aproximada, por la concentración de electrólito presente en la solución:

$$\gamma = C\Lambda$$

donde  $C$  es la concentración de la solución medida, por ejemplo, en gr/litro y  $\Lambda$  es la *conductividad específica*, que es una constante del electrólito. En rigor  $\Lambda$  depende algo de la concentración y bastante de la temperatura, como cabe esperar al ser afectados los iones de la solución por la agitación térmica del líquido. En lugar de una concentración en masas, se suele hablar en términos de una concentración en *cantidad de iones*, que es más representativa del fenómeno de conducción eléctrica. Llamamos *número de moles* de una cantidad de átomos, moléculas o iones, al número real de átomos, moléculas o iones presentes, dividido por el número de Avogadro. Resultan inmediatamente las igualdades:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{\mu N}{\mu N_0} = \frac{m}{M}$$

onde  $N$  es el número real de partículas,  $N_0$  es el número de Avogadro,  $\mu$  es la masa *real* del átomo, molécula o ion,  $m$  es la masa real presente y  $M$  su masa atómica, molecular o iónica. La concentración de la disolución se definirá ahora como el número de moles de soluto presentes por litro de solución. De la ecuación anterior se deduce que la concentración en gr/litro y la concentración en moles/litro son proporcionales, siendo  $M$  el coeficiente de proporcionalidad.

La resistencia de un electrólito entre dos electrodos, está dada por:

$$R = \frac{L}{\gamma S} = \frac{L}{C\Lambda S}$$

en la que  $L$  es la separación entre los electrodos y  $S$  su superficie.

Cuando se sumerge en agua un electrodo de un metal (Cu para fijar las ideas), Figura 75, el metal tiende a disolverse pasando en forma de iones  $\text{Cu}^{++}$  a la disolución, con lo cual el electrodo se carga negativamente y la solución se hace positiva. La distribución de cargas crea un campo eléctrico  $\vec{E}$  en la superficie de contacto entre el metal y la solución que se opone a la disolución de nuevas cantidades de cobre. Para una determinada concentración de iones en la solución, se establece un estado de equilibrio entre los iones que pasan a la disolución y los iones que pasan al electrodo por la acción del campo  $\vec{E}$ . Alcanzado el equilibrio, existe una diferencia de potencial entre el electrodo y la disolución, conocida con el nombre de *potencial del electrodo*:

$$E = \text{potencial de la solución} - \text{potencial del electrodo} > 0.$$

$E$  depende del material del electrodo y de la temperatura absoluta a la cual se establece el equilibrio. Como no es posible medir la diferencia de potencial de un electrodo aislado, es usual considerar el potencial de electrodo referido al llamado electrodo normal de hidrógeno, es decir:  $E_0 = E - E_{Hidrogeno}$ .

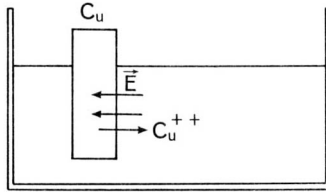


Figura 75: Un electrodo en un electrolito.

En el Cuadro 6 se presentan los potenciales normales de electrodos  $E_0$  en voltios a  $25^\circ \text{C}$ .

Cuadro 6: Potenciales de electrodo de algunos electrolitos.

electrodo	potencial
Al $\text{Al}^{+++}$	1,67
Ni $\text{Ni}^{++}$	0,24
Zn $\text{Zn}^{++}$	0,761
Ag $\text{Ag}^+$	-0,799
Fe $\text{Fe}^{++}$	0,441
Pb $\text{Pb}^{++}$	0,126
Cu $\text{Cu}^{++}$	-0,340
Hg $\text{Hg}^+$	-0,799

Si sumergimos un electrodo no ya en agua sino en una disolución que contenga iones  $\text{Cu}^{++}$  (como podría ser una solución de  $\text{CuSO}_4$ ) el punto final de equilibrio será diferente. La relación entre las concentraciones y los potenciales de electrodo (a temperatura ambiente) está dada por la *ecuación de Nernst*:

$$E = E_0 - \frac{0,059}{v} \log_{10} C$$

donde  $E$  es el potencial de electrodo,  $E_0$  es el potencial normal, es decir a una concentración igual a 1 mol/litro,  $C$  es la concentración del ion presente en moles/litro y  $v$  la valencia del ion.

Consideremos dos electrodos distintos en presencia de disoluciones de sus iones, respectivos de modo que las disoluciones estén en contacto eléctrico, Figura 76, pero sin mezclarse entre sí. Supongamos para fijar las ideas, un electrodo de cobre y otro de



zinc. De acuerdo con la ecuación de Nernst tendremos:

$$E_{\text{solucion}} - E_{Cu} = -0,340 - \frac{0,059}{2} \log_{10} C_{Cu^{++}}$$

$$E_{\text{solucion}} - E_{Zn} = 0,761 - \frac{0,059}{2} \log_{10} C_{Zn^{++}}$$

$$V = E_{Cu} - E_{Zn} = 1,101 - \frac{0,059}{2} \log_{10} \frac{C_{Cu^{++}}}{C_{Zn^{++}}}$$

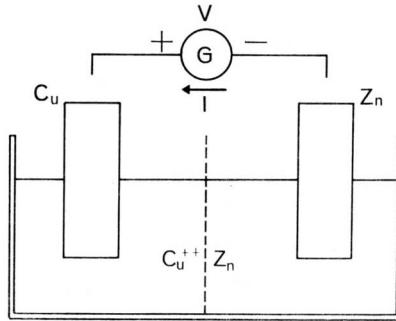


Figura 76: Diferencia de potencial entre dos electrodos.

La influencia del término de las concentraciones es en general pequeña, de modo que tendremos aproximadamente:

$$V = E_{Cu} - E_{Zn} = 1,101 \text{ voltios}$$

Si ponemos los electrodos en comunicación con un generador exterior de tensión  $V > 1,101$  voltios, con la polaridad indicada, y cerramos el circuito pasará una corriente que entra por el cobre y sale por el zinc. Se producirá una disolución de iones cobre y un depósito de iones zinc. Estamos en presencia de un fenómeno de *electrólisis*. Se observa que por cada dos electrones que circulan se disuelve un átomo de Cu y se deposita un átomo de Zn. Si por el circuito pasa una carga  $Q = It$  tendremos, siendo la carga del electrón  $1,60 \times 10^{-19}$  coulomb:

$$\frac{It}{1,60 \times 10^{-19}}$$

electrones. La masa real de los iones vale:

$$\mu_{Cu} = \frac{M_{Cu}}{6,02 \times 10^{23}}$$

$$\mu_{Zn} = \frac{M_{Zn}}{6,02 \times 10^{23}}$$

luego la masa de cobre que se incorpora a la solución será:

$$m_{Cu} = \frac{1}{2} \times \frac{It}{1,60 \times 10^{-19}} \times \frac{M_{Cu}}{6,02 \times 10^{23}}$$

puesto que cada dos electrones se deposita un átomo de Cu. La masa depositada de zinc será:

$$m_{Zn} = \frac{1}{2} \times \frac{It}{1,60 \times 10^{-19}} \times \frac{M_{Zn}}{6,02 \times 10^{23}}$$

En un caso general, la cantidad de electrolito incorporado a la disolución o depositado en los electrodos puede calcularse mediante la *ecuación de Faraday*:

$$m = \frac{1}{v} \times \frac{ItM}{96500} \quad \text{gramos}$$

donde  $v$  es la valencia del ion,  $M$  su masa iónica en gramos,  $I$  la corriente que circula en amperes y  $t$  el tiempo de paso de la corriente, en segundos.

Si en lugar de conectar un generador exterior colocamos una resistencia  $R$ , la corriente eléctrica atraviesa la disolución y se separa cobre metálico en el electrodo de cobre y se disuelve zinc en la disolución. Esta combinación constituye un *generador químico* o *pila*. Su fuerza electromotriz viene dada también por la ecuación:

$$V = E_{Cu} - E_{Zn} = 1,101 - \frac{0,059}{2} \log_{10} \frac{C_{Cu^{++}}}{C_{Zn^{++}}} \quad \text{voltios}$$

Las pilas transforman en energía eléctrica una parte de la *energía química almacenada*, puesto que, durante su funcionamiento se disuelve cobre en la disolución y se deposita zinc en el electrodo, de modo que transcurrido algún tiempo, cuando se termina el electrodo de cobre o el zinc de la disolución, la pila queda agotada.

La fuerza electromotriz de la pila depende de la carga que se ha hecho pasar por ella, tal como muestra el término de las concentraciones. Durante su funcionamiento, aumenta la concentración de iones  $Cu^{++}$  y disminuye la concentración de iones  $Zn^{++}$  en la solución, de modo que la pila va disminuyendo su fuerza electromotriz. Por el contrario, en un fenómeno de electrólisis, la variación de concentraciones ocurre a la inversa y, por tanto, aumenta la diferencia de potencial que se opone al paso de la corriente. Si la tensión  $V$  es constante, el fenómeno se detiene en el momento en que la diferencia de potencial entre los electrodos iguala a  $V$ .

Consideremos, por último, la ecuación del circuito en el caso general, Figura 77:

$$V = RI + E_{Cu} - E_{Zn} + \frac{L}{C\Lambda S} I$$

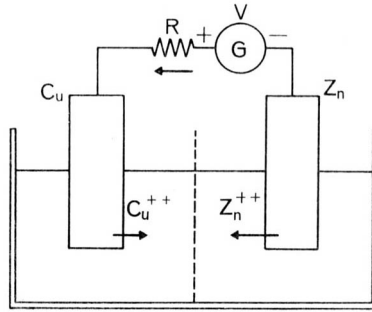


Figura 77: Un circuito electroquímico.

La ecuación de las masas transportadas permite obtener la expresión de las concentraciones en función del tiempo:

$$C_{Cu^{++}} = \frac{m_{Cu^{++}}}{a} + \frac{1}{2a} \times \frac{1}{96500} \int_{t_0}^{t_1} I dt$$

$$C_{Zn^{++}} = \frac{m_{Zn^{++}}}{a} + \frac{1}{2a} \times \frac{1}{96500} \int_{t_0}^{t_1} I dt$$

donde  $m_{Cu^{++}}$  y  $m_{Zn^{++}}$  son los moles de  $Cu^{++}$  y  $Zn^{++}$  que, en el instante inicial, se encuentran en la *disolución* y  $a$  el volumen en litros de la disolución.

Estas dos ecuaciones permiten estudiar el comportamiento de la pila en cualquier condición de funcionamiento, así como los fenómenos electrolíticos que tengan lugar en su interior. Al operar con estas ecuaciones es necesario trabajar con sumo cuidado con las convenciones de signo hechas para obtener estas ecuaciones.

Como muestra la ecuación de Nernst, es posible construir pilas con dos electrodos iguales, en presencia de concentraciones diferentes de la disolución, obteniéndose así la llamada *pila de concentración*.

En el estudio esquemático realizado, no se ha considerado la posibilidad del desprendimiento de gas en alguno de los electrodos en lugar de un depósito de metal. Esta situación puede ocurrir según sean las reacciones químicas que tengan lugar en la pila. Naturalmente, si en algún electrodo existe un desprendimiento gaseoso, el funcionamiento del conjunto como pila y como fenómeno electrolítico ya no serán iguales y el paso inverso de la corriente no restituirá las condiciones iniciales de la pila, como ocurría en la pila Cu–Zn estudiada. Podemos entonces clasificar las pilas en dos grupos:

1. *Pilas reversibles* o *acumuladores*, que por medio de un fenómeno de transporte electrolítico permiten restituir la pila a las condiciones iniciales de funcionamiento.

2. *Pilas irreversibles*, en las que una vez terminada la reacción química, se han desprendido algunos gases que ya no se pueden recuperar por electrólisis, de modo que la pila no se puede restituir a sus condiciones iniciales más que por un cambio de soluciones.

Pertenecen al primer grupo, los conocidos acumuladores de automóvil o de equipos electrónicos, y al segundo, las pilas “secas” de linterna.

## Conducción en gases

Los gases sin ionizar son aislantes, como lo demuestra la experiencia cotidiana. Empleando diversos agentes, es posible conseguir una ionización de los mismos que permita disponer de portadores suficientes para la conducción. Para estudiar las diferentes clases de conducción eléctrica en los gases, consideraremos una ampolla conteniendo el gas, provista de dos electrodos a los cuales se aplica una diferencia de potencial. Estudiaremos sus características tensión–intensidad ( $V - I$ ), es decir, la tensión aplicada a los electrodos y la corriente que atraviesa la ampolla, Figura 78.

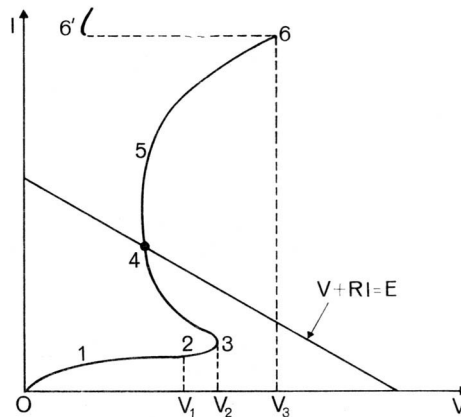


Figura 78: Curva de la conducción en un gas.

La radiación ambiente (rayos cósmicos, radiactividad natural) provoca la ionización permanente de una pequeña parte del gas. Si empezamos por aplicar una tensión pequeña, menor que  $V_1$ , tendremos una corriente del orden de  $10^{-14}$  amperes. En la zona 02 la conducción es similar a la que ocurre en un metal, puesto que el número de partículas ionizadas es constante. Si continuamos aumentando la tensión hasta 2, la intensidad no aumenta, lo cual se explica porque todos los iones formados son arrastrados por el campo eléctrico y quien determina entonces la corriente, es la velocidad

con la cual aparecen los iones en el gas. En esta zona toda radiación que esté presente en el tubo, modifica la corriente obtenida; en especial, la luz posee una influencia notable. Prosiguiendo el aumento de la tensión se encuentra que para valores mayores que  $V_1$ , que se denomina *potencial de ionización*, el campo aplicado al gas es suficiente para ionizar las partículas neutras, de modo que aumenta el número de portadores y la corriente crece rápidamente, zona  $\widehat{23}$ . Al llegar a la tensión  $V_2$ , denominada *tensión de ruptura* o *tensión de encendido*, los iones son acelerados en forma suficiente y colisionan con otras moléculas provocando nuevas ionizaciones en el seno del gas. Se observa que la intensidad de la corriente aumenta rápidamente, con un descenso en la tensión (zona  $\widehat{34}$ ), y que el gas empieza a hacerse luminescente, debido a los fenómenos de colisión entre las moléculas. Esta descarga luminosa a presión atmosférica se denomina *descarga corona*. Si exteriormente provocamos un aumento de corriente, llegamos a una zona  $\widehat{45}$ , en que prácticamente la tensión se mantiene constante. Esta zona se conoce con el nombre de *zona de descarga luminosa normal*. Los electrodos quedan envueltos por una luminosidad, proporcional a la corriente que circula por el tubo. La densidad de corriente en el electrodo es prácticamente constante (para 1 mm Hg de presión es del orden de 0,1 mA/cm<sup>2</sup>). Una vez que la densidad de la corriente aumenta más allá de lo normal, los electrodos quedan totalmente cubiertos y aparece la zona  $\widehat{56}$ , de *descarga luminosa anormal*, donde es necesario un nuevo aumento de la tensión para conseguir un incremento de la corriente. Al llegar a la tensión  $V_3$ , denominada *tensión de arco*, las características de la conducción se modifican bruscamente ( $\widehat{66'}$ ) y ésta se concentra en un punto de los electrodos que eleva rápidamente su temperatura. Parte de los electrodos se ionizan y colaboran también en la conducción. Las descargas en arco se caracterizan por una gran liberación de calor y de luz y porque la intensidad de corriente depende exclusivamente del circuito exterior.

Si colocamos un tubo de descarga con un generador de tensión  $E$  y una resistencia  $R$  en serie, si  $V$  es la tensión en el tubo, se tiene:

$$E = V + RI$$

esta ecuación representada en el diagrama  $V - I$  da una recta, cuyo punto de intersección con la curva característica del arco es el punto de funcionamiento.

La conducción gaseosa se utiliza en varias aplicaciones importantes:

1. La región  $\widehat{12}$  se emplea en los tubos sensibles a la luz.
2. La región  $\widehat{234}$  es la base de los tubos de ionización empleados para detectar partículas ionizantes o de radiación, como por ejemplo, el tubo Geiger-Müller.

3. La región  $\widehat{456}$  se encuentra en los tubos industriales y en los tubos luminosos.
4. La región de la descarga en arco se emplea como fuente o como fuente térmica puntual.

### Emisión y conducción en el vacío

Como ya es sabido, los electrones de un metal están “ligados” fuertemente a la red cristalina por un muro o barrera de potencial cuya altura es la función de trabajo. Si fuera posible comunicar al electrón la energía suficiente para superar la barrera, se evadiría del metal. Esta energía puede suministrarse de diversas maneras: térmicamente, por aumento de la temperatura, proceso llamado *emisión termoiónica*; por acción de un campo intenso, o *emisión de campo*; por choque del electrón con el metal, *emisión secundaria*; o por acción de la radiación luminosa, *emisión fotoeléctrica*.

*Emisión termoiónica.* Al aumentar la temperatura de un cuerpo se puede lograr un incremento de energía en los electrones, mayor que la función de trabajo. La relación entre la temperatura absoluta  $T$  del material y la densidad de corriente  $J$  de los electrones que escapan del material viene dada por la ecuación de Dushman–Richardson llamada *ecuación de la emisión termoiónica*:

$$J = AT^2 e^{-b/T}$$

donde  $A$  y  $b$  son constantes del metal. En el Cuadro 7 se presentan algunos valores.

Cuadro 7: Constantes de la emisión termoiónica.

<b>material</b>	<b>A</b> amperes °K <sup>2</sup> /cm <sup>2</sup>	<b>b</b> °K
Cesio	162	21000
Níquel	26,8	32100
Platino	32	61700
Tungsteno	60,2	52400

*Emisión por campo intenso.* La relación que existe entre el campo en la superficie del material y la densidad de corriente de los electrones arrancados del metal tiene la forma exacta de la ley de Dushman–Richardson, con la salvedad de sustituir  $T$  por  $E$ . Naturalmente, las constantes son diferentes. Debido a la elevada intensidad de campo necesaria para producir una corriente apreciable este tipo de emisión tiene un interés práctico muy pequeño.

*Emisión secundaria.* Cuando un electrón que posee una energía de varios cientos de electrón–voltos choca con una superficie metálica puede transmitir toda o parte de su energía a uno o, varios electrones internos, dando lugar a que éstos puedan evadirse. Hay que destacar que es sencillo suministrar varios cientos de electrón–voltos

a los electrones: basta acelerarlos con igual diferencia de potencial. Este procedimiento juega un papel importante en algunas descargas gaseosas que trabajan con algunos cientos de volts, por ejemplo, los tubos de radio.

*Emisión fotoeléctrica.* La incidencia de una radiación electromagnética (capítulo IX) en la superficie de un metal, puede comunicar energía suficiente a los electrones para liberarlos del cuerpo. De acuerdo con la hipótesis de Einstein, la radiación electromagnética se compone de una “lluvia” de ondas elementales, cada una de las cuales transporta una energía proporcional a su frecuencia:

$$E = hf$$

donde  $E$  es la energía transportada,  $f$  es la frecuencia de la onda y  $h$ , es la *constante de Planck*, una constante universal que vale  $h = 6,623 \times 10^{-34}$  joule-seg. El principio de conservación de la energía exige entonces, si  $v$  es la velocidad del electrón que escapa:

$$\frac{1}{2}mv^2 + F = hf$$

donde  $F$  es la energía mínima que debe suministrarse al electrón. Esta ecuación implica que:

$$f \geq \frac{F}{h}$$

es decir, que para lograr una emisión fotoeléctrica es necesario que incida sobre la superficie una radiación de frecuencia mayor que un valor mínimo. Para la mayoría de los metales esto corresponde a radiaciones en la región del ultravioleta.

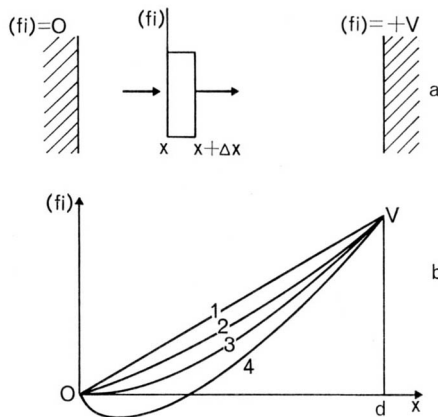


Figura 79: La conducción electrónica en el vacío.

Es interesante estudiar un caso simplificado de conducción en el vacío. Consideremos la Figura 79 a, dos metales planos indefinidos contenidos en un tubo en el que

se ha hecho el vacío, separados por una distancia  $d$  y sometidos a una diferencia de potencial  $V$ . Supondremos que el metal a menor potencial emite electrones con velocidad inicial nula y en la cantidad que se desee (como puede ocurrir si el metal se encuentra a una temperatura suficientemente alta). La tensión aplicada provocará una afluencia de electrones, los cuales crearán una distribución de cargas en el espacio de densidad  $g$ . Debido a la presencia de estas cargas, la distribución de potencial es como muestra la curva 2 de la Figura 79 b. Como quiera que la modificación del campo por la carga espacial, restringe el movimiento de los electrones, se llega a una situación de equilibrio límite, en la cual existe el máximo de conducción compatible con la carga espacial. Esto se logra con una distribución de potencial como la indicada por la curva 3, cuya tangente horizontal es 0. Una carga espacial mayor, provocaría una distribución de potencial similar a la curva 4, pero en estas condiciones, la región próxima a O crea un campo que impide la afluencia de los electrones que parten con velocidad nula y los devuelve al metal emisor.

Recordando la relación entre campo y potencial, podremos escribir:

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}$$

de modo que el campo es nulo en 0. Por otra parte, si tomamos un cilindro como el indicado en la figura y aplicamos la ley del flujo tendremos:

$$[E(x+h) - E(x)] S = \frac{Sh\rho}{\epsilon_0}$$

y haciendo tender  $h$  a cero se tiene:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Por otra parte, la ecuación de la energía nos da:

$$\frac{1}{2}mv^2 - e\varphi = 0$$

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}.$$

Si  $J$  es la densidad de corriente transportada, en amperes por metro cuadrado se tiene:

$$J = -\rho v$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0 \sqrt{\frac{2e\varphi}{m}}}.$$



Si multiplicamos esta ecuación por  $\frac{d\varphi}{dx} dx$  e integramos resulta:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \frac{2J\varphi^{1/2}}{\epsilon_0 \sqrt{2e/m}} + C.$$

La constante de integración  $C$  puede calcularse puesto que para  $x = 0$ ,  $\varphi = 0$  y  $d\varphi/dx = 0$ , luego  $C = 0$ . Obtenemos entonces:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0 \sqrt{2e/m}}} \varphi^{1/4}$$

que también puede escribirse:

$$\frac{d\varphi}{\varphi^{1/4}} = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0 \sqrt{2e/m}}} dx.$$

Integrando nuevamente, y recordando que  $\varphi$  se anula para  $x = 0$  tendremos:

$$\frac{3}{4} \varphi^{3/4} = \sqrt{\frac{4J}{\epsilon_0 \sqrt{2e/m}}} x.$$

Para  $x = d$ , se tiene  $\varphi = V$ , luego podemos calcular  $J$  como:

$$J = \frac{4}{9} \frac{\epsilon_0 \sqrt{2e/m}}{d^2} V^{2/3}$$

Conocido el valor de  $J$  las ecuaciones expuestas permiten calcular la distribución de potencial y la distribución de la carga espacial.

Una ecuación interesante que se obtiene, es la que relaciona la tensión con la corriente en el tubo y es conocida bajo diversas denominaciones, *ley de Langmuir-Child*, *ley de la potencia tres medios* o sencillamente como *ecuación de la carga espacial*:

$$I = k V^{3/2}$$

puesto que  $J$  e  $I$  son proporcionales entre sí en una geometría dada. Esta ecuación muestra que la conducción en el vacío, limitada por la carga espacial, no sigue la ley de Ohm.

La conducción en las válvulas termoiónicas empleadas en electrónica concuerda con el esquema estudiado. En ellas la emisión de electrones se consigue elevando la temperatura del electrodo emisor o filamento.



# Campo magnetostático en el vacío

## Definición del campo

Las fuerzas de origen eléctrico estudiadas hasta el momento se ejercían tanto sobre cargas en reposo como en movimiento. Sin embargo, puede ocurrir que en ciertas condiciones, la fuerza ejercida sobre una carga en reposo sea *distinta* cuando la carga está en movimiento. Decimos que, en esta situación *existe un campo magnético*.

Esta circunstancia se presenta al haber *cargas en movimiento*, o sea corrientes. En consecuencia, es necesario revisar las nociones de campo para explicar satisfactoriamente esta situación.

Consideremos una carga de prueba de 1 coulomb. La fuerza ejercida en cada punto, colocando la carga *en reposo*, se denomina intensidad del *campo eléctrico* presente en el punto. Si la carga, en el mismo punto, está animada de una cierta velocidad  $\vec{v}$ , la fuerza ejercida es distinta a la del campo eléctrico. La fuerza mecánica *suplementaria* existente en cada punto, reúne tres propiedades características:

1. Es perpendicular a la velocidad.
2. Es proporcional a la velocidad y a la carga.
3. Está contenida en un plano fijo, cualquiera que sea la velocidad de la carga de ensayo.

*Ley de Lorentz.* La fuerza magnética se resume en forma matemática en

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

donde  $q$  es la carga,  $\vec{v}$  es la velocidad y vector  $\vec{B}$  es característico de cada punto del espacio y se denomina *intensidad del campo magnético*.

El símbolo  $\wedge$  indica el producto vectorial.  $B$  se mide en

$$\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb m/seg}} = \text{Weber/m}^2$$

De lo expuesto se desprende que la fuerza que se ejerce sobre una carga en movimiento se compone de la fuerza *estática* o eléctrica y de la *fuerza dinámica* o magnética.

La ecuación total de la fuerza es pues

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Es de interés señalar dos hechos acerca de las fuerzas magnéticas. Las fuerzas magnéticas *no producen trabajo*, puesto que son perpendiculares a la dirección del movimiento. Si la carga se mueve en la dirección del campo magnético la fuerza magnética es cero, puesto que  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son paralelos. Veamos algunos ejemplos de cálculos de fuerzas de origen magnético:

*Ejemplo 1.* Consideremos un campo magnético de dirección normal al plano de la hoja y de *intensidad constante*  $B$ , Figura 80. Supongamos, que el sentido de  $\vec{B}$  es tal que se dirige hacia el interior de la hoja. Esto se representa con un círculo con una cruz, tal como se vería una flecha desde atrás, con sus cuatro plumas.

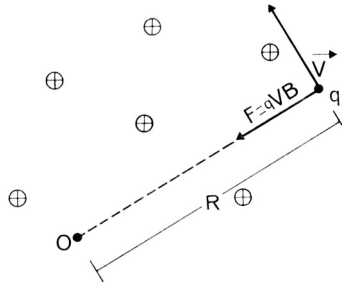


Figura 80: Movimiento de una carga en un campo magnético.

Sea ahora una carga  $q$  en movimiento en el plano de la hoja con una velocidad  $\vec{v}$ . La velocidad no puede cambiar de valor, puesto que el campo es normal a ella; sólo puede cambiar de dirección. Si planteamos la ecuación de las aceleraciones normales tendremos

$$q v B = \frac{m v^2}{R}$$

de donde podemos calcular  $R$ , radio de giro de la partícula

$$R = \frac{m v}{q B} .$$

El radio de giro resulta ser *constante* y, como la velocidad no cambia, el punto describe una circunferencia con movimiento uniforme. El valor del período del movimiento es

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{q B}$$

es independiente de la velocidad de la partícula. Esta propiedad del movimiento de las cargas sometidas a un campo magnético, es empleada en los aceleradores circulares de partículas del tipo *ciclotrón*.

*Ejemplo 2.* Sea un conductor recorrido por una corriente  $I$ , Figura ?? y moviéndose en un campo magnético  $\vec{B}$ . Si consideramos un trozo de conductor de longitud  $dL$  y un intervalo de tiempo  $dt$ , durante el cual las cargas transportadas por la corriente recorren  $dL$ , tendremos

$$v = \frac{dL}{dt}; \quad q = I dt.$$

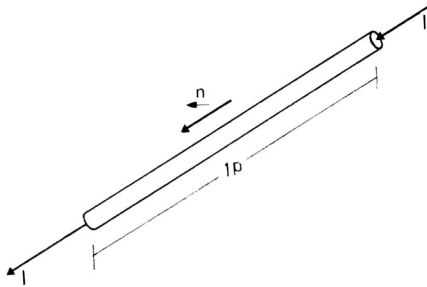


Figura 81: Fuerza magnética sobre un conductor.

Para determinar la dirección *efectiva* del movimiento de las cargas hay que tener en cuenta su movimiento *relativo con respecto al conductor* y el *movimiento propio del conductor*, tal como lo exigen las ecuaciones del movimiento relativo. Como ya es conocido, la densidad volumétrica de cargas en un conductor vale siempre cero. Al moverse el conductor, las cargas negativas y positivas se desplazan por igual, de modo que las fuerzas ejercidas sobre las mismas son de sentidos contrarios tal como lo indica la ley de Lorentz y tienen el mismo valor, como resulta del hecho de que la densidad total de cargas es cero. Entonces, las fuerzas suplementarias que el campo magnético ejerce sobre el conductor debido a la velocidad adicional del mismo, son iguales y opuestas para las cargas positivas y para las negativas; de modo que, desde el punto de vista de acción sobre las cargas, *no hay diferencia alguna en que el conductor se mueva o no*. La ley de Lorentz nos da, entonces, tomando como velocidad de las cargas la relativa respecto al conductor

$$d\vec{F} = I dt \vec{u} \wedge \vec{B}$$

donde  $\vec{u}$  es un vector de módulo 1, de dirección la del conductor y con el sentido de la corriente. Podemos escribir también

$$d\vec{F} = I d\vec{L} \wedge \vec{B}$$

en la que  $d\vec{L}$  es un vector de longitud,  $dL$  situado sobre el conductor y con igual sentido que la corriente.

Si consideramos una barra rectilínea de longitud  $L$ , recorrida por una corriente en movimiento en un campo uniforme de intensidad  $B$  perpendicular al plano que determinan el conductor y el movimiento, aparecerá una fuerza *perpendicular al conductor*, de valor  $F = B/L$ .

## Leyes del campo magnético

Lamentablemente, no es posible establecer fórmulas sencillas de las leyes del campo magnético a partir de las leyes elementales sobre corrientes. La dificultad, más que conceptual es matemática. El lector que esté interesado en el estudio deductivo de estas leyes puede consultar la bibliografía que se da al final del capítulo. En nuestro desarrollo *admitiremos* dos leyes generales, sin justificar matemáticamente su validez, dejando solamente la posibilidad de verificar sus resultados por la experiencia. Admitiremos entonces

*Ley de flujo.* El flujo de  $\vec{B}$  que atraviesa una superficie cerrada vale cero.

*Ley de Ampère.* La circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de una curva cerrada vale  $\mu_0 I$  donde  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  es una constante universal e  $I$  es la corriente que atraviesa una superficie cualquiera limitada por la curva.

La forma de las leyes del campo magnético es similar a las obtenidas para el campo eléctrico y no es necesario insistir en su significado. Sin embargo, es conveniente aclarar dos aspectos de la ley de Ampère: la magnitud  $\mu_0$ , denominada *constante de inducción* o *permeabilidad absoluta del vacío*, es una constante universal, similar a  $\epsilon_0$ . Su valor  $4\pi \times 10^{-7}$  se ha elegido *arbitrariamente*. En ello no hay contradicción alguna; la unidad eléctrica básica, el Coulomb, no ha sido definida todavía, de modo que la elección del valor de  $\mu_0$  permite medir las corrientes, a través de las fuerzas que se manifiestan entre las corrientes, tal como se verá en el *Ejemplo 2* de esta sección. Entonces, fijado  $\mu_0$ , es posible medir corrientes *refiriéndolas al Newton*. Una vez conocida la unidad de corriente, se deduce inmediatamente la unidad de carga.

El aspecto a considerar se refiere a la orientación de la circulación a lo largo de la curva cerrada a que hace referencia la ley de Ampère. Fijado un sentido de circulación para seguir la curva, es posible determinar la orientación respecto a una superficie que se apoye en el contorno de la curva. Consideremos, Figura 82, una curva cerrada situada en una superficie  $S$  “apoyada” en la curva. Supuesto que un sacacorchos gire en el sentido de la circulación de la curva, avanzará en una cierta dirección, atravesando

la superficie  $S$ . Una corriente que atraviese la superficie  $S$  en la dirección del sacacorchos, se considerará positiva, y en caso contrario, negativa. La ley puede enunciarse entonces, diciendo que la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de la curva, vale  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total que atraviesa la superficie  $S$ , tomada en sentido positivo. La elección de la superficie  $S$  es arbitraria, puesto que cualquiera que sea su posición, la corriente total que la atraviesa será la misma como se verá en los casos que estudiaremos.

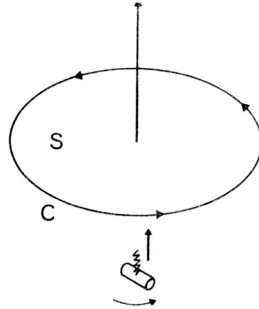


Figura 82: La regla del sacacorchos.

Veamos algunos ejemplos de cálculos de campos magnéticos.

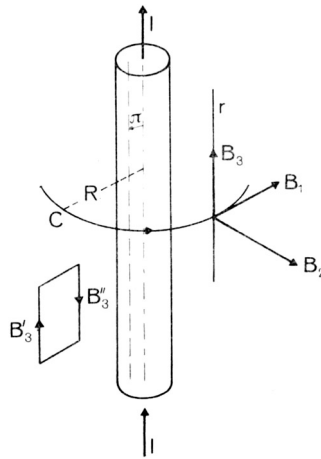


Figura 83: Campo de una corriente rectilínea indefinida.

*Ejemplo 1.* Hallemos el campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida, Figura 83. Debido al principio de simetría, el campo debe ser constante sobre una circunferencia  $C$  y sobre una recta. Descomponiendo el campo en las componentes  $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ , el flujo que atraviesa un cilindro concéntrico con el conductor, de altura  $H$  y radio  $R$ . Los flujos en cada base del cilindro son iguales, puesto que  $B_3$

es constante en cada punto sobre una recta  $\mathbf{r}$ . Por otro lado, su sentido es opuesto ya que lo son las normales, luego el flujo total saliente de las bases del cilindro es cero. Para la cara lateral se deduce entonces

$$2\pi R H B_2 = 0,$$

luego  $B_2 = 0$ . Si tomamos la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de la circunferencia  $\mathbf{C}$ , en el sentido indicado, tenemos, para el exterior del conductor

$$2\pi R B_1 = \mu_0 I, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Es interesante determinar la intensidad de campo en el interior del conductor. En la hipótesis de corriente uniforme en toda la sección  $\mathbf{S}$  del conductor tendremos

$$2\pi r B_1 = \mu_0 \frac{\pi r^2}{S} I, \quad B_1 = \frac{\mu_0}{2S} r I.$$

Si consideramos un rectángulo como el indicado en la figura y calculamos la circulación de  $\vec{B}$  tendremos, llamando  $B'_3$  y  $B''_3$  a los campos en los lados del rectángulo

$$(B'_3 - B''_3) H = 0$$

lo cual demuestra que el campo  $B_3$  es constante en todo el espacio. En cuanto al valor de  $B_3$  no es posible obtener nueva información en forma elemental. La aplicación del principio de simetría no sirve en este caso, puesto que la simetría especular invierte a la vez *el campo y el sentido de la corriente*, de modo que no se deduce conclusión alguna. Puede afirmarse que el campo  $B_3$  representa un posible *campo uniforme exterior* al creado por el conductor.

*Ejemplo 2.* Supongamos dos corrientes indefinidas, rectilíneas y paralelas como las estudiadas en el *Ejemplo 1* y calculemos la fuerza de atracción entre ellas, Figura 84. El campo que crea la corriente **1** sobre el conductor **2** es constante y vale  $B_1 = \mu_0 I_1 / 2\pi D$ . La fuerza se puede calcular por la expresión

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{L} \wedge \vec{B}_1.$$

En el caso estudiado, se tendrá

$$dF = I_2 B_1 dL = \frac{\mu_0}{2\pi D} I_1 I_2 dL,$$

o sea que la acción de la fuerza por unidad de longitud, del conductor **1** sobre el **2** vale

$$\frac{dF}{dL} = \frac{\mu_0}{2\pi D} I_1 I_2.$$



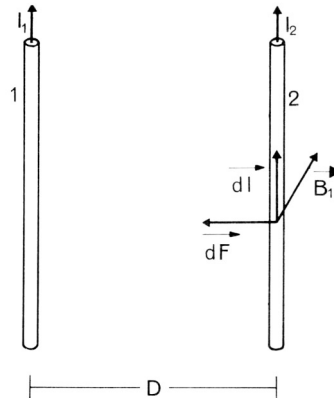


Figura 84: Fuerzas entre dos conductores rectilíneos indefinidos.

Esta ecuación nos muestra que es válido el principio de acción y reacción aplicado al campo magnético, puesto que la expresión obtenida es simétrica en  $I_1$  e  $I_2$  y representa, tanto la fuerza ejercida por el conductor 1 sobre el 2 como la del 2 sobre el 1. Con la expresión obtenida, es posible definir la unidad de corriente con referencia al Newton:

*Definición del amper.* Un conductor rectilíneo es atravesado por una corriente de 1 amper cuando colocado a una distancia de 2 metros de otro igual, atravesado por la misma corriente, experimenta una fuerza de atracción de  $10^{-7}$  Newton por metro de longitud.

Como se desprende de esta definición, el valor de  $\mu_0$  es arbitrario y ha sido adoptado por la Comisión Electrotécnica Internacional a fin de unificar los valores empleados para las unidades eléctricas y obtener una concordancia aproximada con los patrones ya existentes en el momento de su elección.

*Ejemplo 3.* Consideremos, Figura 85, un conjunto de espiras de distribución de corriente, situadas tangencialmente a la superficie de un cilindro de revolución indefinido tal como se indica en la figura. (Esta distribución de corriente puede realizarse en forma aproximada con un *solenoides*.) Se obtiene inmediatamente:

- $B_1 = 0$  porque la circulación a lo largo de una circunferencia  $C$ , que no es atravesada por las corrientes;
- $B_2 = 0$  porque el flujo a través de un cilindro concéntrico es cero, similar al *Ejemplo 1*;
- $B_3$  es constante por circulación a lo largo de un rectángulo exterior al cilindro, similar al *Ejemplo 2*.

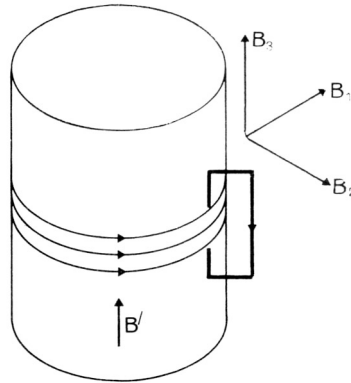


Figura 85: Campo de un solenoide infinito.

Si consideramos un rectángulo de altura  $H$  con un lado interior y el otro exterior al solenoide, la ley de Ampere se convierte en

$$(B - B') H = \mu_0 J H, \quad B = B' + \mu_0 J$$

donde  $B$  es el campo interior al solenoide, de dirección axial;  $B'$  es el campo exterior y  $J$  la densidad de corriente por unidad de longitud de generatriz (amper/metro). En ausencia de corriente se tiene nuevamente un campo uniforme exterior, de modo que, *en ausencia de campo aplicado* resulta

$$B = \mu_0 J.$$

Esta expresión se puede aplicar, en forma aproximada, para solenoides largos. xxxx completar xxxx

*Ejemplo 4.* Un conductor recorrido por una corriente y situado en un campo magnético experimenta acciones mecánicas y da lugar a una modificación de las líneas de corriente y de las distribuciones de campo. Este fenómeno es conocido con el nombre de *efecto Hall*. Un conductor que transporta una corriente, establece un campo magnético (como se ha visto en el *Ejemplo 1*), con lo cual aparece simultáneamente un efecto Hall sobre la corriente que le ha dado origen. La distribución verdadera de la corriente no puede calcularse con independencia del campo magnético originado por este nuevo tipo de interacción. En general, puede admitirse, para la mayoría de los conductores, que las modificaciones al esquema planteado en el *Ejemplo 1* son tan pequeñas, que la solución obtenida en aquel caso está básicamente acertada.

El efecto Hall es un nuevo argumento en favor de la independencia de los dos enunciados de la ley de Ohm. La proporcionalidad entre la tensión y la corriente implica de hecho una propiedad adicional de la materia frente al efecto Hall.

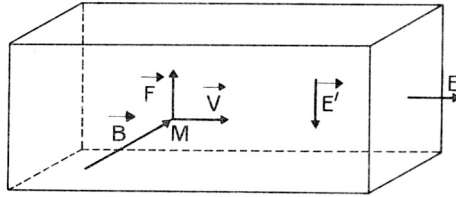


Figura 86: Esquema para calcular el efecto Hall.

Consideremos, Figura 86, un conductor indefinido que transporta una corriente de densidad  $J$ , situado en un campo *exterior*  $\vec{B}$ , uniforme, en una dirección perpendicular a la corriente. La situación física no cambia al trasladarnos en la dirección de la intensidad de corriente, y por lo tanto las líneas de corriente son paralelas. Si consideramos un elemento  $M$  portador, de una carga  $q$ , actuará sobre él una fuerza de origen magnético  $F$  que vale

$$F = q B v,$$

donde  $v$  es la velocidad del portador. Esta fuerza, tal como puede verse en la figura, debe ser equilibrada por un campo eléctrico adicional,  $\vec{E}'$ , a efectos que el portador se mueva según una recta dentro del conductor. El valor de  $E'$  resulta entonces

$$E' = B v = \frac{J B}{q N}$$

donde  $J$  es la densidad de corriente y  $N$  el número de portadores de carga por unidad de volumen. La expresión  $1/q N$  se suele llamar *constante de Hall* del material. En el Cuadro 8 se presenta la constante para algunos metales.

Cuadro 8: Constante de Hall para algunos metales.

material	constante $\text{m}^3/\text{coulomb}$
Cobre	$-5,5 \times 10^{-11}$
Plata	$-8,4 \times 10^{-11}$
Zinc	$3,3 \times 10^{-11}$
Aluminio	$-4 \times 10^{-11}$

Es evidente que el campo adicional,  $E'$ , derivado del efecto Hall, no sigue la ley de Ohm puesto que no crea corriente alguna en el metal. Lo que ocurre es que se induce una diferencia de potencial en sentido transversal al conductor. Calculemos, por ejemplo, el valor del campo  $E'$  para un conductor de cobre por el que circula una corriente de densidad  $10 \text{ amperes}/\text{mm}^2$  y que se encuentra sometido a un campo de 1

weber/m<sup>2</sup>. Se comprende que los valores elegidos son altos en ambos casos. Tendremos en consecuencia

$$E' = 0,00055 \text{ voltios/m.}$$

Por otra parte, el campo de conducción de la corriente es  $E = J/\gamma$ , y resulta con estos valores

$$E = 0,172 \text{ voltios/m.}$$

Por consiguiente en circunstancias extremas puede ser apreciable el efecto Hall.

El signo de la constante de Hall es el de los portadores presentes en el material. La aparición en el zinc de portadores positivos puede ser explicada dentro de la teoría de bandas, pero su estudio queda fuera del alcance de este libro.

### Trabajo realizado por una espira en un campo magnético

Consideremos, Figura 87, una espira rígida que se desplaza una longitud  $\vec{e}$ , dentro de un campo magnético aplicado  $\vec{B}$ . La ecuación que expresa la fuerza que actúa sobre un elemento de espira de longitud  $d\vec{l}$  vale

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B},$$

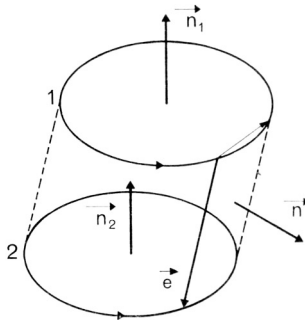


Figura 87: Desplazamiento de una espira en un campo.

donde  $I$  es la corriente que atraviesa la espira. El trabajo que el campo realiza durante el desplazamiento vale

$$dT = \vec{e} \times d\vec{F} = \vec{e} \times (d\vec{l} \wedge \vec{B})I = (\vec{e} \wedge d\vec{l}) \times \vec{B} I$$

cambiando el orden del producto mixto de vectores. Pero  $\vec{e} \wedge d\vec{l} = \vec{n} e dl$  donde  $\vec{n}$  es el vector unitario perpendicular a  $\vec{e}$  y a  $d\vec{l}$ , o sea perpendicular a la superficie lateral

“barrida” por la espira.  $dT$  se puede expresar entonces, considerando toda la espira (integrando en toda su longitud), como

$$dT = \left( \sum \vec{n} \times \vec{B} e dl \right) I, \quad dT = \Phi I,$$

donde  $\Phi$  es el flujo de  $\vec{B}$  que atraviesa la cara lateral “barrida” por la espira. Pero, si  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  son los flujos de  $\vec{B}$  a través de la espira, en las posiciones inicial y final, tomados con el sentido dado por la ley del sacacorchos, se tiene

$$\Phi_1 - \Phi_2 + \Phi = 0$$

$$dT = (\Phi_2 - \Phi_1) I = \Delta\Phi I$$

Si el desplazamiento tiene lugar a corriente constante tendremos

$$T = \Delta\Phi I$$

donde  $\Delta\Phi$  es el incremento del flujo de  $\vec{B}$  que atraviesa la espira. Pero el flujo total, en la espira, se compone del flujo de  $B$  y del *flujo propio* de la misma que es constante, por serlo  $I$ . Luego podemos escribir

$$T = \Delta\Phi_{tot} I$$

en la que  $T = \Delta\Phi_{tot}$  representa el incremento de flujo total en la espira. Es digno de notar nuevamente que el trabajo calculado en esta fórmula es *el trabajo realizado por el campo*.

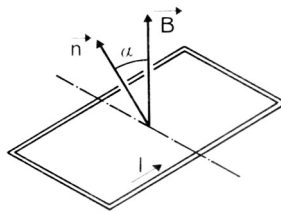


Figura 88: Fuerza sobre una espira plana.

*Ejemplo 1.* Supongamos una espira plana de área  $S$ , por la que circula una corriente  $I$ , y que está colocada en un campo uniforme  $\vec{B}$ , Figura ?? Si la normal a la espira orientada según la regla del sacacorchos forma un ángulo  $\alpha$  con el campo  $\vec{B}$ , tendremos

$$\Phi = B S \cos \alpha$$

y como  $dT = I d\Phi$  resulta

$$dT = -B I \operatorname{sen} \alpha d\alpha$$

donde  $dT$  es el trabajo *realizado por el campo* al girar la espira un ángulo  $d\alpha$ . Si llamamos  $M$  al par aplicado por el campo, tenemos otra expresión del trabajo

$$dT = M d\alpha$$

Combinando ambas ecuaciones resulta

$$M = -B I \operatorname{sen} \alpha,$$

que indica que el campo ejerce un par mecánico sobre la espira, de sentido opuesto al desplazamiento. La situación de equilibrio ( $M = 0$ ) se alcanza cuando la dirección de  $\vec{n}$  coincide con la de  $\vec{B}$ . Este resultado muestra que la espira se orientará de modo que su campo propio coincida con la dirección del campo aplicado. La espira se comporta como una brújula (y, de hecho básicamente lo es).

## Self y mutua

La determinación del campo creado por una espira es en general un problema de una complejidad matemática que queda fuera del alcance de este libro por lo que no será estudiado. Sin embargo, consideraremos los flujos que atraviesan las espiras en una forma similar a la que empleamos en el campo eléctrico para relacionar las cargas y los potenciales en los sistemas de conductores. Nuestro propósito será pues, estudiar los sistemas de espiras.

Es posible hablar de flujo concatenado con una espira o flujo por espira sin establecer ambigüedad alguna, Tomemos, por ejemplo, una superficie cuyo contorno sea la espira: el flujo del campo  $\vec{B}$  que la atraviesa en el sentido dado por la regla de sacacorchos, recibe la denominación de flujo concatenado con la espira. La superficie elegida es arbitraria ya que el flujo a través de una superficie cerrada vale cero: si consideramos dos superficies  $S'$  y  $S''$  que tienen por borde la espira, forman, ambas una superficie cerrada y por tanto sus flujos coinciden.

Es posible enunciar un principio de superposición para el campo magnético:

*Principio de superposición del campo magnético.* El campo magnético creado en cada punto por un sistema de corrientes es la suma vectorial de los campos individuales creados separadamente por cada corriente en el punto que se considera.

La validez de este principio es *experimental* y caben todas las consideraciones hechas en los casos análogos en electrostática. Por otra parte, puede observarse que las

mismas leyes del campo sugieren el principio de superposición enunciado. Si se admite que estas leyes, dadas las corrientes, *determinan* un valor único de  $\vec{B}$  en cada punto del campo, *es posible demostrar el principio de superposición*. De todos modos, en los razonamientos expuestos, no se ha hecho más que desplazar el problema de la superposición al de la unicidad, de modo que en una forma u otra es necesario recurrir a la experiencia.

Establecida la ley de superposición, se deduce inmediatamente que el flujo creado en una espira atravesada por una corriente  $I$  es proporcional a dicha corriente, siempre que se mantenga la forma de la espira (puesto que duplicando la corriente, se duplican la intensidad del campo y, por tanto, el flujo). Se tiene entonces, para cada espira

$$\Phi = L I$$

done  $L$  es una constante propia de la espira que depende solamente de su forma y se designa con el nombre de *self*<sup>2</sup> de la espira. Como  $\Phi$  se mide en *weber*/ $m^2 \times m^2 =$  *weber*,  $L$  se mide en *weber/ampere*, unidad que se denomina *henry* o *henrio*.

Si consideramos dos espiras, independientes que llamaremos **1** y **2**, recorridas por corrientes  $I_1$  y  $I_2$ , tendremos:

Si  $I_1 = 1$  e  $I_2 = 0$ , el flujo en **1** es  $L_1$  y el flujo en **2** es  $M_{21}$

Si  $I_1 = 0$  e  $I_2 = 1$ , el flujo en **1** es  $M_{12}$  y el flujo en **2** es  $L_2$

En el caso general, aplicando el principio de superposición resulta

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$

$$\Phi_2 = M_{21} I_1 + L_2 I_2$$

Los coeficientes  $L$  se denominan *self* de cada espira y coinciden con los coeficientes definidos para una espira independiente, puesto que el flujo que crea cada corriente a través de su espira es independiente de la presencia de las restantes espiras. Los coeficientes  $M$  se designan con el nombre de *mutuas* entre las espiras y dependen de la posición relativa de las mismas.

En el capítulo V se calcularán estos coeficientes para algunos casos especiales. Como sucede con los coeficientes de capacidad, el cálculo analítico es en general, de una dificultad grande.

---

<sup>2</sup> Se conserva el término inglés “self”, en lugar de su traducción española usual, autoinducción, porque es preferible no hacer referencia alguna a la ley de Faraday. Podría emplearse la traducción literal “auto”, o “propia”, pero estos términos no poseen tradición española alguna.





# Campo magnetostático en presencia de materia

## Polarización magnética

Al nivel macroscópico la materia se presenta constituida por pequeñas corrientes cerradas, creadas por la acción de un campo magnético y denominadas corrientes de *polarización magnética*. Microscópicamente los electrones forman “corrientes” cerradas que rodean al núcleo atómico, además del *spin*, “movimiento de rotación propia” del electrón. Al aplicar un campo magnético, estas “corrientes” pueden cambiar su valor y orientar su plano, del mismo modo como se orienta una espira en un campo uniforme.

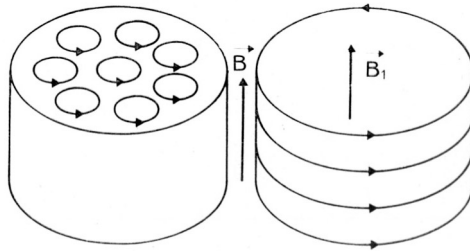


Figura 89: Polarización magnética de la materia.

Una gran cantidad de espiras pequeñas orientadas en la misma dirección y dispuestas en el seno de la materia equivale a una corriente de circulación tal como la indicada en la Figura 89. Consideremos una barra cilíndrica sometida a un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme. De acuerdo con la interpretación anterior, las corrientes microscópicas de polarización pueden sustituirse por corrientes en la superficie, formando un solenoide. Para el estudio del campo debemos aplicar las leyes correspondientes a las corrientes de polarización. Sea  $B_0$  el campo en el vacío y  $B_1$  el campo en la materia; tendremos (ver *Ejemplo 3*, página 137)

$$B_1 = B_0 + \mu_0 J$$

donde  $J$  es la densidad superficial equivalente a las corrientes de polarización. Nos proponemos ahora estudiar la relación existente entre las corrientes de polarización y el campo aplicado.

En una gran cantidad de materiales se encuentra que las corrientes de polarización son proporcionales al campo aplicado. En estas condiciones

$$B_1 = m B_0$$

donde  $m$  es una constante propia del material denominada *permeabilidad magnética relativa* o *índice de permeabilidad magnética* de la sustancia. Si definimos  $\mu_1 = m \mu_0$  como la *permeabilidad* del material, podemos escribir la ecuación anterior como

$$\frac{B_1}{\mu_1} = \frac{B_0}{\mu_0}$$

La analogía que existe con el campo eléctrico es notable, por lo cual no se ha profundizado en cada uno de los detalles del estudio del campo. En la materia será conveniente definir un nuevo vector  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$ . El vector  $\vec{H}$  verifica entonces

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_0$$

Si estudiamos ahora la ley de Ampere tendremos:

1. Si no hay materia presente  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$  luego, la circulación de  $\vec{H}$  sobre una curva cerrada vale  $\mu_0 I/\mu_0 = I$  donde  $I$  es la corriente abrazada por la curva.
2. Si no hay corrientes presentes la circulación de  $\vec{H}$  vale cero, puesto que  $\vec{H}$  no cambia al atravesar las corrientes de polarización de la materia.

Análogamente al caso eléctrico, admitiremos en un caso general:

*Ley de Ampère.* La circulación de  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$  a lo largo de una curva cerrada vale  $I$ , igual a la corriente que atraviesa una superficie limitada por la curva.

La unidad de medida de  $H$  es, de acuerdo con la ley de Ampère: *amper/metro*. La unidad de medida de  $\mu$  coincide con la de  $\mu_0$ .

## Propiedades magnéticas de la materia

La materia dentro de un campo magnético se comporta, básicamente, de tres formas distintas: existen materiales *diamagnéticos*; *paramagnéticos* y *ferromagnéticos*.

*Los materiales diamagnéticos.* Se caracterizan porque desde el punto de vista microscópico, presentan corrientes de polarización opuestas al campo aplicado. Este hecho paradójico en apariencia puede estudiarse correctamente. Supongamos por ejemplo, que el campo ha orientado el conjunto de las moléculas en la misma forma en que orientaría una espira cerrada. Supongamos además, Figura 90, un electrón que

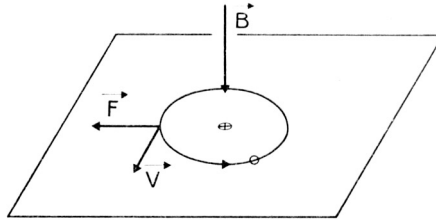


Figura 90: Esquema de un electrón en un material diamagnético.

gire alrededor de su núcleo en un plano perpendicular al campo. Obsérvese que la orientación de la corriente, es opuesta al sentido de giro del electrón, puesto que éste posee una carga negativa. El campo actúa sobre el electrón con una fuerza situada en el plano y de sentido hacia *afuera* del núcleo. Esta fuerza retarda el giro del electrón o sea, mirando el fenómeno desde el punto de vista de las corrientes atómicas, *el aumento del campo aplicado provoca una disminución de las corrientes de polarización*. En los campos que no sean demasiado intensos puede admitirse que existe una relación lineal con  $\mu < \mu_0$ .

*Los materiales paramagnéticos.* Se caracterizan porque  $\mu > \mu_0$ . Naturalmente, en todos los cuerpos se produce un fenómeno idéntico al estudiado en el caso diamagnético frente a un campo aplicado. La posibilidad de conseguir otras corrientes de polarización *suplementarias* de las diamagnéticas deriva de una causa distinta de las simples corrientes producidas por el giro de los electrones. En la teoría cuántica del electrón se observa que el electrón “gira sobre sí mismo”, movimiento que se denomina *spin*. A este “giro” del electrón, similar al movimiento de rotación de la tierra sobre su eje, está asociada una nueva corriente de polarización, que contribuye a la formación de las corrientes totales de polarización. En los átomos con *un número par de electrones*, los *spin* de cada electrón están orientados en sentidos opuestos y su efecto magnético es nulo. Tal es el caso de los cuerpos *diamagnéticos* en los cuales las corrientes de polarización vienen dadas únicamente por el giro de los electrones alrededor del núcleo. En los átomos con *un número impar de electrones* existe algún electrón aislado con *spin* opuesto, por lo cual las corrientes de polarización proceden de la contribución orbital del movimiento de los electrones y del *spin*. Se está en presencia de un cuerpo *paramagnético*. El razonamiento expuesto sólo es esquemático. La experiencia muestra que la ley de la paridad del número de electrones no es completamente cierta, y por lo tanto, no define exactamente el comportamiento magnético de la materia.

El estudio correcto de las propiedades magnéticas de la materia exige planteamientos de tipo cuántico que están fuera del propósito de este libro, por lo cual no se tratarán. El lector que esté interesado en consultar la literatura especializada puede acudir a la bibliografía al final del capítulo.

La función de  $\mu$  con la temperatura  $T$  del material posee un interés grande en las técnicas de bajas temperaturas. Es posible demostrar (Langevin) en mecánica estadística que la ley de dependencia es

$$\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0} = \frac{k}{T}$$

en la que  $k$  es una constante propia de cada material.

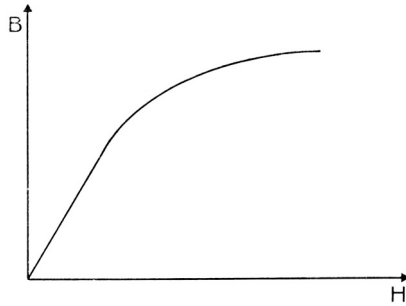


Figura 91: Digrama  $B - H$  de un material ferromagnético.

*Los materiales ferromagnéticos.* Constituyen un grupo de gran importancia técnica y se caracterizan por poder estar polarizados magnéticamente sin necesidad de aplicar un campo. (Este es un caso análogo al *electret*). Una sustancia ferromagnética polarizada se denomina *imán*. Los materiales ferromagnéticos presentan dos fenómenos típicos: *saturación* e *histéresis*: Si existe una relación lineal entre el campo aplicado y la polarización, la curva (B-H) del material será una recta que pasa por el origen, Figura 91. En las sustancias ferromagnéticas, a partir de un cierto valor de  $B$ , se requiere un aumento desproporcionado de la intensidad de campo con lo que la curva se aparta de modo notable de la dependencia lineal. Ello da la impresión de que el hierro llega a quedar en cierta forma “saturado” y por tal motivo se designa el fenómeno con el nombre de saturación. Se explica suponiendo que las sustancias ferromagnéticas se encuentran formadas por agrupaciones de átomos o moléculas que se comportan como un imán elemental saturado, con zonas perfectamente polarizadas llamadas *dominios ferromagnéticos* que están orientadas en direcciones desordenadas, para no presentar una polarización efectiva. Al aplicar un campo de pequeña intensidad, los dominios comienzan a orientarse y a medida que el campo aumenta, las direcciones magnéticas de los dominios saltan bruscamente a aquellas direcciones que forman el menor ángulo con el campo exterior y, al proseguir el aumento de éste, quedan finalmente orientadas en la dirección del campo. De este modo, no es posible conseguir una polarización mayor que la que posee un dominio.

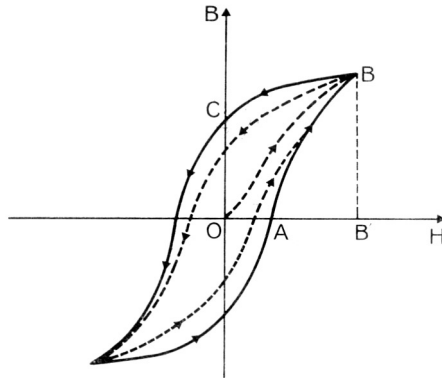


Figura 92: Ciclo de un material ferromagnético.

Si proseguimos la experiencia y disminuimos el valor del campo hasta cero, se destruye en parte la orientación de los dominios, de suerte que el material conserva una polarización y sigue siendo “magnético”. Se necesita un campo contrario para lograr una inducción que vuelva a corresponder a la posición primitiva de los dominios. La polarización remanente que se obtiene al anular el campo se conoce con el nombre de *histéresis*. Si ahora repetimos reiteradas veces el proceso de aumento y disminución del campo en sentidos opuestos, obtendremos un ciclo estabilizado para cada campo aplicado. Este resultado, expresado en términos de  $B$  y  $H$ , adquiere el aspecto de una curva cerrada como la que se muestra en la Figura 92, que es conocida con el nombre de *ciclo de histéresis*. Es importante hacer notar que los ciclos de histéresis se diferencian según la intensidad del campo máximo aplicado y que representan una situación estabilizada. De ningún modo la primera magnetización del material, aunque llegue al mismo valor máximo, describe el ciclo de histéresis, puesto que evidentemente éste no pasa por el origen. La primera imantación sigue la curva de la Figura 91.

Con referencia a cada ciclo de histéresis se definen las siguientes magnitudes, ver Figura 92:

- *Campo coercitivo*: campo  $H$  necesario para que el campo  $B$  sea nulo (segmento  $\overline{OA}$ );
- *Campo de saturación*: campo  $B$  para la saturación (segmento  $\overline{BB'}$ );
- *Campo remanente*: campo  $B$  para  $H$  nulo (segmento  $\overline{OC}$ ).

La forma del ciclo de histéresis no depende para nada del sentido de los campos; si éstos se invierten, como el ciclo de histéresis es simétrico respecto a ellos su forma no varía, puesto que el cambio equivale a una inversión de la posición del material. Si en algún punto del ciclo de histéresis disminuimos la magnitud del campo aplicado,

el ciclo de histéresis será pequeño, y distinto del principal, tal como se muestra en la Figura 93.

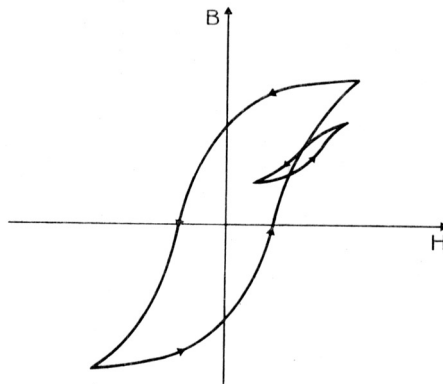


Figura 93: Ciclo "local" de histéresis.

Las propiedades de los cuerpos ferromagnéticos desaparecen, a una temperatura que depende de cada material, y que se conoce con el nombre de *temperatura de Curie*. A temperaturas superiores se comportan como paramagnéticos.

Los materiales ferromagnéticos presentan gran variedad de ciclos de histéresis y diferentes valores en proporción de los campos coercitivos y remanentes. En algunos materiales como el hierro-silicio, desde el punto de vista magnético se obtienen ciclos estrechos con campos coercitivos y remanentes muy pequeños que pueden asimilarse a la curva de primera magnetización, mientras que en otros, como el hierro magnéticamente duro, los ciclos son muy abiertos y no es posible tal aproximación. Los primeros materiales como las chapas de motores eléctricos o transformadores son empleados en la construcción de dispositivos sometidos a campos variables; los segundos, como el acero templado, en la construcción de imanes permanentes. En los Cuadros 9, 10 y 11 se presentan las propiedades magnéticas de diversos materiales.

Los materiales de ciclo de histéresis estrecho pueden estudiarse con la curva de imantación. Se encuentra que, al presentar ésta una zona aproximadamente rectilínea, es posible hablar en términos de la permeabilidad  $p$  del material, entendiéndose siempre dentro de la zona rectilínea. Por otra parte, la permeabilidad  $\mu$  de los materiales paramagnéticos y diamagnéticos difiere muy poco de  $\mu_0$ . Por tanto, en los estudios que seguirán haremos las siguientes aproximaciones.

1. En los materiales paramagnéticos y diamagnéticos se considerará que  $\mu = \mu_0$ , igual que el vacío.
2. En los materiales ferromagnéticos de ciclo de histéresis estrecho y en la zona

Cuadro 9: Curva  $B - H$  para el hierro de transformadores.

<b>campo <math>B</math></b> weber/m <sup>2</sup>	<b>campo <math>H</math></b> ampere/m
0,2	47,6
0,4	68,2
0,6	87,4
0,8	118
1,0	182
1,2	306
1,4	866
1,6	3.420
1,8	11.800

Cuadro 10: Materiales con ciclo de histéresis despreciable.

<b>material</b>	<b>temperatura de Curie °C</b>	<b>permeabilidad relativa máxima</b>	<b> saturación</b> weber/m <sup>2</sup>	<b> campo coercitivo A/m</b>
hierro silicio	730	7.000	1,97	39,7
Permalloy 45	400	25.000	1,6	24
Mu metal	–	100.000	0,65	4
Supermalloy	400	800.000	0,8	0,16
Ferroxcube III	100–210	1.500	0,25	8

aproximadamente lineal, se supondrán con un valor de la permeabilidad  $\mu$  comprendido entre  $10\mu_0$  y  $100.000\mu_0$ . Como un valor típico es  $1.000\mu_0$ , se podrán introducir simplificaciones notables en los cálculos.

- Los materiales ferromagnéticos de ciclo de histéresis apreciable serán examinados posteriormente con mayor detalle.

Cuadro 11: Materiales con ciclo de histéresis apreciable.

<b>material</b>	<b>campo coercitivo</b> amper/m	<b>campo remanente</b> weber/m <sup>2</sup>
Acero al carbono (0,9 % C)	3.960	1
Acero al tungsteno (5 % W 0,7 % C 0,3 % Mn)	5.540	1,03
Acero al cobalto (36 % Co)	19.000	0,95
Alnico XII	75.200	0,58
Alnico V	43.500	1,25
Platino–Cobalto (77 % Pt 23 % Co)	285.000	0,59

## Circuitos magnéticos

En la hipótesis de emplear un material ferromagnético en condiciones alejadas de la saturación, que posea un ciclo de histéresis estrecho, es posible elaborar una teoría sencilla que permita calcular los campos magnéticos. La hipótesis básica es que, en un material de permeabilidad  $\mu \gg \mu_0$ , se puede admitir que todo el campo magnético se concentra en el material o bien en las capas de aire próximas a éste. Se estudiará la teoría a través de varios ejemplos.

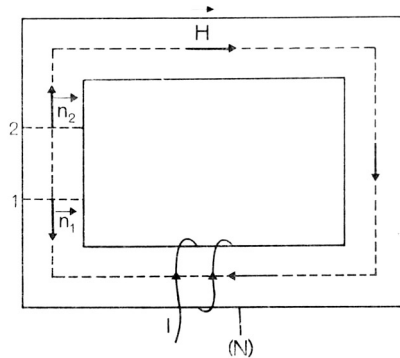


Figura 94: Circuito magnético del *Ejemplo 1*.

*Ejemplo 1.* Consideremos, según la Figura 94, una barra anular de sección constante  $S$ , de un material de permeabilidad  $\mu$  elevada y con un bobinado de  $N$  espiras atravesado por una corriente  $I$ . Suponemos que todo el flujo magnético pasa por la armadura y admitimos que se distribuye uniformemente en toda la sección de la barra, debido a que su sección es pequeña comparada con su longitud. Aplicando la ley del flujo a dos secciones 1 y 2 de la barra, tendremos

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 0, \quad \Phi_1 = \Phi_2$$

puesto que hemos admitido que no hay líneas de campo normales a la superficie lateral de la barra. Llamando  $\Phi$  al flujo en toda la sección de la barra se tendrá

$$B = \frac{\Phi}{S}$$

En la hipótesis de una dependencia lineal del material, entre  $H$  y  $B$  resulta

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{\Phi}{\mu S}$$

Aplicando ahora la ley de Ampère a la línea media de la barra, de longitud  $l$  se tiene

$$\text{circ } \vec{H} = H l = N I,$$



$$\frac{l}{\mu S} \Phi = N I,$$

puesto que la corriente  $l$ , atraviesa  $N$  veces una superficie limitada por la línea media de la barra anular. Ha de tenerse en cuenta si todas las espiras que intervienen están recorridas por la corriente en el mismo sentido o en sentidos contrarios, de modo que hay que tener cuidado en los signos adoptados. Tendremos, en definitiva

$$H = \frac{N I}{l},$$

$$\Phi = \frac{\mu S N I}{l},$$

$$B = \frac{\mu N I}{l}.$$

Estamos ahora en condiciones de calcular el campo en el aire, próximo a la barra, al objeto de verificar la hipótesis de partida. En la primera sección de este capítulo se señalab que la intensidad de campo  $H$  tiene el mismo valor en las zonas interior y exterior inmediatamente próximas a la superficie del material, luego el campo  $B'$  en el exterior vale

$$B' = \mu_0 H = \frac{\mu_0}{\mu} B \ll B,$$

o sea que para valores grandes de la permeabilidad relativa, el campo exterior es despreciable, comparado con el interior.

Las ecuaciones anteriores, pueden compararse con las fórmulas de los circuitos de corriente continua y establecer así que

$$N I = \frac{l}{\mu S} \Phi$$

es una ecuación análoga a

$$E = \frac{l}{\gamma S} I.$$

El producto  $N I$  es la imagen de la fuerza electromotriz y se suele llamar, por analogía, *fuerza magnetomotriz*. El flujo  $\Phi$  tiene un paralelismo con la corriente, obsérvese que es constante en todas las secciones de la barra. Por esta razón, el campo  $B$  se suele llamar *densidad de flujo magnético*, por analogía a  $J$ , densidad de corriente. La expresión  $l/\mu S$  es análoga a la resistencia eléctrica y se le suele llamar *reluctancia* de la barra. La ley de *Hopkinson* establece la analogía entre la ecuación que verifica el flujo, la fuerza magnetomotriz y la reluctancia por un lado, y la que verifica la corriente, la fuerza electromotriz y la resistencia por otro. Se considera también, una teoría de los circuitos magnéticos filiformes.

Es interesante calcular el flujo que atraviesa la bobina. Supongamos que todas las espiras se encuentran juntas, y que el flujo a través de cada espira es  $\Phi$  con lo cual el flujo total que atraviesa la bobina es  $N \Phi$ <sup>3</sup>

$$\Phi_{bobina} = N \Phi = \frac{\mu S N^2}{l} I,$$

o sea, la self  $L$  de la bobina es

$$L = \frac{\mu S N^2}{l}$$

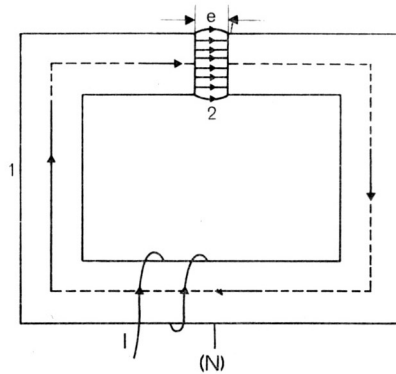


Figura 95: Circuito magnético del *Ejemplo 2*.

*Ejemplo 2.* Consideremos ahora un circuito magnético filiforme, que presenta un corte en el material de alta permeabilidad, con un *entrehierro* de longitud  $e$ , Figura 95. Supongamos que el entrehierro es pequeño comparado con la sección del material, con lo cual podemos admitir que el campo es uniforme y sin dispersión en la sección  $e$  de la barra. La ley del flujo da entonces

$$\Phi = B_1 S = B_2 S', \quad B_1 = B_2,$$

y para el campo  $H$  tenemos, en consecuencia,

$$H_1 = \frac{\Phi}{\mu S}, \quad H_2 = \frac{\Phi}{\mu_0 S'}.$$

La intensidad de campo  $H$  en el aire es mucho mayor que en la barra. Este es precisamente el fundamento de los electroimanes. El campo  $B$  en el entrehierro es

<sup>3</sup> Si las espiras no se encuentran juntas, en virtud de la ley de conservación del flujo y de la hipótesis de permeabilidad elevada, el flujo total a través de la bobina posee el mismo valor  $N \Phi$ .

igual al del material y por razones de saturación del material está limitado a un valor máximo próximo a 1 *weber/m<sup>2</sup>*.

La ley de Ampère aplicada a la línea media del circuito magnético da

$$\left( \frac{l}{\mu S} + \frac{e}{\mu_0 S} \right) \Phi = N I,$$

de donde resulta que el campo magnético vale

$$B = \frac{N I}{l/\mu + e/\mu_0}.$$

La reluctancia total aparece pues como la suma de la reluctancia del material y de la reluctancia del entrehierro. La reluctancia de dos circuitos en serie es la suma de las reluctancias, análogamente a la fórmula de resistencias.

La self de la bobina es

$$\Phi_{bobina} = N \Phi = \frac{N^2}{l/\mu S + e/\mu_0 S} I,$$

$$L = \frac{N^2}{l/\mu S + e/\mu_0 S}.$$

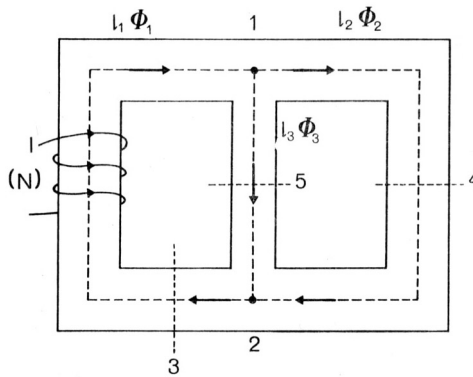


Figura 96: Circuito magnético del *Ejemplo 3*.

*Ejemplo 3.* Consideremos un circuito magnético como el indicado en la Figura 96. Aplicando la ley del flujo a las secciones **3**, **4** y **5**, tendremos

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

de donde

$$H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu S_1}, \quad H_2 = \frac{\Phi_2}{\mu S_2}, \quad H_3 = \frac{\Phi_3}{\mu S_3},$$

Si ahora aplicamos la ley de Ampere a las curvas cerradas  $\widehat{123}$  y  $\widehat{142}$  resulta

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = \frac{l_1}{\mu S_1} \Phi_1 + \frac{l_3}{\mu S_3} = N I$$

$$H_2 l_2 - H_3 l_3 = \frac{l_2}{\mu S_2} \Phi_2 - \frac{l_3}{\mu S_3} = 0$$

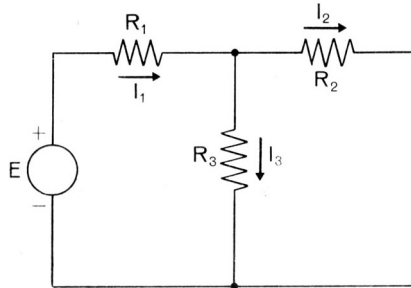


Figura 97: Circuito equivalente del *Ejemplo 3*.

Estas ecuaciones coinciden con las correspondientes al circuito eléctrico de la Figura 97. Por tanto, la analogía entre los dos circuitos nos permite realizar los cálculos en el circuito eléctrico y sustituir los valores correspondientes por los del circuito magnético. En especial, hay que señalar que la reluctancia de varias ramas magnéticas en paralelo se calcula por una fórmula idéntica a la resultante de resistencias en paralelo.

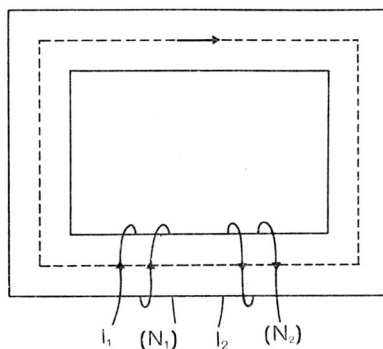


Figura 98: Circuito magnético del *Ejemplo 4*.

*Ejemplo 4.* Consideremos ahora un circuito con dos bobinados, como se indica en la Figura 98. Nótese el sentido de arrollamiento de las bobinas para dar el signo a los

términos de la ecuación. Tendremos entonces

$$H = \frac{\Phi}{\mu S}$$

$$H l = \frac{l}{\mu S} \Phi = N_1 I_1 - N_2 I_2$$

$$\Phi = \frac{\mu S}{l} N_1 I_1 - \frac{\mu S}{l} N_2 I_2$$

El cálculo de los flujos  $\Phi_{1bob}$  y  $\Phi_{2bob}$  en cada bobina da

$$\Phi_{1bob} = N_1 \Phi = \frac{\mu S}{l} N_1^2 I_1 - \frac{\mu S}{l} N_1 N_2 I_2,$$

$$\Phi_{2bob} = -N_2 \Phi = -\frac{\mu S}{l} N_1 N_2 I_1 + \frac{\mu S}{l} N_2^2 I_2.$$

De estas ecuaciones se deducen inmediatamente los valores de los coeficientes de self y mutua de las bobinas

$$L_1 = \frac{\mu S}{l} N_1^2, \quad L_2 = \frac{\mu S}{l} N_2^2$$

$$M_{12} = M_{21} = -\frac{\mu S}{l} N_1 N_2$$

Es interesante generalizar el cálculo de los coeficientes en un caso cualquiera en que dos bobinas son atravesadas por un flujo común  $\Phi$  como ocurre en el caso estudiado. El flujo en cada uno de las bobinas vale

$$\Phi_{1bob} = N_1 \Phi, \quad \Phi_{2bob} = N_2 \Phi.$$

Por otra parte, las ecuaciones generales que definen los coeficientes permiten escribir

$$\Phi_{1bob} = L_1 I_1 + M I_2,$$

$$\Phi_{2bob} = M I_1 + L_2 I_2,$$

donde admitimos  $M_{12} = M_{21}$ , lo cual ha sido comprobado en el ejemplo anterior pero para mayor generalidad será demostrado en el capítulo siguiente. Observando que  $N_2 \Phi_{1bob} = N_1 \Phi_{2bob} = N_1 N_2 \Phi$  obtenemos entonces

$$N_2 L_1 I_1 + N_2 M I_2 = N_1 M I_1 + N_1 L_2 I_2$$

Si hacemos sucesivamente  $I_1 = 1, I_2 = 0$  o  $I_1 = 0, I_2 = 1$ , tenemos

$$N_2 L_1 = N_1 M, \quad N_2 M = N_1 L_2,$$

de donde resulta

$$M^2 = L_1 L_2, \quad M = \pm \sqrt{L_1 L_2}.$$

Es necesario tener cuidado con el signo de  $M$ , que depende de los sentidos relativos en que están arrolladas las bobinas. Si se encuentran devanadas en sentido contrario, como ocurre en el ejemplo de la Figura 98,  $M$  es negativo.

Si la permeabilidad del material del circuito magnético es reducida, no es cierto que exista un flujo común en ambas bobinas y parte del flujo generado por una bobina no atravesará a la otra. En estos casos se tiene

$$|M| \leq \sqrt{L_1 L_2}.$$

Se define entonces el factor de acoplamiento de las bobinas

$$a = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

en la que  $a = 1$  significa acoplamiento perfecto, es decir sin pérdidas de flujo y  $a = 0$  significa ausencia de acoplamiento, es decir, cada flujo se cierra sin pasar por la otra bobina.

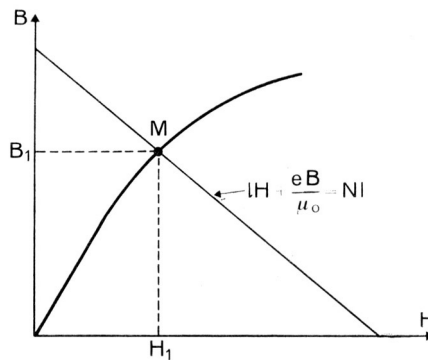


Figura 99: Ejemplo 2 con un material no lineal.

*Ejemplo 5.* Sea un caso idéntico al *Ejemplo 2* pero con la diferencia de que ya no es posible hacer la hipótesis de que el material tiene características magnéticas lineales. Tendremos todavía

$$B_1 = B_2 = B,$$

$$H_1 = H, \quad H_2 = \frac{B}{\mu_0},$$

$$Hl + \frac{eB}{\mu_0} = NI.$$

Esta última ecuación nos dice que la relación entre  $B$  y  $H$  que verifica las leyes del magnetismo es una relación lineal. Su representación es pues la recta del diagrama  $B - H$  de la Figura 99. Por otra parte,  $B$  y  $H$  deben verificar la curva de imantación, también representada en la figura. El punto de intersección  $M$ , da la situación en que se encuentra el material, lo cual permite calcular los campos en el entrehierro.

El problema es más sencillo de resolver si se plantea a la inversa. Determinar la corriente  $I$  necesaria para crear un campo dado en el entrehierro. Supongamos, por ejemplo, que el material es chapa de hierro-silicio de transformadores, cuya curva de imantación está en el Cuadro ???. Se desea obtener en el entrehierro un campo de  $1 \text{ weber/m}^2$ . Las características del circuito magnético son  $l = 20 \text{ cm}$ ,  $e = 3 \text{ mm}$ ,  $N = 1000$  vueltas. De la curva de magnetización obtenemos  $H = 182 \text{ amper/m}$  luego

$$0,2 \times 182 + \frac{0,003 \times 1}{4\pi \times 10^{-7}} = 1000 I,$$

de donde  $I = 2,42 \text{ amperes}$ .

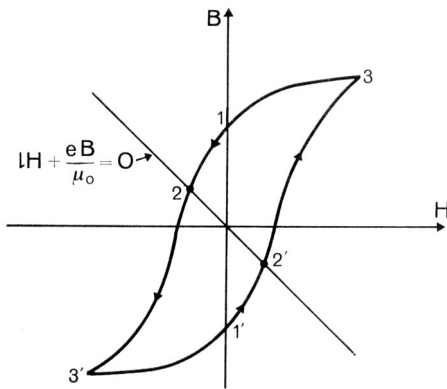


Figura 100: Circuito magnético del Ejemplo 6.

*Ejemplo 6.* Supongamos un circuito igual al ejemplo 1 construido con un material que posee un ciclo de histéresis ensanchado. Supongamos además que, después de invertir repetidas veces la corriente  $I$ , establecemos un ciclo de histéresis estabilizado como el indicado en la Figura 100. Suprimiendo la corriente de excitación, el material queda con algo de imantación residual definida por la posición 1 (o su equivalente la 1', según se anule la corriente en el punto 3 o el 3'). Si ahora efectuamos un corte en

el material, para obtener un campo en el entrehierro que sea aprovechable (es decir, construimos un imán) como la situación es idéntica al *Ejemplo 5*, el estado magnético del material quedará, en algún punto del ciclo de histéresis, y verificará la ecuación

$$l H + \frac{e B}{\mu_0} = 0,$$

puesto que no hay corrientes aplicadas. Esta ecuación representada en el diagrama  $B - H$  es una recta que pasa por el origen.

El punto 2 (o el 2') indica el estado magnético en que ha quedado el material. Ello permite calcular fácilmente el campo en el entrehierro. Hay que hacer notar que en el material  $B$  y  $H$  son de sentidos opuestos, como consecuencia de la ley de Ampère. Al ser la circulación de  $H$  nula por no existir corrientes aplicadas, el campo debe invertirse en algún tramo del circuito magnético. En el aire,  $B$  y  $H$  tienen el mismo sentido mientras que en el material, son opuestos.



# Ley de Faraday

## Campos en sistemas en movimiento

Supongamos que en cierto sistema de coordenadas, que llamamos *fijo*, se tienen campos eléctricos, magnéticos, distribuciones de carga y corrientes. Si consideramos otro sistema de coordenadas en movimiento respecto al primero, que llamamos *relativo* o *móvil*. la visión que se obtiene de los campos y de las cargas será diferente. Se sabe que una fuerza medida en uno y otro sistema de coordenadas tiene el mismo valor, mientras que la medida de velocidades difiere en la velocidad de traslación del sistema. Con estos elementos es posible calcular los campos, corrientes y cargas en el sistema móvil  $-\vec{E}', \vec{B}', \vec{J}', \rho'$  – conocidos los correspondientes del sistema fijo  $-\vec{E}, \vec{B}, \vec{J}, \rho$  –.

Supongamos una carga de prueba unidad,  $q = 1$ , fija en un punto del sistema móvil. La fuerza ejercida sobre la carga es el *campo eléctrico en ese punto*. La fuerza ejercida coincide con la calculada en el sistema fijo. Respecto al sistema fijo, la carga se mueve con la misma velocidad que el sistema móvil,  $\vec{u}$ . Tendremos entonces, aplicando la ley de Lorentz

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}.$$

El campo eléctrico en el sistema móvil,  $\vec{E}'$  es, entonces

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}.$$

Para calcular el campo magnético en el sistema móvil, debemos desplazar la carga unidad con una velocidad relativa  $\vec{v}$  con *respecto al sistema móvil*. La velocidad de la carga en el sistema fijo es, de acuerdo con la ley de adición de velocidades,  $\vec{u} + \vec{v}$ . Si aplicamos nuevamente la ley de Lorentz en el sistema fijo, tendremos una fuerza ejercida

$$\vec{F} = \vec{E} + (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{B}.$$

En el sistema relativo, esta fuerza se compone de la fuerza de origen eléctrico y de la fuerza de origen magnético. Si entonces restamos las fuerzas, tendremos en el sistema móvil que la fuerza de origen magnético vale

$$\vec{E} + (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{B} - (\vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}) = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

esto significa que en el sistema relativo, la fuerza de origen magnético verifica también la ley de Lorentz para la velocidad  $\vec{v}$  y el campo magnético correspondiente  $\vec{B}'$  coincide con  $\vec{B}$ .

Tenemos ya resuelto el problema de los campos en el sistema móvil. Debe señalarse que este resultado se basa en varios hechos fundamentales:

- La ley de adición de las velocidades.
- La igualdad de la fuerza en ambos sistemas.
- La ley de Lorentz.
- La igualdad de la carga en ambos sistemas.

Estos hechos nos eran conocidos, con la excepción del cuarto que vamos a revisar. Nada impide que la medida de la carga sea diferente en ambos sistemas y sólo la experiencia puede verificar su coincidencia (todas las consideraciones hechas sobre la medida de la masa pueden repetirse en este punto). La existencia experimental de una carga elemental para las partículas es un argumento que inclina fuertemente a admitir la hipótesis de la conservación de la carga, puesto que de otro modo, la carga elemental cambiará de valor según el sistema de coordenadas en que se midiera. Afortunadamente la hipótesis de conservación de la carga no está en contradicción con los hechos experimentales. No podemos en cambio, afirmar que ha sido demostrada por la experiencia, debido a la imprecisión de nuestros conocimientos actuales sobre los problemas del campo gravitatorio y del campo electromagnético.

Lo expuesto pone de manifiesto que la densidad de cargas en un punto es igual tanto en el sistema fijo como en el móvil,  $\rho = \rho'$ , puesto que la carga, la longitud, la superficie y el volumen, se conservan en los dos sistemas.

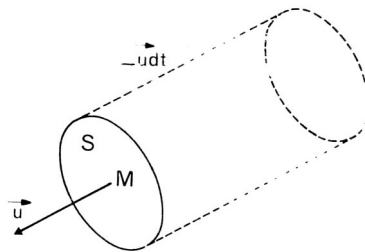


Figura 101: Corriente convectiva.

El problema es diferente al estudiar el vector  $\vec{J}$  de densidad de corriente. Imaginemos un punto del espacio con un volumen de una cierta densidad de cargas. Un observador que se encuentre en el sistema móvil, al observar la misma densidad de cargas, apreciará una corriente debida al movimiento de las cargas. En efecto, supongamos un punto **M**, Figura 101, en el cual existe una densidad  $\rho$  de cargas. En el sistema móvil las cargas se desplazan con una velocidad  $-\vec{u}$ . Si consideramos una sección

S perpendicular al movimiento, en un intervalo de tiempo  $dt$  pasarán por S todas las cargas que ocupan el volumen cilíndrico de base S y altura  $-\vec{u} dt$ , pasará una corriente

$$I = -\frac{\rho S u dt}{dt} = -\rho S u$$

luego

$$J_{conv} = \frac{I}{S} = -\rho u, \quad \vec{J}_{conv} = -\rho \vec{u}.$$

Esta corriente se denomina *convectiva* para distinguirla de la que proviene de las corrientes en el sistema fijo. Para obtener el vector  $\vec{J}'$ , observado en el sistema móvil, debemos sumar al vector de corriente convectiva  $\vec{J}_{conv}$  el vector  $\vec{J}$  presente en el sistema fijo, puesto que a través de una superficie del sistema móvil, pasan simultáneamente las cargas que ya la atravesaban en el sistema fijo y las cargas derivadas del volumen de cargas distribuidas. Tendremos, entonces

$$\vec{J}' = \vec{J} - \rho \vec{u}.$$

Para completar este estudio falta todavía determinar las fórmulas de transformación de las cargas y corrientes de polarización presentes en la materia. El problema puede resolverse si nos situamos en el terreno microscópico donde sólo existen cargas y pueden aplicarse las fórmulas obtenidas anteriormente. Sin embargo, prescindiremos del estudio de este tema porque no tiene utilidad para el resto de la exposición y por la complejidad matemática que encierra.

No obstante, podemos demostrar fácilmente que la ley del flujo de  $\vec{B}$  es válida en el sistema móvil. En efecto

$$flujo \vec{B}' = flujo B = 0.$$

En cuanto a las leyes restantes, serán examinadas posteriormente.

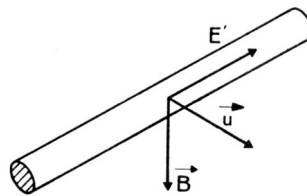


Figura 102: Esquema del Ejemplo 1.

*Ejemplo 1.* Supongamos, Figura 102, una barra conductora que se desplaza perpendicularmente a un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . El campo eléctrico apreciado por un observador situado en la barra en movimiento es

$$E' = u B.$$

De modo que para este observador existe un campo uniforme en todo el espacio de intensidad  $uB$ . Si la barra es de longitud infinita crea una corriente cuyo cálculo puede realizarse de modo análogo al expuesto en la página 102 y el Ejemplo 1 de la página 135.

*Ejemplo 2.* Veamos el problema de un conductor en movimiento, con una velocidad  $\vec{u}$ , donde circula una corriente de densidad  $\vec{J}'$ , tendremos en el sistema fijo

$$\vec{J} = \vec{J}' + \rho' \vec{u}.$$

Pero en el conductor es  $\rho' = 0$ , luego  $\vec{J} = \vec{J}'$ .

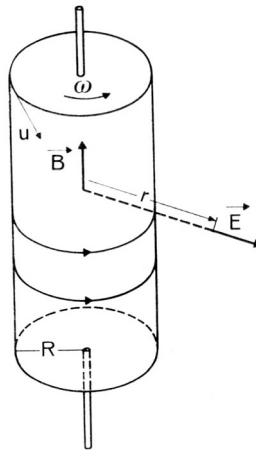


Figura 103: Esquema del *Ejemplo 3*.

*Ejemplo 3.* Supongamos un conductor cilíndrico, uniformemente cargado en su superficie con una densidad superficial  $\sigma$  y que gira alrededor de su eje con velocidad angular constante  $\omega$  tal como muestra la Figura 103.

Un observador situado en el sistema fijo, aprecia una densidad superficial de corriente, como si fuese un solenoide, que vale

$$J = \sigma u = \sigma R \omega,$$

expresión que puede deducirse repitiendo los razonamientos precedentes sobre las corrientes convectivas. Se está en la situación del Ejemplo 6 de la página 70 y del *Ejemplo 3* de la página 137. Los campos son

$$E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}, \quad B = \mu_0 \sigma \omega R.$$

Es necesario notar que un observador situado en reposo respecto al conductor aprecia solamente un campo eléctrico, del mismo valor que el campo visto por el observado del sistema fijo.

Vemos, pues, que en este caso *no se cumplen* las ecuaciones obtenidas para relacionar los campos en los sistemas en movimiento. Sin embargo, es necesario aclarar la forma en que se ha procedido para obtenerlas, observando la siguiente: el campo solidario con el conductor se ha calculado aplicando las leyes del campo eléctrico, cuya validez ignoramos en el caso de los sistemas en movimiento. Por otra parte, el problema es aún más complejo puesto que al girar el sistema en movimiento, aparecen fuerzas suplementarias (centrífuga o similar) que actúan sobre las cargas y que es necesario considerar. La validez de las ecuaciones de transformación de los campos y de las corrientes se demostró cuando el sistema móvil se desplazaba con velocidad constante respecto al sistema fijo. En un movimiento acelerado, como es el caso de la rotación, las ecuaciones son válidas puesto que las fuerzas eléctricas y magnéticas sólo dependen de la velocidad de las cargas y no de las aceleraciones. Sin embargo, es necesario tener cuidado al definir los campos, puesto que en un sistema acelerado aparecen fuerzas suplementarias de origen mecánico que es necesario restar de la fuerza total al calcular las fuerzas de origen eléctrico y magnético.

### Primer enunciado de la ley de Faraday

En la sección anterior se ha visto que existe una relación entre el campo eléctrico y el campo magnético. Esta relación, lejos de ser accidental obedece a una realidad profunda de la naturaleza de estos campos.

Consideremos una espira colocada en un campo de intensidad  $\vec{B}$  variable en el tiempo. Faraday encontró que en la espira aparece una corriente *inducida* cuando varía el flujo que la atraviesa. La corriente y el flujo están relacionados por la expresión

$$R I = - \frac{d\Phi}{dt}.$$

La circulación de la corriente y el sentido del flujo cumplen con la regla del sacacorchos. Este resultado es general, tal como muestra la experiencia. Se puede entonces realizar un primer enunciado la ley Faraday o ley de *inducción electromagnética* como:

*Ley de Faraday.* En una espira situada en un campo magnético, cualquiera sea la causa de variación del flujo magnético en ella –variación en el tiempo del campo magnético, el movimiento de la espira en el campo o la deformación de la espira– aparece en el circuito una fuerza electromotriz que vale

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Las consecuencias de esta ley son tantas y de tal importancia que puede considerarse con razón como la ley fundamental del electromagnetismo. Antes de entrar en el estudio de sus aplicaciones ilustraremos su significado a través de algunos ejemplos.

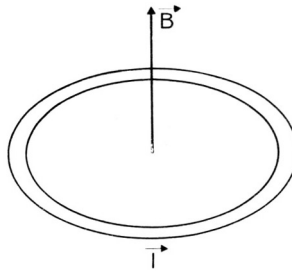


Figura 104: Espira en campo variable, *Ejemplo 1.*

*Ejemplo 1.* Consideremos una espira plana sometida a un campo magnético normal y uniforme cuya intensidad en función del tiempo viene expresada por la ecuación

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

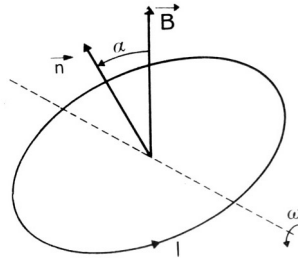
Establezcamos los sentidos positivos del flujo y de la corriente como indica la Figura 104. La condición elegida al relacionar ambos sentidos positivos es que se hallen entre sí acordes con la regla del sacacorchos. Podemos escribir entonces

$$\Phi = S B_0 \cos \omega t,$$

en la cual se ha despreciado el flujo propio de la espira ( $= L I$ ). La ley de inducción dice entonces

$$R I = -\frac{d\Phi}{dt} = S B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t, \quad I = \frac{S B_0 \omega}{R} \operatorname{sen} \omega t.$$

*Ejemplo 2.* Consideremos una espira que gira con velocidad angular uniforme  $\omega$  en un campo magnético uniforme de intensidad  $B$ , Figura 105. Tomemos un sentido

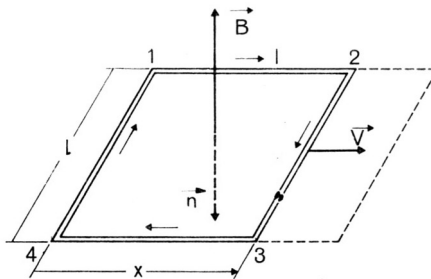
Figura 105: Espira en rotación, *Ejemplo 2*.

para medir la corriente y sea  $\vec{n}$  la normal a la espira, acorde con el sentido de circulación. Llamemos  $\alpha$  al ángulo que forman  $\vec{n}$  y  $\vec{B}$ . Si despreciamos el flujo propio de la espira tendremos

$$\Phi = S B \cos \alpha = S B \cos \omega t$$

La ley de inducción establece el mismo resultado que en el ejemplo anterior

$$R I = -\frac{d\Phi}{dt} = S B_0 \omega \operatorname{sen} \omega t, \quad I = \frac{S B_0 \omega}{R} \operatorname{sen} \omega t.$$

Figura 106: Espira que se deforma, *Ejemplo 3*.

*Ejemplo 3.* Sea ahora una espira rectangular, Figura 106, sometida a un campo magnético uniforme, perpendicular al plano de la espira. Supongamos que la espira se deforma de modo que los segmentos **12** y **34** aumentan su longitud proporcionalmente al tiempo con una velocidad  $v$ . El flujo que atraviesa la espira vale entonces

$$\Phi = -x L B = -v t L B.$$

Despreciando nuevamente el flujo propio de la espira, tendremos

$$R I = v L B.$$

Si combinamos los *Ejemplos 1 y 3* y admitimos que la intensidad del campo  $\vec{B}$  varía en el tiempo según la expresión

$$\vec{B} = B_0 \cos \omega t.$$

El flujo a través de la espira es en cada instante es

$$\Phi = -v t L B_0 \cos \omega t,$$

y la ley de inducción da ahora

$$R I = v L B_0 \cos \omega t - v L B_0 \omega t \sin \omega t.$$

El efecto de deformación y el campo variable interactúan entre sí y el resultado no es la suma de los resultados anteriores. La corriente aumenta con el paso del tiempo porque la espira es cada vez mayor.

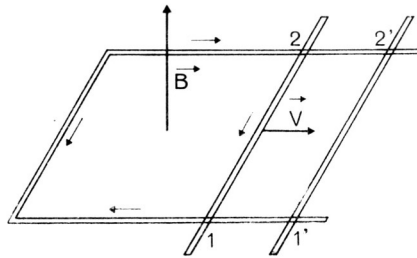


Figura 107: Espira con contactos deslizantes, *Ejemplo 4*.

*Ejemplo 4.* Consideremos una espira o bobina rectangular, según muestra la Figura 107, sobre la cual se mueve un conductor rectilíneo en contacto eléctrico con ella. En este caso no es posible aplicar directamente la ley de inducción puesto que la espira difiere de la usual. En dos posiciones **12** y **1'2'** de la barra, tendremos en realidad dos espiras diferentes. Sin embargo, las sucesivas posiciones de las espiras coinciden con las que se obtenían en el *Ejemplo 3* por deformación en el tiempo. Este sistema puede considerarse como un caso particular de una espira que se deforma. Con esta interpretación, la corriente que circula por ella tiene la misma expresión que la calculada en el *Ejemplo 3*.

Este caso encuentra aplicaciones prácticas muy importantes puesto que en muchas máquinas eléctricas existen dispositivos con “espiras” con contactos deslizantes.

Supongamos, por ejemplo, una bobina rectangular, según la Figura ?? sometida a un campo  $\vec{N}$  uniforme y normal. Imaginemos una barra conductora **12** en contacto eléctrico con la espira, avanzando en su interior con movimiento uniforme a velocidad



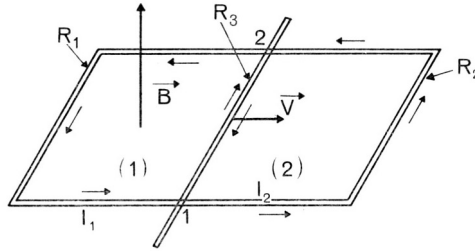


Figura 108: Otro caso de contactos deslizantes.

$v$ . El flujo total del campo es constante, pero el flujo parcial sobre cada una de las espiras aumenta o disminuye en el valor

$$d\Phi_1 = -d\Phi_2 = v L B dt.$$

Si consideramos cada espira deformándose en el tiempo podemos calcular la fuerza electromotriz inducida en cada circuito

$$V_1 = v L B, \quad V_2 = -v L B.$$

Las ecuaciones de cada circuito son, en cada instante

$$R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) = v L B$$

$$R_2 I_1 + R_3 (I_2 - I_1) = -v L B$$

de donde se deduce

$$I = I_1 - I_2 = \frac{v L B}{R_3 + R_1 R_2 / (R_1 + R_2)}$$

La ley de los campos en movimiento permite otra interpretación de los fenómenos: El campo eléctrico en una barra en movimiento, con sus *extremos libres* vale  $v B$ . Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los extremos de la barra valdrá  $v L B$ . Podemos entonces considerar a la barra en movimiento como un *generador de fuerza electromotriz*  $v L B$  y de resistencia interna  $R_3$ . Las ecuaciones de los circuitos nos darían los mismos resultados obtenidos.

Supongamos un sistema como el indicado en la Figura 109, en el cual la barra móvil gira con una velocidad angular  $\omega$ . Si la barra móvil pasa de una posición  $\mathbf{1}$  a una posición  $\mathbf{1}'$  la variación de flujo en la espira es

$$d\Phi = \frac{B r^2}{2} d\alpha,$$

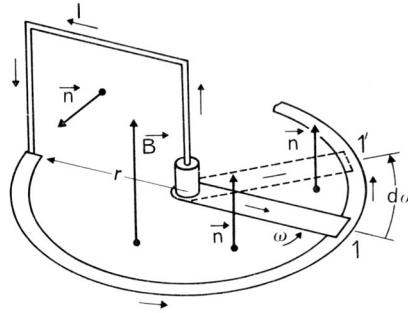


Figura 109: Rotación de un conductor deslizando.

la ley de inducción indica que la corriente vale

$$I = -\frac{B r^2 \omega}{2R}.$$

Este es un ejemplo sencillo de generador mecánico de corriente continua.

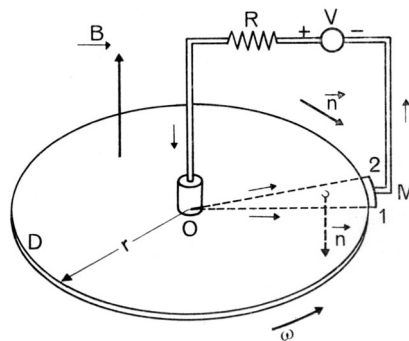


Figura 110: La rueda de Barlow, Ejemplo 5.

*Ejemplo 5.* Estudiemos ahora un sistema un poco más complejo conocido con el nombre de *rueda de Barlow*, esquematizado en la Figura 110. El aparato está formado por un disco **D**, conductor, que puede girar alrededor de su eje y un circuito exterior como el indicado, provisto de un contacto deslizando en **M**. Perpendicularmente al disco se encuentra un campo  $\vec{B}$  de intensidad uniforme. En la hipótesis simplificada de que la corriente en el disco describe una trayectoria **OM** radial (o bien en su defecto, que el disco es en realidad un haz de radios filiformes conductores) el incremento de flujo en la espira –formada por el disco, la resistencia  $R$  y el generador de fuerza electromotriz  $V$ – será

$$d\Phi = -\frac{r^2}{2} B d\alpha,$$

de sentido acorde con el de la corriente  $I$ . La variación flujo en la espira  $O\widehat{2}M\widehat{O}$  respecto a la espira  $O\widehat{1}M\widehat{O}$  es el flujo en el segmento  $O\widehat{2}1\widehat{O}$ . Las direcciones en que hay que considerar el flujo son las señaladas en la figura. Tendremos en definitiva

$$-\frac{d\Phi}{dt} = \frac{R^2 B \omega}{2} = RI - V$$

Por otra parte, la fuerza ejercida en un punto del radio  $\overline{O1}$  vale

$$dF = I B dr$$

y se opone al giro del disco. El momento de las fuerzas respecto a  $\mathbf{O}$  vale

$$M = \int_0^r r dF = \frac{I B r^2}{2}.$$

La potencia recibida por el circuito exterior del disco valdrá, entonces

$$W' = -M \omega = -I \omega \frac{B r^2}{2}.$$

Por otro lado, el generador suministra al disco una potencia, según una expresión anterior, de

$$W'' = V I = R I^2 - I \omega \frac{B r^2}{2} = R I^2 + W'.$$

Si  $W' > 0$  resulta  $W'' > 0$ . Entonces, si el circuito exterior suministra una potencia eléctrica  $W''$  a través del generador, recibe en cambio una potencia mecánica  $W'$  en el eje y produce una cantidad de calor  $R I^2$ . Por otra parte, si  $W'$  es positiva,  $\omega$  debe ser negativa y el disco girará en sentido contrario al indicado. El sistema equivale a un *motor eléctrico* alimentado por el generador  $V$ .

Si ahora prescindimos del generador  $V$  tendremos

$$R I^2 + W' = W'' = 0, \quad -W' = R I^2 > 0.$$

La potencia mecánica  $-W'$  suministrada por el circuito exterior se disipa en el disco, en forma de calor, con una energía  $R I^2$ . Como  $-W'$  es positiva, el disco girará en el sentido indicado en el dibujo. Ahora bien, para que el disco gire en sentido contrario, la corriente  $I$  debe invertirse para mantener el signo correcto de  $-W'$ . El sistema equivale a un *generador* que convierte en calor la energía mecánica  $-W'$  disponible en el eje y genera una corriente eléctrica en el circuito exterior. El signo de la corriente depende del sentido de giro comunicado al dispositivo.

La rueda de Barlow es un caso simple de *motor-generado* mecánico. Según se el par y la corriente, actúa de una u otra manera. Esta reversibilidad es una característica general de los sistemas electromecánicos.

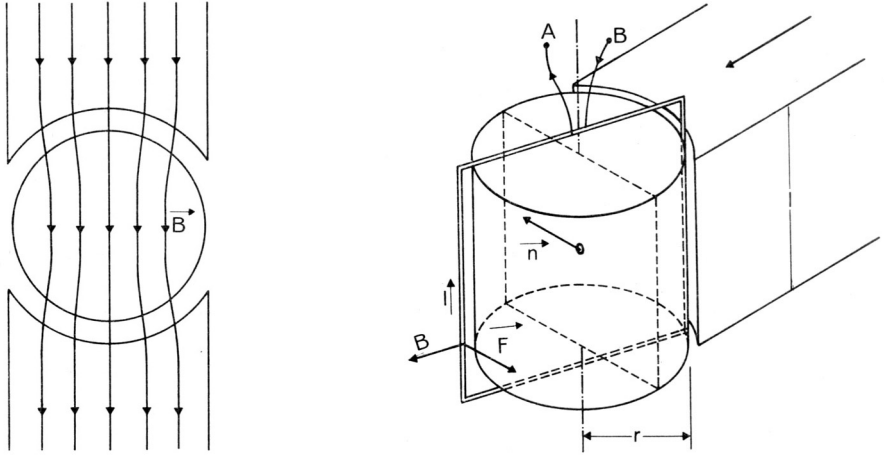


Figura 111: Esquema de un instrumento de cuadro móvil.

### Instrumento de cuadro móvil

Consideremos un circuito magnético como el indicado en la Figura 111 formado por una armadura de hierro y un cilindro central de hierro. El campo  $B$  en el entrehierro puede considerarse perpendicular al hierro y de intensidad uniforme (en primera aproximación). Según muestra esquemáticamente la Figura 111, en el campo se halla colocada una “bobina giratoria” o “cuadro móvil” de forma rectangular de radio  $r$  y lado  $l$ , de  $N$  espiras, cuyos bornes son **A** y **B**. Calculemos el flujo que atraviesa el cuadro en una posición cualquiera. Para ello puede tomarse una superficie arbitraria que contornee a la espira. Elegimos por comodidad la superficie cilíndrica asociada al cuadro según la Figura 112. Tendremos entonces:

$$\Phi = -lr(\pi - \alpha)B + lr\alpha B = 2lrB\alpha - l, r\pi B.$$

Si la espira gira dentro del campo magnético con una velocidad angular  $\omega$  se inducirá en ella una fuerza electromotriz de expresión

$$V_{ind} = \frac{d\Phi_{bob}}{dt}, \quad \Phi_{bob} = N \Phi, \quad V_{ind} = -2lrNB\omega.$$

Llamando  $\Phi_0$ , a la expresión  $2lrB$  que es el flujo total a través del circuito magnético tendremos

$$V_{ind} = -N\Phi_0 \omega.$$

Al conectar los bornes **A** y **B** a un circuito exterior como el indicado en la Figura

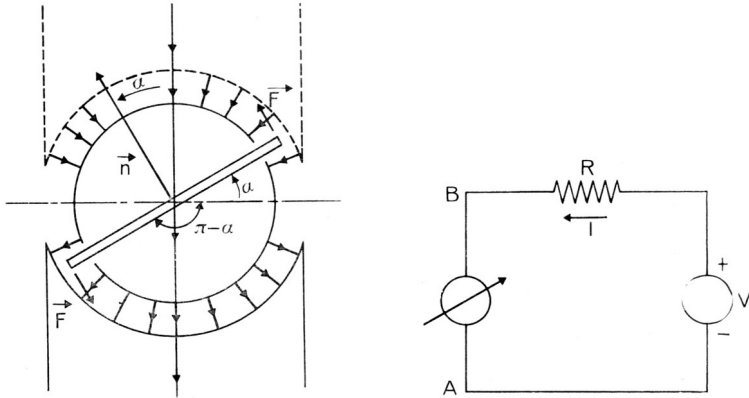


Figura 112: Instrumento de cuadro móvil en un circuito.

112, la intensidad de corriente obtenida es

$$RI - V = N\Phi_0 \omega, \quad i = \frac{V - N\Phi_0 \omega}{R}.$$

Por otra parte, el paso de una corriente  $I$  por el cuadro desarrolla esfuerzos sobre los conductores que forman la espira y que valen

$$F = lBI.$$

Al tener la bobina  $N$  espiras, el momento total de las fuerzas desarrolladas vale

$$M = 2NIBlr = N\Phi_0 I,$$

puesto que las fuerzas mueven el cuadro en el mismo sentido que el aumento del ángulo  $\alpha$ . Si para contrarrestar el par de giro se emplea un resorte antagonista, desarrolla un par opuesto al desplazamiento del cuadro  $-c\alpha$  y la ecuación del movimiento del cuadro, si  $K$  es su momento de inercia, resulta

$$K\ddot{\alpha} = -c\alpha + \frac{N\Phi_0}{R}(V - N\Phi_0 \dot{\alpha}),$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{N^2\Phi_0^2}{KR} \dot{\alpha} + \frac{c}{K} \alpha = \frac{N\Phi_0}{KR} V.$$

Esta ecuación es similar a la ecuación del oscilador, estudiada en el capítulo preliminar, página 34. Debe señalarse que existe un equilibrio definido por el ángulo (dejamos como ejercicio al lector su deducción)

$$\alpha = \frac{N\Phi_0}{c} \frac{V}{R} = \frac{N\Phi_0}{c} I$$

lo que demuestra que el cuadro se desvía proporcionalmente a la intensidad de corriente que circula. Por esta razón, el dispositivo se emplea como instrumento de medida de corrientes.

La ecuación de movimiento deducida anteriormente permite calcular la respuesta del instrumento en función del tiempo. El aparato posee una frecuencia propia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{K}}$$

Variando la resistencia exterior  $R$ , es posible modificar los valores del amortiguamiento y variar, por tanto, la respuesta del instrumento. En los aparatos de calidad, el fabricante especifica la resistencia para la cual se obtiene el amortiguamiento crítico y la resistencia interna del instrumento. Ajustando los valores del circuito exterior es posible variar la respuesta en función del tiempo. Para el estudio de cada caso nos remitimos al capítulo preliminar.

## Energía del campo magnético

Consideremos nuevamente una espira por la cual hacemos circular una corriente constante  $I$  mantenida desde el circuito exterior de la espira. El trabajo realizado por el campo tiene la expresión que ya conocíamos, ver página 141,

$$dT = Id\Phi,$$

donde  $\Phi$  es el flujo del campo magnético que atraviesa la espira. Por otro lado, la variación de flujo a través de la espira induce una fuerza electromotriz que vale

$$V = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

Como la corriente se mantiene desde el circuito exterior, éste debe aumentar su tensión aplicada en  $-V$  para vencer la fuerza electromotriz inducida. El trabajo eléctrico de aquella fuerza electromotriz valdrá, pues,

$$dW = -VIdt = Id\Phi$$

En definitiva, los intercambios de energía que tienen lugar al desplazarse la espira son:

- El circuito exterior recibe un trabajo mecánico  $dT = Id\Phi$ .
- El circuito exterior realiza un trabajo eléctrico  $dW = Id\Phi$ .

La igualdad de estas expresiones indica que el trabajo efectivo realizado por el exterior es nulo. Este resultado es aplicable a todo sistema general de corrientes. El campo magnético, cualquiera que sea su generación, es el agente de transformación entre la energía mecánica y la eléctrica.

Algunas veces se emplea esta propiedad energética para “deducir” la ley de Faraday. Es fácil ver que la igualdad de los trabajos mecánicos y eléctricos *no se deduce del principio de conservación de la energía*. Si fuera así, independientemente de las energías mecánicas y eléctricas puestas en juego, podría aparecer una energía potencial que establecería el balance correcto y en esta situación las energías mecánica y eléctrica serían distintas.

Esta formulación energética de la ley de Faraday conduce inmediatamente a la determinación de los balances de energía que deben producirse en cualquier generador de inducción y en todo motor eléctrico:

- Un *generador* (de inducción) recibe una potencia mecánica que es igual a la potencia eléctrica desarrollada (o mayor que ésta, si se tienen en cuenta las energías disipadas en forma de calor en el propio generador).
- Un *motor* (de inducción) recibe una potencia eléctrica que es igual a la potencia mecánica desarrollada (o mayor que ésta, si se tienen en cuenta las energías disipadas en forma de calor en el propio motor).

Ya hemos podido verificar estas relaciones en el ejemplo relativo a la rueda de Barlow.

Consideremos ahora un sistema formado por dos espiras que identificaremos como **1** y **2**. Nos proponemos calcular la energía que es necesario comunicar al sistema para establecer las corrientes  $I_1$  e  $I_2$  en las espiras. Supongamos que hacemos circular primero la corriente  $I_1$  manteniendo  $I_2 = 0$ . Imaginemos que en un instante del proceso la corriente en la espira **1** vale  $i$ , y que en el instante siguiente, el flujo se incrementa en  $d\Phi$ . Las fuerzas electromotrices inducidas valdrán

$$V_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt}, \quad V_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt}.$$

El circuito exterior debe realizar un trabajo dado por la ecuación de variación de energía

$$dW' = i(-V_1)dt + 0(-V_2)dt = i d\Phi_1 = L_1 i di,$$

luego

$$W' = L_1 \int_0^{I_1} i di = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

Si ahora establecemos gradualmente la corriente  $I_2$  manteniendo  $I_1$  constante en el mismo valor anterior, el trabajo a realizar en ambas espiras es

$$I_1 \frac{d\phi_1}{dt} dt = I_1 M_{12} di,$$

$$i \frac{d\Phi_2}{dt} dt = L_2 i di$$

de manera que

$$dW'' = I_1 M_{12} di + L_2 i di,$$

luego

$$W'' = \int_0^{I_2} (I_1 M_{12} + L_2 i) di = M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

La energía total empleada será la suma de las parciales y tendrá por expresión

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{12} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2.$$

Si se hubiera procedido en orden inverso, al aplicar el principio de conservación de la energía, tendríamos

$$W = W' + W'' = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + M_{21} I_1 I_2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2.$$

La comparación de ambas expresiones en la energía muestra al igualar términos comunes que  $M_{12} = M_{21}$ .

En particular, en una bobina con núcleo magnético y entrehierro, tenemos

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{N^2}{l/\mu S + e/\mu_0 S} I^2$$

ver página 155. Es un ejercicio interesante determinar la energía almacenada por otro procedimiento, basado en la densidad de energía tal como ocurría en el caso electrostático, ver la página 85. Verificaremos que el valor de la densidad de energía magnética almacenada por unidad de volumen es  $B^2/2\mu$ . En efecto, en el caso de un núcleo con entrehierro se tiene

$$\int_{total} \frac{B^2}{2\mu} dV = \frac{1}{2\mu} \int_{nucleo} B^2 dV + \frac{1}{2\mu_0} \int_{aire} B^2 dV,$$

donde  $dV$  es el elemento de volumen. El campo  $B$  es constante en todo el circuito, de donde resulta

$$\int_{total} \frac{B^2}{2\mu} dV = \frac{B^2}{2\mu} lS + \frac{B^2}{2\mu_0} eS = \frac{B^2 S}{2} (l/\mu + e/\mu_0).$$

El campo  $B$  vale

$$B = \frac{NI}{l/\mu + e/\mu_0}$$



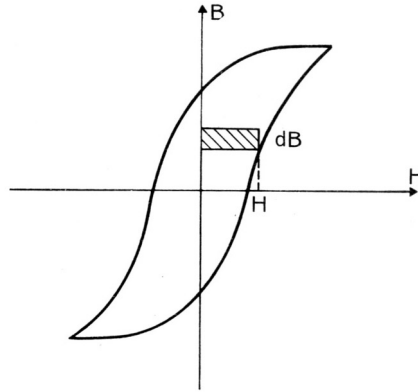


Figura 113: Pérdidas por histéresis.

de donde resulta

$$\int_{total} \frac{B^2}{2\mu} dV = \frac{1}{2} \frac{N^2 I^2 S}{l/\mu + e/\mu_0} = W.$$

Al describir el fenómeno de la histéresis se explicó que para una cierta intensidad de campo  $H$ , el campo  $B$  no quedaba perfectamente determinado a causa del retraso en la imantación, Figura 113. Según demuestra la experiencia esto da lugar a un consumo de energía cuyo valor vamos a calcular. El trabajo eléctrico realizado al variar el flujo en el material, es

$$I d\Phi = IS dB.$$

Pero, por otra parte,  $NI = Hl$ ; luego la energía empleada es

$$dW = \frac{Sl}{N} H dB = \frac{V}{N} H dB$$

donde  $V$  es el volumen del núcleo y que puede representarse en la figura por el rectángulo indicado. Para completar todo el ciclo de histéresis se debe recorrer toda el área encerrada, de modo que el trabajo consumido corresponde a una energía

$$W = \frac{V}{N} A,$$

donde  $A$  es el área encerrada en la curva de histéresis  $B - H$ .

Esta expresión es importante y podemos aplicarla al caso de un material sometido a un proceso de imantación y desimantación alternado de frecuencia  $f$ . En un segundo se recorren  $f$  ciclos de histéresis y por tanto la potencia perdida por histéresis, vale

$$w = \frac{fVA}{N}.$$

Esta energía disipada se transforma en calor al nivel de los dominios ferromagnéticos.

## Fuerzas de origen magnético

El cálculo de fuerzas de origen magnético se realiza mediante balances energéticos semejantes a los que ya hemos descrito. Algunos ejemplos ilustrarán los diversos métodos de trabajo que pueden emplearse.

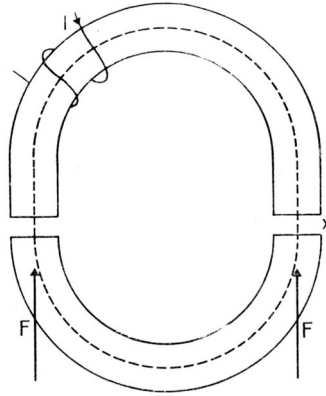


Figura 114: Fuerza en un electroimán, Ejemplo 1.

*Ejemplo 1.* Consideremos un electroimán como el que se muestra en la Figura 114. La energía almacenada en el sistema puede calcularse a través del coeficiente de self de la bobina, o bien mediante la expresión de la energía por unidad de volumen. Sea  $x$  el entrehierro, se tiene

$$W = \frac{1}{2} \frac{N^2 I^2 S}{l/\mu + 2x/\mu_0}$$

Si se mantiene  $I$  constante mediante generadores exteriores y, bajo la acción de una fuerza exterior, se incrementa el entrehierro en  $dx$  se tendrá una variación de energía almacenada

$$dW = -\frac{1}{2} \frac{N^2 I^2 S}{(l/\mu + 2x/\mu_0)^2} \frac{2}{\mu_0} dx,$$

efectuada a expensas del generador exterior que mantiene la corriente constante. Por otra parte, si  $F$  es la fuerza de atracción que tiende a acercar las dos piezas de la armadura, el trabajo mecánico a realizar para separarlas en una magnitud  $dx$  vale

$$dT = 2 F dx$$

El balance de energías exige

$$dW + dT = 0,$$

luego

$$F = \frac{1}{2\mu_0} \frac{N^2 I^2 S}{(l/\mu + 2x/\mu_0)^2}$$

Por otra parte, al separar las armaduras  $dx > 0$ , y el circuito exterior realiza un trabajo mecánico que se transmite a la bobina en forma de trabajo eléctrico; si las armaduras se acercan,  $dx < 0$ , y el circuito exterior recibe un trabajo mecánico efectuado a expensas del generador que mantiene constante la corriente en la bobina.

*Ejemplo 2.* Análogamente el caso electrostático, se puede calcular la fuerza ejercida sobre las piezas del electroimán acudiendo al concepto de *presión del campo magnético* que vale  $B^2/2\mu_0$ . Si repetimos los cálculos tendremos

$$B = \frac{NI}{l/\mu + 2x/\mu_0}, \quad p = \frac{1}{2\mu_0} \frac{N^2 I^2}{(l/\mu + 2x/\mu_0)^2}$$

$$F = pS = \frac{1}{2\mu_0} \frac{N^2 I^2 S}{(l/\mu + 2x/\mu_0)^2}$$

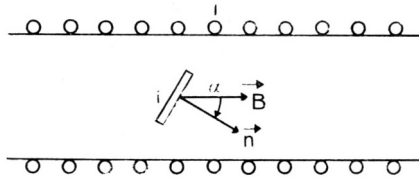


Figura 115: Acoplamiento entre bobinas, *Ejemplo 3.*

*Ejemplo 3.* Supongamos una pequeña bobina colocada en el interior (o próxima) de otra bobina mayor, tal como muestra la Figura 115. La energía del sistema, cuando circulan las corrientes  $I$  e  $i$  por las bobinas es

$$W = \frac{1}{2} L_1 I^2 + MiI + \frac{1}{2} L_2 i^2.$$

Si giramos la bobina pequeña un ángulo  $d\alpha$  es necesario realizar un trabajo eléctrico para mantener invariables las corrientes desde el circuito exterior. Su valor es

$$dT = dW = iI dM = iI \frac{dM}{d\alpha} d\alpha.$$

uesto que  $L_1$  y  $L_2$  son independientes de la posición relativa de las bobinas. Por otra parte, si  $m$  es el par de giro aplicado a la bobina pequeña y ésta gira un ángulo  $d\alpha$ , el circuito exterior realiza un trabajo mecánico

$$-m d\alpha.$$

El principio de conservación de la energía exige

$$-m d\alpha + dW_0, \quad m = iI \frac{dM}{d\alpha}.$$

Esta expresión que muestra que la posición de equilibrio de la bobina pequeña se obtiene cuando el ángulo presenta el *máximo acoplamiento* entre las bobinas. La bobina pequeña se orienta en la dirección del campo, esto es lo que ocurre con las brújulas, por ejemplo.

## Segundo enunciado de la ley de Faraday

Una espira fija sometida a un campo variable en el tiempo induce una fuerza electromotriz de expresión ya conocida

$$RI = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Este resultado puede expresarse en otros términos. La circulación del campo eléctrico a lo largo del conductor vale, de acuerdo con la ley de Ohm

$$\text{circ } \vec{E} = \frac{\text{circ } \vec{J}}{\gamma} = \frac{l}{S\gamma} I = RI$$

de modo que la ley de Faraday puede escribirse también

$$\text{circ } \vec{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Como el campo eléctrico en la superficie exterior del conductor es igual al campo que existe en el interior, la ecuación anterior es válida también fuera del conductor. Este resultado constituye un nuevo enunciado de la ley de Faraday<sup>4</sup>

*Ley de Faraday.* La circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de una curva cerrada es igual a  $-\partial\Phi/\partial t$ , donde  $\Phi$  es el flujo de  $\vec{B}$  que atraviesa una superficie sobre la curva y cuyo sentido es acorde con  $\vec{E}$  según la regla del sacacorchos.

Este enunciado sustituye la conocida ley de circulación formulada en la electrostática.<sup>5</sup> En rigor, ésta constituye una generalización de la ley de Faraday, ya que sólo se

<sup>4</sup> Las derivadas se indican con los símbolos  $\partial$  en lugar de los habituales  $d$  porque se trata de una *derivada parcial*, respecto a una única variable de las varias involucradas en el flujo.

<sup>5</sup> Nótese que el campo eléctrico cuando hay fenómenos que varían en el tiempo *ya no es conservativo* y que ya no tiene más sentido hablar de *potencial eléctrico*.

deriva de la anterior en el caso de una superficie inmediatamente próxima a la de una espira cerrada.

Este enunciado es de una extrema importancia por cuanto está formulado *en términos de campos, con independencia total de los conductores presentes*. Podemos ahora estudiar su transformación a un sistema en movimiento.

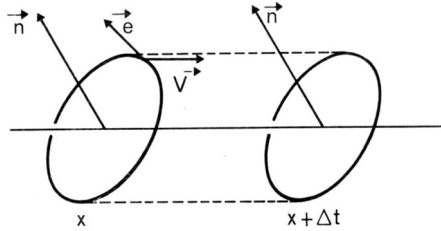


Figura 116: Cálculo de los campos en movimiento.

Supongamos, Figura 116, una curva cerrada y un sistema móvil que se desplaza con velocidad  $\vec{v}$ . Sea  $\vec{n}$  la normal correspondiente al plano de la curva,  $x$  la abscisa de la curva en el sistema móvil,  $B_n$  la proyección de la intensidad de campo  $\vec{B}$  según la dirección  $\vec{n}$  y supongamos que la sección  $S$  de la curva es lo suficientemente pequeña como para considerar constante al campo  $\vec{B}$ .

La variación de flujo en el sistema fijo es

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = S \frac{\partial B_n}{\partial t}$$

Si calculamos la circulación de  $\vec{E}'$  en el sistema móvil, tendremos

$$\text{circ } \vec{E}' = \text{circ } \vec{E} + \text{circ } (\vec{v} \wedge \vec{B}),$$

$$\text{circ } (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \sum \vec{e} \times (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \sum (\vec{e} \wedge \vec{v}) \times \vec{B},$$

aplicando la propiedad del producto mixto. Pero  $\vec{e} \wedge \vec{v} dt$  es un vector de dirección normal a la superficie lateral "barrida" por la curva, de sentido incidente hacia adentro y de módulo el elemento de área, de modo que obtenemos la expresión

$$\text{circ } (\vec{v} \wedge \vec{B}) = -\frac{\Phi_{lateral}}{\Delta t}$$

El flujo de  $\vec{B}$  que atraviesa la superficie lateral puede calcularse aplicando la ley del flujo a todo el cilindro considerado, en el sistema fijo y en el instante  $t$ .

$$\Phi_{lateral} + SB_n(x, t) - SB_n(x + v \Delta t, t) = 0$$

Luego obtenemos

$$\text{circ}(\vec{v} \wedge \vec{B}) = -Sv \frac{B_n(x + v \Delta t, t) - B_n(x, t)}{v \Delta t} \rightarrow -Sv \frac{\partial B_n}{\partial x}$$

$$\text{circ} \vec{E} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -S \frac{\partial B_n}{\partial t}$$

Reuniendo las dos expresiones obtenidas queda

$$\text{circ} E' = -S \left( \frac{\partial B_n}{\partial t} + v \frac{\partial B_n}{\partial x} \right)$$

Un observador situado en el sistema móvil calculará la variación de flujo en la espira, tomando el campo  $B'_n$  que obtiene en el punto  $x'$  en dos instantes  $t$  y  $t + \Delta t$

$$\frac{\Delta \Phi'}{\Delta t} = S \frac{B'_n(x', t + \Delta t) - B'_n(x', t)}{\Delta t}$$

El campo  $B'_n$  en el instante  $t$  y en la posición  $x'$  coincide con  $B_n(x, t)$  mientras que el campo  $B'_n$  en el instante  $t + \Delta t$  y la posición  $x'$  equivale al  $B_n(x + v \Delta t, t + \Delta t)$  pues en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  el punto  $x'$  ha recorrido una distancia  $v \Delta t$  en el sistema fijo. Tendremos entonces

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Phi'}{\Delta t} &= S \frac{B_n(x + v \Delta t, t + \Delta t) - B_n(x, t)}{\Delta t} = \\ &= Sv \frac{B_n(x + v \Delta t, t + \Delta t) - B_n(x, t + \Delta t)}{v \Delta t} + \\ &+ S \frac{B_n(x, t + \Delta t) - B_n(x, t)}{\Delta t} \rightarrow S \left( v \frac{\partial B_n}{\partial x} + \frac{\partial B_n}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

o sea que

$$\text{circ} \vec{E}' = -\frac{\partial \Phi'}{\partial t}$$

o que demuestra que la ley de la circulación del campo eléctrico es válida en un sistema en movimiento uniforme.

*Ejemplo 1.* En un conductor en presencia de un campo magnético variable se inducen fuerzas electromotrices locales que dan lugar a la circulación de corrientes inducidas denominadas corrientes de Foucault. Supongamos, por ejemplo, que una sección concéntrica de una lámina conductora en forma de disco circular de pequeño espesor, Figura 117, se encuentra sometida a un campo magnético uniforme, normal a ella, y que la dependencia de  $B$  con el tiempo está dada por

$$B = B_0 \cos \omega t.$$

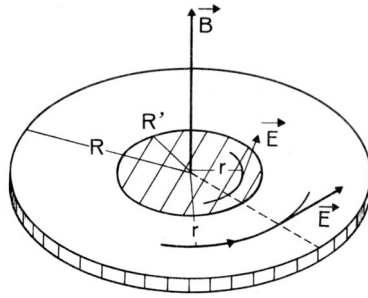


Figura 117: Corrientes de Foucault, Ejemplo 1.

Por el principio de simetría podemos admitir que las corrientes sigan líneas circulares concéntricas. La ley de Ohm indica  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ . La circulación del campo eléctrico a lo largo de una línea de corriente exterior al campo magnético aplicado vale

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi R'^2 B_0 \omega \sin \omega t,$$

mientras que en la zona interior vale

$$2\pi r E = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi r^2 B_0 \omega \sin \omega t.$$

De donde la densidad de corriente resulta

$$J = \frac{R'^2 B_0 \omega \gamma}{2r} \sin \omega t \quad (\text{exterior}),$$

$$J = \frac{r B_0 \omega \gamma}{2} \sin \omega t \quad (\text{interior}),$$

En estos cálculos se ha despreciado el campo magnético que crean las corrientes inducidas distribuidas en el disco.

Es interesante observar que en la zona interior se presenta un efecto Hall apreciable, en la región exterior, el campo magnético es creado sólo por las corrientes inducidas y su efecto puede despreciarse. Por consiguiente, aparece un campo radial que tiende a oponerse a los esfuerzos magnéticos ejercidos sobre los portadores de corriente. Este campo  $E'$ , medido hacia el exterior de  $\mathbf{O}$  vale

$$E' = -VB = -\frac{BJ}{Nq}$$

La ley del flujo del campo  $E$  muestra que en el conductor existe una distribución de cargas de volumen debidas al efecto Hall. Esto no contradice en nada la afirmación

que hicimos sobre la inexistencia de cargas en el interior de un conductor, puesto que nos basábamos en la ley de Ohm que no es válida cuando existe el efecto Hall.

Las intensidades locales establecidas en el disco dan por resultado un calentamiento y unas pérdidas que pueden calcularse fácilmente. En una sección del disco, la corriente que circula vale

$$I = JS = J e dr$$

donde  $e$  es el espesor del disco. El trabajo eléctrico realizado por estas corrientes parásitas en una sección circular de espesor  $dr$  vale entonces

$$dW = E J e 2\pi r dr,$$

de modo que la energía disipada en todo el disco será

$$W = \int_0^{R'} E J e 2\pi r dr + \int_{R'}^R E J e 2\pi r dr,$$

notar que las expresiones de  $E$  en los dos tramos de integración son diferentes. Queda entonces

$$W = \frac{\pi}{2} R'^4 e B_0^2 \omega^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \omega t \left( \ln \frac{R}{R'} + \frac{1}{4} \right)$$

Esta energía es suministrada por el “generador” de las corrientes, es decir por el campo magnético variable. Por este motivo, al construir los dispositivos que trabajan con corrientes variables, se toman precauciones especiales para reducir a un valor muy pequeño las corrientes inducidas. En nuestro caso, las dos soluciones típicas para reducir las corrientes de Foucault serían aumentar la resistencia del material y construir el disco con chapas aisladas entre sí y seccionadas en dirección normal a la de las tensiones inducidas (cortes radiales) al objeto de interrumpir las corrientes concéntricas. Con esta última solución, no se consigue eliminar completamente las corrientes de este género porque aparecen otras nuevas con otro recorrido pero sí se logra disminuir sus efectos al reducirse a un valor muy pequeño la tensión por chapa, con lo cual las corrientes se hacen insignificantes.



# Elementos de circuitos

## Hipótesis de la teoría de circuitos

La ley de Faraday constituye la herramienta teórica fundamental para el estudio de los circuitos sometidos a corrientes *variables en el tiempo*. En un circuito cualquiera podemos escribir independientemente la circulación del campo eléctrico a lo largo del circuito y la variación de flujo en el tiempo. De la igualdad de estas expresiones se deduce el valor de las corrientes en el circuito, en forma similar a lo que ocurría en los circuitos en régimen estacionario. Planteado en estos términos el problema parece simple, pero en la práctica resulta a veces difícil conocer exactamente en cada instante las distribuciones de campo. Por este motivo se prefiere elaborar una teoría *simplificada* que permita trabajar con distribuciones de campo *aproximadas* a las reales. Nos dedicaremos primero al estudio de estas simplificaciones y determinaremos cuál es el alcance que poseen.

1. Los conductores se suponen de sección constante, de modo que pueda admitirse siempre que la corriente se distribuye por su sección con uniformidad. Los generadores presentes en los circuitos se suponen ideales; a lo sumo se puede agregar una resistencia en serie, que represente la resistencia interna del generador.
2. Se admite que los fenómenos ocurren en el tiempo con variación *suficientemente lenta* (véase capítulo siguiente) que permita afirmar la igualdad entre las leyes que verifican los condensadores y las bobinas y las leyes estáticas obtenidas. Así por ejemplo, se hablará de capacidad de un condensador, de self de una bobina, de mutua entre dos bobinas y se emplearán para su cálculo los valores obtenidos en condiciones estáticas. Esta aproximación es excelente en los fenómenos lentos que transcurren en un tiempo inferior a  $10^{-6}$  segundos.
3. Los elementos de circuitos se consideran *concentrados*. Es decir, se desprecia la *capacidad de los conductores* y la *self de las espiras formadas*: sólo se tiene en cuenta la capacidad de los condensadores y la self de bobinas presentes.

Los límites de validez de estas hipótesis serán examinados en el capítulo siguiente al estudiar los fenómenos dinámicos.

La aplicación de la ley de Faraday a los circuitos en régimen transitorio (por oposición a continuo) conduce a la obtención de las ecuaciones que relacionan entre sí los elementos del circuito con las *derivadas respecto al tiempo* de las tensiones y corrientes. Las soluciones de estas ecuaciones, es decir, los valores de las corrientes y de las tensiones en función del tiempo, se determinarán por una serie de integraciones convenientes, con el consiguiente problema que introducen las constantes de integración. Algunos ejemplos ilustrarán la marcha a seguir en los cálculos.

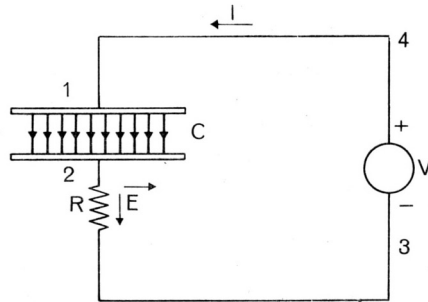


Figura 118: Carga de un condensador, *Ejemplo 1*.

*Ejemplo 1.* Consideremos un condensador de capacidad  $C$  colocado en el circuito de la Figura 118. En el condensador se cumple

$$Q_1 = C(\varphi_1 - \varphi_2)$$

cuando el circuito está en equilibrio. Para fenómenos “suficientemente lentos” admitiremos esta ecuación como válida.

Por otra parte, si  $I$  es la corriente en el circuito, la ecuación de conservación de las cargas establece

$$I dt = dQ_1, \quad I = \frac{dQ_1}{dt} = C \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt}.$$

Admitiendo una distribución uniforme de corriente en la sección del conductor, lo cual se verifica si el fenómeno es “suficientemente” lento y aplicando la ley de Ohm resulta

$$E = \frac{J}{\gamma} = \frac{I}{S\gamma}$$

La circulación de la intensidad del campo eléctrico sobre la línea media del conductor filiforme vale entonces

$$\text{circ } \vec{E} = \varphi_1 - \varphi_2 + \frac{lI}{S\gamma} + \varphi_3 - \varphi_4$$

Teniendo en cuenta que  $\varphi_3 - \varphi_4$  es la fuerza electromotriz  $V$  del generador y llamando  $V_c = \varphi_1 - \varphi_2$  a la diferencia de potencial en bornes del condensador, resulta

$$\text{circ } \vec{E} = V_c + RI - V.$$

La ley de Faraday nos dice que esta circulación coincide con la variación del flujo magnético en el circuito. Pero en la mayoría de los casos el flujo creado por una corriente al pasar por un circuito es despreciable ( $L$  puede valer del orden de  $10^{-4}$  henry para una espira de algunos decímetros de diámetro) y por lo tanto su variación es cero. Tenemos entonces, con esta nueva hipótesis

$$V_c + RI - V = 0, \quad V_c + RC \frac{dV_c}{dt} - V = 0.$$

Esta última ecuación puede escribirse también en la forma

$$-\frac{dt}{RC} = \frac{dV_c}{V_c - V}.$$

Integrando obtenemos

$$-\frac{t}{RC} + a = \ln(V_c - V), \quad V_c = V + b e^{-t/RC},$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes de integración. Si en el instante  $t = 0$ , el condensador se encontraba descargado,  $V_c(0) = 0$ . Podemos determinar, con esta condición, el valor de  $b$

$$V + b = 0, \quad V_c = V(1 - e^{-t/RC}).$$

Esta ecuación muestra que el condensador se carga en forma exponencial hasta alcanzar una tensión  $V$ , entre sus armaduras. La “velocidad” de carga depende del valor de  $RC$ , producto que se denomina *constante de tiempo* del circuito.

La intensidad de corriente en el circuito, puede calcularse a partir de los valores de la diferencia de potencial en el condensador

$$I = C \frac{dV_c}{dt} = \frac{V}{R} e^{-t/RC}.$$

En el instante inicial, circula una intensidad  $I = V/R$ , que corresponde a la que pasa por el circuito eliminando el condensador. A medida que el condensador se va cargando, la corriente disminuye hasta que finalmente se anula. Esta evolución de la corriente se comprende fácilmente si se piensa que al aumentar la tensión en bornes del condensador disminuye la diferencia de potencial en la resistencia y por tanto la corriente.

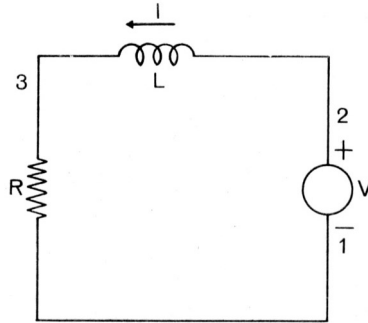


Figura 119: Corriente en una bobina, *Ejemplo 2*.

*Ejemplo 2.* Consideremos el circuito con una bobina de self  $L$ , según la Figura 119. En funcionamiento estático se cumple en la bobina

$$\Phi = LI,$$

donde  $\Phi$  es el flujo que la atraviesa de sentido acorde con la corriente. Se ha despreciado la resistencia propia del bobinado, o bien se la considera incluida en  $R$ . La circulación del campo eléctrico a lo largo del circuito, considerando las hipótesis usuales, vale

$$\text{circ } \vec{E} = RI - V.$$

Si, como en el ejemplo anterior, despreciamos el flujo a través del circuito y consideramos sólo el que atraviesa la bobina (que es muy superior debido al considerable número de espiras que posee) tendremos, de acuerdo con la ley de Faraday

$$RI - V = -L \frac{dI}{dt}$$

ecuación que puede escribirse también

$$-\frac{R}{L} dt = \frac{dI}{I - V/R}$$

que integrada resulta

$$I = \frac{V}{R} + b e^{-R/Lt}.$$

Para determinar la constante de integración supondremos que en el instante  $t = 0$  conectamos el generador al circuito, de modo que el flujo inicial, y la corriente inicial son nulas. Equivalentemente podemos considerar que para  $t \rightarrow \infty$  la corriente vale  $V/R$ . Tendremos entonces

$$I = \frac{V}{R} \left(1 - e^{-R/Lt}\right).$$

Esta expresión de la corriente permite calcular la diferencia de potencial que existe entre los bornes de la bobina en un instante cualquiera observando que

$$\varphi_2 - \varphi_3 = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_3)$$

$$\varphi_2 - \varphi_3 = V - RI = L \frac{dI}{dt} = V e^{-R/Lt}.$$

En el instante inicial, toda la tensión del generador está aplicada en la bobina, puesto que no existe corriente. Esta tensión cae exponencialmente a cero, valor que se mantiene en régimen continuo, puesto que se ha despreciado la resistencia de los conductores que constituyen la bobina. La constante de tiempo vale ahora  $L/R$ .

Al determinar las constantes de integración, consideramos las condiciones iniciales del circuito. Este es un punto delicado que hay que analizar cuidadosamente. Es necesario distinguir dos nociones conceptualmente diferentes: las *condiciones iniciales* del circuito y las *condiciones previas*. Entendemos que las primeras representan el estado del circuito, inmediatamente después de comenzado el fenómeno en estudio y que las segundas constituyen el estado del circuito inmediatamente antes de comenzar el fenómeno. En nuestro caso, la situación previa consiste en el circuito *sin conectar el generador* y, por consiguiente, no hay paso de corriente y el flujo que atraviesa la bobina es cero. Las condiciones previas son pues conocidas. En cambio no lo son las condiciones iniciales y hay que acudir a otro sistema de cálculo. En nuestro caso, hemos admitido que el crecimiento del flujo en la bobina es lo suficientemente lento como para no considerar una variación instantánea del flujo. Por consiguiente, el flujo inicial y el flujo previo coinciden y la corriente en el instante inicial debe ser cero. Téngase en cuenta que la igualdad entre el flujo inicial y el previo no es un mero capricho sino que responde a una necesidad física que plantea la ley de Faraday. Si admitiéramos una variación instantánea del flujo en la bobina, existiría en el circuito una fuerza electromotriz inducida *infinita* y esto, desde el punto de vista físico, es un absurdo. El estudio correcto del fenómeno implica el considerar que la transición del estado previo al estado inicial requiere un cierto tiempo, puesto que es imposible conectar instantáneamente el generador y, conseguir inmediatamente el paso al estado de los fenómenos “suficientemente lentos”. El punto de vista de proceso ideal que se ha seguido en el estudio de los circuitos obliga a introducir la condición de continuidad del flujo, en sustitución del concepto físico del paso instantáneo del estado previo al inicial. De todos modos, es una hipótesis nueva que hay que verificar.

Hechas estas consideraciones podemos analizar de nuevo el *Ejemplo 1*. En las condiciones previas el condensador está *sin cargas* y en las condiciones iniciales *continúa así*, puesto que la carga no puede aparecer instantáneamente; de lo contrario pasaría por el circuito una corriente infinita. No obstante, nótese que la intensidad de la corriente aumenta instantáneamente, puesto que *hemos despreciado el flujo propio del*

*circuito*. En rigor, sería necesario considerar que el circuito tiene una  $L$  propia con la cual estaríamos en las condiciones del *Ejemplo 2* y habría necesariamente una continuidad en la corriente. Este resultado paradójico se debe al proceso de idealización que hemos seguido en el análisis del circuito.

Luego de estas consideraciones, podemos enunciar ahora las leyes que relacionan los estados previo e inicial de un circuito de modo de evitar corrientes o tensiones infinitas:

*Ley de nudos.* La carga de los conductores conectados a un nudo es igual en el estado previo y en el estado inicial.

*Ley de las mallas.* El flujo total que atraviesa una malla, es igual en el estado previo y en el estado inicial.

La ley de Faraday, junto con las leyes sobre las condiciones iniciales, permiten resolver completamente un fenómeno transitorio en un circuito. Préstese nuevamente atención al hecho de que las leyes sobre los estados iniciales son una consecuencia de la idealización seguida en el proceso, que se admite puede ocurrir en un instante. Si las ecuaciones se plantearan en términos de la intensidad de campo y de las cargas *existiría sólo la continuidad en todas las variables que rigen el fenómeno*.

La discontinuidad aparente que hemos encontrado en ciertas magnitudes no es más que una nueva paradoja de la idealización, consecuencia de la discontinuidad admitida, al conectar instantáneamente un generador.

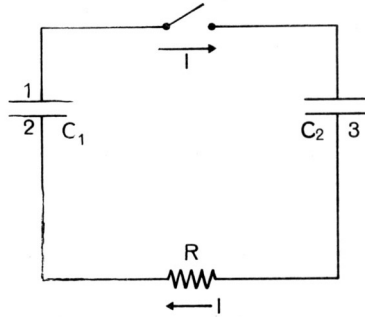
## Ejemplos de circuitos en régimen transitorio

En esta sección, incluiremos en el circuito un *interruptor* para evitar toda confusión que pudiera producirse sobre los datos iniciales y los datos previos. La apertura o el cierre del interruptor determinará el comienzo del fenómeno. Con carácter general, llamaremos  $t = 0$  al instante en el cual se produce el movimiento del interruptor. Los datos previos se obtendrán con el interruptor en la posición *anterior* a  $t = 0$ ; los datos iniciales corresponden a la posición *posterior* a  $t = 0$ .

*Ejemplo 1.* Supongamos un condensador inicialmente cargado, de capacidad  $C_1$ , colocado en el circuito de la Figura 120. Sea  $V = \varphi_1 - \varphi_2$  a tensión del condensador antes de cerrar el interruptor. Aplicando la ley de Faraday a un instante cualquiera posterior al cierre del interruptor, resulta

$$\varphi_1 - \varphi_3 + RI + \varphi_2 - \varphi_1 = 0$$

Por otra parte, la carga de cada condensador está ligada con la tensión por las

Figura 120: Descarga de un condensador, *Ejemplo 3*.

ecuaciones

$$Q_1 = C_1 (\varphi_1 - \varphi_2), \quad Q_3 = C_2 (\varphi_3 - \varphi_1).$$

La ecuación de conservación de la carga puede escribirse en cada uno de los conductores presentes en el circuito

$$I dt = -dQ_1 = -dQ_3.$$

Si llamamos  $V_1$  y  $V_2$  a las tensiones en cada instante en los condensadores tendremos

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 V_1, & Q_3 &= C_2 V_2, \\ I &= -\frac{dQ_1}{dt} = -\frac{dQ_3}{dt} = -C_1 \frac{dV_1}{dt} = -C_2 \frac{dV_2}{dt}, \\ -V_2 - R C_1 \frac{dV_1}{dt} - V_1 &= 0. \end{aligned}$$

Integrando la primera de las relaciones entre  $V_1$  y  $V_2$  tendremos

$$C_1 V_1 + a = C_2 V_2.$$

La constante de integración  $a$  puede determinarse considerando las condiciones iniciales: para  $t = 0$ ,  $V_1 = V$  y  $V_2 = 0$  (si fuera distinto de cero, en el instante inicial circularía una corriente infinita). Sustituyendo valores resulta

$$C_1 V + a = 0, \quad V_2 = \frac{C_1}{C_2} (V_1 - V).$$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación entre  $V_1$  y  $V_2$  tenemos

$$\frac{C_1}{C_2} (V_1 - V) + R C_1 \frac{dV_1}{dt} + V_1 = 0.$$

ecuación que puede escribirse también

$$\frac{dV_1}{C_1 V / (C_1 + C_2) - V_1} = \frac{C_1 + C_2}{RC_1 C_2} dt$$

la cual integrada da

$$V_1 = V \frac{C_1}{C_2 + C_2} + b e^{-(C_1 + C_2) / RC_1 C_2 t}.$$

La constante de integración  $b$  puede calcularse imponiendo nuevamente las condiciones iniciales para  $t = 0$

$$V = V \frac{C_1}{C_2 + C_2} + b, \quad b = V \frac{C_2}{C_2 + C_2},$$

de donde

$$V_1 = V \frac{C_1}{C_2 + C_2} + V \frac{C_2}{C_2 + C_2} e^{-(C_1 + C_2) / RC_1 C_2 t}.$$

El fenómeno da nuevamente una conducta exponencial. La constante de tiempo vale  $RC_{eq}$  donde  $C_{eq}$  es la capacidad de la serie de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ . Cuando  $t \rightarrow 0$  el valor límite de la tensión es  $V C_1 / (C_1 + C_2)$ . La tensión  $V_2$  se calcula a partir de  $V_1$

$$V_2 = -V \frac{C_1}{C_2 + C_2} \left( 1 + e^{-(C_1 + C_2) / RC_1 C_2 t} \right).$$

Ténganse presente las convenciones de signo adoptadas al definir  $V_1$  y  $V_2$ . El valor límite de esta tensión es el opuesto a  $V_1$ .

Es interesante calcular la energía en el estado inicial y el estado final asintótico ( $t \rightarrow \infty$ ). La energía inicial del circuito es

$$\frac{1}{2} C_1 V^2$$

La energía final es

$$\frac{1}{2} \frac{C_1^2}{(C_1 + C_2)^2} C_1 V^2 + \frac{1}{2} \frac{C_2^2}{(C_1 + C_2)^2} C_2 V^2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{1}{2} C_1 V^2$$

La energía perdida en el circuito se ha convertido en calor en la resistencia  $R$ , completando así el balance. Obsérvese que la pérdida de energía es independiente de  $R$  y que se produciría aun cuando  $R = 0$  (un caso ideal). Este resultado sorprendente no debe tomarse como contrario al principio de conservación de la energía; se debe a que para  $R = 0$  los condensadores se cargan *instantáneamente*, lo que exige la circulación



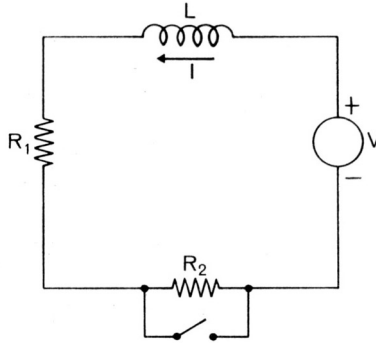


Figura 121: Sobretensión de apertura, Ejemplo 2.

de corrientes *infinitas*. Nos encontramos nuevamente ante un resultado paradójico debido a la idealización del circuito.

*Ejemplo 2.* Consideremos el circuito de la Figura 121, en el cual el interruptor indicado *se abre* en el instante inicial. Las condiciones previas se pueden calcular en forma sencilla. La corriente en el circuito será, de acuerdo con la ley de Ohm (y despreciando la resistencia de la bobina)

$$I = \frac{V}{R_1},$$

de modo que a la apertura del circuito, la corriente inicial vale  $V/R_1$ , como exige la ley de conservación del flujo. De acuerdo con la ley de Faraday la variación de la corriente en el tiempo es

$$(R_1 + R_2) I - V = -L \frac{dI}{dt},$$

que puede escribirse

$$\frac{dI}{I - V/(R_1 + R_2)} = -\frac{R_1 + R_2}{L} dt,$$

integrando resulta

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} + a e^{-(R_1 + R_2)/L t},$$

para  $t = 0$  es  $I = V/R_1$ , con lo cual se determina la constante de integración  $a$

$$\frac{V}{R_1} = \frac{V}{R_1 + R_2} + a, \quad a = \frac{R_1}{R_2} \frac{V}{R_1 + R_2}$$

luego

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-(R_1 + R_2)/L t} \right).$$

Es interesante calcular la tensión en bornes de  $R_2$  al abrir el interruptor en  $T = 0$

$$V_{R_2} = R_2 I = \frac{R_2}{R_1} V.$$

Esta ecuación muestra que, en el instante inicial, la tensión en bornes de la resistencia  $R_2$  puede ser mayor que la tensión del generador. Cuanto mayor sea  $R_2$  respecto a  $R_1$ , mayor lo será la tensión en el instante de apertura del interruptor. En particular, si  $R_2$  es infinita, o lo que es lo mismo, *si el circuito queda abierto*, aparece una tensión de valor muy elevado capaz de crear un arco entre los elementos del interruptor. Esta sobretensión recibe el nombre de *sobretensión de apertura* y se presenta siempre que se abre un circuito inductivo. Tampoco aquí hay una violación del principio de conservación de la energía. La corriente inicial que pasa por las resistencias  $R_1$  y  $R_2$  es la misma que circulaba en régimen permanente por  $R_1$ . En consecuencia, aumenta la energía perdida en el circuito y disminuye el flujo en la bobina. Por consiguiente, *la energía almacenada en la bobina es la causante de la sobretensión* y no es el generador.

Es fácil comprobar inmediatamente esta afirmación multiplicando la ecuación de Faraday por  $I dt$

$$V I dt - d\left(\frac{L I^2}{2}\right) = (R_1 + R_2) I^2 dt.$$

Esta ecuación nos indica que la energía que suministra el generador  $V I dt$ , sumada a la *disminución de energía almacenada en la bobina*  $-d(L I^2/2)$ , es igual a la energía que se disipa en forma de calor.

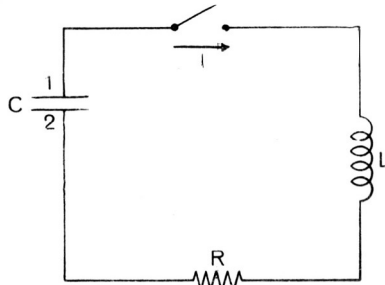


Figura 122: Circuito oscilante, Ejemplo 3.

*Ejemplo 3.* Consideremos el circuito de la Figura 122, en el cual se cierra el interruptor en el instante inicial. Se supone que el condensador se encontraba previamente cargado a una tensión  $V$ . Sea  $V_c = \varphi_1 - \varphi_2$  la diferencia de potencial en el condensador. De acuerdo con la ley de conservación de cargas y la ley de Faraday, resulta

$$I = -C \frac{dV_c}{dt}, \quad R I - V_c = -L \frac{dI}{dt}.$$

Reemplazando  $I$  en la segunda ecuación, empleando la notación de derivadas respecto al tiempo y ordenando resulta

$$\ddot{V}_c + \frac{R}{L} \dot{V}_c + \frac{1}{LC} V_c = 0.$$

Esta ecuación fue analizada en el capítulo preliminar, página 34. Usando los parámetros allí definidos se tiene

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \delta = \frac{R}{2L},$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La solución de esta ecuación es amortiguada si  $Q < 1/2$  y oscilante en el caso contrario. Para valores pequeños de  $R$ , la frecuencia de oscilación es  $\omega \approx \omega_0$  y la solución resulta entonces

$$V_c = V e^{-\delta t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{1}{2Q} \operatorname{sen} \omega_0 t \right)$$

teniendo en cuenta que en el instante inicial la conservación de las cargas exige  $V_c = V$  y la conservación del flujo exige  $I = 0$ . Si  $R$  fuera igual a 0, las oscilaciones serían de amplitud constante y frecuencia  $\omega_0$ , tal como muestra la ecuación.

Es interesante establecer nuevamente el balance de energía en el circuito, para lo cual multiplicamos la ley de Faraday por  $I dt = -C dV_c$ . Resulta

$$-d \left( \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} CV_c^2 \right) = RI^2 dt.$$

Esta ecuación nos muestra que la energía disipada en la resistencia es igual a la disminución de la energía almacenada en el circuito por el condensador y la bobina. En el caso particular que  $R = 0$ , el contenido total de energía es constante y ocurre que en cada instante, el aumento de energía del condensador es igual a la disminución de energía en la bobina. En el transcurso del fenómeno existe un intercambio permanente de energía desde el campo eléctrico del condensador al campo magnético de la bobina.

*Ejemplo 4.* Consideremos el circuito de la Figura 123, en el cual se supone que el interruptor *se abre* en el instante inicial. Estableceremos los valores previos e iniciales en el circuito que nos permiten determinar los estados correspondientes de la intensidad de corriente. *Estado previo:*  $I = V/R$ , se deprecia la resistencia de las bobinas. *Estado inicial:* debemos imponer la conservación del flujo total en la malla

$$I(L_1 + L_2) = L_1 \frac{V}{R}, \quad I = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \frac{V}{R}.$$

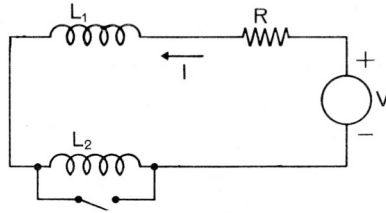


Figura 123: Circuito del *Ejemplo 4*.

Estas ecuaciones muestran que la corriente cambia de valor, inmediatamente después de abrir el interruptor y conectar al circuito la segunda bobina, para conservar el flujo existente. Aplicando los métodos de cálculo que ya conocemos se llega a una expresión

$$I = \frac{V}{R} \left( 1 - \frac{L_1}{L_1 + L_2} e^{-R/(L_1 + L_2)t} \right)$$

para la evolución de la corriente en el tiempo. Podemos observar que el valor asintótico final de la corriente  $V/R$  coincide con el valor previo, como era de esperar. Además, este resultado es independiente del valor inicial elegido, de modo que no es una comprobación de las ecuaciones de condiciones iniciales.

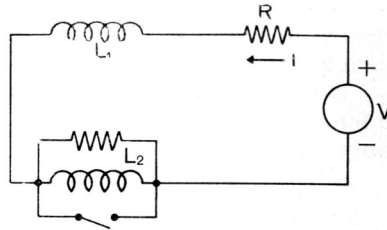
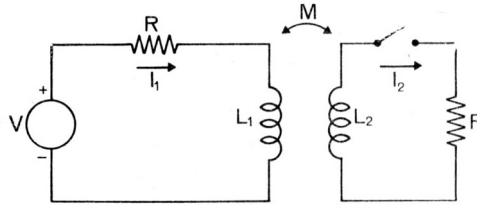
Es interesante efectuar un balance de energía entre las condiciones iniciales y previas. La energía almacenada en las condiciones previas es

$$\frac{1}{2} L_1 \frac{V^2}{R^2}$$

La energía almacenada en las condiciones iniciales es

$$\frac{1}{2} L_1 \frac{V^2}{R^2} \frac{L_1^2}{(L_1 + L_2)^2} + \frac{1}{2} L_2 \frac{V^2}{R^2} \frac{L_1^2}{(L_1 + L_2)^2} = \frac{1}{2} L_1 \frac{V^2}{R^2} \frac{L_1}{L_1 + L_2}$$

Como puede verse, en el circuito *desaparece una cierta cantidad de energía*. Nos encontramos nuevamente ante una paradoja por idealización del circuito que se explica así: admitiendo que el interruptor es realmente una resistencia de alto valor, la ley de conservación del flujo aplicada a la nueva malla formada, Figura 124, indica que la corriente en  $L_2$  se mantiene nula. Por otro lado, la ley de conservación del flujo aplicada a la malla principal exige el mantenimiento de la corriente en  $L_1$ , de modo que no se producen pérdidas de energía. En nuestro circuito ideal no hemos tenido en cuenta la posibilidad de formación del arco en el interruptor en el momento de su apertura. Este fenómeno es, básicamente, un nuevo ejemplo de sobretensión producida al desconectar un circuito inductivo.

Figura 124: Circuito del *Ejemplo 4*, en condiciones reales.Figura 125: Circuito de un transformador, *Ejemplo 5*.

*Ejemplo 5.* Consideremos el circuito de la Figura 125, en el cual el interruptor se cierra en el instante inicial. La ley de Faraday aplicada a cada una de las mallas nos indica

$$R I_1 - V = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt},$$

$$R I_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} - L_2 \frac{dI_2}{dt}.$$

Las condiciones iniciales pueden calcularse fácilmente

$$\Phi_1 = L_1 \frac{V}{R}, \quad \Phi_2 = M \frac{V}{R},$$

luego obtenemos para las corrientes

$$I_1 = \frac{V}{R}, \quad I_2 = 0.$$

En la hipótesis de acoplamiento perfecto entre las bobinas, los valores de  $I_1$  e  $I_2$  quedan *indeterminados*. Ahora bien, desde el punto de vista físico, no es posible obtener un acoplamiento perfecto. Nos encontramos de nuevo ante una paradoja a la que nos ha conducido la simplificación excesiva que hemos adoptado.

No obstante, las ecuaciones del circuito nos permiten calcular las condiciones iniciales y resolver completamente el problema. Si multiplicamos la primera ecuación de

mallas por  $1/\sqrt{L_1}$  la segunda por  $1/\sqrt{L_2}$  y restamos ambas ecuaciones, recordando que el acoplamiento perfecto cumple  $M = \sqrt{L_1 L_2}$ , obtenemos

$$\frac{RI_1 - V}{\sqrt{L_1}} = \frac{RI_2}{\sqrt{L_2}}.$$

Esta expresión debe verificarse en todo momento y *en particular en el instante inicial*, de modo que disponemos de dos ecuaciones para calcular las condiciones iniciales del problema, la anterior y

$$L_1 \frac{V}{R} = L_1 I_1 + \sqrt{L_1 L_2} I_2,$$

de las cuales se obtiene

$$I_1 = \frac{V}{R}, \quad I_2 = 0.$$

Sustituyendo en una de las ecuaciones de la malla la relación encontrada entre  $I_1$  e  $I_2$  resulta

$$(L_1 + L_2) \frac{dI_2}{dt} = -R I_2$$

cuya solución puede ser obtenida por los métodos ya conocidos

$$I_2 = a e^{-R/(L_1+L_2)t}$$

En el instante inicial  $I_2 = 0$ , luego  $a = 0$  y en todo instante

$$I_2 = 0$$

y, por lo tanto

$$I_1 = \frac{V}{R}.$$

## Régimen alterno o sinusoidal

En los circuitos eléctricos se presenta a menudo un caso especialmente importante de variación en el tiempo: el régimen alterno o sinusoidal. En los ejemplos del capítulo VI, vimos la posibilidad de obtener generadores cuya fuerza electromotriz dependiera del tiempo en forma sinusoidal (alternadores). El montaje de estos generadores en un circuito da lugar a una serie de fenómenos cuyo estudio puede realizarse mediante nuevos métodos de trabajo.

Queda abierta pues la posibilidad de elaborar una teoría particular de los circuitos en régimen alterno. Para ello nos basaremos en la siguiente afirmación: En un circuito formado por generadores, resistencias, condensadores y bobinas en el que las fuerzas

electromotrices de *todos* sus generadores dependen sinusoidalmente del tiempo y *tienen la misma frecuencia*, existen unos valores únicos de las corrientes y de las tensiones que dependen sinusoidalmente del tiempo y poseen asimismo la misma frecuencia de los generadores. Si el circuito presenta un comportamiento transitorio, al transcurrir un tiempo suficientemente largo, tiende a seguir una función sinusoidal.

La existencia de una solución sinusoidal puede demostrarse fácilmente. Sin embargo, el probar que todas las soluciones distintas tienden al cabo del tiempo a la sinusoidal es un problema muy complicado cuyo estudio queda fuera del alcance de este libro. Expondremos en cambio, un ejemplo ilustrativo.

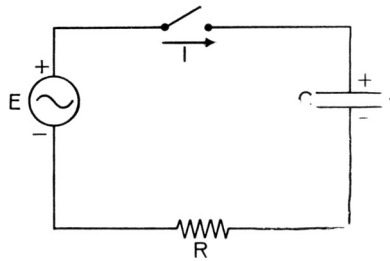


Figura 126: Condensador en régimen alterno, *Ejemplo 1*.

*Ejemplo 1.* Supongamos, Figura 126, un circuito en que está conectada en serie una resistencia, un condensador y un generador cuya tensión la supondremos:

$$E = E_0 \cos \omega t$$

Las ecuaciones del circuito son

$$RC \frac{dV}{dt} + V = E_0 \cos \omega t$$

donde  $V$  es la diferencia de potencial en el condensador. Para determinar la tensión  $V$  en función del tiempo, consideraremos la incógnita auxiliar  $U$ . Se tiene entonces

$$V = U e^{-t/RC}, \quad \frac{dV}{dt} = \frac{dU}{dt} e^{-t/RC} - \frac{1}{RC} U e^{-t/RC}$$

$$RC \frac{dV}{dt} + V = RC \frac{dU}{dt} e^{-t/RC} = E_0 \cos \omega t, \quad \frac{dU}{dt} = \frac{E_0}{RC} e^{t/RC} \cos \omega t$$

La ecuación en  $U$  tiene una integral inmediata como se puede verificar directamente

$$U = \frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} e^{t/RC} (\cos \omega t + \omega RC \operatorname{sen} \omega t) + a$$

luego la solución en  $V$  es

$$\frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left( \frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \right) + a e^{-t/RC}$$

para determinar la constante de integración  $a$ , aplicamos a las condiciones iniciales

$$t = 0, \quad V = 0,$$

$$\frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + a = 0$$

$$V = \frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left( \cos \omega t + \omega RC \sin \omega t - e^{-t/RC} \right)$$

Para  $t$  suficientemente grande, la solución obtenida puede considerarse sinusoidal, puesto que el término exponencial tiende a cero.

Si hubiéramos cerrado el interruptor en otro instante, la tensión inicial del generador de corriente alterna sería distinta y cambiaría la expresión de la tensión en función del tiempo. Sin embargo, observamos que una modificación en las condiciones iniciales *sólo cambia el valor de la constante de integración  $a$* , de modo que cualquier otra solución de este circuito *tenderá siempre a una función sinusoidal*.

Los resultados de este ejemplo pueden ser generalizados. Es posible elaborar una teoría simplificada de los circuitos en corrientes alternas. Observaremos previamente que una expresión del tipo

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

puede escribirse en la forma

$$\sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \alpha),$$

en la que  $\alpha$  es un ángulo tal que  $\operatorname{tg} \alpha = B/A$ .

Esta igualdad muestra que la adición de sinusoides es una senoide única, con una cierta amplitud y una diferencia de fase igual a  $\alpha$ . Para demostrarla haremos uso de los llamados vectores giratorios que son eminentemente prácticos y usados constantemente por el uso técnico. Tienen una gran importancia en el estudio de las corrientes alternas por simplificarlo grandemente.

Se llama *vector giratorio* un vector, de origen fijo, que gira a velocidad angular  $\omega$  constante y cuya proyección sobre un eje da en cada instante el valor y el signo de las tensiones, intensidades y flujos. Consideremos el vector  $\vec{OM}$ , Figura 127, que gira en el sentido contrario de las agujas del reloj a una velocidad angular  $\omega$ , de modo que en  $t = 0$  se encuentra formando un ángulo  $-\alpha$  con el eje de las  $x$ . el punto  $M$  recorre una circunferencia cuya proyección sobre el eje  $x$  describe la senoide considerada. La



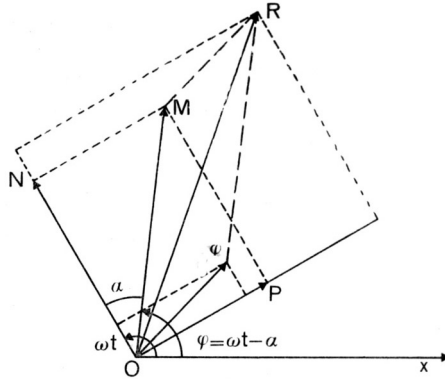


Figura 127: Suma de sinusoides, diagrama vectorial.

sinusoide  $A \cos \omega t$  puede representarse también en el mismo diagrama por un vector  $\overrightarrow{ON}$  de módulo  $A$ , desfasado en el giro, un ángulo  $\alpha$  en adelante respecto a  $\overrightarrow{OM}$ . A su vez la sinusoide  $B \sin \omega t = B \cos(\omega t - \pi/2)$  puede representarse también en el diagrama, con un vector  $\overrightarrow{OP}$  de módulo  $B$ , con una diferencia de fase en su giro de  $90^\circ$  en retraso respecto a  $\overrightarrow{ON}$ . Las proyecciones de cada uno de los vectores sobre el eje  $x$  se obtienen las sinusoides consideradas antes.

Tal como puede verse en la figura,  $\overrightarrow{OM}$  es en todo momento la diagonal del rectángulo de lados  $\overrightarrow{ON}$  y  $\overrightarrow{OP}$  y por lo tanto se verifica

$$A \cos \omega t + B \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\omega t - \alpha).$$

Si consideramos otra sinusoide  $A' \cos \omega t + B' \sin \omega t$ , representada por  $\overrightarrow{OQ}$  y la sumamos con la primitiva representada por  $\overrightarrow{OM}$  obtendremos la indicada por  $\overrightarrow{OR}$  que es ahora la diagonal del paralelogramo formado por  $\overrightarrow{OM}$  y  $\overrightarrow{OQ}$ . Estas propiedades, permiten afirmar con carácter general:

*Suma de vectores giratorios.* El vector giratorio que representa la suma de dos sinusoides es la resultante de los vectores giratorios que representan cada sinusoide.

En los problemas de régimen sinusoidal, el origen de tiempos no tiene interés, puesto que las tensiones y las corrientes son periódicas. En cambio, interesa trabajar con la amplitud y las diferencias de fase que existen entre las diversas sinusoides consideradas. Con el diagrama que hemos construido podemos representar las amplitudes y las fases de funciones sinusoidales cualesquiera, de la misma frecuencia, así como obtener en cada instante (tomando la proyección sobre el eje  $x$ ) la amplitud instantánea

de la senoide. Podemos construir un diagrama más sencillo, equivalente al de la Figura 127 tomando los mismos vectores fijos, que sustituyen (o representan) a los otros rotativos que generan las ondas sinusoidales. Se comprende esta simplificación imaginando que en un estudio determinado puede prescindirse de la dependencia del vector giratorio respecto al tiempo, de modo que haga innecesario el concepto de rotación del vector.

Para pasar del diagrama vectorial basta establecer el giro del conjunto de vectores fijos y proyectarlos sobre un eje cualquiera. Según la posición de éste, se obtendrán diferentes expresiones analíticas del movimiento, que diferirán solamente en el origen de tiempos.

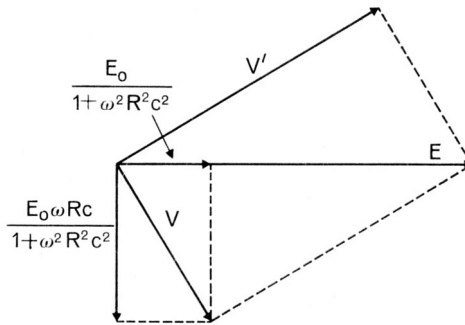


Figura 128: Diagrama vectorial del *Ejemplo 1*.

Construyamos el diagrama vectorial para el ejemplo considerado en la Figura 128. La tensión  $V$  en los bornes del condensador de la Figura 126 se compone como indicamos oportunamente de las dos ondas siguientes

$$\frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cos \omega t$$

en fase con  $E = E_0 \cos \omega t$  y

$$\frac{E_0 \omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \text{sen } \omega t$$

con una diferencia de fase de  $\pi/2$  en retardo respecto a  $E$ . Si representamos el vector asociado a  $E$ , podemos dibujar los dos vectores componentes de la tensión  $V$ . La resultante de ambos será el vector asociado a  $V$ . Por otra parte, si  $V'$  es la diferencia de potencial en los bornes de la resistencia  $R$ , se verifica  $V' = E - V$ , de modo que su vector representativo puede determinarse si se considera que la resultante de los vectores asociados a  $V$  y  $V'$  es el vector asociado a  $E$ .

Los vectores  $V$  y  $V'$  son perpendiculares entre sí puesto que uno es la tensión el condensador, que es proporcional a la integral de la corriente, y el otro es proporcional a la corriente en el circuito. Con carácter general, la derivada de una senoide es otra que atrasa  $\pi/2$  –la derivada de  $\cos \omega t$  es  $\cos(\omega t - \pi/2)$ – y, por lo tanto, la integral, adelanta  $\pi/2$ .

La variación en el tiempo de cada una de las ondas puede obtenerse estableciendo el giro de todo el diagrama vectorial a una velocidad angular  $\omega$  y proyectándolo sobre un eje cualquiera.

## Teoría de los vectores

Esta sección tiene por finalidad determinar las relaciones que existen entre los vectores que ligan las tensiones y las corrientes en los elementos de un circuito.

*Resistencias.* La ley de Ohm dice que la tensión y la corriente son proporcionales. Si se aplica a la resistencia una tensión sinusoidal

$$V = V_0 \cos \omega t,$$

la corriente tendrá por expresión

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \cos \omega t,$$

de modo que los vectores correspondientes que representan simbólicamente la tensión y la corriente en una resistencia, están en fase y sus amplitudes cumplen la ley de Ohm:  $I_0 = V_0/R$ .

*Condensadores.* Si  $V = V_0 \cos \omega t$  es la tensión aplicada a un condensador, tendremos

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt} = -C\omega V_0 \sin \omega t = C\omega V_0 \cos(\omega t + \pi/2)$$

de modo que el vector que representa la corriente en un condensador, se encuentra  $\pi/2$  en adelante respecto al vector que representa la tensión y sus amplitudes cumplen  $I_0 = C\omega V_0$ .

*Bobinas.* Si  $I = I_0 \cos \omega t$  es la corriente que circula a través de una bobina, tendremos<sup>6</sup>

$$\Phi = LI_0 \cos \omega t.$$

Si aplicamos la ley de Faraday a un circuito formado por una carga inductiva pura, tendremos para la tensión en bornes de la bobina

$$-V = -\frac{d\Phi}{dt} = LI_0\omega \sin \omega t = LI_0\omega \cos \omega t + \pi/2$$

<sup>6</sup> Obsérvese que  $-d\Phi/dt$  es la tensión inducida en el circuito y  $V$  aquí es la caída de tensión en la bobina. Aquí influye poderosamente la hipótesis de elementos de circuito concentrados.

de modo que el vector tensión en la bobina, se encuentra  $\pi/2$  en adelante respecto al vector que representa la corriente y sus amplitudes satisfacen la relación  $V_0 = L\omega I_0$ .

*Nudos.* Como fue oportunamente indicado, la suma de las corrientes en un nudo es cero, de modo que por analogía se cumplirá que la suma de los vectores que representan las corrientes que concurren en un nudo, con su signo, es nula (por suma de vectores entendemos la resultante o *suma vectorial*).

*Mallas.* Al ser nula la suma de las caídas de tensión en una malla debe ser cero la suma de los vectores que representan, con su signo, las tensiones de los elementos de una malla. Obsérvese que esta ley es una consecuencia de la de Faraday y que está de acuerdo con la forma asignada a la diferencia de potencial de las bobinas. Como hemos admitido que sólo existen los flujos propios de las bobinas y que es despreciable el del circuito, los hemos marcado con su signo correcto de acuerdo con la caída de tensión. No debemos caer en el error de confundir esta ley con la ley de Kirchoff, aunque la ley de los nudos lo sea realmente.

En posesión de estos elementos es posible estudiar rápidamente las soluciones de un circuito de corriente alterna.

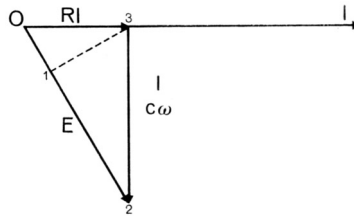


Figura 129: Diagrama vectorial del *Ejemplo 1*.

*Ejemplo 1.* Consideremos nuevamente el ejemplo de la sección anterior, Figura 126. Como el circuito está recorrido por una corriente única, comenzaremos por dibujar el vector que representa  $I$ , de amplitud desconocida, Figura 129 (omitimos el subíndice para indicar las amplitudes). La caída de tensión en los bornes de la resistencia está en fase con  $I$  y vale  $Rl$ . La caída de tensión en los bornes del condensador está defasada  $\pi/2$  en retraso respecto a  $I$  y vale  $C\omega I$ . La suma de estas caídas de tensión debe ser igual a la tensión  $E$  del generador. Con estos elementos se completa el diagrama vectorial, a partir del cual puede calcularse inmediatamente  $I$  aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo de tensiones

$$E^2 = I^2 \left( R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2} \right),$$

$$I = \frac{C\omega E}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

El cálculo de las tensiones en la resistencia y en el condensador es inmediato, una vez obtenido el valor de la corriente. Como comprobación calcularemos los valores de la tensión en el condensador, descomponiéndola en dos tensiones, una en fase y la otra defasada  $\pi/2$  en retraso con respecto a la tensión  $E$  (vectores  $\vec{12}$  y  $\vec{13}$ , respectivamente, observar que  $\vec{12}$  es la altura del triángulo rectángulo **O23**)

$$\vec{13} \times E = RI \frac{I}{C\omega} = \frac{RC\omega E^2}{1 + R^2C^2\omega^2}, \quad \vec{13} = \frac{RC\omega E}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

$$\vec{12}^2 = \frac{I^2}{C^2\omega^2} - \vec{13}^2 = \frac{E^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - \frac{\omega^2 R^2 C^2 E^2}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^2}$$

$$\vec{12} = \frac{E}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

con lo cual obtenemos los mismos resultados que antes.

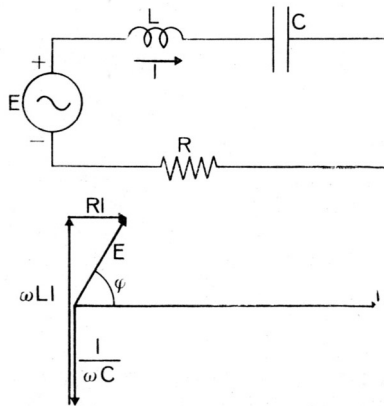


Figura 130: Diagrama vectorial del *Ejemplo 1*.

*Ejemplo 2.* En el circuito de la Figura 130 que representa una resistencia, una reactancia inductiva y una reactancia capacitiva en serie con un generador. Aplicaremos un método semejante: tomando como referencia el vector que representa a  $I$ , dibujamos las caídas de tensión. En el condensador y en la bobina que se encuentran  $\pi/2$  en retraso y en adelante respecto a la corriente. La caída de tensión en la resistencia está en fase con  $I$  y la suma de las caídas de tensión coincide con la tensión  $E$  del generador. Del triángulo de tensiones, se deduce nuevamente

$$E^2 = \left[ R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] I^2$$

de donde

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Es interesante calcular las expresiones de la tensión en el generador y de la corriente en el circuito en función del tiempo, para lo cual imaginamos el diagrama vectorial girando en sentido contrario a las agujas del reloj con una velocidad angular  $\omega$ . Si tomamos un eje de proyección tal que la corriente sea  $I \cos \omega t$ , la expresión de la tensión es  $E \cos \omega t + \varphi$  donde  $\varphi$  está definido por

$$\text{tg } \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

La potencia instantánea que el generador cede al circuito viene dada por

$$W = E \cos(\omega t + \varphi) \times I \cos \omega t = \frac{EI}{2} (\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)) = W_m + W_v$$

Esta expresión se compone de dos sumandos, uno constante  $W_m$  y el otro variable en el tiempo  $W_v$  con frecuencia doble que la del circuito. Como consecuencia, se deduce que la potencia no puede ser representada vectorialmente en el mismo diagrama que las tensiones e intensidades. El segundo término representa el intercambio constante de energía que se realiza del generador al condensador y la bobina pues el campo magnético creado, al desaparecer devuelve toda la energía que tenía almacenada. Generalmente, las frecuencias de trabajo con corrientes alternas superan las decenas de ciclos por segundo, de modo que el término de intercambio no tiene interés a los efectos de un cálculo de energías. En términos de energía se suele trabajar con los valores medios tomados en un ciclo de la frecuencia original. El valor medio de la potencia entregada está representado por el sumando constante

$$W_m = \frac{EI}{2} \cos \varphi = \frac{RI^2}{2}$$

Si calculamos ahora las potencias absorbidas por cada uno de los elementos del circuito tendremos los siguientes valores. En la *resistencia*

$$RI \cos \omega t \times I \cos \omega t = \frac{RI^2}{2} (1 + \cos 2\omega t) = W_m + W_r$$

o sea, en valores medios,  $W_m = RI^2/2$  y un sumando variable  $W_r$ . En el *condensador*

$$W_c = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2) \times I \cos \omega t = \frac{I^2}{2\omega C} \text{sen } 2\omega t$$

o sea, en valores medios *cero*, sólo un término variable. En la *bobina*

$$W_b = \omega LI \cos(\omega t + \pi/2) \times I \cos \omega t = -\frac{\omega LI^2}{2} \operatorname{sen} 2\omega t$$

también vale *cero* en valores medios y sólo variable en el tiempo .

El balance de energías nos indica entonces que la potencia que cede el generador se disipa totalmente en la resistencia. El condensador y la bobina intervienen solamente desde el punto de vista de intercambio de energía, por lo cual, no aportan nada al cabo de un ciclo completo. Por otra parte, los términos de intercambio, de frecuencia doble, verifican también una ecuación de balance. La potencia variable es

$$\begin{aligned} W_v &= \frac{EI}{2} \cos(2\omega t + \varphi) = \frac{EI}{2} (\cos 2\omega t \cos \varphi - \operatorname{sen} 2\omega t \operatorname{sen} \varphi) \\ &= W_r - \frac{EI}{2} \operatorname{sen} 2\omega t \operatorname{sen} \varphi \end{aligned}$$

pero  $\operatorname{sen} \varphi$  se puede calcular de la Figura 130 como

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{\omega LI - I/\omega C}{E}.$$

De donde

$$\frac{EI}{2} \operatorname{sen} \varphi = \frac{\omega LI^2}{2} - \frac{I^2}{2\omega C}.$$

Entonces se cumple

$$W_v = W_r - \frac{\omega LI^2}{2} \operatorname{sen} 2\omega t + \frac{I^2}{2\omega C} \operatorname{sen} 2\omega t = W_r + W_b + W_c.$$

Tenemos entonces dos balances posibles de energía en un circuito. El balance realizado en *valores medios*, que representa efectivamente la energía real cedida o absorbida en el circuito –que puede manifestarse en forma de calor en una resistencia o mecánica disponible en la polea de la máquina– y el balance realizado *a frecuencia doble* de la de trabajo, que representa los intercambios de energía que se realizan dentro del circuito en forma reversible. Una vez finalizado cada ciclo, los elementos poseen nuevamente su energía inicial. Se acostumbra designar con el nombre de *potencia activa* a la primera y *potencia reactiva* a la segunda. Ambas componentes de la potencia verifican, por separado, las ecuaciones de balance de energía. Podemos observar que un condensador o una bobina intercambian solamente potencia reactiva mientras que una resistencia puede intercambiar ambas clases, la activa y la reactiva. El generador suministra al circuito la energía necesaria, tanto activa como reactiva.

La aparición constante de factores  $1/2$  en las ecuaciones de potencia ha sugerido la idea de multiplicar todas las amplitudes (valores máximos), ya sea tensiones o corrientes, por un factor  $1/\sqrt{2}$ . De este modo, en las expresiones energéticas se elimina el factor  $1/2$ . Por otra parte, se mantienen las relaciones entre amplitudes de vectores, puesto que la tensión y la corriente se multiplican por el mismo factor: *amplitud* =  $\sqrt{2}$ *valor eficaz*. Las nuevas “amplitudes” se conocen con el nombre de *valores eficaces* de la onda sinusoidal. Además, estos valores son particularmente importantes porque los instrumentos de medida usuales sólo indican valores eficaces. En electrotécnica, a menos que se especifique lo contrario, se sobrentiende que los valores empleados son eficaces y no los máximos (amplitudes). De este modo, la potencia activa absorbida o cedida en un elemento de circuito es

$$V_{ef} I_{ef} \cos \varphi$$

donde  $V_{ef}$  e  $I_{ef}$  son los valores eficaces de la tensión y corriente y  $\varphi$  es la diferencia de fase de ambas. La potencia reactiva es

$$V_{ef} I_{ef} \text{ sen } \varphi.$$

### Empleo del cálculo simbólico (complejo)

La teoría de los vectores fijos que representa (simbolizan) a los giratorios es ya una simplificación grande en el estudio de circuitos en régimen alterno: nos ha permitido pasar de un problema de ecuaciones con derivadas e integrales a un problema esencialmente geométrico. Es posible simplificar todavía más la teoría de los vectores fijos determinando su valor de acuerdo con los mismos principios que rigen el cálculo con cantidades complejas.

Como es conocido, un número complejo de la forma<sup>7</sup>

$$a + bj$$

puede representarse como un vector en un plano llamado *plano complejo* o *de Gauss* donde  $a$  y  $b$  son las proyecciones del vector en dos ejes coordenados. Esta propiedad ha conducido a representar los vectores fijos o temporales de un circuito en régimen sinusoidal como números complejos y extender a ellos el cálculo vectorial. Como la suma de números complejos corresponde a la suma vectorial, se deduce inmediatamente que:

---

<sup>7</sup> Se emplea en electrotécnica el símbolo  $j$  para la unidad imaginaria  $\sqrt{-1}$  en lugar del clásico  $i$ , para evitar todo tipo de confusión con las intensidades de corriente, que también suelen ser representadas por la letra  $i$ .



*Suma de vectores.* El complejo que representa un vector suma de otros dos, es la suma de los complejos asociados a cada uno de los vectores sumando.

Si ahora representamos las tensiones y las corrientes de un circuito por los números complejos asociados a los vectores correspondientes tendremos:

*Ley de los nudos.* La suma de las corrientes complejas en un nudo es cero.  
*Ley de las mallas.* La suma de las caídas de tensión complejas en una malla es cero.

Las relaciones vectoriales pueden ampliarse inmediatamente a los elementos de circuito, obteniendo los resultados que siguen.

*Resistencias.* Si  $V$  e  $I$  son los números complejos que representan la tensión y la corriente, se verifica  $V = RI$ , puesto que al ser  $R$  un número real, los vectores asociados a los complejos están en fase, tal como exige la regla correspondiente entre vectores temporales.

*Condensadores.* En este caso es necesario efectuar un paso previo para representar los vectores. Si multiplicamos un número complejo  $A$  por la unidad imaginaria obtenemos un complejo  $B = jA$  que posee el mismo módulo, pero cuyo argumento está defasado  $\pi/2$  en sentido contrario a las agujas del reloj respecto a  $A$ , puesto que

$$B = jA = j(a + jb) = -b + ja.$$

Si ahora  $V$  e  $I$  son los complejos que representan la tensión y la corriente en un condensador, tendremos

$$I = j\omega C V$$

puesto que la corriente se encuentra adelantada  $\pi/2$  respecto a la tensión y sus módulos cumplen con la relación  $I_0 = \omega C V_0$ .

*Bobinas.* Análogamente el caso anterior se obtiene inmediatamente

$$V = j\omega L I.$$

Con este nuevo método de cálculo, los circuitos en régimen de corriente alterna pueden estudiarse realmente como circuitos en régimen continuo. Las corrientes y tensiones se encuentran representadas por complejos que verifican relaciones de proporcionalidad y las leyes de Kirchoff se verifican exactamente. Ilustraremos la aplicación de este método a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Consideremos de nuevo el ejemplo de la Figura 126. Si  $I$  es el número complejo que representa la corriente en el circuito, la ley de las mallas dice

$$E = RI + \frac{I}{j\omega C}, \quad I = \frac{j\omega C E}{1 + j\omega RC}.$$

Es conveniente escribir esta expresión en la forma habitual de los números complejos, multiplicando el numerador y el denominador por  $1 - j\omega RC$ , el conjugado del denominador. Se obtiene

$$I = \frac{\omega^2 RC^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2} E + j \frac{\omega C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} E$$

El módulo de la corriente se calcula tomando el módulo en la primera ecuación obtenida

$$|I| = \frac{\omega C |E|}{|1 + j\omega RC|} = \frac{\omega C |E|}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

en concordancia con el resultado anterior. Las tensiones en el condensador y la resistencia también pueden calcularse en forma sencilla

$$V_c = \frac{I}{j\omega C} = \frac{E}{1 + j\omega RC},$$

$$V_R = RI = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} E.$$

Si interesara calcular las componentes de  $V_c$  respecto a  $E$ , bastaría imaginar el eje real del plano complejo en coincidencia con  $E$  de modo que si antes era necesario girar el diagrama vectorial para re-producir la tensión del circuito, ahora se reduce a suponer que  $E$  real. Tendremos entonces, normalizando el número complejo

$$V_c = \frac{1 - j\omega RC}{1 + \omega^2 R^2 C^2} = \frac{E}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j \frac{\omega RCE}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

de modo que la tensión  $V_c$  se compone de

$$\frac{E}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

en fase con  $E$  y de

$$\frac{\omega RCE}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

$\pi/2$  en retraso con respecto a  $E$ , lo cual coincide con los resultados obtenidos. Si interesa obtener las expresiones de las sinusoides basta con tomar  $E = E_0 \cos \omega t$  y construir la expresión de  $V_c$

$$V_c = \frac{E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cos \omega t + \frac{\omega RCE_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cos (\omega t - \pi/2).$$

Para la corriente, la expresión queda

$$I = \frac{\omega^2 RC^2 E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cos \omega t + \frac{\omega C E_0}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cos (\omega t + \pi/2).$$

Del mismo modo se procedería si interesara referir todo a la corriente  $I = I_0 \cos \omega t$ . En general, es superfluo representar las soluciones en forma temporal, porque el método de cálculo complejo permite obtener directamente los módulos y argumentos de los vectores (o en otros términos la amplitud y la fase).

Las leyes de los circuitos coinciden y todo el problema se reduce a resolver ecuaciones algebraicas en números complejos. Planteadas éstas, es evidente que todo circuito posee una solución sinusoidal que puede obtenerse escribiendo las ecuaciones de nudos y mallas y resolviendo el problema algebraico.

Para completar la analogía con los circuitos en régimen estacionario, se suele llamar *impedancia* al cociente entre la tensión compleja y la corriente compleja en un elemento de circuito. Así por ejemplo, la impedancia de una resistencia es

$$Z_r = \frac{V}{I} = R.$$

La impedancia de un condensador es

$$Z_c = \frac{V}{I} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

y la impedancia de una bobina es

$$Z_b = \frac{V}{I} = j\omega L.$$

De este modo, el empleo del vector impedancia permite calcular un circuito en régimen de corriente alterna como si fuera un circuito en régimen continuo.

*Ejemplo 2.* Introducida la noción de impedancia, es posible calcular la impedancia resultante de la conexión en serie o en paralelo de varias impedancias simples. Supongamos, por ejemplo Figura 131, dos elementos de circuito, de impedancias  $Z_1$  y  $Z_2$ , conectados en serie. Si la corriente que circula vale  $I$ , tendremos

$$V = Z_1 I + Z_2 I$$

de modo que la impedancia equivalente a ambas vale

$$Z = \frac{V}{I} = Z_1 + Z_2.$$

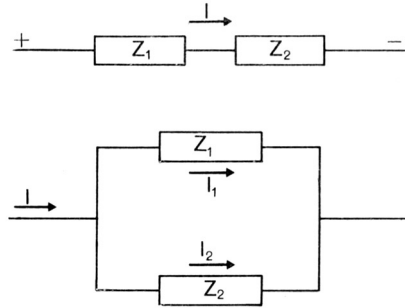


Figura 131: Serie y paralelo de impedancias, *Ejemplo 2*.

Si en cambio, la conexión de impedancias es en paralelo, podemos escribir

$$I_1 = \frac{V}{Z_1}, \quad I_2 = \frac{V}{Z_2}$$

De modo que la impedancia equivalente vale

$$Z = \frac{V}{I_1 + I_2} = \frac{1}{1/Z_1 + 1/Z_2} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Consideremos el *Ejemplo 2* de la Figura 130, tendremos

$$Z = R + j\omega L - \frac{j}{\omega C},$$

luego para calcular la corriente basta con

$$|I| = \frac{|E|}{|Z|} = \frac{|E|}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

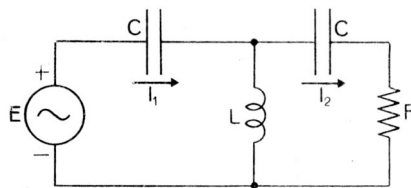


Figura 132: Diagrama vectorial del *Ejemplo 1*.

*Ejemplo 3.* Consideremos un circuito como el indicado en la Figura 132. Las ecuaciones de mallas nos indican

$$E = -\frac{jI_1}{\omega C} + j\omega L (I_1 - I_2),$$

$$j\omega L(I_1 - I_2) + \left(R - \frac{j}{\omega C}\right) I_2 = 0,$$

que permiten calcular las expresiones de las corrientes.

Si interesara solamente la corriente  $I$  en el generador, se puede proceder gradualmente a la sustitución de elementos en serie y en paralelo por sus impedancias equivalentes.

$$\begin{aligned} \text{Serie RC: } & R - j/\omega C \\ \text{Paralelo con L: } & \frac{j\omega L(R - j/\omega C)}{j\omega L + R - j/\omega C} \\ \text{Serie con C: } & Z = -\frac{j}{\omega C} + \frac{j\omega L(R - j/\omega C)}{j\omega L + R - j/\omega C} \\ \text{Corriente: } & I = \frac{E}{Z} \end{aligned}$$

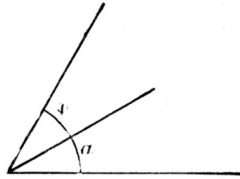


Figura 133: Diagrama vectorial para calcular la potencia.

El cálculo de la potencia en un generador o un elemento de circuito es fácil, empleando el cálculo simbólico con cantidades complejas. Supongamos los vectores  $V$  e  $I$  tal como muestra la Figura 133. Si llamamos  $V^*$  al complejo conjugado de  $V$  tendremos

$$V = |V| \cos \alpha + j |V| \sin \alpha,$$

$$V^* = |V| \cos \alpha - j |V| \sin \alpha,$$

$$I = |I| \cos (\alpha + \varphi) + j |I| \sin (\alpha + \varphi)$$

multiplicando tenemos

$$\begin{aligned} V^* I = & |V| |I| [\cos (\alpha + \varphi) \cos \alpha + \sin (\alpha + \varphi) \sin \alpha] + \\ & + j |V| |I| [\sin (\alpha + \varphi) \cos \alpha + \cos (\alpha + \varphi) \sin \alpha], \end{aligned}$$

$$V^* I = |V| |I| \cos \varphi + j |V| |I| \sin \varphi.$$

De modo que el cálculo de las potencias en un elemento de circuito se reduce a calcular la expresión  $V^* I$ . La parte real es la potencia activa y la parte imaginaria es

la potencia reactiva. Hay que tener sumo cuidado con el factor 1/2 que aparece en la fórmula de las potencias. Si los complejos representan valores eficaces, la fórmula será correcta, pero si representan amplitudes o valores máximos las potencias son la mitad de los valores así obtenidos.

De la igualdad  $V = ZI$  se derivan también como expresiones posibles del producto complejo  $V^*I$

$$V^*I = Z^*I^*I = Z^*|I|^2 = Z^* \frac{|V|^2}{|Z|^2} = \frac{|V|^2}{Z}$$

Estas expresiones pueden ser útiles en el cálculo considerado.

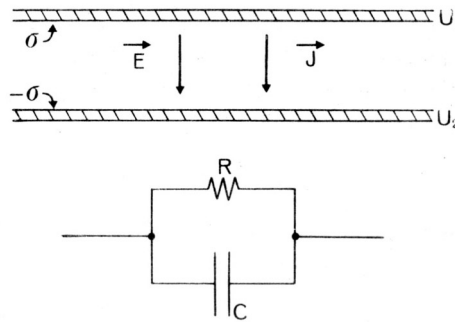


Figura 134: Pérdidas de un condensador, *Ejemplo 4*.

*Ejemplo 4.* Sea un condensador cargado con una densidad superficial  $\sigma$  según la Figura 134. Como fue oportunamente indicado, el campo en el dieléctrico, de espesor  $e$ , vale

$$E = \frac{\sigma}{e}$$

Si la conductividad del dieléctrico es  $\gamma$  existirá una corriente de descarga en el condensador que vale

$$J = \gamma E = \frac{\gamma(\varphi_1 - \varphi_2)}{e}$$

Si el condensador posee una superficie  $S$ , la capacidad y la corriente de pérdidas serán respectivamente

$$C = \frac{\epsilon S}{e}$$

$$I = JS = \frac{\gamma S}{2} (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)}{R}$$

Este fenómeno se puede imaginar como un condensador que está conectado en paralelo con una resistencia a la que se atribuyen las pérdidas, tal como muestra la Figura 134.

Si al condensador le aplicamos una corriente alterna observaremos que aumenta la resistencia equivalente de pérdidas dieléctricas. Esto se debe a los fenómenos que al nivel dipolar tienen lugar en el dieléctrico: la tensión alterna aplicada, causa del campo eléctrico alterno, obliga a un cambio continuo de polarización de las partículas elementales o dipolos que invierten su orientación en cada ciclo de la corriente. El trabajo suministrado se convierte, al nivel dipolar, en calor que se libera en el dieléctrico. Esta transformación, ya sensible bajo frecuencias moderadas equivale desde el punto de vista microscópico a aumentar la resistencia que simula las pérdidas. En régimen alterno tendremos

$$\frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{R} = \frac{j\omega S}{e} \left( \epsilon - j \frac{\gamma}{\omega} \right)$$

donde  $\gamma$  es un coeficiente de conductividad que tiene en cuenta también las pérdidas dipolares del dieléctrico. La ecuación anterior pasa a ser

$$\frac{1}{Z} = \frac{j\omega S}{e} \epsilon'$$

en la que el coeficiente  $\epsilon'$  equivale al número complejo

$$\epsilon' = \epsilon - j \frac{\gamma}{\omega}$$

donde  $\epsilon$  deriva de la capacidad del condensador y  $\gamma/\omega$  es el responsable de las pérdidas en el dieléctrico. Este resultado se suele expresar en función de la constante dieléctrica del material y del llamado *ángulo de pérdidas*,  $\delta$ , definido como

$$\delta \approx \text{tg } \delta = \frac{\gamma}{\epsilon\omega} = \frac{1}{\omega RC}$$

Naturalmente, las constantes dieléctricas de las sustancias aislantes, así como el ángulo de pérdidas dependen de la frecuencia y de la temperatura de trabajo. En las tablas se suelen especificar las condiciones de medida en las que se han determinado.





# Campo electromagnético

## Corrientes de desplazamiento

Consideremos un condensador de placas en proceso de carga mantenido por una corriente de intensidad  $I$ , Figura 135. Si consideramos en su interior una curva  $C$  en un plano paralelo a las armaduras del condensador y aplicamos la ley de Ampere tendremos

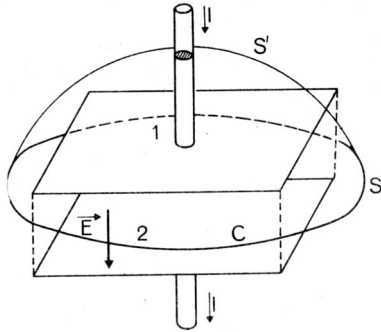


Figura 135: Corriente de desplazamiento en un condensador.

$$\text{circ } \vec{H} = I$$

o bien observando que  $I = \text{flujo } \vec{J}$  en la superficie  $S'$  que corta al conductor, resulta

$$\text{circ } \vec{H} = \text{flujo}_S \vec{J}.$$

El flujo de  $\vec{J}$  puede calcularse en cualquier superficie  $S'$  que corte al conductor, pero para otra superficie tal como  $S''$ , que corta al dieléctrico, resulta  $J = 0$  (también  $I = 0$ ). Este resultado pone de manifiesto que la ley de Ampère tal como fue enunciada sirve únicamente para las *corrientes cerradas* y carece de validez en el caso de que tratemos con circuitos abiertos, como la corriente de carga o descarga de un condensador.

Maxwell al estudiar su teoría del electromagnetismo partió de este fenómeno y modificó la ley de Ampère para que fuera aplicable a las corrientes en circuitos abiertos. Procedió del modo siguiente: el campo eléctrico en el interior del condensador

tiene por expresión

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{e}$$

donde  $e$  es el espesor del dieléctrico. Por otra parte, la ecuación de conservación de cargas establece

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{d(\varphi_1 - \varphi_2)}{dt} = C e \frac{dE}{dt} = S \epsilon \frac{dE}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$

donde  $D = \epsilon E$  es el llamado *campo de desplazamiento eléctrico* y su flujo, *corriente de desplazamiento*. Si admitimos que la ley de Ampère es siempre aplicable a este fenómeno, la circulación de  $\vec{H}$  debe valer algo que tiene que coincidir numéricamente con la intensidad  $I$  aun dentro de una superficie tal como  $S'$ . Si observamos que

$$I = \frac{d(\text{flujo } D)}{dt} = \text{flujo} \frac{dD}{dt}$$

podemos proponer una nueva forma de la ley de Ampère para que sea válida en cualquier superficie sobre la curva:

*Ley general de Ampère.* La circulación de  $\vec{H}$  sobre una curva cerrada es

$$\text{circ } \vec{H} = \text{flujo} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

donde el flujo se considera sobre una superficie de borde la curva cerrada y los sentidos según la regla del sacacorchos.

Se emplean derivadas parciales puesto que el fenómeno es espacial y solamente en un conductor filiforme la intensidad de los campos dependen solamente del tiempo.

Como es natural, esta argumentación es sólo *hipotética*. Podría ocurrir perfectamente que la expresión fuera válida en este caso particular, pero no en el caso general. Sin embargo, los hechos experimentales verifican estas conclusiones y su validez radica más bien en la concordancia con sus conclusiones que en este *argumento plausible*.

Obsérvese que en un caso estacionario sin desplazamiento alguno de las cargas, el término adicional vale cero, de modo que la ley es igualmente válida para corrientes continuas y coincide con la expresión primitiva de la ley de Ampere. Sin embargo, las cosas ocurren de modo distinto al estudiar las corrientes variables. En un conductor, si admitimos la ley de Ohm, tendremos

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\gamma}$$

Por otra parte, como un conductor no es polarizable, el vector  $\vec{D}$  vale

$$\vec{D} = \frac{\epsilon_0 \vec{J}}{\gamma}$$

de modo que, para todos los fenómenos estacionarios considerados, la ley de Ampère aplicada a conductores es válida puesto que  $J$  no depende del tiempo. En los fenómenos dinámicos se tiene

$$\text{circ } \vec{H} = \text{flujo} \left( \vec{J} + \frac{\epsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right)$$

La corrección introducida por Maxwell para estudiar las corrientes abiertas modifica también los resultados obtenidos en el caso de las corrientes cerradas, cuando éstas dependen del tiempo. Supongamos por ejemplo, un conductor recorrido por una corriente alterna  $I = I_0 \cos \omega t$ . La ley de Ampère aplicada a una curva que rodea el conductor es ahora

$$\text{circ } \vec{H} = \text{flujo} \left( \vec{J} + \frac{\epsilon_0}{\gamma} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \right) = I + \frac{\epsilon_0}{\gamma} \frac{dI}{dt} = I_0 \left( \cos \omega t - \frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} \sin \omega t \right)$$

pero el coeficiente  $\omega \epsilon_0 / \gamma$  es extremadamente pequeño, aun para frecuencias enormemente altas. Por ejemplo, en el cobre se tiene un error del 1 % cuando la frecuencia vale

$$\frac{\omega \epsilon_0}{\gamma} = 0,01, \quad f = \frac{0,01\gamma}{2\pi \epsilon_0} \approx 10^{16} \text{ Hz}$$

En resumen, y de acuerdo con Maxwell, la ley de Ampere puede enunciarse: la circulación de  $\vec{H}$  a lo largo de una curva cerrada coincide con la intensidad de corriente total –suma de la *corriente de conducción* y de la *corriente de desplazamiento*– que atraviesa la curva.

Consideremos una superficie cerrada y calculemos el flujo *saliente* de  $\vec{J}$  y de  $\vec{D}$  que la atraviesa. De acuerdo con el principio de conservación de la carga tendremos

$$\text{flujo } \vec{J} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

donde  $Q$  es la carga encerrada por la superficie, puesto que el flujo saliente de  $\vec{J}$  es la carga que abandona el volumen interior en la unidad de tiempo. Por otra parte, el flujo saliente de  $\vec{D}$  vale

$$\text{flujo } \vec{D} = Q, \quad \text{flujo } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

de modo que en la *corriente total* que abandona el volumen interior verifica

$$\text{flujo} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Este resultado muestra que las corrientes totales que entran en una superficie cerrada son iguales a las que salen. Dicho en otros términos: las corrientes totales que atraviesan dos superficies, que tiene por borde la misma curva, son iguales. Esta afirmación refuerza la modificación de Maxwell y permite verificar que, cuando una superficie que tiene una curva cerrada por contorno verifica la ley de Ampère, la verifica también cualquier otra superficie que se apoya en la misma curva. O sea, si admitimos que la ley de Ampère es válida para la superficie  $S'$ , también lo es para la superficie  $S''$ .

Este resultado permite estudiar la ley de los nudos para circuitos en los fenómenos dinámicos. De acuerdo con la ecuación anterior la corriente total que entra en el nudo de un circuito vale cero; los cálculos realizados nos indican que la corriente de desplazamiento es despreciable en los metales, de modo que la corriente de conducción que entra en el nudo es igual a la corriente de conducción que sale del mismo.

## Leyes del campo electromagnético

En los estudios anteriores determinamos las leyes que rigen el comportamiento del campo en un fenómeno cualquiera. Estas son:

*Ley de Faraday.* La circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de una curva cerrada coincide con  $-\partial\Phi/\partial t$  donde  $\Phi$  es el flujo de  $\vec{B}$  que atraviesa la curva.  
*Ley de Ampère–Maxwell.* La circulación de  $\vec{H}$  a lo largo de una curva cerrada coincide con el flujo de  $\vec{J} + \partial\vec{D}/\partial t$ .  
*Ley del flujo de  $\vec{B}$ .* El flujo de  $\vec{B}$  a través de una superficie cerrada vale cero.  
*Ley del flujo de  $\vec{D}$ .* El flujo saliente de  $\vec{D}$  que atraviesa una superficie cerrada coincide con la carga encerrada por la superficie.  
*Ley de conservación de la carga.* El flujo saliente de  $\vec{J}$  a través de una superficie cerrada coincide con  $-\partial Q/\partial t$ , donde  $Q$  es la carga encerrada.

El conjunto de estas ecuaciones fue enunciado por primera vez en forma matemática por Maxwell en su célebre tratado, basándose esencialmente en las ideas de Faraday y Ampère. Por esta razón se las conoce con el nombre de *ecuaciones de Maxwell* (forma integral).

Estas ecuaciones se completan con un grupo de relaciones que describen las propiedades microscópicas de la materia. Estas son:

Dieléctrico lineal:	$\vec{D} = \epsilon \vec{E}.$
Material magnético lineal:	$\vec{B} = \mu \vec{H}.$
Conductor óhmico:	$\vec{J} = \gamma \vec{E}.$

Estas ecuaciones no pertenecen al mismo nivel que las anteriores y sólo son válidas en condiciones especiales: así, por ejemplo, hay materiales que no verifican la proporcionalidad entre  $B$  y  $H$  como ocurre con los materiales ferromagnéticos; hay conductores que no cumplen la ley de Ohm, como los electrolitos o los semiconductores; hay materiales que no cumplen con la relación entre  $E$  y  $D$  como diversos cristales. En los estudios que siguen se trabajará siempre con materiales que cumplan las relaciones lineales establecidas, a menos que se diga lo contrario.

Sea una superficie de separación entre dos medios con propiedades diferentes. Formularemos las llamadas *ecuaciones de transición vectorial*, análogas a las ecuaciones de Maxwell. Desde el punto de vista físico, *no existe discontinuidad alguna* en la superficie que separa dos medios, como puede comprobarse pensando en términos microscópicos; sin embargo, es conveniente tratar la zona de división como una discontinuidad. Procediendo de este modo operaremos con cargas y corrientes superficiales (que ya hemos tenido oportunidad de emplear) en lugar de considerar las cargas y corrientes situadas en una pequeña zona de transición. Partiendo de estas consideraciones pueden definirse las siguientes variables: el vector  $\vec{j}$ , de densidad de corriente superficial (*amperes/metro*), que representa la media de las corrientes que atraviesan una línea trazada en la superficie y la densidad de carga superficial  $\sigma$  (*coulomb/metro<sup>2</sup>*).

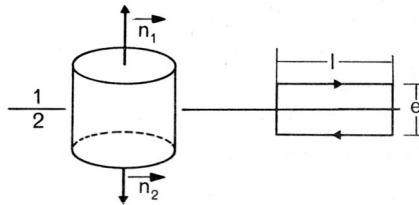


Figura 136: Esquema de un dinamómetro.

Para obtener las ecuaciones de transición consideremos la superficie de separación de dos medios, Figura ???. Si aplicamos las leyes del flujo a un cilindro cuyas bases están contenidas en los medios tendremos (pasando al limite para altura cero del cilindro)

$$\vec{B}_1 \times \vec{n}_1 + \vec{B}_2 \times \vec{n}_2 = 0$$

$$\vec{D}_1 \times \vec{n}_1 + \vec{D}_2 \times \vec{n}_2 = 0$$

Aplicamos la ley de Faraday a una curva cerrada como la indicada en la Figura ???. Resulta

$$l(E_{t1} - E_{t2}) = -l e \frac{\partial B_n}{\partial t}$$

en la que  $E_t$  es la componente del campo sobre la curva, tangencial a la superficie, y  $B_n$  es la componente del campo normal al plano de la curva. Dividiendo por  $l$  y pasando al límite cuando  $e \rightarrow 0$  tenemos

$$E_{t1} - E_{t2} = 0$$

pero esta relación vale para cualquier orientación del plano de la espira, de modo que: Las componentes de  $\vec{E}$  tangenciales a la superficie, coinciden en ambos medios. Esta ecuación puede escribirse también como

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{E}_1 + \vec{n}_2 \wedge \vec{E}_2 = 0.$$

Si aplicamos la ley de Ampère a una curva igual a la anterior, situada en un plano normal a la densidad de corriente superficial  $\vec{j}$ , tenemos, análogamente al caso del campo eléctrico,

$$H_{t1} - H_{t2} = j.$$

Si el plano de la curva es ahora paralelo a  $\vec{j}$  se tiene

$$H_{t1} - H_{t2} = 0$$

Estos resultados pueden enunciarse en la forma siguiente: la diferencia de las componentes de  $\vec{H}$  tangenciales a la superficie es un vector cuyo módulo coincide con  $\vec{j}$  y es perpendicular a éste. Su sentido, se determina escribiendo esta relación en forma vectorial

$$\vec{n}_1 \wedge \vec{H}_1 + \vec{n}_2 \wedge \vec{H}_2 = \vec{j}.$$

Para formular una ecuación de conservación de cargas en la superficie, hay que proceder con sumo cuidado, puesto que en un punto dado pueden llegar cargas no sólo de la superficie, sino también de los dos medios. En general, es conveniente escribir la ecuación de conservación de cargas en cada caso particular.

Disponemos entonces de un conjunto de ecuaciones que todo campo electromagnético debe satisfacer. Podemos preguntarnos inmediately el problema inverso: *si un campo verifica todas las ecuaciones mencionadas, ¿es un campo real, susceptible de ser obtenido en forma experimental?* El problema planteado en estos términos no tiene solución, pues será preciso comprobar cada uno de los campos que verifican las ecuaciones. Sin embargo, puede afirmarse que, hasta el momento, todo campo en

estas condiciones ha podido ser obtenido en forma experimental. Agregaremos entonces como hipótesis fundamental:

*Hipótesis de completitud.* Todo campo electromagnético que verifique las ecuaciones de Maxwell es un campo real que puede obtenerse experimentalmente.

Dicho en otras palabras, las ecuaciones de Maxwell son *todas las ecuaciones* que verifica el campo y cualquier otra ecuación, que no sea consecuencia de ellas, no se cumple para algún campo real.

La hipótesis fundamental implica que el campo derivado de la superposición de dos campos reales es un campo real, puesto que si sumamos las ecuaciones que verifica cada uno de los campos respectivos, obtenemos las ecuaciones del campo suma.

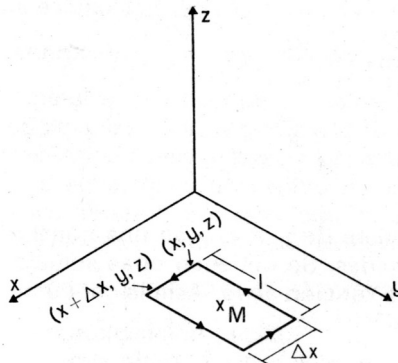


Figura 137: Estudio del campo cilíndrico.

## Campo electromagnético cilíndrico

La resolución de las ecuaciones de campo es en general un problema complicado y a menudo rebasa ampliamente el alcance de este libro debido a su complejidad matemática. Sin embargo, existe un caso especial, en el que pueden obtenerse soluciones en forma simple, las cuales, utilizando la ley de superposición, permiten estudiar algunos problemas sencillos. Consideremos un material dieléctrico de constantes  $\epsilon$  y  $\mu$ , dentro de un campo electromagnético cuyos vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  se encuentran siempre en un plano paralelo a  $\mathbf{yz}$ , Figura 137. Designaremos las componentes según los ejes  $y$ ,  $z$  respectivamente con subíndices correspondientes. Consideremos además una curva de pequeñas dimensiones que rodea al punto  $M$  en el instante  $t$ , situada en un plano paralelo a  $\mathbf{xy}$ , y apliquemos las leyes de la circulación. Para el campo eléctrico

se tiene

$$l [E_y(x + \Delta x, y, z, t) - E_y(x, y, z, t)] = -l \Delta x \frac{\partial B_z}{\partial t}$$

dividiendo por  $l \Delta x$  y pasando al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}.$$

Para el campo magnético tenemos

$$l [H_y(x + \Delta x, y, z, t) - H_y(x, y, z, t)] = l \Delta x \left( \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z \right)$$

dividiendo por  $l \Delta x$  y pasando al límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z.$$

Si consideramos ahora una curva similar, pero en un plano paralelo a  $\mathbf{xz}$  tenemos análogamente

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} - J_y.$$

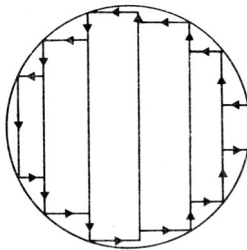


Figura 138: Generalización de la circulación a una curva cualquiera.

Como las leyes de circulación se cumplen en las curvas rectangulares tomadas como ejemplo, podemos afirmar que se verificarán sobre cualquier otra curva, puesto que ésta, cualquiera que sea su forma, puede descomponerse en curvas del tipo estudiado *con la aproximación que se desee*. En efecto, una curva como la indicada en la Figura 138 se descompone en rectángulos paralelos a los ejes. La suma de las circulaciones a lo largo de cada uno de los rectángulos es la circulación en la línea quebrada inscrita en la curva, puesto que al tomar los rectángulos dos a dos (aproximadamente)



se anula la circulación en los segmentos interiores. El razonamiento se generaliza a una curva en el espacio, imaginando los rectángulos en planos convenientes y procediendo en forma similar.

Las ecuaciones obtenidas para los campos se simplifican en el caso de un dieléctrico *con conductividad*  $\gamma = 0$ , como ocurre con el vacío o el aire, porque desaparece el término en  $\vec{J}$ . Se pueden escribir, introduciendo  $\epsilon$  y  $\mu$ , de la forma

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

y esta última se puede escribir como

$$c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

donde  $c^2 = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ . Se puede verificar que las expresiones

$$E_y = A(y, z) \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$$

$$-B_z = A(y, z) \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$$

donde  $A(y, z)$  es una función cualquiera de  $y, z$  y  $\omega$  es una constante, son solución de las ecuaciones obtenidas. Se obtienen otras soluciones sustituyendo la función *coseno* por la función *seno*. Asimismo, también las cumplen las expresiones

$$E_y = A(y, z) \cos \omega \left( \frac{x}{c} + t \right)$$

$$-B_z = A(y, z) \cos \omega \left( \frac{x}{c} + t \right)$$

La función  $A(y, z)$  está todavía indeterminada, pero ello no debe sorprendernos puesto que no hemos aplicado aún las leyes de flujo, que nos darán ecuaciones suficientes para su determinación.

En el caso de que conductividad y del dieléctrico es distinta de cero las ecuaciones de campo son

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z, \quad \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial D_y}{\partial t} - J_y.$$

Si reemplazamos  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ ,  $\vec{H} = \vec{B}/\mu$  y  $\vec{J} = \gamma \vec{E}$ , se obtiene

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \gamma E_z, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} - \gamma E_y.$$

Puede verificarse que las expresiones

$$E_y = A(y, z) e^{-x/\delta} \cos(x/\delta - \omega t),$$

$$B_y = \frac{A(y, z)}{\delta \omega} e^{-x/\delta} [\cos(x/\delta - \omega t) - \text{sen}(x/\delta - \omega t)],$$

donde  $\delta = \sqrt{2/\mu\gamma\omega}$ , son soluciones aproximadas, cuya validez depende de que se cumpla la condición  $\epsilon\omega/\gamma \ll 1$ . Esta condición ya hemos visto que se verifica en los metales para frecuencias hasta del orden de  $10^{16}$  Hz. Conviene tener presente que a las frecuencias ópticas *la aproximación hecha deja de cumplirse*. Pueden obtenerse otras soluciones de las ecuaciones de campo mediante las sustituciones empleadas en el caso anterior. Por otro lado, nótese que cuando  $\gamma \rightarrow 0$  son distintas las soluciones para materiales con o sin conductividad puesto que en estas condiciones deja de cumplirse  $\epsilon\omega/\gamma \ll 1$  y, por lo tanto, se está fuera de la aproximación hecha.

La magnitud  $\delta$ , que es una longitud, se denomina *longitud de penetración del campo* o “*skin*” y es de la mayor importancia en el estudio de los conductores que se encuentran en presencia de un campo electromagnético dinámico.

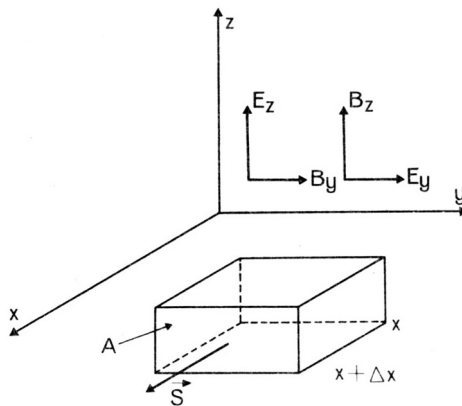


Figura 139: Balance de energía en un pequeño volumen.

## Ecuación de Poynting

Consideremos un paralelepípedo de caras paralelas a los ejes coordenados, representado en la Figura 139, y sea un punto de coordenadas  $(x, y, z)$  en un instante  $t$  situado en su interior. Si en el punto existe un campo cilíndrico como el estudiado en la sección anterior, y calculamos el vector  $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ , tendremos

$$S_x = E_y H_z - E_z H_y$$

dirigido según el eje de las  $x$ . Si calculamos el flujo saliente del paralelepípedo tendremos, llamando  $a$  a la sección—supuesta pequeña—y  $\Delta V = a \Delta x$  a su volumen

$$\text{flujo } \vec{S} = a [S_x(x + \Delta x, y, z, t) - S_x(x, y, z, t)] = a \Delta x \frac{\partial S_x}{\partial x} = \Delta V \frac{\partial S_x}{\partial x}$$

Por otra parte, derivando  $S_x$  y sustituyendo las ecuaciones de campo de la sección anterior tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial x} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} H_z + E_y \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial x} H_y - E_z \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} &= -H_z \frac{\partial B_z}{\partial t} - E_y \left( \frac{\partial D_y}{\partial t} + J_y \right) - H_y \frac{\partial B_y}{\partial t} - E_z \left( \frac{\partial D_z}{\partial t} + J_z \right) \end{aligned}$$

reordenando se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_x}{\partial x} &= -H_z \frac{\partial B_z}{\partial t} - H_y \frac{\partial B_y}{\partial t} - E_y \frac{\partial D_y}{\partial t} - E_z \frac{\partial D_z}{\partial t} - E_y J_y - E_z J_z \\ \frac{\partial S_x}{\partial x} &= -\vec{H} \times \frac{\vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \times \vec{J} \end{aligned}$$

Si multiplicamos la ecuación del flujo de  $\vec{S}$  por  $dt$ , reemplazamos la expresión obtenida y agrupamos los términos semejantes podemos escribir

$$\begin{aligned} \text{flujo } \vec{S} dt + \vec{E} \times \vec{J} \Delta V dt &= - \left( \frac{1}{\mu} \vec{B} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \epsilon \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \Delta V dt \\ \text{flujo } \vec{S} dt + \vec{E} \times \vec{J} \Delta V dt &= - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2\mu} \vec{B}^2 + \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 \right) \Delta V dt \end{aligned}$$

Esta ecuación es susceptible de una interpretación importante. El segundo miembro contiene la disminución de la energía almacenada en el volumen por los campos eléctricos y magnéticos, en la hipótesis de una distribución de energía en el espacio con densidades de volumen  $\vec{B}^2/2\mu$  y  $\epsilon \vec{E}^2/2$ . En el primer miembro se encuentra la

energía disipada en forma de calor, debida a la presencia de corrientes  $\vec{E} \times \vec{J} \Delta V dt$ . En consecuencia, el término restante puede interpretarse, como *la energía que penetra en la superficie* proveniente del campo exterior al volumen  $\Delta V$ . La ecuación muestra pues, que la energía existente en el volumen  $\Delta V$  proviene del campo exterior y es transmitida a través de la superficie por el vector  $\vec{S}$ , *densidad de potencia transmitida*. Este resultado es conocido con el nombre de ecuación de Poynting y el vector  $\vec{S}$  se denomina *vector radiante* o *de Poynting*.

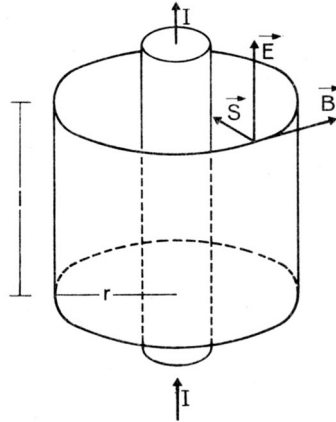


Figura 140: Energía en una corriente rectilínea infinita.

La ecuación de Poynting posee una validez general para todo campo electromagnético, pero su demostración queda fuera del alcance de este libro. Puede aplicarse a una superficie cualquiera, generalizando el método expuesto en la sección anterior para pasar de curvas especiales a curvas generales en el cálculo de la circulación de un vector. Ilustraremos la aplicación de la ecuación a un caso estacionario conocido. Consideremos un conductor rectilíneo de longitud infinita por el cual circula una corriente  $I$ , según la Figura 140. Como ya es sabido, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en el exterior del conductor valen

$$E = \frac{I}{s\gamma}, \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Si tomamos un cilindro concéntrico con el conductor y calculamos el *flujo entrante* del vector  $\vec{S}$ , potencia que penetra en el volumen encerrado, tendremos

$$\text{flujo } \vec{S} = 2\pi r l \frac{EB}{\mu_0} = \frac{l}{s\gamma} I^2 = RI^2.$$

Este resultado puede interpretarse diciendo que el campo que llega al conductor, crea las corrientes y que la potencia entrante que penetra en el conductor a través de su

superficie coincide con la potencia que en él se disipaba. Nótese que no existe variación alguna de la energía acumulada en el espacio, puesto que el fenómeno es estacionario.

Para establecer una corriente en el conductor es necesario pensar en un generador que produzca un campo en todo el espacio y *alimente al conductor a través del campo*, o bien, imaginar que crea directamente una corriente en el conductor por el movimiento de cargas en él. La primera interpretación, a pesar de parecer más académica, considera todo el fenómeno en el espacio; la segunda se restringe al conductor.

Al deducir la ecuación de Poynting sustituimos  $\vec{H} \times d\vec{B}$  por  $\partial/\partial t(\vec{H} \times \vec{B}/2)$  lo cual sólo puede hacerse *si las propiedades magnéticas del material son lineales*. Ello no es cierto en los materiales ferromagnéticos; sin embargo, la expresión diferencial continúa siendo correcta, puesto que la energía disipada en una parte del ciclo de histéresis es precisamente  $dW = H dB$

Si la intensidad de campo varía en el tiempo, la integral de  $dW$  nos indica la energía disipada en el fenómeno, en perfecto acuerdo con los resultados obtenidos en el capítulo correspondiente. Algo similar ocurre en los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  cuando se estudian materiales que pueden estar polarizados de modo permanente o no son lineales. De hecho, todo material aislante posee a cierta escala un pequeño ciclo de histéresis y por lo tanto consume una energía silimar al caso ferromagnético. Las pérdidas por histéresis en un dieléctrico se indicaron en un capítulo anterior.

## Onda libre

Si consideramos un dieléctrico en el cual existe un campo dinámico cilíndrico como el estudiado en una sección, pero tal que  $E_z = 0$  y  $B_y = 0$ , la ley del flujo de  $\vec{B}$  aplicada a un paralelepípedo de caras paralelas a los ejes indica que el campo no depende de  $z$ . La ley de circulación de  $\vec{B}$  indica que tampoco depende de  $y$ . Consideraciones análogas nos muestran que  $\vec{E}$  es independiente de  $y$  ó  $z$ , en el supuesto de que el dieléctrico no posea cargas de volumen. Las expresiones que deducimos finalmente son

$$E_y = A \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$$

$$B_z = \frac{A}{c} \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$$

Estas ecuaciones verifican entonces todas las ecuaciones de Maxwell y corresponden, por tanto, a un campo real. En la Figura 141 se muestra la disposición que adopta el campo en un instante dado. La distribución de los campos es sinusoidal en el espacio en cada instante y en el tiempo en cada punto. El punto que posee el campo eléctrico máximo se desplaza en el tiempo, de acuerdo con la ecuación  $x = ct$ .

Esto nos muestra que el campo  $\vec{E}$  (y análogamente el campo  $\vec{B}$ ) *se desplaza con una velocidad  $c$  conservando en todo momento la distribución espacial expuesta*. Esta-

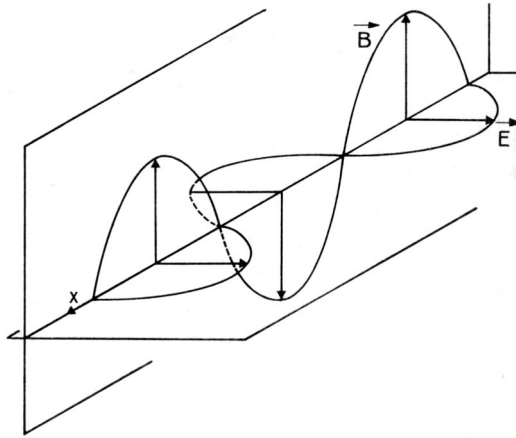


Figura 141: Esquema de un dinamómetro.

mos pues en presencia de una onda de campos, de *amplitud*  $A$ , *pulsación*  $\omega$ , *frecuencia*  $f = \omega/2\pi$  y *longitud de onda* –distancia entre dos máximos o dos puntos consecutivos de  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$  que están en igual fase– es  $\lambda = c/f$ . El plano que contiene al campo eléctrico se denomina *plano de polarización de la onda*.<sup>8</sup> La relación entre las amplitudes de los campos vale  $E/B = c$ .

El vector de Poynting  $S$  de la onda, es

$$S = E H = \frac{A^2}{\mu c} \cos^2 \omega \left( \frac{x}{c} - t \right) = \frac{A^2}{2\mu c} \left[ 1 + \cos 2\omega \left( \frac{x}{c} - t \right) \right]$$

y está dirigido precisamente según la dirección del movimiento de la onda. Si consideramos una superficie normal a la dirección del movimiento, la potencia por unidad de área transmitida por el campo en dicha dirección vale,

$$P = \frac{A^2}{2\mu c} \left[ 1 + \cos 2\omega \left( \frac{x}{c} - t \right) \right]$$

Por consideraciones análogas a las hechas en los cálculos de las potencias en corrientes alternas, puede considerarse, con error muy psequeno, que la potencia transmitida por el campo es equivalente a su valor medio en el tiempo y vale

$$P = \frac{A^2}{2\mu c}$$

<sup>8</sup> Se debe diferenciar la palabra polarización empleada en este caso con otros conceptos anteriores, con los cuales nada tiene que ver.

Las ecuaciones de Maxwell afirman que existen campos electromagnéticos que se propagan con la velocidad  $c$  aún en el vacío. Es interesante calcular el valor de la velocidad de propagación

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299792,5 \text{ km/seg.}$$

La velocidad de las ondas es igual a la velocidad –medida previamente– de la luz. Maxwell atribuyó esta coincidencia a que la luz es una onda electromagnética como las estudiadas, con una longitud de onda extremadamente pequeña. Esta hipótesis sobre la naturaleza de la luz se ve confirmada en todos los aspectos de la teoría electromagnética, como se verá en las secciones que siguen.

Como la orientación de los ejes coordenados con respecto al material dieléctrico (o al vacío) es arbitraria, la luz se propaga en todas las direcciones y con la misma velocidad en cualquier plano de polarización. La velocidad de propagación en un medio cualquiera –al coincidir prácticamente la permeabilidad de las sustancias no ferromagnéticas con  $\mu_0$ – vale

$$v = \frac{c}{\sqrt{k}}$$

donde  $k$  es la constante dieléctrica relativa del material y  $c$ , la velocidad de propagación en el vacío. Por consiguiente, la velocidad de propagación en cualquier otro medio, es menor que  $c$ , y es tanto más pequeña cuanto mayor sea la constante  $k$  del material.

Es posible obtener nuevas soluciones para las ecuaciones de Maxwell superponiendo ondas como las estudiadas.

*Onda estacionaria.* Si superponemos dos ondas electromagnéticas que se propagan en sentido contrario y de igual amplitud, tendremos

$$E_y = A \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right) + A \cos \omega \left( \frac{x}{c} + t \right)$$

$$B_z = \frac{A}{c} \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right) + \frac{A}{c} \cos \omega \left( \frac{x}{c} + t \right)$$

Desarrollando estas expresiones, estas ecuaciones pueden escribirse también como

$$E = 2A \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t, \quad B = \frac{2A}{c} \operatorname{sen} \frac{\omega x}{c} \operatorname{sen} \omega t$$

que muestran que la onda electromagnética resultante se deforma sin desplazarse y siempre posee sus máximos en los mismos puntos. Esta solución se denomina *onda estacionaria*. La superposición de dos ondas de amplitudes diferentes forma una onda estacionaria y además una onda que se propaga en el sentido de la más intensa. Cuando se superponen ondas defasadas resulta una suma de las ondas componentes que puede

expresarse en forma de ondas sinusoidales y cosenosoidales (es decir, defasadas  $\pi/2$ ), puesto que

$$A \cos(\omega\varphi + \alpha) = A \cos \alpha \cos \omega\varphi - A \sin \alpha \sin \omega\varphi.$$

La potencia transmitida por una onda estacionaria es

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{A^2}{\mu_0 c} \sin \frac{2\omega x}{c} \sin 2\omega t$$

expresión que indica que la potencia transmitida vale cero (es decir, que según el instante que se considere la energía atraviesa la superficie en ambos sentidos, con valor medio en el tiempo igual a cero).

*Ondas polarizadas linealmente.* En la composición de dos ondas electromagnéticas polarizadas en planos diferentes, con diferente amplitud pero perpendiculares entre sí, que se propagan en el mismo sentido y están en fase, se verifica

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{A_1}{A_2}, \quad c B = E = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos \left( \frac{x}{c} - t \right),$$

de modo que la superposición de ambas da una onda situada en un plano diferente, con una amplitud equivalente a la suma vectorial de las amplitudes. Este es un resultado importante que permite sustituir ondas que se encuentran en fase por sus ondas “proyección” sobre planos de polarización convenientes. Esta propiedad se utiliza, por ejemplo, en los analizadores de luz polarizada.

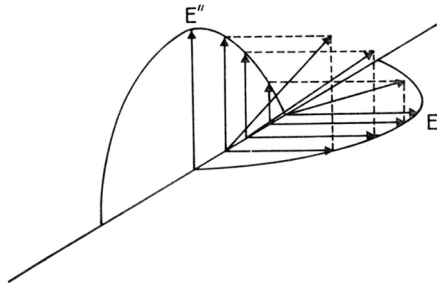


Figura 142: Onda con polarización circular.

*Ondas con polarización circular.* Supongamos dos ondas electromagnéticas polarizadas en planos normales, con amplitudes iguales y defasadas en  $\pi/2$ , Figura 142. La composición de ambas establece las ecuaciones

$$c B_1 = E_1 = A \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right), \quad c B_2 = E_2 = A \sin \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$$



$$cB = E = A, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{B_1}{B_2} = \operatorname{tg} \omega \left( \frac{x}{c} - t \right)$$

El campo resultante tiene una amplitud constante y cambia su dirección en cada punto del espacio. Los extremos de los vectores  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$  describen una hélice que se desplaza en la dirección de propagación. El campo se denomina *onda polarizada circular*. Si las amplitudes de los campos suma son distintas, los extremos de los vectores describen una hélice elíptica y la onda se denomina *onda polarizada elíptica*.

Es fácil ver que existen ondas con polarización circular o elíptica, que al propagarse, “giran” en cualquiera de los dos sentidos posibles: las ondas electromagnéticas que giran en el sentido del movimiento de avance de un sacacorchos se denominan *dextrógiras*, y las opuestas *levógiras*. Estas ondas se observan en algunos cristales. Son utilizadas en el cine 3D para proyectar las imágenes que debe recibir cada ojo, a través de un polatizador conveniente.

El vector de Poynting para una onda polarizada circularmente es constante y vale

$$S = \frac{A^2}{\mu_0 c}$$

Los cristales constituyen un ejemplo interesante de propagación de ondas. La existencia de una red cristalina cuyas características al nivel microscópico pueden diferir en cada dirección, origina paralelamente una diferencia en las propiedades eléctricas del cristal. En particular, existe una constante dieléctrica en cada dirección, lo cual hace que un cristal, sea anisótropo en lo que respecta a la propagación de ondas. Mediante láminas cristalinas talladas en forma conveniente es posible convertir una onda polarizada linealmente en otra con polarización circular o elíptica, gracias a la diferencia de fase que se introduce en la onda al atravesar el cristal con dos velocidades diferentes.

### Leyes de la refracción

Para simplificar el estudio analítico de una onda electromagnética es conveniente escribir en forma vectorial la dependencia de sus campos. Si elegimos un punto  $\mathbf{O}$  como origen para fijar la posición de los puntos, cada punto  $\mathbf{M}$  de la onda quedará determinado por un vector  $\vec{r}$  trazado desde  $\mathbf{O}$  hasta  $\mathbf{M}$ . Definamos un vector  $\vec{k}$ , de módulo  $1/c$  ( $c$  velocidad de propagación en el medio) y de dirección y sentido las de propagación de la onda. Sea además, un vector  $\vec{E}$  normal a  $\vec{k}$ , situado en el plano de polarización de la onda, de módulo igual a la amplitud del campo eléctrico. Tendremos entonces, Figura 143, como expresiones de la onda

$$\vec{E} \cos \omega \left( \frac{x}{c} - t \right) = \vec{E} \cos \omega \left( \vec{k} \times \vec{r} - t + \varphi \right)$$

$$\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E} \cos \omega (\vec{k} \times \vec{r} - t + \varphi)$$

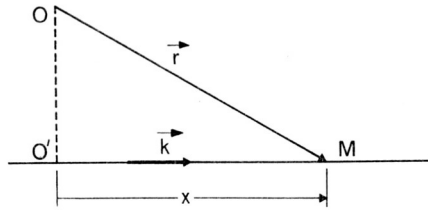


Figura 143: Esquema vectorial de una onda.

Estudiaremos ahora la incidencia de una onda en la superficie de separación de dos medios diferentes, que supondremos con permeabilidades  $\mu$  iguales. Sea  $\vec{k}_1$ , y  $\vec{E}_1$ , los vectores que definen la onda incidente sobre la superficie y sea  $\vec{n}$  la normal a ella según la Figura 144.

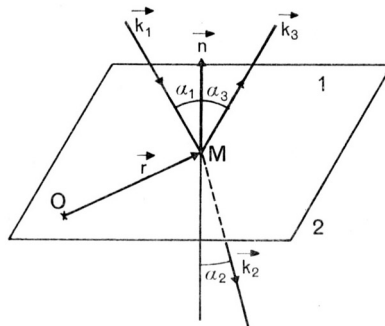


Figura 144: Diagrama vectorial de una onda incidente sobre un medio.

Las ecuaciones fundamentales que permiten estudiar el fenómeno son las ecuaciones de transición vectorial, las cuales exigen la continuidad de las componentes tangenciales de los campos (puesto que las permeabilidades coinciden en ambos medios y no pueden existir corrientes superficiales en un dieléctrico). En primer lugar, supondremos que el campo  $\vec{E}_1$ , incidente, *está contenido en el plano de separación de ambos medios*.

La onda incidente atraviesa el plano de separación y sigue su propagación en el segundo medio, definida por los vectores  $k_2$  y  $\vec{E}_2$ . Las condiciones en que se realiza la transición exigen la igualdad de los vectores eléctricos y de las componentes tangenciales de los vectores magnéticos. Además, como los vectores magnéticos son perpendiculares a  $\vec{k}$  y  $\vec{E}$ , la continuidad de las componentes tangenciales determina la de los campos magnéticos, lo cual es claramente imposible, porque entonces coincidirían las

velocidades de propagación en dos medios de diferente constante dieléctrica. Por consiguiente, queda de manifiesto la *existencia de una tercera onda en el fenómeno, situada también en el medio I*, y cuyos vectores son  $\vec{E}_3$  y  $\vec{k}_3$ . Las expresiones de los campos quedan entonces

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 \cos \omega_1 \left( \vec{k}_1 \times \vec{r} - t + \varphi_1 \right), & \quad \vec{B}_1 = \vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1 \cos \omega_1 \left( \vec{k}_1 \times \vec{r} - t + \varphi_1 \right), \\ \vec{E}_2 \cos \omega_2 \left( \vec{k}_2 \times \vec{r} - t + \varphi_2 \right), & \quad \vec{B}_2 = \vec{k}_2 \wedge \vec{E}_2 \cos \omega_2 \left( \vec{k}_2 \times \vec{r} - t + \varphi_2 \right), \\ \vec{E}_3 \cos \omega_3 \left( \vec{k}_3 \times \vec{r} - t + \varphi_3 \right), & \quad \vec{B}_3 = \vec{k}_3 \wedge \vec{E}_3 \cos \omega_3 \left( \vec{k}_3 \times \vec{r} - t + \varphi_3 \right),\end{aligned}$$

La continuidad de las componentes de los campos exige la condición

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$$

o cual indica que *las frecuencias de las ondas no cambian en los diversos medios*. Además, si suponemos que el origen de  $\vec{r}$  se encuentra en el plano de separación tenemos

$$\vec{k}_1 \times \vec{r} = \vec{k}_2 \times \vec{r} = \vec{k}_3 \times \vec{r}$$

que aseguran la coincidencia de las fases de las ondas en la superficie. De las ecuaciones escritas se deduce también que

$$\vec{r} \times (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) = 0, \quad \vec{r} \times (\vec{k}_1 - \vec{k}_3) = 0$$

Estas ecuaciones deben cumplirse en todos los puntos de la superficie de separación, es decir para todos los vectores  $\vec{r}$  del plano. Para ello, es necesario que los vectores  $\vec{k}_1 - \vec{k}_2$  y  $\vec{k}_1 - \vec{k}_3$  sean colineales con  $\vec{n}$ . Se deduce entonces que *los vectores  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  están en el mismo plano*, puesto que deben coincidir sus proyecciones sobre el plano. Al proyectar  $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$  sobre  $\vec{n}$  se obtiene inmediatamente

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{c_1} = \frac{\text{sen } \alpha_3}{c_1}, \quad \alpha_1 = \alpha_3$$

y también

$$\frac{\text{sen } \alpha_1}{c_1} = \frac{\text{sen } \alpha_2}{c_2}, \quad \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{c/c_2}{c/c_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

donde  $n_1 = c/c_1$  y  $n_2 = c/c_2$  son los *índices de refracción de los medios* y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. De lo expuesto se desprenden las leyes siguientes:

*Ley de reflexión.* El ángulo de incidencia de una onda incidente en la superficie de un dieléctrico es igual al ángulo de reflexión.

*Ley de refracción.* El ángulo de incidencia  $\alpha_1$  y el ángulo de refracción  $\alpha_2$  de una onda incidente en la superficie de un dieléctrico cumplen la ecuación de Snell:  $n_1 \operatorname{sen} \alpha_1 = n_2 \operatorname{sen} \alpha_2$ , donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción.

Investigaremos las relaciones de amplitud de las ondas. Como los vectores  $\vec{k}$  son coplanares y los vectores  $\vec{E}$  son normales a ellos, los tres vectores  $\vec{E}$  están en el plano de separación de los medios y en la misma dirección (normal al plano de los vectores  $\vec{k}$ , denominado *plano de incidencia*). Entonces, las amplitudes tomadas algebraicamente cumplirán la igualdad

$$E_2 = E_1 + E_3$$

Los vectores  $\vec{B}$ , siendo normales a  $\vec{E}$ , están en el plano de incidencia de modo que la continuidad de sus proyecciones exige

$$B_1 \cos \alpha_1 - B_3 \cos \alpha_3 = B_2 \cos \alpha_2$$

o sea

$$n_1 E_1 \cos \alpha_1 - n_1 E_3 \cos \alpha_3 = n_2 E_2 \cos \alpha_2.$$

De las dos ecuaciones de los campos y de  $\alpha_1 = \alpha_3$  resulta

$$E_2 = E_1 \frac{2 n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}, \quad E_3 = E_1 \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}$$

Estas ecuaciones obtenidas por primera vez por Fresnel.

Análogamente se puede estudiar el comportamiento de una onda que incide con su vector magnético contenido en el plano de separación de los medios. Los resultados que se obtienen son extraordinariamente similares, puesto que el campo eléctrico expresado en función del campo magnético verifica  $\vec{E} = -c^2 \vec{k} \wedge \vec{B}$ .

Las leyes de reflexión y refracción se verifican igualmente y las relaciones de amplitud son

$$B_2 = B_1 \frac{2 n_1 \cos \alpha_1}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}, \quad B_3 = B_1 \frac{n_2 \cos \alpha_1 - n_1 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2}$$

Existe un ángulo, la llamado *ángulo* o *ley de Brewster* para el cual se anula esta onda reflejada.<sup>9</sup> Para esto debe ocurrir

$$n_2 \cos \alpha_1 = n_1 \cos \alpha_2$$

<sup>9</sup> En el caso anterior esta situación no puede ocurrir. En efecto, si  $n_1 \cos \alpha_1 = n_2 \cos \alpha_2$ , dividiendo la ecuación de Snell por ésta, resulta  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2$  o sea  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Eso solamente sucede si  $n_1 = n_2$  y no hay un verdadero cambio de medio dieléctrico.

Elevando al cuadrado y ordenando resulta

$$\cos^2 \alpha_2 = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cos^2 \alpha_1.$$

Elevando al cuadrado la ecuación de Snell y ordenando resulta

$$\text{sen}^2 \alpha_2 = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha_1.$$

Sumando las dos ecuaciones resulta

$$1 = \text{sen}^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_2 = \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \text{sen}^2 \alpha_1 + \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \cos^2 \alpha_1 = \text{sen}^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1,$$

de donde resulta, reordenado

$$\left[ \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 - 1 \right] \text{sen}^2 \alpha_1 = \left[ 1 - \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2 \right] \cos^2 \alpha_1.$$

Simplificando y reordenando resulta

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_1} = \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^2, \quad \text{tg} \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}.$$

Si consideramos una onda cuyo plano de polarización se encuentra en una dirección cualquiera, es posible descomponerla en otras dos cuyos planos de polarización sean normales y coincidan con el plano de incidencia respectivo. Los resultados anteriores pueden aplicarse a cada una de las ondas componentes. Las leyes de reflexión y refracción se verifican exactamente, puesto que se cumplen para cada componente; en cambio, el cálculo de las amplitudes de las ondas, difiere para cada plano de polarización. Si la onda incidente se compone de una gran cantidad de ondas situadas en planos diferentes constituye un caso de especial importancia si el ángulo de incidencia verifica la condición de Brewster. La onda reflejada se compone solamente de ondas polarizadas contenidas en el plano de incidencia y la onda refractada está ligeramente polarizada en la dirección perpendicular. Esta técnica permite obtener una onda polarizada a partir de una onda sin polarizar. Los reflejos en el piso de la luz natural poseen una componente mayor de luz con polarización horizontal, por esta razón unos lentes polarizadores pueden eliminar (parcialmente) los reflejos. Esta propiedad se usa en lentes comerciales.

Cuando los índices de refracción son tales que  $n_1 > n_2$  y el ángulo de incidencia verifica

$$\text{sen} \alpha_1 > \frac{n_2}{n_1}, \quad \frac{n_1}{n_2} \text{sen} \alpha_1 = \text{sen} \alpha_2 > 1$$

Esta ecuación no tiene solución para  $\alpha_2$ . Luego, la ley de Snell indica que no puede existir rayo refractado y el rayo se refleja sobre la superficie de separación según las leyes de la reflexión ordinaria. El medio de menor índice de refracción se convierte en un espejo perfecto. Este fenómeno se conoce con el nombre de *reflexión total*.

## Fibras ópticas

### Dependencia del índice de refracción con la frecuencia

Las leyes de reflexión y refracción constituyen la comprobación experimental más importante de la teoría de las ondas electromagnéticas de Maxwell. Sin embargo, ésta no se verifica exactamente en las expresiones de los índices de refracción en función de las constantes dieléctricas relativas, cuyos valores figuran en el Cuadro 12.

Cuadro 12: Constantes dieléctricas e índices de refracción.

material	$k = \epsilon/\epsilon_0$	$\sqrt{k}$	$n$
agua	80	8,94	1,33
NaCl	5,62	2,37	1,50
diamante	5,5	2,34	2,41
cuarzo amorfo	3,78	1,94	1,57

Las discrepancias se atribuyen a la dependencia de  $k$  con la frecuencia de la onda. La inmensa mayoría de las medidas de  $k$  se efectúan en frecuencias pequeñas comparadas con las ópticas ( $10^{15}$  Hz). En general,  $k$  disminuye en función de la frecuencia, tal como muestra el Cuadro 13 para la bakelita.

Cuadro 13: Comportamiento de la bakelita en función de la frecuencia.

frecuencia (Hz)	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	$3 \times 10^9$
$k = \epsilon/\epsilon_0$	7,6	6,1	5,4	5,1	4,9	4,8	4,7	4,6

La dependencia de  $k$  con la frecuencia presenta zonas notables entre la zona de las microondas (1 gigaHz=  $10^9$  Hz) y en la zona de las frecuencias ópticas ( $10^{15}$  Hz) donde se producen disminuciones muy apreciables. Este hecho experimental se interpreta con relación al aporte microscópica de la materia a las propiedades de polarización. La polarización dieléctrica se debe fundamentalmente a la contribución *dipolar*, *iónica* y *electrónica* de la materia en las frecuencias bajas; a la contribución *iónica* y *electrónica* en la zona comprendida entre los microondas y el espectro visible y sólo por la contribución *electrónica* en la zona visible. En las frecuencias mayores (rayos X), se producen interacciones al nivel de la estructura cristalina y ya no es posible hablar de constante dieléctrica.

La dependencia de  $k$  con la frecuencia exige que el índice de refracción del medio sea función de la frecuencia. La variación del índice de refracción explica los fenómenos de dispersión observados cuando se produce la refracción de un haz de ondas de

distinta frecuencia. Es un caso conocido la dispersión en todo el espectro visible (arco iris) de la luz blanca al refractarse en un prisma de vidrio.

## Nociones sobre las acciones retardadas

La teoría de los campos cilíndricos permite obtener un resultado conceptual importante. Imaginemos un punto del espacio en el que ocurre una modificación brusca de los campos electromagnéticos (provocada, por ejemplo, por el cierre de un interruptor de un circuito). Es claro que *transcurrido un cierto tiempo* tendrá lugar una modificación del campo en todo el espacio. En efecto la modificación introducida genera ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad  $c$  y que, por tanto, “alcanzan” un punto cualquiera del espacio, alejado del punto inicial de la perturbación, una vez ha transcurrido un cierto tiempo igual a  $l/c$  donde  $l$  es la distancia entre los dos puntos.

En un fenómeno dinámico cualquiera ocurre algo similar. Los diversos puntos del espacio afectados siguen las perturbaciones pero con tiempos *retardados*. En exposiciones anteriores, al estudiar los circuitos de corriente alterna, suponíamos que las ecuaciones en régimen estático se verificaban para fenómenos “suficientemente lentos”. Estamos ahora en condiciones de especificar su significado. Entendemos por fenómeno “suficientemente lento” *aquel que ocurre en un circuito de dimensiones físicas pequeñas comparadas con la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de trabajo*. En este caso puede admitirse que no existe retardo en la acción del campo en los diversos puntos del circuito y que cada punto sigue instantáneamente las modificaciones impuestas por el generador. Como criterio, puede adoptarse, por ejemplo, que la longitud máxima entre dos puntos del circuito sea inferior al 1 % de la longitud de onda correspondiente a la frecuencia de trabajo. Así, en los circuitos de tamaño inferior a un metro es aplicable la teoría de los circuitos hasta una frecuencia del orden de los *megaHz*.

En los circuitos cuyas dimensiones son comparables a las frecuencias de servicio es necesario tener en cuenta la propagación a velocidad  $c$  de los campos y por lo tanto las leyes estáticas no tienen validez.

Análogamente ocurre con la ley de Faraday aplicada a espiras en movimiento. La ley es válida en tanto la velocidad de los puntos en movimiento sea pequeña comparada con  $c$ , pero cuando esta velocidad es comparable, hay que tener en cuenta los retardos producidos por la propagación del campo.

Desde el punto de vista matemático, es posible estudiar toda la teoría de las ondas electromagnéticas estacionarias suponiendo acciones a distancia entre dos cargas o dos corrientes (fuerza de actuación dada por una fórmula conveniente), en lugar de basarnos en la teoría del campo, que presupone la posibilidad de que en cada punto del espacio exista una fuerza, independientemente de que haya o no un elemento capaz

de detectarla. Obsérvese que en el primer método de estudio sólo hay fuerzas ejercidas entre los elementos, mientras que en el segundo se presente un estado físico especial extendido a todo el espacio y es la interacción de dos campos que crea la fuerza entre dos elementos. En la teoría del campo se llega incluso a atribuir una densidad de energía al vacío, *almacenada bajo la forma de campo*. En la interpretación por de acción a distancia, la energía potencial de las fuerzas de interacción se almacena en una forma misteriosa, similar a la de un resorte, con la diferencia esencial de que no existe medio material alguno que la contenga. Esta manera de razonar creó la noción de éter, que se definía como un *fluido elástico que llenaba el vacío*, responsable del almacenamiento de la energía potencial de la acción a distancia.

La interpretación de la acción a distancia falla básicamente por la existencia de una velocidad de propagación de las interacciones, porque es muy difícil admitir que la atracción entre dos cargas se retrase un cierto tiempo y no ocurra instantáneamente. Sin embargo, para obviar este defecto de la teoría se atribuyó al éter la propiedad de propagar vibraciones elásticas, comportándose de modo análogo a un resorte. Las ecuaciones obtenidas a partir de la noción de campo pueden expresarse en forma coherente suponiendo acciones a distancia y teniendo en cuenta el retardo de sus efectos. La aparición de la teoría de la relatividad anuló toda posibilidad de interpretar razonablemente los fenómenos en términos de acciones retardadas en lugar de campos, si bien hay que señalar nuevamente que tal formulación es posible *desde el punto de vista matemático*.

## Formulación puntual de las ecuaciones de Maxwell

Esta sección es de una dificultad matemática superior al resto del libro y se ha incluido en el texto para servir de puente entre los estudios realizados en esta obra y la formulación de la teoría en obras avanzadas. *Sólo recomendamos su lectura si el lector posee conocimientos claros del análisis vectorial.*

Con la aplicación de los teoremas de la divergencia y del rotor, es posible convertir las expresiones integrales de las ecuaciones de Maxwell en ecuaciones puntuales, o sea, en ecuaciones diferenciales. Desde un punto de vista físico es preferible utilizar la formulación integral que la diferencial, puesto que aquélla permite estudiar las discontinuidades del campo. Esta objeción es discutible si se piensa en términos de *distribuciones*, que permiten el tratamiento preciso de las discontinuidades.

Estudiemos primero las leyes del flujo. Consideremos una superficie  $S$  y que encierra un volumen  $V$  y sea  $\vec{n}$  el vector unidad, normal y saliente a  $S$ . La ecuación de la divergencia establece para cualquier campo de vectores  $\vec{A}$  que se considere

$$\int_S \vec{n} \times \vec{A} dS = \int_V \nabla \times \vec{A} dV$$



La ley de flujo de  $D$  puede escribirse entonces como

$$\int_S \vec{n} \times \vec{D} dS = \int_V \rho dV$$

o sea

$$\int_V (\nabla \times \vec{D} - \rho) dV = 0$$

Pero entonces, si no se verificara en todo punto del espacio

$$\nabla \times \vec{D} = \rho$$

sería posible conseguir un volumen  $V$  en el entorno de donde no se verifica, en el cual la integral de la ley del flujo no fuera cero. Luego no es posible. En forma similar puede obtenerse para el flujo de  $\vec{B}$

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

y para el flujo de  $\vec{J}$

$$\nabla \times \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En las leyes de la circulación, se recurre al teorema del rotor o del rotacional. Consideremos una curva cerrada  $C$  y una superficie  $S$  limitada por la curva  $C$ . Sea  $\vec{n}$  la normal a  $S$  de sentido según la regla del sacacorchos. La ecuación del rotor da, para cualquier campo de vectores  $\vec{A}$

$$\int_C \vec{A} \times d\vec{P} = \int_S \vec{n} \times (\nabla \wedge \vec{A}) dS$$

La ley de Faraday puede escribirse, entonces como

$$\int_C \vec{E} \times d\vec{P} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{n} \times \vec{B} dS$$

Aplicando el teorema del rotor se puede escribir

$$\int_S \vec{n} \times \left( \nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dS = 0$$

Pero entonces, si no se verificara la ecuación

$$\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

en cada punto del espacio, sería posible conseguir una superficie  $S$ , en el entorno de un punto en el cual no se verifica, donde la integral sería diferente de cero, en contradicción con la ley de Faraday.

En forma similar se obtiene

$$\nabla \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}$$

Tenemos entonces que el enunciado puntual de las ecuaciones de Maxwell afirma que el campo electromagnético se compone de cuatro campos vectoriales  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  que verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \vec{B} &= 0, \\ \nabla \wedge \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, & \nabla \times \vec{D} &= \rho, \\ \nabla \times \vec{J} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t}.\end{aligned}$$

A estas ecuaciones se agregan las relaciones materiales entre los vectores y las ecuaciones de transición.

# Campo electromagnético en presencia de conductores

## Onda en un conductor

Consideremos un conductor que presenta una cara plana sobre la cual incide normalmente una onda según la Figura 145. Las intensidades de los campos en la superficie exterior del conductor valen

$$E' = A \cos \omega t, \quad B' = \frac{A}{c} \cos \omega t.$$

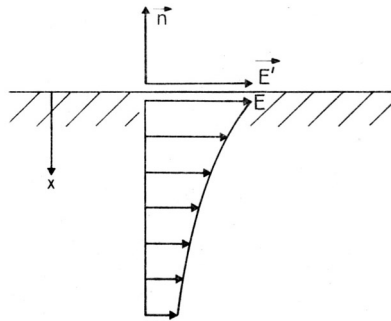


Figura 145: Onda incidente sobre un conductor.

En el capítulo anterior, página 226, obtuvimos las expresiones de las ecuaciones de campo en un material conductor

$$E = A e^{-x/\delta} \cos(x/\delta - \omega t),$$

$$B = \frac{A}{\delta \omega} e^{-x/\delta} [\cos(x/\delta - \omega t) - \text{sen}(x/\delta - \omega t)],$$

en las que  $\delta = \sqrt{2/\mu\gamma\omega}$  es la llamada *longitud de penetración del campo* en el metal para la frecuencia considerada.

El campo interno en el conductor decrece exponencialmente con la distancia recorrida en el medio. En particular, para una distancia de  $10\delta$ , el campo ha disminuido su amplitud en  $10^{-4}$  veces aproximadamente. Un valor interesante de  $\delta$  correspondiente al cobre es

$$\delta = \frac{6,6}{\sqrt{f}} \text{ cm}$$

de modo que a las frecuencias del orden del *megaHz*,  $\delta$  vale algunas centésimas de milímetro. En algunas décimas de milímetro, la intensidad de los campos se reduce a valores totalmente despreciables.

Este resultado proporciona algunas consecuencias notables. Un conductor cilíndrico de radio  $r$  se comporta de modo diferente según la frecuencia a la cual es sometido. Para frecuencias bajas,  $\delta \gg r$ , la distribución de corriente en la sección es aproximadamente uniforme. Cuando el radio del conductor se aproxima al valor de  $\delta$ , la distribución pierde uniformidad y las corrientes tienden a concentrarse en la superficie. Para frecuencias en que  $\delta$  es mucho menor que el radio, se puede admitir que las corrientes circulan solamente por una fina capa de la superficie del conductor. En 50 Hz, una frecuencia típica de distribución de la energía eléctrica  $\delta$  vale 1,2 mm y esto hace que los conductores de más de 1 milímetro de sección no tienen una distribución uniforme de la corriente a lo largo de su sección.

En esta interpretación del fenómeno (que puede obtenerse en forma analítica), se ha supuesto que el campo que crea las corrientes proviene del exterior del conductor. Sin embargo, es claro que un generador cualquiera, no puede crear un campo de alta frecuencia en el interior del conductor puesto que el generador recibe y cede su energía en forma superficial. Por otra parte, la interpretación dada en el capítulo anterior a este fenómeno usando el vector de Poynting, refuerza este modo de interpretar los fenómenos.

Al pasar una corriente alterna por un conductor cilíndrico hemos de esperar que se tendrá un aumento importante de la resistencia en función de la frecuencia aplicada. Por otra parte, cabe esperar también que en el conductor, la corriente y la tensión estén defasadas, debido al retraso en las zonas alejadas. Este desfase se representa como una self en serie con la resistencia real. Una expresión aproximada de la resistencia a frecuencias altas, es la llamada *fórmula de Rayleigh*, válida para  $\delta$  pequeño comparado con el radio del conductor es

$$\frac{R + j\omega L}{R_0} = \frac{1}{2} (1 + j) \frac{r}{\delta}$$

donde  $R_0$  es la resistencia en corriente continua. xxxx Ojo, revisar xxxx

Si consideramos pequeños valores de  $\delta$ , las condiciones de transición en la superficie dieléctrico–conductor pueden expresarse en forma aproximada. Como los campos estudiados se anulan en un pequeño espesor (conductividad grande), las ecuaciones de transición se convierten en

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{D} &= 0, & \vec{n} \wedge \vec{E} &= 0, \\ \vec{n} \times \vec{B} &= 0, & \vec{n} \wedge \vec{H} &= \vec{j}. \end{aligned}$$

donde  $\vec{j}$  es la corriente “superficial”.

Estas ecuaciones aproximadas son válidas en los conductores reales mientras la frecuencia no sea tan baja que haya que considerar una penetración apreciable del campo y en tanto que la frecuencia no sea demasiado alta como para no poder despreciar las corrientes de desplazamiento en el conductor. En la práctica, las frecuencias comprendidas entre  $10^6$  y  $10^{13}$  constituyen un intervalo suficientemente válido para los buenos conductores (cobre, aluminio, plata, etc.). El estudio de los conductores en las frecuencias ópticas presenta una cierta semejanza con el estudio de los dieléctricos. Sin embargo, hay que señalar la atenuación exponencial que tiene lugar en las ondas refractadas, debido a la conductividad del medio. Por este motivo, los cuerpos conductores son opacos a la luz (excepto en espesores muy delgados) y los dieléctricos con bajo ángulo de pérdidas, son transparentes. En general, puede afirmarse que en todos los medios reales, las ondas refractadas son absorbidas exponencialmente por el medio, ya sea por su conductividad o por las pérdidas dieléctricas.

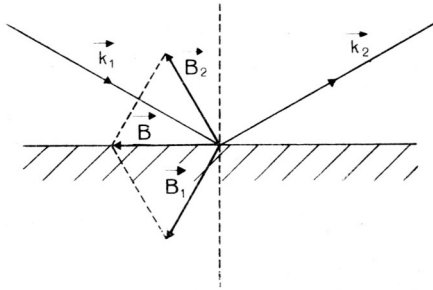


Figura 146: Onda reflejada en un conductor, primer caso.

Un estudio interesante que merece ser destacado es la reflexión metálica de las ondas electromagnéticas considerando las hipótesis simplificativa. Sea en primer lugar el caso de una onda incidente cuyo plano de polarización es normal al plano de incidencia. Como en la superficie, el campo eléctrico es tangencial, su valor debe ser nulo. Sean  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  las intensidades de los campos de las ondas incidente y reflejada, debe cumplirse la ecuación

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$$

de modo que los vectores  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$  deben ser normales a  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , por lo tanto deben estar en el mismo plano. Por esta razón las frecuencias y las amplitudes de las ondas coincidirán y estarán defasadas en un ángulo  $\pi$ . En la Figura 146 se han dibujado los campos magnéticos. Como el campo resultante debe ser tangencial, se deduce inmediatamente que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, puesto que los módulos de los campos coinciden.

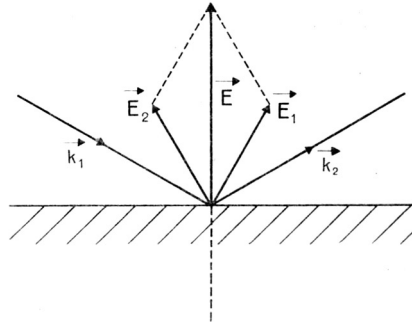


Figura 147: Onda reflejada en un conductor, segundo caso.

Si consideramos una onda polarizada en el plano de incidencia, como el campo eléctrico total debe ser normal a la superficie, tendremos, según la Figura 147.  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  son coplanares, luego también lo son  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$ . Si suponemos que no existe pérdida alguna de energía en la reflexión de las ondas tenemos  $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ . Luego, los ángulos de incidencia y refracción coinciden y las ondas están en fase.

Sin la hipótesis hecha no es posible calcular los valores de  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  ni obtener la relación entre los ángulos de incidencia y refracción. Nos encontramos ante una nueva paradoja de sobresimplificación.

### Presión de radiación

Calculemos la fuerza media que experimenta un conductor sobre el cual incide una radiación. Supondremos además que no *existe onda reflejada* (cuerpo negro) y que la incidencia se realiza en ángulo normal a la superficie. La fuerza ejercida por unidad de volumen vale

$$\vec{F} = \rho \vec{E} + \vec{J} \wedge \vec{B} = \gamma \vec{E} \wedge \vec{B}$$

puesto que suponemos nula la densidad de cargas en el conductor (es decir, estamos en las mismas condiciones en las que pueden despreciarse las corrientes de desplazamiento). El valor medio en el tiempo de  $\vec{F}$ , que llamaremos  $\vec{F}_m$ , se obtiene aplicando las ecuaciones del campo en el interior del conductor

$$F = \frac{\gamma A^2}{\delta \omega} e^{-2x/\delta} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2 \left( \frac{x}{\delta} - \omega t \right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2 \left( \frac{x}{\delta} - \omega t \right) \right],$$

$$F_m = \frac{\gamma A^2}{2 \delta \omega} e^{-2x/\delta}$$

Esta fuerza se ejerce en dirección normal a la superficie y *dirigida hacia el conductor*. El valor de la fuerza por unidad de área se puede obtener integrando la ecuación

anterior a todo el volumen del metal. Si la frecuencia de la corriente es lo suficientemente alta, como para que  $\delta$  sea pequeño, la integral extendida a todo el conductor puede sustituirse, sin error apreciable, por una integral desde cero a infinito. La fuerza por unidad de áreas, o sea la presión, es

$$p = \int_0^\infty F_m dx = \frac{\gamma A^2}{4\omega}$$

Este valor de la presión coincide aproximadamente con el resultado teórico obtenido sin realizar aproximaciones empleando las expresiones de las ecuaciones de campo

$$p = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 \overline{E_0^2} + \frac{\overline{B_0^2}}{\mu} \right) = \frac{A^2}{2} \left( \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\mu \delta^2 \omega^2} \right) \approx \frac{\gamma A^2}{4\omega}$$

donde la barra indica el valor medio en el tiempo y el subíndice cero denota los valores de los campos para  $x = 0$ .

Puede obtenerse nuevamente este resultado teniendo en cuenta las aproximaciones que hicimos sobre el comportamiento de los conductores ideales. Si admitimos, como anteriormente, que el campo aplicado sobre las cargas y las corrientes es la mitad de los campos próximos a ellas, resulta

$$p = \frac{1}{2} \sigma \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{j} \wedge \vec{B} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$$

Este razonamiento puede elaborarse un poco más, siguiendo las mismas líneas que en el caso electrostático, pero no tiene mayor interés, puesto que se parte de unas condiciones aproximadas.

La presión ejercida sobre los conductores recibe el nombre de *presión de radiación*. El fenómeno es de naturaleza tal que la onda es “frenada” por el conductor, ocasionando a su vez una presión en el sentido de su movimiento.

La búsqueda de la reacción correspondiente a la presión de radiación ha desatado un enorme estudio teórico del problema, todavía no resuelto completamente.

### Cavidades resonantes

Consideremos un paralelepípedo hueco de paredes conductoras que pueden suponerse de conductividad infinita. Sean  $a, b$  y  $c$  las dimensiones interiores de la cavidad. Nos proponemos hallar los posibles campos electromagnéticos en el interior del paralelepípedo.

En cada punto interior se deben verificar las ecuaciones de Maxwell y en cada punto de la superficie, las ecuaciones de transición simplificadas: el campo eléctrico debe

ser normal a la superficie conductora y el campo magnético debe incidir tangencialmente.

Para estudiar este problema analizaremos nuevos campos posibles en un medio dieléctrico perfecto. En la página 235 obtuvimos las expresiones de los campos

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega (\vec{k} \times \vec{r} - t)$$

$$\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E},$$

en las que  $\vec{E}_0$  es un vector cualquiera normal a  $\vec{k}$  y  $\vec{k}$  es un vector cualquiera de módulo  $1/c$ . Estas expresiones constituyen un posible campo electromagnético. Supongamos que llamamos

$$\vec{E}_0 = (E_1, E_2, E_3), \quad \omega \vec{k} = (\alpha, \beta, \gamma),$$

se verifica entonces, por la definición de  $\vec{k}$ , que

$$\alpha E_1 + \beta E_2 + \gamma E_3 = 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2},$$

de forma que el campo eléctrico está dado por

$$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3) \cos (\alpha x + \beta y + \gamma z - \omega t),$$

Además, una onda estacionaria puede escribirse de la forma

$$\vec{E} = (E_1, E_2, E_3) \cos (\alpha x + \beta y + \gamma z) \cos \omega t,$$

que es la superposición de dos ondas que se propagan en sentido contrario, están en fase y son de igual amplitud. En los estudios que siguen, se omite el factor  $\cos \omega t$  por razones de simplificación. La expresión

$$\vec{E} = (-E_1, E_2, E_3) \cos (-\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

también representa un campo posible que verifica las mismas condiciones que el anterior, puesto que el vector  $(-E_1, E_2, E_3)$  es normal a  $\vec{k}' = (-\alpha, \beta, \gamma)$  y sus relaciones con la frecuencia son independientes de los signos de  $\alpha, \beta, \gamma$ . En forma similar, los siguientes campos también son posibles

$$\vec{E} = (E_1, -E_2, E_3) \cos (\alpha x - \beta y + \gamma z)$$

$$\vec{E} = (E_1, E_2, -E_3) \cos (\alpha x + \beta y - \gamma z)$$



Es fácil verificar la igualdad trigonométrica

$$-4 \cos \alpha x \operatorname{sen} \beta y \operatorname{sen} \gamma z = \cos (\alpha x + \beta y + \gamma z) + \cos (-\alpha x + \beta y + \gamma z) - \cos (\alpha x - \beta y + \gamma z) - \cos (\alpha x - \beta y - \gamma z).$$

sustituyendo sucesivamente las expresiones del segundo miembro por sus expresiones equivalentes de sumas de arcos. Consideramos ahora un campo superposición de

$$-\frac{1}{4}(E_1, E_2, E_3) \cos (\alpha x + \beta y + \gamma z) - \frac{1}{4}(-E_1, E_2, E_3) \cos (-\alpha x + \beta y + \gamma z) + \frac{1}{4}(E_1, -E_2, E_3) \cos (\alpha x - \beta y + \gamma z) + \frac{1}{4}(E_1, E_2, -E_3) \cos (\alpha x + \beta y - \gamma z)$$

podemos comprobar, utilizando la ecuación trigonométrica anterior y otras relaciones similares deducidas intercambiando los términos  $\alpha x, \beta y, \gamma z$  que el campo resultante tiene la forma

$$E_x = E_1 \cos \alpha x \operatorname{sen} \beta y \operatorname{sen} \gamma z \cos \omega t$$

$$E_y = E_2 \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta y \operatorname{sen} \gamma z \cos \omega t$$

$$E_z = E_3 \operatorname{sen} \alpha x \operatorname{sen} \beta y \cos \gamma z \cos \omega t$$

El cálculo del campo magnético no puede obtenerse fácilmente a partir de estas ecuaciones y es necesario rehacer los cálculos desde el comienzo. De todas maneras no tiene demasiado interés.

El estudio del problema del campo electromagnético en una cavidad rectangular puede realizarse a partir de las expresiones obtenidas. Busquemos las soluciones con una forma similar a las anteriores y que cumplan las condiciones en las superficies conductoras:

para $x=0$ y $x=a$	$E_y = E_z = 0$	$\operatorname{sen} \alpha a = 0$
para $y=0$ y $y=b$	$E_x = E_z = 0$	$\operatorname{sen} \beta b = 0$
para $z=0$ y $z=c$	$E_x = E_y = 0$	$\operatorname{sen} \gamma c = 0$

Estas condiciones se verifican cuando se cumple

$$\alpha = \frac{p}{a} \pi, \quad \beta = \frac{q}{b} \pi, \quad \gamma = \frac{r}{c} \pi, \quad p, q, r = 0, 1, 2, \dots$$

Como  $p, q, r$  son números enteros cualquiera, obtenemos un número infinito de campos posibles en la cavidad según sean los valores de los tres números elegidos. Cada uno de estos campos recibe el nombre de *modo de la cavidad* y puede demostrarse que todo campo en ella, es la superposición de modos como los obtenidos. En interesante

hacer notar la existencia de *solamente ciertas frecuencias permitidas* para los campos, que se obtienen mediante la fórmula

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2} = \frac{4}{\lambda^2}$$

En particular, si  $a > b > c$ , la *frecuencia mínima* de existencia de un campo en la cavidad es la correspondiente a

$$\lambda_{max} = \frac{2}{\sqrt{1/a^2 + 1/b^2}}$$

puesto que dos de los tres números  $p, q, r$ , como mínimo dos deben ser diferentes de cero para que el campo resultante no sea nulo y la expresión elegida es la que da la menor frecuencia con esta condición.

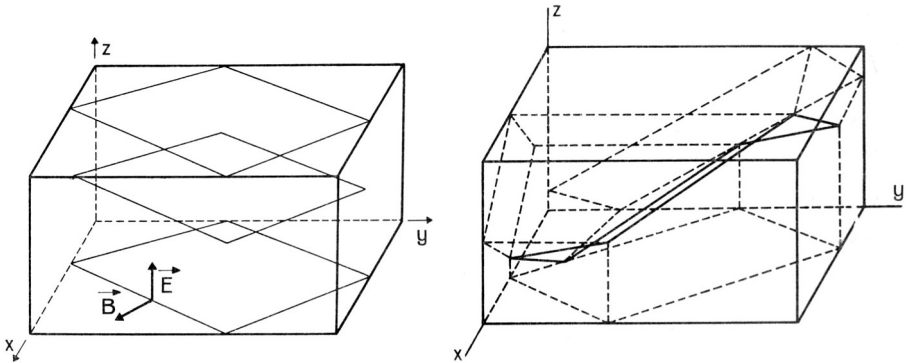


Figura 148: Modos en una cavidad resonante.

Este modo puede interpretarse como una onda polarizada contenida en un plano paralelo al eje  $z$ , que se refleja sucesivamente en las paredes de la cavidad, tal como puede verse en la Figura 148. Si consideramos el modo  $p = q = r = 1$ , tendremos ondas que se reflejan en todas las caras de la cavidad, que también se muestran en la figura.

Obsérvese que los modos definidos por números enteros mayores que la unidad son en realidad modos de cavidades más pequeñas, que se repiten hasta completar la cavidad considerada. Esto se comprende fácilmente si imaginamos una nueva superficie de separación y establecemos dos modos iguales en cada una de las cavidades resultantes. Es claro que el campo verifica las condiciones que existen en las superficies y, por lo tanto, al prescindir de la superficie divisoria se obtiene una nueva solución de las ecuaciones de campo.

Hasta el momento hemos estudiado cavidades ideales cuyas paredes poseen una conductividad infinita; las cavidades reales disipan una cierta energía, lo que obliga a *mantener el campo desde el exterior*. En los intentos para establecer un modo determinado en una cavidad real, se han introducido dos electrodos formando un pequeño condensador en una dirección apropiada y en un punto en que el campo eléctrico es máximo, o bien, se ha colocado una pequeña espira, orientada convenientemente, en un punto en que el campo magnético es máximo. Un generador de corriente alterna, de la frecuencia conveniente instalado en el exterior, suministra la energía para compensar las pérdidas en las paredes y eventualmente las pérdidas en el dieléctrico. Como es natural, la frecuencia del generador exterior puede ser cualquiera. Ahora bien, estamos nuevamente ante una paradoja de simplificación excesiva, puesto que afirmamos por un lado que es posible establecer un campo de una frecuencia cualquiera y por otro lado desde el punto de vista matemático sólo hemos obtenido soluciones de ciertas frecuencias. ¿Qué interpretación debe darse a esta situación? Hemos de pensar que las limitaciones impuestas a las frecuencias de los campos provienen de las condiciones exigidas en las superficies metálicas al suponerlas ideales. En una superficie metálica de conductividad finita puede existir un campo eléctrico tangencial (véase Figura 145) aunque de valor pequeño. La cavidad puede crear campos diferentes pero a costa de disminuir enormemente su intensidad. Por este motivo, si variamos gradualmente toda la gama de frecuencias del generador exterior que establece el campo, se presentarán *máximos de intensidad* cuando se alcancen frecuencias coincidentes con los modos posibles en la cavidad ideal. Por esta razón se suelen llamar *frecuencias de resonancia* a las frecuencias de los modos de la cavidad ideal.

Es posible construir cavidades de las más diversas formas, aparte de la rectangular. En todas ellas, los fenómenos estudiados se repiten: existen ciertas frecuencias permitidas y ciertos modos en la cavidad ideal que pueden obtenerse en forma análoga.

### Conductor coaxial

Consideremos un conductor formado por dos cilindros concéntricos de radios  $R_1$  y  $R_2$  en cuya cavidad anular se encuentra un medio de velocidad de propagación  $c$ , según la Figura 149. Nos proponemos determinar los campos solución en el plano de la sección. Como es sabido, las expresiones

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega (\vec{k} \times \vec{r} - t)$$

$$\vec{B} = \vec{k} \wedge \vec{E},$$

son soluciones de las ecuaciones de campo siempre que se les impongan las condiciones derivadas de las leyes de flujo y las condiciones de transición en la superficie del conductor.

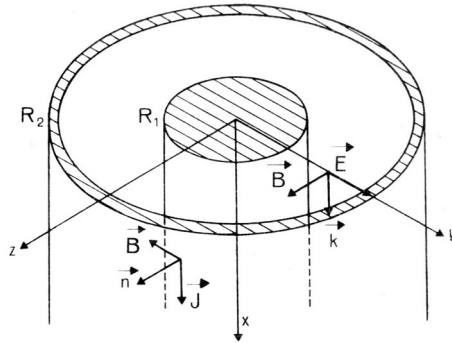


Figura 149: Campos en un conductor coaxial.

Supongamos además que, en cada punto,  $\vec{E}$  es un vector radial y que, por tanto,  $\vec{B}$  es un vector tangencial. Admitiendo que existe una simetría de revolución, la intensidad de los campos depende sólo de la distancia  $r$  al eje de los cilindros. Tendremos entonces como solución

$$E_r = A(r) \cos \omega (x/c - t),$$

$$B_t = \frac{A(r)}{c} \cos \omega (x/c - t).$$

Falta aplicar las leyes del flujo a estas ecuaciones. La ley del flujo de  $\vec{D}$  establece que

$$2\pi A(r) \cos \omega (x/c - t) = \frac{2\pi R_1 \sigma(x, t)}{\epsilon}$$

de la cual se deduce inmediatamente que la función  $A(r)$  verifica

$$A(r) = \frac{A}{r}$$

donde  $A$  es una constante a determinar. La diferencia de potencial<sup>10</sup> en un punto cualquiera de la línea entre los dos conductores vale

$$V(x, t) = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = A \ln \frac{R_2}{R_1} \cos \omega (x/c - t).$$

La corriente superficial puede calcularse con las ecuaciones de transición de  $\vec{B}$ . En  $R_1$  vale

$$J = \frac{B(R_1)}{\mu_0}$$

<sup>10</sup> Este concepto tiene un significado físico puesto que la distribución de campo eléctrico en una sección  $x$  coincide con el campo electrostático entre dos cilindros conductores concéntricos y es, por lo tanto, conservativo.

La corriente total en el conductor interior vale entonces

$$I(x, t) = 2\pi R_1 J = 2\pi R_1 \frac{A}{c\mu_0 R_1} \cos \omega (x/c - t) = A \frac{2\pi}{c\mu_0} \cos \omega (x/c - t).$$

La corriente que circula por el conductor exterior debe ser igual a la del conductor interior pero dirigida en sentido contrario.

Hay que señalar que si consideramos una onda que se propaga en la dirección contraria al eje de las  $x$  habríamos obtenido una solución del tipo

$$V(x, t) = A \ln \frac{R_2}{R_1} \cos \omega (x/c + t),$$

$$I(x, t) = -A \frac{2\pi}{c\mu_0} \cos \omega (x/c + t).$$

Como es natural, la superposición de ambas soluciones conduce también a una solución de los campos en el conductor coaxial.

Podemos ahora calcular la constante  $A$  si fijamos la situación en que se encuentra el conductor coaxial. Si designamos con  $Z_0$  al término

$$Z_0 = \frac{c\mu_0 \ln R_2/R_1}{2\pi}$$

que se conoce con el nombre de *resistencia característica* del conductor coaxial, observaremos que la corriente y la tensión de cada punto de la línea coaxial verifican cada una de las soluciones obtenidas

$$V(x, t) = Z_0 I(x, t)$$

de modo que es posible terminar la línea coaxial en un elemento que posea una resistencia  $Z_0$  sin modificar los campos obtenidos.<sup>11</sup> La formación de un elemento resistivo de tal naturaleza no es sencilla puesto que las corrientes distribuidas de alta frecuencia que salen del conductor interior deben llegar en forma simétrica al conductor exterior a través de una resistencia efectiva  $Z_0$ . Obtenido este elemento, las ondas de campo se propagan hasta el fin de la línea y son absorbidas en el extremo. Es evidente la necesidad de poseer un generador que alimente la línea, que lo supondremos colocado en  $x = 0$ . Si la tensión del generador vale  $V \cos \omega t$  y la línea tiene una longitud  $l$  tenemos en el generador

$$V \cos \omega t = A \ln \frac{R_2}{R_1} \cos \omega t, \quad A = \frac{V}{\ln R_2/R_1}$$

<sup>11</sup> En los cables coaxiales reales esta resistencia es del orden de 100 ohms. Así por ejemplo, si  $R_1 = 0,5$  mm y  $R_2 = 3$  mm se obtiene  $Z_0 = 2 \times 10^{-7} c \ln (3/0,5) \approx 53,7$  ohms.

y la corriente vale  $I = V/Z_0$ . En el extremo  $x = l$  se tiene

$$V(l, t) = V \cos \omega (l/c - t).$$

Si componemos las soluciones obtenidas para los campos del coaxial, con el mismo valor de A, da lugar a las expresiones de una solución estacionaria

$$V(x, t) = A \ln \frac{R_2}{R_1} \cos \frac{\omega x}{c} \cos \omega t,$$

$$I(x, t) = A \frac{2\pi}{c\mu_0} \sin \frac{\omega x}{c} \sin \omega t,$$

que nos indican que el resto de la línea puede ser sustituido por un elemento que posea la misma relación entre la tensión y la corriente que la relación correspondiente a la solución. Si la longitud de la línea es  $l$ , el elemento extremo debe tener una impedancia

$$Z = j \frac{Z_0}{\operatorname{tg}(\omega l/c)} = j \frac{Z_0}{\operatorname{tg}(2\pi l/\lambda)}$$

(donde  $j$  es ahora la unidad imaginaria) puesto que la tensión adelanta a la corriente en un ángulo  $\pi/2$ . En particular, si la longitud de la línea es un múltiplo impar del cuarto de longitud de onda correspondiente a la frecuencia de trabajo, se tendrá  $Z = 0$  y el elemento final será un conductor de baja resistencia. En cambio, si la línea posee un número par de cuartos de longitud de onda, se tendrá  $Z = \infty$ , o sea, la línea quedará abierta.

Obsérvese en estos casos, que el generador no cede corriente alguna, puesto que  $I(0, t) = 0$ . Ello se explica puesto que en todo momento hemos supuesto que los conductores no poseen resistencia (conductividad infinita). En una línea coaxial real existen pérdidas de energía en los conductores y ya no es posible conseguir una corriente nula en el generador.

Naturalmente, este estudio no es exhaustivo y pueden encontrarse otras soluciones. Sea, por ejemplo, un generador  $V$  colocado en el extremo  $x = 0$  de la línea y supongamos cortada la línea en un punto cualquiera en el que situamos un elemento de impedancia arbitraria. Desde el punto de vista físico debe existir una solución para este problema la cual no hemos determinado todavía por no haber superpuesto en forma conveniente las soluciones de que disponemos.

El estudio de un caso general (línea de longitud  $l$  terminada en una impedancia cualquiera) exige un planteo más general que permita extraer algunas consecuencias interesantes.

Recordemos las ecuaciones obtenidas en el capítulo anterior, página 225

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t},$$

$$c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\frac{\partial E_y}{\partial t}.$$

Vimos que aplicando el principio de simetría de revolución las soluciones de estas ecuaciones, se podían escribir como

$$E_r = A(r) f(x, t), \quad B_t = A(r) g(x, t).$$

Donde  $f$  y  $g$  son dos funciones convenientes (sinusoides de los tipos considerados). La ley del flujo de  $\vec{D}$  indica inmediatamente

$$2\pi r A(r) f(x, t) = \frac{2\pi R_1 \sigma(x, t)}{\epsilon}, \quad A(r) = \frac{A}{r}.$$

El cálculo de la tensión y la corriente en cada punto se realiza como en los ejemplos anteriores

$$V(x, t) = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = A \ln \frac{R_2}{R_1} f(x, t) = \ln \frac{R_2}{R_1} r E_r,$$

$$I(x, t) = 2\pi R_1 j = \frac{2\pi}{\mu_0} A g(x, t) = \frac{2\pi}{\mu_0} r B_t$$

Si derivamos estas fórmulas respecto a  $x$  y aplicamos las ecuaciones de los campos obtenemos

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} = \ln \frac{R_2}{R_1} r \frac{\partial E_r}{\partial x} = -\ln \frac{R_2}{R_1} r \frac{\partial B_t}{\partial t} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = -\frac{Z_0}{c} \frac{\partial I(x, t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial x} = \frac{2\pi}{\mu_0} r \frac{\partial B_t}{\partial x} = -\frac{2\pi}{c^2 \mu_0} r \frac{\partial E_r}{\partial t} = \frac{2\pi}{c^2 \mu_0 \ln(R_2/R_1)} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{Z_0 c} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t}$$

Cualquier distribución de corrientes y de tensiones en la línea debe satisfacer estas ecuaciones. Es fácil pasar de  $V(x, t)$ ,  $I(x, t)$  a  $E_r$ ,  $B_t$  una vez conocida la solución. Como en cada punto de la línea la tensión y la corriente son sinusoidales, podemos representar  $V$  e  $I$  con vectores complejos que dependan de  $x$ . De estas consideraciones, se desprende que las ecuaciones que verifican la tensión y la corriente son

$$\frac{dV(x)}{dx} = -j \frac{\omega Z_0}{c} I(x), \quad \frac{dI(x)}{dx} = -j \frac{\omega}{Z_0 c} V(x),$$

puesto que la derivada de una onda sinusoidal es otra con  $\pi/2$  en adelante. Si eliminamos  $I$  entre las dos ecuaciones tenemos

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} V(x)$$

ecuación diferencial cuya solución es una expresión del tipo

$$V(x) = a \cos \frac{\omega x}{c} + b \sin \frac{\omega x}{c}$$

donde  $a$  y  $b$  son números complejos arbitrarios. Dejamos como ejercicio la comprobación de esta solución. Para esta expresión de  $V$  se obtiene para  $I$

$$I(x) = \frac{j}{Z_0} \left( -a \sin \frac{\omega x}{c} + b \cos \frac{\omega x}{c} \right)$$

Para determinar  $a$  y  $b$  supongamos que en  $x = 0$  existe un generador de tensión compleja  $V$  —luego  $a = V$ — y que en el extremo  $x = l$  existe una impedancia  $Z$ , luego

$$Z = \frac{V \cos(\omega l/c) + b \sin(\omega l/c)}{-V \sin(\omega l/c) + b \cos(\omega l/c)} \frac{Z_0}{j}$$

de donde obtenemos el valor de  $b$

$$b = V \frac{1 + j Z/Z_0 \operatorname{tg}(\omega l/c)}{j Z/Z_0 - \operatorname{tg}(\omega l/c)}$$

Obsérvese, por ejemplo, que para

$$Z = j \frac{Z_0}{\operatorname{tg}(\omega l/c)}, \quad b = 0, \quad I = -j \frac{V}{Z_0} \sin \frac{\omega x}{c},$$

resultado que coincide con el ya obtenido.

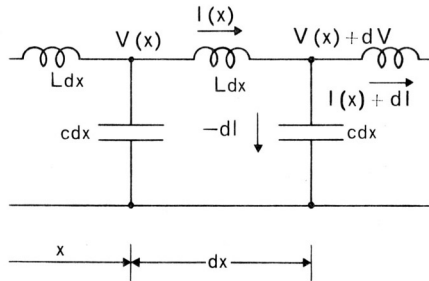


Figura 150: Circuito equivalente de un conductor coaxial.

Las ecuaciones vectoriales complejas son susceptibles de una interpretación interesante. Consideremos, Figura 150, el circuito formado por un cierto número de tramos con bobinas y condensadores, en cada uno distribuidos de modo regular. Las tensiones y corrientes creadas dependen de una variable  $x$ , que es la longitud del circuito. Las ecuaciones que ligan la tensión y la corriente son

$$V(x) = I(x) j\omega L dx + V(x) + dV(x), \quad \frac{dV(x)}{dx} = -j\omega L I(x)$$



$$-dI(x) = V(x) j\omega C dx, \quad \frac{dI(x)}{dx} = -j\omega C V(x)$$

donde se ha supuesto que  $L$  es la self y  $C$  es la capacidad por metro del circuito. Estas ecuaciones coinciden completamente con las de una línea coaxial. Identificando coeficientes de los términos correspondientes resulta

$$C = \frac{1}{Z_0 c}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$L = \frac{Z_0}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

La analogía entre estas ecuaciones puede generalizarse aún más, observando que la capacidad por metro lineal (calculada en régimen estático) de la línea es precisamente

$$C = \frac{1}{Z_0 c} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln R_2/R_1}$$

xxxx en electrostática habría que calcular esta capacidad como un ejemplo antes de la capacidad de una esfera xxxx de modo que la self por metro de la línea coaxial es

$$L = \frac{Z_0}{c} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

que constituye un resultado de especial importancia del que se deduce una interpretación interesante. El campo en un par de conductores coaxiales en régimen estacionario es

$$B_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

y está dirigido en forma tangencial. El flujo que atraviesa una “espira” formada por los dos conductores, de largo  $l$  de longitud vale

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} B l dr = \frac{\mu_0 l I}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

de donde la self por unidad de longitud del conductor coaxial es

$$L = \frac{\Phi}{l I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

Estos resultados pueden generalizarse a otro tipo de conductores coaxiales. Sin embargo, hay que señalar que es necesario demostrar previamente la intervención de las capacidades y las selfs calculadas en forma estática son las que intervienen una solución dinámica del problema.

Es digno de notar que dos conductores cualesquiera de longitudes comparables a la longitud de onda de la frecuencia de trabajo satisfacen las ecuaciones vectoriales del tipo estudiado. Sin embargo, el cálculo de una línea distinta de la coaxial es muy complicado y no lo detallaremos por salirse fuera de los límites de este libro.

Un tramo de una línea coaxial de longitud  $l$ , cerrado por ambos extremos, constituye una cavidad resonante en la cual podemos determinar inmediatamente algunos de sus modos. El campo eléctrico se anula en las bases del tramo puesto que siempre está dirigido radialmente. Esta condición exige que la longitud  $l$  coincida con un número entero de veces la media longitud de onda. Optenemos entonces *algunos modos posibles* de frecuencias de resonancia

$$f = \frac{c}{2l} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Es evidente que existen otros modos posibles en esta cavidad puesto que pueden obtenerse mediante ondas que se reflejan en forma oblicua en las superficies de los conductores. Los modos estudiados no se obtienen así puesto que hemos estudiado la línea coaxial suponiendo que los campos están contenidos en la sección de la línea. Los nuevos modos poseerían además un campo en la dirección axial.

## Guías de onda

Vamos a estudiar los campos que es posible establecer en un tubo de sección rectangular de longitud indefinida. Si volvemos a considerar las soluciones expuestas en la página 249 observaremos que nada impide obtener un campo sustituyendo el término  $\cos \omega t$  por  $\sin \omega t$ . Por otra parte, si desplazamos los ejes coordenados a lo largo del eje  $z$  una cantidad  $\pi/2\gamma$  obtendremos también una nueva solución de las ecuaciones de campo. En definitiva, aplicando el método de superposición, a estas soluciones deducimos que

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \cos \alpha x \sin \beta y [\sin \gamma z \cos \omega t - \cos \gamma z \sin \omega t] \\ &= E_1 \cos \alpha x \sin \beta y \sin (\gamma z - \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_y &= E_2 \sin \alpha x \cos \beta y [\sin \gamma z \cos \omega t - \cos \gamma z \sin \omega t] \\ &= E_2 \sin \alpha x \cos \beta y \sin (\gamma z - \omega t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_z &= E_3 \sin \alpha x \sin \beta y [\sin \gamma z \cos \omega t - \cos \gamma z \sin \omega t] \\ &= E_3 \sin \alpha x \sin \beta y \sin (\gamma z - \omega t) \end{aligned}$$

son una solución de las ecuaciones de Maxwell que representa un campo que se propaga en la dirección  $z$  con una velocidad  $v = \omega/\gamma$ .

Para obtener los campos en un tubo de sección rectangular y dimensiones  $a$  y  $b$  orientado en la dirección del eje de las  $z$ , tendremos que imponer las condiciones, igual que en las cavidades,

$$\begin{array}{lll} \text{para } x=0 \text{ y } x=a & E_y = E_z = 0 & \text{sen } \alpha a = 0 \\ \text{para } y=0 \text{ y } y=b & E_x = E_z = 0 & \text{sen } \beta b = 0 \end{array}$$

De estas ecuaciones se deduce

$$\alpha = \frac{p}{a} \pi, \quad \beta = \frac{q}{b} \pi, \quad p, q = 1, 2, 3, \dots$$

El valor de  $\gamma$  es arbitrario puesto que hemos supuesto que el tubo es indefinido. Las frecuencias posibles de los modos obtenidos cumplen con la condición

$$\frac{4f^2}{c^2} = \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{\pi^2}$$

donde  $p$  y  $q$  no pueden ser nulos a la vez porque el campo resultante será nulo. El valor mínimo de la frecuencia de los modos posibles viene impuesto por la desigualdad  $\gamma > 0$  luego se cumple

$$\frac{4f^2}{c^2} = \frac{4}{\lambda^2} \geq \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}, \quad \lambda \leq \frac{2}{\sqrt{p^2/a^2 + q^2/b^2}}$$

La frecuencia mínima para cada modo se denomina *frecuencia de corte*. Puede observarse nuevamente que las soluciones de la ecuación anterior son ondas que se reflejan en las paredes metálicas del tubo. Ocurre que las ondas de campo aparentan propagarse dentro del tubo con una velocidad aparente  $v = \omega/\gamma$ . Por este motivo, los dispositivos de esta naturaleza se conocen con el nombre de guías de onda. En esta propagación valdrán todas las consideraciones hechas sobre las pérdidas por conducción en las cavidades resonantes. En particular, a frecuencias menores que la de corte, el campo se extingue en la dirección del eje  $z$ . En la práctica, el establecimiento de un campo dentro de una guía requiere un generador exterior que pueda excitar los campos en forma similar a la expuesta en las cavidades resonantes.

En la Figura 151 se han dibujado las sucesivas reflexiones del modo  $p = 1, q = 0$ . En este caso, el campo vale

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y = E_2 \text{ sen } \pi \frac{x}{a} \text{ sen } (\gamma z - \omega t)$$

que es una onda polarizada en un plano paralelo al eje  $y$  que se refleja en las caras  $x = 0, x = a$ . La distancia que es necesario recorrer para reproducir el campo en el sentido del eje de las  $z$  vale

$$l = \frac{2\pi}{\gamma}$$

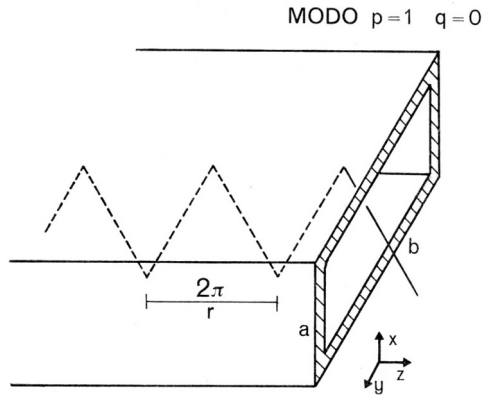


Figura 151: Propagación en una guía de onda.

Es interesante establecer una analogía con las líneas coaxiales. Puede colocarse un generador de excitación de campo en un extremo de la guía. Los campos producidos se propagan hasta el extremo de la guía que puede adoptar una gran variedad de formas. Una superficie conductora provocará reflexiones hacia atrás y la superposición de las dos ondas que se propagan en sentidos contrarios dará lugar a una onda estacionaria. Un receptor apropiado provoca la absorción de los campos, tal como ocurre en las líneas coaxiales cuando la carga al final de las mismas coincide con su impedancia característica. El extremo de la guía puede quedar abierto o terminar en una bocina apropiada para emitir el campo hacia el exterior. Incluso, se puede elaborar una teoría de las impedancias en la guía y efectuar los cálculos de modo análogo a los conductores coaxiales.

Las guías de onda se pueden construir de secciones variadas. En especial, es posible construir guías coaxiales. El estudio realizado en la sección anterior es sencillamente el cálculo de uno de los modos posibles en una guía coaxial. Como es natural, existen otros modos diferentes que experimentan reflexiones en las paredes laterales. Desde un punto de vista físico una línea coaxial y una guía coaxial son idénticas. La diferencia entre ellas reside fundamentalmente en la forma de trabajo y en la frecuencia. La línea se estudia como si fuera un elemento de circuito que trabaja y se alimenta a través de un generador que establece una tensión dada entre los conductores mientras que la guía coaxial trabaja con campos y se excita mediante dispositivos distintos de los generadores y sus dimensiones físicas son claramente distintas. En la línea coaxial pueden emplearse secciones pequeñas, puesto que el único valor que interesa es su impedancia característica. Si la misma línea se utilizara como guía, su frecuencia de corte sería demasiado alta para ser utilizada como tal. En definitiva, la excitación y la frecuencia de servicio definen la forma de trabajo de un dispositivo coaxial ya sea como línea con

el modo estudiado, ya sea como guía con alguno de sus modos posibles.

## Emisión y absorción de ondas

Esta sección ha sido redactada con miras a indicar algunas nociones sobre los mecanismos de emisión y absorción de ondas electromagnéticas.

*Emisión por antena.* La emisión de ondas de una longitud de onda inferior al infrarrojo se realiza por medio de dispositivos metálicos conocidos con el nombre de *antenas*. Dentro de las antenas, se encuentran dos grandes grupos que no tienen un límite definido:

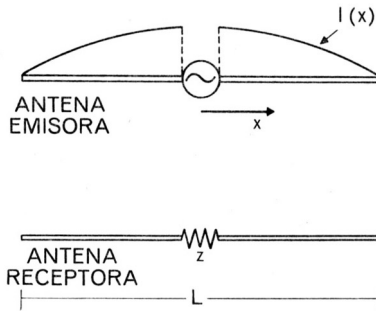


Figura 152: Emisión y recepción por antenas.

El primero lo forma una agrupación de conductores de sección aproximadamente uniforme utilizados como antena para las longitudes de onda superiores al decímetro; las dimensiones de estos conductores son comparables a la longitud de onda de la frecuencia de trabajo. Como ya es sabido, un fenómeno dinámico que tiene lugar en estas condiciones no puede ser estudiado mediante la teoría de circuitos. Si consideramos, ver Figura 152, un par de conductores rectilíneos cuya longitud total es del orden de la media longitud de onda alimentados en su centro por un generador de corriente alterna, se producirá una distribución de corriente similar a la indicada en la figura. Los campos creados por este sistema pueden calcularse perfectamente y a partir de los mismos, el vector de Poynting, permite determinar la potencia que irradia la antena. Desde el punto de vista del generador, la antena se comporta como una impedancia que para frecuencias cercanas a la semilongitud de onda es una resistencia pura conocida con el nombre de *resistencia de radiación*. Esta resistencia ficticia absorbe una potencia equivalente a la irradiada. Existen otras disposiciones diferentes de la indicada, pero en esencia, el esquema de su funcionamiento es similar al descrito. Las ondas que emite una antena están polarizadas en un plano que pasa por los conductores, puesto que el campo eléctrico está dirigido según la línea de los mismos. Agregando nuevos conductores paralelos, a distancias convenientes, es posible conseguir que la

antena irradie prácticamente en una única dirección, con un plano de polarización perfectamente determinado.

La emisión de ondas de longitud comprendida entre los centímetros y las fracciones de milímetro, emplea bocinas que transmiten al espacio la potencia generada.

En general, la alimentación de una antena, se realiza, según sea el caso mediante una línea o una guía de onda, que permite situar el generador varios múltiplos de longitudes de onda alejado de la antena, cuando así lo exijan razones de conveniencia.

*Emisión térmica.* Cuando estudiamos en la sección 3 los modos de una cavidad resonante, las ecuaciones de campo dejaban indeterminados las intensidades de los campos y de hecho hemos supuesto que quedaban definidas por la excitación exterior. Sin embargo, la hipótesis de Einstein sobre el fotón nos permite determinar la amplitud de cada modo en una cavidad sabiendo que su energía guarda una cierta relación con su amplitud. De acuerdo con esta hipótesis, la energía que puede poseer cada modo en una cavidad viene expresada en función de la frecuencia por la ecuación  $W = hf$  donde  $h$  es la constante de Planck. Integrando la densidad de energía correspondiente a cada modo en todo el volumen de la cavidad y aplicando la ecuación de Einstein, podemos determinar perfectamente la amplitud. En realidad, un campo cualquiera establecido en la cavidad se compone de un conjunto de modos elementales (fotones) semejantes al obtenido.

Si consideramos además que las paredes de la cavidad se encuentran a una temperatura  $T$  (absoluta) existirá un intercambio de energía entre las paredes de la cavidad y el campo. Por otra parte, las ondas de longitud inferior a la fracción de milímetro, no son influidas por la forma de la cavidad (suponiendo que su dimensión menor es de varios centímetros) porque como ya hemos visto, los modos de pequeña longitud de onda pueden obtenerse por sumas sucesivas de modos de una cavidad pequeña, hasta cubrir la cavidad dada. Cabe entonces profundizar más y suponer que para longitudes de onda del orden de los rayos infrarrojos o superiores el equilibrio establecido en la cavidad es independiente de la forma de la misma y sólo depende de la temperatura  $T$ . La mecánica estadística permite calcular las condiciones de equilibrio y llegar a la *ecuación de Planck* que relaciona la energía del campo con la frecuencia y la temperatura

$$dW = \frac{V h}{2\pi^3 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{h\omega/2\pi kT} - 1}$$

donde  $W$  es la energía,  $\omega$  es la pulsación de la onda,  $V$  es el volumen de la cavidad y  $k$  es la *constante de Boltzmann*  $k = 1,380 \times 10^{-23}$  joule/ $^\circ K$ .

Si en una cavidad practicamos un orificio parte de la energía del campo saldrá al exterior en forma de radiación, cuya distribución espectral está dada aproximadamente por la ley de Planck. Controlando la temperatura de este dispositivo se logra regular las frecuencias emitidas. Si la temperatura de un metal es suficientemente elevada se

logra una emisión de este tipo. Es un hecho bien conocido que un metal que se caliente a temperaturas del orden de  $600^{\circ}\text{C}$  adquiere un color rojizo que pasa gradualmente al blanco al aumentar la temperatura. El fenómeno, a altas temperaturas consiste en un equilibrio entre los fotones liberados y los atraídos nuevamente por el metal. Se admite, en general, que este tipo de emisión está gobernado aproximadamente por la ley de Planck.

*Emisión espectral.* De acuerdo con las restricciones que impone la mecánica cuántica al movimiento de los electrones sometidos al potencial del núcleo, éstos sólo pueden evolucionar en “órbitas” que poseen ciertos valores discretos de energías, propios de cada átomo. Si se comunica energía a un átomo (por elevación de la temperatura del cuerpo, por una descarga en arco, etc.) algunos electrones pasarán a un nivel de energía superior permitido, pero *inestable*, y después de un lapso de tiempo extremadamente corto saldrán *espontáneamente*, y volverán a su estado normal emitiendo un fotón de una frecuencia dada por la *ecuación de Bohr*  $W_e - W_0 = hf$ , donde  $W_e$  representa la energía del electrón excitado y  $W_0$  la energía del electrón en uno de sus estados inferiores posibles. Este tipo de emisión se caracteriza por presentar en cada átomo ciertas frecuencias características que se reúnen en el denominado espectro de emisión de la sustancia. No debe confundirse en ningún momento esta emisión con la emisión térmica, de naturaleza profundamente distinta y de resultados también profundamente diferentes.

En algunas sustancias el lapso de tiempo que transcurre para que se produzca la emisión espontánea es relativamente grande debido a que existen ciertos niveles de “absorción” que retienen el electrón. Puede ocurrir incluso que la emisión subsista *aun después de cesar el agente excitador*. Las sustancias que poseen esta propiedad reciben el nombre de sustancias *fluorescentes*.

Modernamente se han encontrado dispositivos experimentales que permiten controlar la emisión de un átomo excitado y producen la llamada *emisión estimulada*. Esto puede conseguirse según sea el material empleado. Una aplicación reciente la constituyen los dispositivos *laser* y *maser* que permiten obtener haces de radiación de una única frecuencia contenidos en el mismo plano de polarización y perfectamente en fase, ya sea en las frecuencias ópticas (*laser*) o en las microondas (*maser*). A grandes rasgos, podemos decir que la construcción de estos dispositivos se basa en dos ideas diferentes. Los dispositivos sólidos emplean una sustancia fluorescente que es excitada. los dispositivos gaseosos consisten esencialmente en un tubo de descarga de gas que emite fotones de acuerdo con su espectro de emisión. Si parte de los fotones emitidos se devuelve al dispositivo mediante placas de reflexión, es posible conseguir que cada fotón incidente al dirigirse contra el material estimule la emisión de fotones secundarios, con lo cual se crea un haz de fotones de una frecuencia determinada del material, que están todos en fase y tienen el mismo plano de polarización.

*Emisión X.* Al chocar un electrón contra la materia es frenado bruscamente y permite liberar una onda cuya frecuencia viene dada por la ecuación de Einstein. Los electrones que poseen una energía de algunas decenas de kilovolts pueden ocasionar la emisión de ondas de una longitud del orden de  $10^{-10}$  m, que se conocen con el nombre de *rayos X*.

*Absorción espectral.* La incidencia de una onda de una cierta frecuencia sobre un átomo determina la excitación de los electrones y les comunica una energía que varía linealmente con la frecuencia que viene dada por la ecuación de Einstein. Esto constituye el fenómeno recíproco de la emisión espectral y es el fundamento de la emisión estimulada.



# Elementos de relatividad

## Sistemas en movimiento

En este capítulo consideraremos de nuevo el problema que representaban las ecuaciones de Maxwell en los sistemas en movimiento uniforme. Ante todo, debemos definir el sistema de coordenadas en el cual son válidas las ecuaciones de campo obtenidas. El primer sistema de referencia que intuimos es *la Tierra*. Pero como ya sabemos, en la Tierra resultan falsas las ecuaciones de la mecánica y esto plantea la duda: podría ocurrir que en la Tierra, las ecuaciones de Maxwell fueran sólo una excelente aproximación. El segundo sistema de referencia que se puede dar es un *sistema galileano*. Las razones que permiten escogerlo son muy sencillas. La formulación del electromagnetismo necesita de las ecuaciones de la mecánica (por ejemplo, de la noción de fuerza), y las ecuaciones valen donde sean válidas las de la mecánica. Sin embargo, surge inmediatamente una nueva duda ¿en cuál de los infinitos sistemas galileanos son válidas las ecuaciones de Maxwell?, porque lo cierto es que no son válidas en todos, como muestran las consideraciones que exponemos a continuación.

1. Las ecuaciones de transformación de los campos electromagnéticos entre dos sistemas en movimiento relativo indican que *el campo magnético se conserva en cada punto*. Sin embargo, esta afirmación es falsa, puesto que, por ejemplo, en una línea uniformemente cargada y en estado de reposo en un sistema, en un sistema en movimiento relativo presenta una corriente (convectiva) dentro del sistema móvil y por tanto existe necesariamente un campo magnético. Pero los hechos experimentales lo contradicen puesto que en el sistema fijo el campo magnético es nulo, luego tampoco debería existir en el sistema móvil. En conclusión, podemos afirmar que si las ecuaciones de Maxwell son válidas en un sistema galileano no lo pueden ser en otro sistema y, por tanto, no tiene sentido el hablar de campo, a menos que se trate de un sistema galileano especial.
2. Es indudable que  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son *constantes universales* que deben conservar su valor en todos los sistemas galileanos. Pero entonces, de ser válidas las ecuaciones de Maxwell en todos estos sistemas, las ondas electromagnéticas y la luz se propagaría con igual velocidad en todos ellos, igual a  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , lo cual contradice de modo claro la ley de adición de velocidades.
3. Las leyes del flujo del campo magnético, de la conservación de cargas y de Fara-

day son válidas en todos los sistemas galileanos. Sin embargo, es posible verificar directamente que las restantes leyes del campo no conservan su estructura.

Por otra parte, el principio de relatividad que establece que las leyes de la mecánica son válidas en todos los sistemas galileanos y las ideas arraigadas en nuestro espíritu sobre la relatividad de todo movimiento y sobre la dependencia única de todo fenómeno con respecto a las posiciones relativas de los objetos físicos que intervienen, sugiere poderosamente la necesidad de que las ecuaciones de campo *se verifiquen en todos los sistemas galileanos*.

¿Qué interpretaciones debemos dar a estas consideraciones? Nos encontramos ante las alternativas siguientes:

- El principio de relatividad queda restringido a la mecánica. Las ecuaciones de Maxwell son válidas en un único sistema de coordenadas que llamaremos *sistema absoluto*. *Con experiencias de carácter mecánico no es posible poner de manifiesto el movimiento respecto al sistema absoluto, pero sí es factible detectarlo mediante experiencias electromagnéticas.*
- Las ecuaciones de Maxwell son válidas en todos los sistemas galileanos. *Es imposible detectar el estado de movimiento de un sistema, ya sea por experiencias mecánicas, ya por experiencias electromagnéticas.* Las ecuaciones que poseemos están en contradicción con estas afirmaciones, si bien ello se debe a que son aproximadas y se aplican en una zona en la cual no es válida la aproximación.

A principios de siglo todos los grandes físicos y matemáticos expusieron el problema en la forma esbozada y todo su esfuerzo se concentró en la experiencia decisiva: la posibilidad de detectar el movimiento de la Tierra respecto al sistema absoluto (llamado, entonces, *éter*). Para ello se proponían medir la velocidad de la luz en dos direcciones: una, siguiendo el movimiento de la Tierra respecto a las estrellas fijas, y la otra, normal a dicho movimiento. La diferencia entre las velocidades de la luz encontradas permitiría calcular la traslación absoluta de la Tierra.

La experiencia fue realizada por Morley y Michelson y repetida posteriormente gran cantidad de veces, siempre con el mismo *resultado negativo*: es imposible detectar el movimiento de traslación de la Tierra respecto al sistema absoluto o, en otros términos, la velocidad de la luz respecto a la Tierra es la misma en todas las direcciones.

La idea central de Einstein es que las ecuaciones de Maxwell son válidas en todos los sistemas galileanos y como consecuencia inmediata, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío, es la misma en todos ellos. Esta afirmación está en contradicción con la ley de adición de velocidades que establece que las velocidades son diferentes en dos sistemas en movimiento relativo. Para que el principio de

relatividad de Einstein tenga efectividad es necesario revisar cuidadosamente la ley de adición de velocidades y con ella toda la mecánica.

### Transformación de coordenadas entre sistemas galileanos

La ley de adición de velocidades según la mecánica clásica es una consecuencia directa de admitir que dos observadores colocados respectivamente en un sistema en movimiento y en un sistema en reposo disponen de reglas y relojes que *miden exactamente igual en los dos sistemas*. En nuestra exposición partiremos de este postulado.

Para verificar la igualdad del tiempo medido por los relojes en los sistemas en movimiento es necesario establecer con precisión la simultaneidad de dos fenómenos que ocurren *en puntos diferentes*. Debemos admitir que la concurrencia de dos sucesos en el mismo punto del espacio es cierta en todos los sistemas galileanos. Los procedimientos de medida seguidos implican necesariamente esta afirmación. No ocurre lo mismo cuando los puntos están alejados, puesto que entonces es necesario transmitir la información desde el punto hasta el observador mediante algún procedimiento físico, como por ejemplo, la transmisión por ondas electromagnéticas del instante en el cual ocurre cada fenómeno. Por tanto, para que la definición de simultaneidad de dos fenómenos sea clara y no se preste a confusiones es necesario utilizar un *procedimiento físico objetivo* que esté de acuerdo con el principio de relatividad. Tal procedimiento viene impuesto de hecho por la constancia de la velocidad de la luz en todos los sistemas galileanos, que permite afirmar:

*Definición de simultaneidad.* Dos sucesos que ocurren en dos puntos diferentes **A** y **B** son simultáneos si dos rayos de luz que parten de los puntos en el instante en que ocurren los fenómenos, llegan al mismo tiempo al punto medio de **A** y **B**.

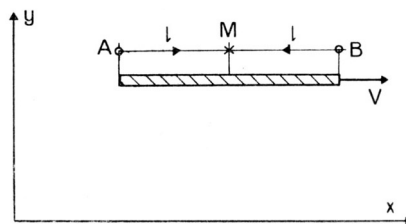


Figura 153: Simultaneidad de dos sucesos.

Desde el punto de vista clásico esta definición sólo es válida en el sistema absoluto, mientras que desde el punto de vista relativista lo es en todos los sistemas de coordenadas galileanas. Dos sucesos simultáneos en un sistema galileano, pueden no serlo en

otro. En efecto, imaginemos que en la Figura 153 dos rayos de luz parten de los puntos **A** y **B** en el mismo instante respecto a la barra (sistema móvil) y llegan simultáneamente (respecto a la barra) a **M**. Un observador situado en el sistema fijo verá que la luz tarda en llegar desde **A** hasta **M** un tiempo  $t'$  que vale

$$ct' = l + vt', \quad t' = \frac{l}{c - v}$$

puesto que en el sistema fijo la luz se mueve con velocidad  $c$  y el punto **M** “escapa” de la onda luminosa. Por razones idénticas, el mismo observador apreciará el tiempo  $t''$  que emplea la luz en recorrer la longitud **BM**

$$ct'' = l - vt'', \quad t'' = \frac{l}{c + v}.$$

Vemos, pues, que el observador del sistema fijo aprecia un retardo entre la luz que parte de **A** y la que sale de **B** igual a

$$\Delta t = t' - t'' = \frac{2vl}{c^2 - v^2}$$

Como el observador del sistema fijo ve llegar los rayos de luz a **M** en el mismo instante (puesto que ocurren en el mismo punto) concluye que los rayos no partieron simultáneamente de los puntos **A** y **B**.

Este ejemplo nos muestra que los relojes que un observador del sistema móvil apreciará sincronizados, pueden no estarlo para otro observador colocado en el sistema fijo, y que, por tanto, no hay razón que obligue a admitir la universalidad del tiempo. El tiempo apreciado por el observador en movimiento se ha “mezclado” cuando se le compara con el tiempo en el sistema fijo.

La solución a estas dificultades fue resuelta por Einstein y está basada en un enunciado muy general del principio de relatividad:

*Principio de relatividad.* Todas las leyes físicas son válidas en los sistemas galileanos. Por ningún método físico puede detectarse el estado de movimiento de uno de estos sistemas.

Como consecuencia directa del principio, tanto las leyes de la mecánica como las del electromagnetismo son válidas en todos los sistemas galileano. Esto trae como consecuencia que la velocidad  $c$  de propagación de las ondas electromagnéticas es la misma en todos los sistemas galileanos y, por lo tanto, es necesario revisar las ecuaciones de la mecánica.

Supongamos ahora un sistema galileano **M** (móvil) moviéndose respecto a otro **F** (fijo) con la velocidad  $v$  medida en el sistema fijo y dirigida según el eje de las  $x$ .

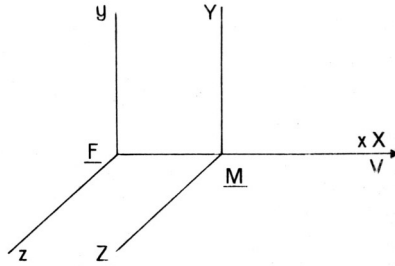


Figura 154: Cambio de coordenadas de referencia.

Sean  $x, y, z$  las coordenadas de un punto situado en **F** y  $t$  el tiempo. Designemos las coordenadas en **M** por  $X, Y, Z$  y el tiempo como  $T$ . Si consideramos un suceso en el sistema fijo que ocurre en la posición  $x, y, z$  y en el instante  $t$ , en el sistema móvil se apreciará en la posición  $X, Y, Z$  y el instante  $T$ . Estudiemos la vinculación que existe entre ambos juegos de coordenadas. Los resultados que obtuvimos anteriormente indicaban que  $T$  dependía no sólo de  $t$ , sino también de la posición del punto en el que ocurría el fenómeno, debido a que la noción de simultaneidad es función del sistema de coordenadas. Por otra parte, la homogeneidad que posee el espacio nos permite afirmar que las coordenadas y el tiempo de ambos sistemas deben estar relacionados por *ecuaciones lineales*, puesto que si no fuera así los puntos del espacio no poseerían todas las mismas propiedades. Teniendo en cuenta que la situación de los ejes  $Y$  y  $Z$  es la misma tendremos

$$\begin{aligned} X &= a' x + b' (y + z) + c' t, \\ Y &= a'' x + \Phi y + b'' z + c'' t, \\ Z &= a'' x + b'' y + \Phi z + c'' t, \\ T &= a''' x + b''' (y + z) + c''' t. \end{aligned}$$

Si tenemos ahora en cuenta la condición de que un punto fijo en **M** se mueve respecto a **F** con velocidad  $v$  dirigida según el eje  $x$  y derivamos respecto a  $t$  las expresiones de  $X, Y, Z$ , tendremos para un punto fijo en **M**

$$a' v + c' = 0, \quad a'' v + c'' = 0,$$

con lo cual las ecuaciones de transformación quedan

$$\begin{aligned} X &= a' (x - vt) + b' (y + z), \\ Y &= a'' (x - vt) + \Phi y + b'' z, \\ Z &= a'' (x - vt) + b'' y + \Phi z, \\ T &= a''' x + b''' (y + z) + c''' t. \end{aligned}$$

Si suponemos un rayo de luz que dentro del sistema  $\mathbf{M}$  se mueve sobre el eje de las  $X$ , tendremos en  $\mathbf{M}$

$$\Delta X = \pm c \Delta T, \quad \Delta Y = 0, \quad \Delta Z = 0,$$

según sea la dirección del movimiento de la luz. Por otra parte, aplicando el principio de relatividad al sistema fijo tendremos

$$\Delta x = \pm c \Delta t, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta z = 0,$$

Pero las ecuaciones de transformación indican

$$\begin{aligned} \Delta X &= a' (\Delta x - v \Delta t) = a' (\pm c - v) \Delta t, \\ \Delta Y &= a'' (\Delta x - v \Delta t) = a'' (\pm c - v) \Delta t, \\ \Delta Z &= \Delta Y, \\ \Delta T &= a''' \Delta x + c''' \Delta t = (\pm a c - c''') \Delta t. \end{aligned}$$

De las igualdades  $\Delta Y = \Delta Z = 0$  resulta

$$a'' (\pm c - v) = 0, \quad a'' = 0,$$

y de  $\Delta X = \pm c \Delta T$  resulta

$$a' (\pm c - v) = \pm c (\pm a c - c''').$$

Si sumamos y restamos las dos ecuaciones obtenidas se obtiene

$$a' c = c''' c, \quad a' v = a c^2$$

de donde se deduce

$$a' = c''', \quad a = -\frac{v}{c^2} a'.$$

Las ecuaciones de transformación pueden escribirse entonces

$$\begin{aligned} X &= a' (x - v t) + b' (y + z), \\ Y &= \Phi y + b'' z, \\ Z &= b'' y + \Phi z, \\ T &= a' \left( t - \frac{v x}{c^2} \right) + b''' (y + z). \end{aligned}$$

Si consideramos ahora un rayo de luz que se mueve dentro del sistema  $\mathbf{M}$  según el eje de las  $Y$ , tendremos análogamente

$$\Delta X = 0, \quad \Delta Y = \pm c \Delta T, \quad \Delta Z = 0,$$

En el sistema **F** ocurre

$$\Delta x = v \Delta t, \quad \Delta x^2 + \Delta y^2 = c^2 \Delta t^2, \quad \Delta z = 0,$$

luego

$$\Delta y = \pm \sqrt{c^2 - v^2} \Delta t.$$

Aplicando estas igualdades a las ecuaciones de transformación podremos escribir

$$\begin{aligned} \Delta Z &= b'' \Delta y = \pm b'' \sqrt{c^2 - v^2} \Delta t = 0, & b'' &= 0, \\ \Delta X &= b' \Delta y = \pm b' \sqrt{c^2 - v^2} \Delta t = 0, & b' &= 0, \\ \Delta Y &= \Phi \Delta y = \pm \Phi \sqrt{c^2 - v^2} \Delta t = \pm c \Delta T, \\ &= \left[ \pm c a' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \pm c b (\pm \sqrt{c^2 - v^2}) \right] \Delta t. \end{aligned}$$

luego se obtiene

$$\pm \Phi \sqrt{c^2 - v^2} = \pm c a' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + c b \sqrt{c^2 - v^2}.$$

Si sumamos y restamos las dos ecuaciones obtenidas tendremos, llamando  $\beta$  a la expresión

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

se obtiene

$$a' = \beta \Phi, \quad b = 0.$$

Las ecuaciones de transformación pueden escribirse entonces como

$$\begin{aligned} X &= \beta \Phi (x - v t), \\ Y &= \Phi y, \\ Z &= \Phi z, \\ T &= \beta \Phi \left( t - \frac{v x}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Queda únicamente por determinar la función  $\Phi$  que, como es natural, sólo depende de  $v$ . La función  $\Phi(v)$  es la “contracción longitudinal” de un segmento situado en **M**, en el plano  $YZ$ , normal al movimiento. Esta contracción debe ser independiente del sentido del movimiento por la isotropía del espacio, en tanto se realice en la dirección del eje  $X$ . Podemos suponer entonces que

$$\Phi(v) = \Phi(-v)$$

or otra parte, si consideramos un sistema inercial  $\mathbf{M}'$  moviéndose con respecto a  $\mathbf{M}$  a una velocidad  $-v$  dirigida según el eje  $X$ , podemos aplicar las ecuaciones de transformación obtenidas. Sean  $x', y', z', t'$  las coordenadas y el tiempo en  $\mathbf{M}'$ , las ecuaciones de transformación son

$$\begin{aligned}x' &= \beta(-v) \Phi(-v) (X + vT) = \Phi(-v) \Phi(v) x, \\y' &= \Phi(-v) Y = \Phi(-v) \Phi(v) y, \\z' &= \Phi(-v) z = \Phi(-v) \Phi(v) z, \\t' &= \beta(-v) \Phi(-v) \left( T + \frac{vX}{c^2} \right) = \Phi(-v) \Phi(v) t.\end{aligned}$$

Como en estas fórmulas,  $x', y', z'$  expresados en función de  $x, y, z$  no dependen del tiempo, el sistema  $\mathbf{M}'$  está en reposo respecto a  $\mathbf{F}$ . Este hecho no es evidente como podría creerse, *puesto que no es válida la ley de adición de velocidades*. Necesariamente los sistemas  $\mathbf{M}'$  y  $\mathbf{M}$  deben coincidir, luego

$$\Phi(-v) \Phi(v) = 1, \quad \Phi(v)^2 = 1, \quad \Phi(v) = 1.$$

La solución  $-1$  no tiene interés, puesto que equivale a invertir el sentido de los ejes coordenados. Las ecuaciones de transformación que nos permiten pasar de un sistema galileano a otro son entonces

$$\begin{aligned}X &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\Y &= y, \\Z &= z, \\T &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.\end{aligned}$$

Éstas son las llamadas *ecuaciones de transformación de Lorentz*, por ser él quien las obtuvo por primera vez. Falta sólo comprobar la invariancia de la velocidad  $c$  de la luz en una dirección cualquiera en ambos sistemas inerciales. Es fácil verificar, utilizando las fórmulas de transformación de Lorentz, que una onda luminosa emitida en un cierto instante llega al cabo de tiempos diferentes, apreciados por los observadores de ambos sistemas, a ocupar una superficie esférica que debe tener la misma forma matemática, o sea que

$$\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \Delta T^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$$



relaciona ambos sistemas por los incrementos de las coordenadas de posición y el tiempo. Si elegimos dos puntos luminosos, uno en cada sistema, situados en la trayectoria de un rayo de luz, cada uno de ellos anula el miembro correspondiente de la expresión anterior. Ello implica que la velocidad relativa de los puntos luminosos en cada uno de los sistemas es  $c$ , de modo que un punto que posea la velocidad  $c$  en un sistema también la posee en el otro.

Para que el principio de relatividad tenga efectividad, las expresiones inversas de  $xyzt$  en función de  $XYZT$  deben coincidir con las originales sustituyendo  $v$  por  $-v$ , como así ocurre.

### Cinemática relativista

Las ecuaciones de la transformación de Lorentz coinciden aproximadamente con las de transformación clásica cuando  $v/c \ll 1$ . Desde el punto de vista mecánico, cabe suponer pues, que no se introducen modificaciones grandes, en tanto no se trabaje con velocidades próximas a las de  $c$ . Estas ecuaciones encierran un gran contenido físico que vamos a exponer a continuación.

Las longitudes medidas en la dirección *normal* al movimiento coinciden en los sistemas fijo **F** y móvil **M**, puesto que  $Y = y$ ,  $Z = z$ . Las longitudes medidas en la dirección del movimiento son diferentes. Imaginemos situada en el sistema fijo **F** una regla; su medida por un observador del sistema fijo **F** se llama *longitud propia* y es menor que la longitud medida por el observador del sistema móvil **M**. En efecto, sean  $X'$  y  $X''$  las coordenadas de los extremos de dicha regla respecto al sistema **M** y  $x'$  y  $x''$  las coordenadas de los mismos puntos respecto a **F**. En el instante  $t$  tenemos

$$x' - x'' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (X' - X'')$$

Este hecho, no contradice en nada el principio de relatividad, puesto que en ambos casos, los observadores del sistema fijo y del sistema móvil, miden la longitud de la regla en condiciones físicas diferentes con el mismo instrumento de medida. Ahora bien, convendrá comparar las lecturas de dos instrumentos de medida en movimiento relativo. El problema puede plantearse en estos términos: al efectuar la medida de cada instrumento con el otro, ambos en movimiento relativo, obtenemos en cada caso una lectura menor que la longitud propia del instrumento, como exige el principio de relatividad. Téngase en cuenta que, para medir en un sistema en movimiento, es necesario disponer de una *regla y de dos relojes* que nos permitan asegurar la comparación *simultánea* de las longitudes de ambos extremos del segmento con la regla de medida. Si ésta está en reposo, *no precisamos de relojes*. Esta *diferencia física* es esencial en el proceso de medida y es la responsable de la contracción longitudinal que se encuentra al efectuar la medida.

Los relojes de un sistema en movimiento, atrasan con respecto al sistema fijo. En efecto, si en un punto  $XYZ$  colocamos un reloj, tendremos

$$x = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} X + v t$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} T = t - \frac{v}{c^2} \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} X + v t \right) = t \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v}{c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} X$$

$$\Delta T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t$$

Aparentemente existe una contradicción con el principio de relatividad al comparar los tiempos señalados por dos relojes, uno en el sistema fijo y otro en el móvil: observando cuál marcha más lento, sabremos cuál está en “movimiento”. Pero esto no es posible, puesto que para comparar un reloj en reposo con otro en movimiento, *son necesarios dos relojes fijos*, mientras que para comparar dos relojes en reposo relativo, se necesita solamente uno. Esta diferencia fundamental en el procedimiento de medida, es la responsable del acortamiento del tiempo apreciado por los dos observadores en los dos sistemas. El tiempo en que se verifica un suceso medido con un reloj fijo con relación al suceso recibe el nombre de *tiempo propio*. La duración de un fenómeno observado en un sistema en movimiento con respecto a él, es mayor que el tiempo propio.

A pesar de no existir la noción clásica de simultaneidad, no se pierde totalmente la noción de *pasado y futuro*. Si dos sucesos ocurren en el mismo punto y el mismo instante, se verificarán de este modo en todos los sistemas galileanos. Si dos sucesos se presentan en el mismo punto y en diferentes instantes, podemos aplicar la ecuación ya enunciada anteriormente que relaciona los incrementos de las coordenadas de posición y el tiempo entre los dos sistemas

$$-c^2 \Delta T^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 < 0.$$

Este resultado expresa la imposibilidad de que algún observador del sistema aprecie simultáneamente los sucesos, o bien, que los observe como si transcurrieran en orden inverso (puede comprobarse que para  $\Delta t = 0$  el primer miembro es negativo y el segundo es positivo, lo cual es imposible; además si en un sistema los sucesos invierten su orden, *en algún otro sistema serán coincidentes en el tiempo*, lo cual también es imposible).

Con carácter general, podemos afirmar que si

$$\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \Delta T^2 < 0$$

los sucesos se presentan en el mismo orden en el tiempo en todos los sistemas galileanos, porque no pueden ser simultáneos en ningún sistema. Si, en cambio

$$\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2 - c^2 \Delta T^2 > 0$$

es perfectamente posible observar simultáneamente los fenómenos en un sistema galileano conveniente, o bien, incluso, apreciarlos en orden inverso.

La expresión

$$-\Delta X^2 - \Delta Y^2 - \Delta Z^2 + c^2 \Delta T^2$$

que relaciona dos sucesos en un sistema de coordenadas, se denomina *intervalo de universo* de los sucesos. Esta magnitud es *invariable*, su valor es igual en todos los sistemas galileanos. Si dos sucesos poseen un intervalo positivo su orden de sucesión es fijo para todos los sistemas; si su intervalo es negativo, la relación de dependencia en el tiempo es variable según sea el sistema considerado.

Lo expuesto no constituye una objeción al *principio de casualidad sino que es una ley de casualidad*. La causa y el efecto deben mantener en todos los sistemas la misma relación temporal; luego, el intervalo que separa causa y efecto debe ser positivo. La “velocidad” de desplazamiento del agente que liga la causa y el efecto debe cumplir entonces

$$c^2 - \frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}{\Delta T^2} = c^2 - v^2 > 0$$

Este resultado conduce a aceptar que la velocidad de la luz en el vacío, además de ser una constante universal, *es una velocidad límite que ningún cuerpo puede superar*.

Esta ley, condiciona todos los fenómenos físicos. Así, por ejemplo, la velocidad de propagación de la atracción gravitatoria *no puede ser instantánea*. Es por esta razón esencial que la formulación de los problemas de acción a distancia, si bien puede tener una teoría matemática coherente, desde el punto de vista conceptual, es solamente un ejercicio de retórica. Toda teoría de acción a distancia debe ser formulada en términos de la intensidad de campo y de la velocidad de propagación de campo para ser conceptualmente satisfactoria.

Es posible estudiar ahora la nueva ley de adición de velocidades. Supongamos un móvil que se desplaza con velocidad  $u$  respecto al sistema fijo  $\mathbf{F}$  y con velocidad  $U$  respecto al sistema móvil  $\mathbf{M}$ . Tendremos entonces

$$U = \frac{dX}{dT} = \frac{dx - v dt}{dt - v dx/c^2} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

Obsérvese que para  $u = c$  se obtiene  $U = c$  como exige el principio de relatividad. Por otra parte, para velocidades de arrastre  $v$  pequeñas comparadas con la de la luz,

obtenemos la ley de adición de velocidades de Galileo. Si despejamos  $u$  en función de  $U$  obtenemos

$$u = \frac{U + v}{1 + Uv/c^2}$$

Esta expresión es idéntica a la anterior cambiando  $v$  por  $-v$ , resultado que ya estaba previsto y fue oportunamente indicado al estudiar el movimiento del sistema móvil  $\mathbf{M}$ . La ecuación de la velocidad absoluta es simétrica con respecto a la velocidad relativa y la de arrastre.

Sea ahora un punto que se mueve en la dirección del eje  $Y$  con la velocidad  $U_Y$  en el sistema móvil  $\mathbf{M}$  y con las velocidades  $u_x$  y  $u_y$  en el sistema fijo  $\mathbf{F}$ . Se verifican las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} dZ &= 0, & dz &= 0, \\ dX &= 0, & dx - v dt &= 0, & u_x &= v, \\ dY &= U_Y dT, & dy &= U_Y \left( dt - \frac{v^2}{c^2} dt \right) / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

luego se obtiene

$$u_y = \frac{dy}{dt} = U_Y / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

En forma similar se podría resolver cualquier otro problema de cambio de velocidades.

## Ecuaciones de transformación de los campos

Como consecuencia del principio de relatividad extendido a los fenómenos electromagnéticos, las ecuaciones de Maxwell *son válidas en todos los sistemas galileanos*. Basanda en esta proposición y con las fórmulas de transformación de Lorentz, es posible escribir las ecuaciones de transformación entre los campos de dos sistemas galileanos.

Estudiemos primero la transformación del vector  $\vec{J}$ . Un observador situado en el sistema  $\mathbf{M}$ , observa  $\vec{J}'$ , considerando una superficie fija de su sistema y midiendo las cargas que lo atraviesan en la unidad de tiempo. Supongamos que dicho observador toma una superficie de  $1 \text{ m}^2$  normal al eje  $Y$  y cuenta las cargas que la atraviesan en 1 segundo. En el sistema  $\mathbf{F}$ , la superficie análoga transformada es normal al eje  $y$  y de área  $S = \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1/\beta$  debido a la contracción que sufren las dimensiones en la dirección del movimiento. A su vez el intervalo de tiempo que era de 1 segundo en el sistema móvil  $\mathbf{M}$  pasa a ser de  $\beta$  segundos en el fijo  $\mathbf{F}$ , debido a la dilatación del tiempo en un punto fijo de  $\mathbf{M}$ . Las cargas que atraviesan la superficie considerada serán, por una parte  $J'_Y$ , y por otra

$$J_y \frac{1}{\beta} \beta = J_y$$

de modo que se verifica  $J'_Y = J_y$ . En forma similar, debe cumplirse que  $J'_Z = J_z$ .

Consideremos ahora una superficie fija en el sistema móvil **M**, de área unidad orientada normalmente al eje  $X$ . Sea  $J'_X$ , la carga que atraviesa la superficie en 1 segundo, observada por el observador del sistema **M**. En el sistema **F** tenemos análogamente una superficie unidad (no hay contracción de dimensiones en las direcciones transversales al movimiento) para un intervalo de tiempo de  $\beta$  segundos. En este tiempo pasan las cargas  $J_x \times 1 \times \beta$  a través de la superficie y, además, al desplazarse ésta la longitud  $v\beta$  es atravesada también por las cargas (convectivas) contenidas en el volumen que barre en su movimiento *de sentido contrario* al eje de las  $x$ . Tendremos entonces

$$J'_X = \beta (J_x - v\rho) = \frac{J_x - v\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

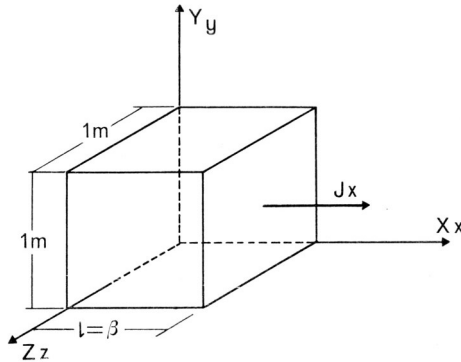


Figura 155: Balance de cargas en movimiento.

Estamos pues en condiciones de calcular la densidad de cargas apreciada por el observador del sistema **M**. Éste considerará un volumen unidad, por ejemplo, un cubo de  $1 \text{ m}^3$  y de caras paralelas a los planos coordenados, Figura 155, y medirá en un instante cualquiera las cargas que encierra.

Si el observador considerado efectúa la medida de las cargas en el instante  $T = 0$  y en el punto  $XYZ$ , el observador situado en el sistema fijo **F** lo hará en

$$x = \frac{X}{\beta}, \quad y = Y, \quad z = Z, \quad t = \frac{vX}{c^2}$$

aplicado las ecuaciones de transformación de Lorentz. Este resultado indica que la medida instantánea en el sistema **M** no es la misma que en el **F**. Por consiguiente, las cargas que debe considerar el observador en **F** son las presentes en un paralelepípedo de dimensiones  $1 \times 1 \times \beta$  menos las cargas que en el intervalo de tiempo  $t = v\beta/c^2$

abandonan este volumen, o sea  $J_x v \beta / c^2$ . Tenemos entonces

$$\rho' = 1 \times 1 \times \beta \rho - J_x \frac{v \beta}{c^2} = \beta \left( \rho - J_x \frac{v}{c^2} \right)$$

No se debe considerar el paso de las cargas a través de la superficie lateral toda vez que los observadores de ambos sistemas efectúan instantáneamente la medida en un corte del paralelepípedo paralelo a  $YZ$  o  $yz$  tal como muestran las ecuaciones anteriores. Puede observarse que el resultado coincide con la ecuación clásica para velocidades  $v$  bastante inferiores a la velocidad de la luz  $c$ , lo que permiten despreciar el segundo término  $J_x v / c^2$  de  $\rho'$ . Sin embargo, este término *no puede despreciarse en ausencia de cargas de volumen*. Las ecuaciones obtenidas nos muestran que en un conductor en movimiento por el que circula una corriente existe una densidad de cargas de volumen. Por supuesto que esta densidad de cargas es apreciada por el observador del sistema móvil respecto al conductor y no por el observador situado en el sistema fijo.

Es ilustrativo determinar, por otro camino, la ecuación de transformación de  $\rho$ . Supongamos para mayor sencillez que  $J_y = J_z = 0$ . Aplicando la ecuación de balance de cargas a un paralelepípedo de pequeñas dimensiones  $S \Delta x$  alrededor del punto  $xyz$ , puede escribirse la ecuación de balance de cargas que establece que la carga que abandona el paralelepípedo es igual a la disminución de las cargas en el volumen

$$S [J_x(x + \delta x, y, z, t) - J_x(x, y, z, t)] \Delta t = -\Delta(\rho S \Delta x)$$

Reordenando y pasando al límite se tiene

$$\frac{\Delta J_x}{\Delta x} = -\frac{\Delta \rho}{\Delta t}, \quad \frac{\partial J_x}{\partial x} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Si tenemos en cuenta las ecuaciones de transformaciones de Lorentz podemos escribir, aplicando la derivada parcial de una función de función<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_x}{\partial x} &= \beta \frac{\partial J_x}{\partial X} - \frac{v \beta}{c^2} \frac{\partial J_x}{\partial T}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= -v \beta \frac{\partial \rho}{\partial X} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial T}, \end{aligned}$$

de modo que la ecuación de conservación de cargas, reordenando, puede tomar la forma

$$\frac{\partial}{\partial X} (\beta J_x - v \beta \rho) = -\frac{\partial}{\partial T} \left( \beta \rho - \frac{v}{c^2} \beta J_x \right)$$

<sup>12</sup> Consideremos la función  $f(x, y) = f(aX + bY, cX + dY)$ , la derivada parcial es  $\partial f / \partial X = a \partial f / \partial x + c \partial f / \partial y$  y análogo para la derivada parcial respecto a  $Y$ . Esto puede obtenerse fácilmente considerando los incrementos y pasando al límite.

De acuerdo con el principio de relatividad se cumple la ecuación conservación de cargas

$$\frac{\partial J'_x}{\partial x} = -\frac{\partial \rho'}{\partial t}.$$

Recordando la expresión de  $J'_x = \beta (J_x - v \rho)$  se obtiene

$$-\frac{\partial}{\partial T} \left( \beta \rho - \frac{v}{c^2} \beta J_x \right) = \frac{\partial}{\partial X} (\beta J_x - v \beta \rho) = \frac{\partial J'_x}{\partial X} = -\frac{\partial \rho'}{\partial T}.$$

Se obtiene finalmente

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \beta \rho - \frac{v}{c^2} \beta J_x \right) = \frac{\partial \rho'}{\partial T}, \quad \frac{\partial}{\partial T} \left[ \rho' - \beta \left( \rho - \frac{v}{c^2} J_x \right) \right] = 0,$$

de donde se deduce

$$\rho' = \beta \left( \rho - J_x \frac{v}{c^2} \right).$$

Las ecuaciones de transformación de los vectores de la intensidad de campo pueden obtenerse siguiendo un procedimiento similar al que hemos empleado para calcular  $\rho'$ . Hay que notar que no podemos recurrir a la ley de conservación de la fuerza porque todavía no ha sido demostrada (y por otro lado, tal como veremos más adelante, es falsa). Estudiaremos la transformación en un caso particular, porque con los recursos de este libro, el cálculo del caso general resultaría muy complicado y no añadiría nada nuevo a los métodos de trabajo que ya conocemos. Supongamos que existe un campo eléctrico de intensidad  $E_y$  en la dirección del eje  $y$  y otro campo magnético con la intensidad  $B_z$  en la dirección del eje  $z$ . De acuerdo con las ecuaciones del campo tendremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu_0 J_y. \end{aligned}$$

Aplicando el grupo de fórmulas de transformación de Lorentz podemos escribir

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \beta \frac{\partial E_y}{\partial X} - \frac{\beta v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial T} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = \beta v \frac{\partial B_z}{\partial X} - \beta \frac{\partial B_z}{\partial T},$$

reordenando resulta

$$\frac{\partial}{\partial X} \beta (E_y - v B_z) = -\frac{\partial}{\partial T} \beta \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right).$$

En forma análoga se obtiene de la segunda ecuación del campo

$$\frac{\partial}{\partial X} \beta \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial T} \beta (E_y - v B_z) - \mu_0 J_y$$

A su vez, en el sistema móvil, por el principio de relatividad, se cumple

$$\frac{\partial E'_Y}{\partial X} = -\frac{\partial B'_Z}{\partial T},$$

$$\frac{\partial B'_Z}{\partial X} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial E'_Y}{\partial T} - \mu_0 J'_Y.$$

De la comparación de los dos grupos de ecuaciones resulta

$$E'_Y = \beta (E_y - v B_z), \quad B'_Z = \beta \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right), \quad J'_Y = J_y$$

Pasando de este caso particular a un campo dirigido según otros dos ejes tendríamos otras ecuaciones similares que reunidas dan las ecuaciones completas de transformación

$$E'_X = E_x, \quad B'_X = B_x,$$

$$E'_Y = \beta (E_y - v B_z), \quad B'_Y = \beta \left( B_y + \frac{v}{c^2} E_z \right)$$

$$E'_Z = \beta (E_z + v B_y), \quad B'_Z = \beta \left( B_z - \frac{v}{c^2} E_y \right)$$

Es fácil comprobar que para velocidades pequeñas, comparadas con las de la luz  $c$ , las ecuaciones de transformación de la intensidad de campo  $\vec{E}$  coinciden con las ecuaciones clásicas. Sin embargo, la situación es diferente en las ecuaciones de transformación de  $\vec{B}$ . Por ejemplo, si en el sistema fijo  $\mathbf{F}$  el campo es  $\vec{B} = 0$ , en el sistema móvil  $\mathbf{M}$  existe en cambio un campo magnético no despreciable, aun para velocidades muy inferiores a las de la luz. Este conocimiento es muy importante, puesto que constituye prácticamente *el único efecto relativista que nunca puede despreciarse*. Es precisamente esta exposición la que resuelve los problemas planteados por la ecuación clásica transformación del campo magnético. Ilustraremos esta situación con el ejemplo de la Figura 156.

Consideremos una barra cilíndrica fija en el sistema móvil  $\mathbf{M}$ , con una densidad superficial de cargas  $\sigma'$ . El campo medido por el observador del sistema  $\mathbf{M}$  vale

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \frac{R'}{r'}, \quad \vec{B}' = 0.$$

Si aplicamos las ecuaciones de transformación tendremos

$$r' = r, \quad R' = R, \quad \sigma' = \beta \left( \sigma - \frac{v}{c^2} j_x \right), \quad 0 = \beta (j_x - v \sigma)$$

o sea

$$\sigma = \beta \sigma', \quad j_x = v \sigma$$



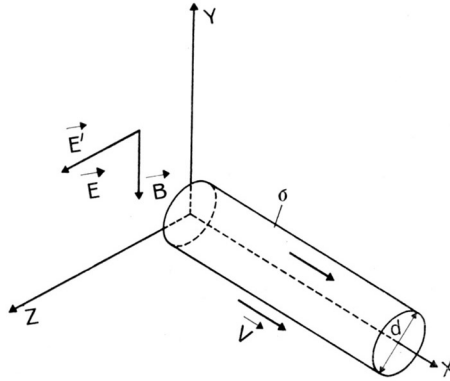


Figura 156: Cilindro cargado en movimiento.

Las dos componentes transversales de los campos transformados son

$$E = \beta E' = \frac{\beta \sigma' R}{\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}.$$

Por otra parte, las ecuaciones de transformación aplicadas al campo magnético revelan un campo tangencial cuyo valor es

$$B = \frac{\beta v}{c^2} E' = \frac{v}{c^2} E = v \sigma \frac{\epsilon_0 \mu_0}{\epsilon_0} \frac{R}{r} = j_x \mu_0 \frac{R}{r}$$

La concordancia de estas ecuaciones es perfecta en cada uno de los sistemas de coordenadas; tenía que ocurrir así puesto que las ecuaciones del campo son válidas en ambos sistemas. Nótese, sin embargo, que son diferentes los valores de los campos eléctricos.

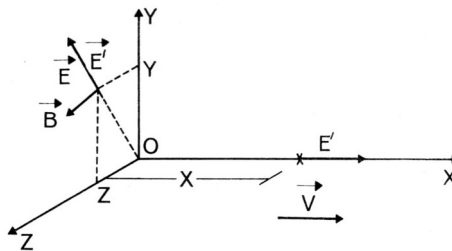


Figura 157: Campo de una carga en movimiento.

Es interesante calcular el campo creado por una carga puntual –por ejemplo, un electrón– en movimiento. Supongamos la carga puntual, colocada en el origen de

coordenadas del sistema móvil  $\mathbf{M}$ , Figura 157. El campo eléctrico en un punto del eje  $X$  vale

$$E'_X = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{X^2}$$

Si aplicamos las ecuaciones de transformación de los campos tenemos

$$E_x = E'_X = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{X^2} = \frac{Q}{4\pi \beta^2 \epsilon_0} \frac{1}{(x - vt)^2}$$

El campo en un punto del plano  $YZ$  vale

$$E = \beta E' = \frac{\beta Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{Y^2 + Z^2} = \frac{\beta Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{y^2 + x^2} = \frac{\beta Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

pero en este punto existe también un campo magnético, normal a  $\vec{E}$ , de valor

$$B = \frac{v}{c^2} \beta E' = \frac{v}{c^2} E = \frac{\beta v Q \mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^2}$$

Estas expresiones indican que el electrón se comporta físicamente como una corriente y crea un campo magnético tangencial. Por otra parte, el hecho de existir un campo eléctrico dependiente del tiempo obliga necesariamente a admitir la presencia de un campo magnético.

## Mecánica relativista

Estudiaremos ahora las leyes de transformación de fuerzas entre dos sistemas galileanos. La primera conclusión que se puede obtener es sorprendente: la fuerza no es igual en todos los sistemas galileanos. El observador de cada sistema de coordenadas sabe calcular perfectamente la fuerza con que el campo actúa sobre una carga (que supondremos unitaria de 1 *coulomb* para abreviar las expresiones) utilizando las ecuaciones de Lorentz, *puesto que así quedan definidos los campos en cada sistema*. Como conocemos las ecuaciones de transformación de los campos, obtendremos las ecuaciones de transformación de las fuerzas, *sin pasar necesariamente por las leyes del movimiento*.

Consideremos una carga solidaria con el sistema móvil  $\mathbf{M}$ . La fuerza que, en el sistema móvil  $\mathbf{M}$ , actúa sobre ella, recibe el nombre de *fuerza propia* o *fuerza en reposo* y vale  $\vec{F}_0 = (E'_X, E'_Y, E'_Z)$ . Puede expresarse en función de las intensidades de los campos en el sistema de coordenadas  $\mathbf{F}$  como (el lector debe tener presente que  $\mathbf{F}$  y  $\vec{F}$  son objetos distintos)

$$\vec{F}_0 = (E_x, \beta (E_y - v B_z), \beta (E_z + v B_x))$$

A su vez, la fuerza  $\vec{F}$  ejercida sobre la carga, medida por el observador del sistema galileano  $F$  vale según la ley de Lorentz

$$\vec{F} = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = (E_x, E_y - v B_z, E_z + v B_y).$$

Estas ecuaciones indican claramente la diferencia entre los valores de las fuerzas en los sistemas galileanos. Las ecuaciones de transformación de la fuerza desde el *sistema fijo respecto a la carga a otro cualquiera son*

$$F_x = F_{0X}, \quad F_y = F_{0Y}/\beta, \quad F_z = F_{0Z}/\beta,$$

de las que se deduce inmediatamente que el principio de acción y reacción *no tiene una validez general*. Consideremos dos sistemas de coordenadas que llamaremos  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ , conteniendo a los puntos  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{2}$  entre los cuales se ejercen las fuerzas y sean  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  los sistemas de coordenadas que en el instante considerado se encuentran en reposo respecto a cada uno de los puntos. La componente sobre el eje  $y$  de la fuerza, que designamos por  $Y$  afectada de un subíndice  $\mathbf{P}$  o  $\mathbf{Q}$  según sea el sistema de medida, es

$$Y_{P1} = \frac{Y_{M1}}{\beta_{P1}}, \quad Y_{Q1} = \frac{Y_{M1}}{\beta_{Q1}},$$

$$Y_{P2} = \frac{Y_{M2}}{\beta_{P2}}, \quad Y_{Q2} = \frac{Y_{M2}}{\beta_{Q2}}.$$

Para que sean iguales las proyecciones análogas de la fuerza, es suficiente que los sistemas de coordenadas  $\mathbf{M}_1$  y  $\mathbf{M}_2$  coincidan y que los puntos  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{2}$  se encuentren en reposo relativo es decir que sea válido el principio de acción y reacción. Cumplida esta condición, puede afirmarse que en todos los sistemas, la acción es opuesta a la reacción. Sin embargo, puede ocurrir que las fuerzas no estén dirigidas según la recta que une los puntos  $\mathbf{1}$  y  $\mathbf{2}$ , puesto que las componentes de la fuerza en la dirección del movimiento cambian en forma diferente que las componentes transversales al mismo. Expondremos a continuación algunos ejemplos que aclararán esta situación.

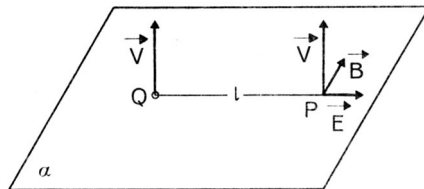


Figura 158: Acción entre dos cargas en movimiento.

*Ejemplo 1.* Supongamos una partícula con una carga  $Q$  que se desplaza con velocidad  $v$  respecto al sistema de la Figura 158. Consideremos un sistema  $M$  solidario con la partícula, en un instante cualquiera, la trayectoria de la partícula corta al plano  $\alpha$  y crea campos eléctricos y magnéticos en un punto  $P$  del plano cuyo valor ya calculamos

$$E' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l^2}, \quad E = \beta E' = \frac{\beta Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{l^2},$$

$$B = \frac{\beta v}{c^2} E' = \frac{\beta v Q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{l^2}.$$

Si otra partícula con la misma velocidad  $v$  atraviesa el plano en el punto  $P$  la fuerza  $F_q$  con que la carga  $Q$  actúa sobre la carga  $q$  vale

$$F_q = qE - qvB = \frac{\beta qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{1}{\beta}$$

Recíprocamente, la fuerza  $F_Q$  que ejerce la carga  $q$  sobre la  $Q$  es la misma puesto que basta intercambiar en la ecuación anterior los valores de las cargas para tener la situación inversa. En este caso, el principio de acción y reacción es válido en el sistema  $F$ .

Si examinamos el mismo problema desde el sistema  $M$  la solución es inmediata, puesto que las cargas están en reposo y puede aplicarse la ley de Coulomb.

$$F' = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

En el sistema  $M$  los puntos se encuentran en reposo y el principio de acción y reacción establece que las fuerzas son opuestas en todo sistema de coordenadas. Puede verificarse la ley de transformación de fuerzas  $F = F'/\beta$ .

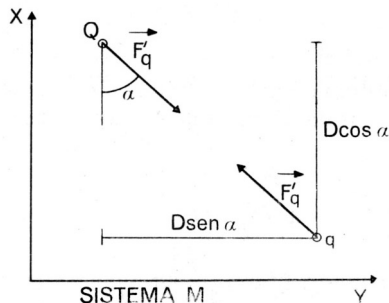


Figura 159: Acción y reacción entre cargas, sistema móvil.

*Ejemplo 2.* Supongamos dos cargas solidarias en el sistema **M** pero *oblicuas respecto al movimiento*, según la Figura 159. La fuerza de atracción o repulsión puede calcularse por la ley de Coulomb.

$$F' = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 D^2}$$

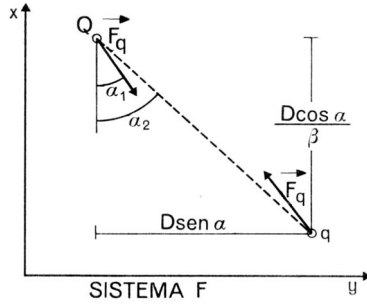


Figura 160: Acción y reacción entre cargas, sistema fijo.

Al pasar al sistema fijo, el observador calcula  $\vec{F}'$  descomponiéndola en sus componentes paralelas y normales a la dirección del movimiento. Las ecuaciones de transformación de las fuerzas son, Figura 160

$$F_x = F'_X = F' \cos \alpha, \quad F_y = \frac{F'_Y}{\beta} = \frac{F'}{\beta} \operatorname{sen} \alpha,$$

puesto que **M** está fijo en relación a las cargas. La fuerza en el sistema **F** forma un ángulo  $\alpha_1$  que cumple

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\beta}$$

Por otra parte, la recta de unión de las cargas, vista por el observador del sistema fijo **F**, forma un ángulo  $\alpha_2$  dado por la ecuación

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D \operatorname{sen} \alpha}{D/\beta \cos \alpha} = \beta \operatorname{tg} \alpha$$

de acuerdo con la contracción que sufren las longitudes en la dirección del movimiento. El principio de acción y reacción, es todavía válido en lo que respecta a la oposición de las fuerzas, *pero no lo es en cuanto a su dirección según la recta que une las cargas.*

*Ejemplo 3.* Supongamos nuevamente la partícula **Q** del primer ejemplo y coloquemos en el punto **P** una partícula de carga  $q$  en reposo respecto al sistema fijo **F**. La ley de Lorentz permite calcular la fuerza  $F_q$

$$F_q = qE = \beta \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

La fuerza que  $q$  ejerce sobre  $Q$  es de cálculo inmediato puesto que el campo que crea  $q$  en el sistema  $\mathbf{F}$  es electrostático

$$F_Q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}$$

En estas condiciones las fuerzas son opuestas y están dirigidas según la recta que une las cargas, pero *no poseen el mismo valor*. Podemos calcular también las fuerzas ejercidas en el sistema móvil  $\mathbf{M}$ , solidario con  $Q$ . Un primer método de cálculo se basa en el paralelismo de la inversión de las cargas  $Q$  y  $q$  del sistema  $\mathbf{M}$ , de modo que

$$F'_q = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}, \quad F'_Q = \beta \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 l^2}.$$

Un segundo método consiste en utilizar las ecuaciones de transformación de las fuerzas, teniendo sumo cuidado en su aplicación correcta observando la fuerza propia en cada caso

$$F'_q = \frac{F_q}{\beta}, \quad F'_Q = \frac{F_Q}{\beta}.$$

Estos resultados indican la conveniencia de revisar la noción de fuerza. Cuando hablamos de la fuerza ejercida sobre una carga medida en cierto sistema de coordenadas nos referimos sencillamente a la lectura que obtiene el observador en un dinamómetro con un extremo unido al punto y el otro al sistema de coordenadas. De hecho se admite la posibilidad de colocar el dinamómetro con un extremo en movimiento unido al punto (si éste se encontrara en movimiento).

Mientras los puntos entre los cuales se mide la fuerza están en reposo es válido el principio de acción y reacción (tal como se ha demostrado en los capítulos anteriores) y es equivalente hablar en términos de acciones a distancia o en términos de campo. Sin embargo, cuando uno de los extremos (o ambos) del dinamómetro están en movimiento se presenta una importante modificación en la teoría. Las ecuaciones obtenidas se refieren siempre al dinamómetro colocado entre el punto considerado y el sistema de coordenadas y no estudian el caso de estar el dinamómetro situado entre los puntos en que se ejerce la acción.

Si consideramos las fuerzas ejercidas entre dos cargas en movimiento y colocamos entre ellas un dinamómetro, el principio de relatividad nos indica que la lectura del instrumento se modifica según sea la observación que realicemos: ya sea en reposo con uno u otro de los extremos, ya sea en movimiento con respecto a ambos. En el primer caso la fuerza sobre la carga en movimiento, es apreciada por el observador situado en un sistema fijo. En el segundo caso es necesario analizar cuidadosamente la estática del dinamómetro, estudio que no detallaremos por salirse en los límites de este libro.

Es evidente que la diferencia anterior del comportamiento del dinamómetro en el examen del mismo fenómeno no está en contradicción con el principio de relatividad, puesto que las condiciones experimentales en que se realizan las dos medidas son físicamente diferentes.

La interpretación de éstos conduce a negar las teorías de acción a distancia puesto que la acción medida se modifica según como se efectúa la lectura. Puede afirmarse, por tanto que el principio de relatividad implica la consideración de las acciones *referidas al sistema de coordenadas del observador*, o sea la descripción de los fenómenos en términos de campo e interacciones entre campos. Préstese atención a los métodos seguidos para el cálculo, en los diversos casos examinados.

## Dinámica relativista

Los estudios realizados en la sección anterior muestran el cuidado que debe tenerse en el empleo de la noción de fuerza en términos relativistas. Más delicado aún es el problema del movimiento de un punto sometido a un campo. En primer lugar, la masa de los cuerpos *la medimos siempre en un sistema en reposo*, valor que recibe la denominación de *masa en reposo* o *masa propia*. El procedimiento seguido en la obtención de la ecuación de movimiento se basa en dos hipótesis fundamentales:

- La ecuación de movimiento del punto debe ser tal, que si, en un instante dado, su velocidad es cero, su aceleración vendrá dada por la ley de Newton. Esta afirmación se basa en que la teoría dinámica relativista, debe coincidir con la teoría clásica cuando las velocidades en juego son despreciables frente a la velocidad de la luz.
- La ecuación del movimiento del punto deben poseer la misma forma en todos los sistemas galileanos. Esta afirmación es una consecuencia directa del principio de relatividad, pues en caso contrario, los hechos mecánicos experimentales permitirían reconocer el estado de movimiento de un sistema galileano, lo cual está en contradicción con el principio de relatividad clásico y relativista.

El método a seguir para obtener la ecuación de movimiento exige un caudal de conocimientos que se sale fuera de los límites de este libro, de modo que sólo indicaremos brevemente dicho procedimiento. Definamos un sistema de coordenadas galileano que llamaremos propio y que posea la misma velocidad que el punto en estudio. La ecuación de movimiento puede escribirse para este sistema propio, de acuerdo con la primera hipótesis y esta ecuación puede ser interpretada de modo que resulte invariante al cambiar las coordenadas. Procediendo de este modo se llega a la siguiente

expresión, formulada en un sistema galileano cualquiera

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Como se puede comprobar inmediatamente que para velocidades pequeñas comparadas con las de la luz  $c$ , la ecuación obtenida coincide con la ecuación de Newton. La verificación de la invariancia de esta ecuación es una labor complicada y engorrosa, por lo que no la estudia-remos, si bien indicaremos que en una transformación de coordenadas, cambian ambos miembros de la ecuación, pero de forma tal, que reagrupándola se obtiene nuevamente la misma ecuación.

Aplicaremos esta ecuación al estudio del movimiento de una partícula cargada sometida a la acción de un campo eléctrico uniforme. La expresión del movimiento de la partícula es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = q E$$

Si integramos en el tiempo y suponemos que en  $t = 0$ ,  $v = 0$ , obtenemos

$$\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = q E t, \quad \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = A t,$$

donde  $A = q E/m$ . Despejando la velocidad resulta

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{A t}{\sqrt{1 + A^2 t^2/c^2}}$$

Puede observarse que la velocidad tiende a  $c$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Integrando nuevamente y suponiendo que en  $t = 0$ ,  $x = 0$  tenemos

$$x = \frac{c^2}{A} \left( \sqrt{1 + \frac{A^2 t^2}{c^2}} - 1 \right)$$

Esta ecuación coincide con el resultado clásico para velocidades pequeñas comparadas con  $c$ . La expresión obtenida debe ser empleada en los aceleradores de partículas de alta energía, que trabajen con un potencial acelerador superior a 10 kV.



# Apéndices

## Temas de ampliación

Dejamos como ejercicio al lector un conjunto de problemas interesantes que no han sido estudiados en el texto de este libro. Constituirán una guía conveniente, especialmente al revisar cada uno de los capítulos. Se indicarán algunos de los temas posibles con sugerencias para dirigir su estudio.

1) Hallar el campo creado por dos líneas rectas paralelas uniformemente cargadas. Demostrar que las superficies equipotenciales son cilindros y que el campo es tangente a circunferencias situadas en planos normales a las líneas equipotenciales.

2) Estudiar las superficies equipotenciales del campo creado por dos cilindros conductores cuyos ejes no coinciden. Hallar el campo. Determinar la capacidad por metro de conductor. Se sugiere, aplicar los resultados del problema 1).

3) Dos puntos de un plano conductor indefinido se unen a un generador de tensión  $V$ . Hallar la distribución de corrientes en el plano y la resistencia equivalente. Se sugiere, aplicar los resultados del problema 1).

4) Un alternador es un dispositivo similar a un instrumento de cuadro móvil, sometido a un movimiento de rotación uniforme. Estudiar las tensiones generadas y el par que se opone al movimiento. Estudiar las tensiones generadas en otra bobina que forma un cierto ángulo con la primera.

5) En la construcción usual de un alternador, el conjunto central de hierro sigue solidario el giro de la bobina. Estudiar si esta disposición produce algún cambio en el funcionamiento del alternador. Es usual además, que la bobina se disponga en ranuras o polos cortados en el hierro. Debido a la alta permeabilidad del hierro puede admitirse que las líneas del campo magnético “evitan” la ranura. En estas condiciones calcular la fuerza electromotriz inducida suponiendo que la distribución total del campo se modifica poco. Estudiar directamente el campo eléctrico presente en el conductor. Se recomienda aplicar las leyes de los campos en sistemas en movimiento.

6) Si se conecta un alternador a un generador de corriente alterna, funciona efectivamente como motor. Calcular las condiciones de funcionamiento. Se sugiere determinar el valor medio del par en función del tiempo.

7) Se dispone de un electroimán cuya armadura se une a las bobinas por medio de un resorte. Estudiar los fenómenos que ocurren al conectar un generador a las bobinas y al alimentar éstas con un generador de corriente senoidal. Discutir el problema en

función de la frecuencia.

8) Hallar la respuesta de un instrumento de cuadro móvil a una onda de corriente alterna y estudiar el problema en función de la frecuencia. Se sugiere emplear la representación vectorial simbólica.

9) Demostrar que las leyes que verifican las funciones A del capítulo VIII, sección 3, coinciden con las leyes estáticas.

10) Estudiar el campo de la línea formada por dos conductores paralelos de radio  $r$ , separados por una distancia  $d$ , grande respecto a  $r$ . Se sugiere aplicar los resultados del tema 2 y del tema 9.

11) Estudiar las corrientes y las tensiones en una línea cuando se conecta instantáneamente un generador de tensión constante  $V$ . Se supone que en el extremo de la línea se encuentra una resistencia  $R$ . Se sugiere aplicar los métodos de la teoría de circuitos.

12) Demostrar que una guía de onda que no posea un conductor en su interior no puede tener una solución directa con los campos eléctricos y magnéticos ambos transversales. Se recomienda aplicar los resultados del tema 9.

13) Hallar los modos de una guía de onda formada por dos planos conductores indefinidos.