Identidades Trigonométricas

Éste es un capítulo bastante usado en Trigonometría, ya que existen de los más diversos ejercicios. La familiarización con las fórmulas permitirá abreviar los pasos para llegar a demostrar las identidades.

Recomendación

Hasta llegar a una familiarización de las identidades deberá convertirse cualquier función a otra relacionada a senos o cosenos.

Principales identidades

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$$
$$1 + \text{ctg}^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Comentarios

- La primera identidad es realmente útil. Desde ella prácticamente pueden resolverse casi todas las identidades.
- Para demostrar la primera identidad tendremos que remitirnos al círculo trigonométrico (radio = 1) y aplicar el teorema de Pitágoras.

Suma y resta de ángulos

$\text{sen}(\alpha + ß) = \text{sen}\ \alpha \cos ß + \cos \alpha\ \text{sen}\ ß$.
$\text{sen}(\alpha - ß) = \text{sen}\ \alpha \cos ß – \cos \alpha\ \text{sen}\ ß$.
$\cos(\alpha + ß) = \cos \alpha \cos ß – \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ ß$.
$\cos(\alpha - ß) = \cos \alpha \cos ß + \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ ß$.

Con estas expresiones podemos hallar las demás funciones.

Ejemplo
Hallar $\text{tg}(\alpha+ß)$

$\text{tg}(\alpha+ ß) = \text{sen}(\alpha+ ß) / \cos (\alpha+ ß) = [\text{sen}\alpha \cos ß + \text{Cos}\alpha\ \text{sen}ß]/[\cos\alpha \cos ß – \text{sen}\alpha\ \text{sen}ß] =$
(dividimos numerador y denominador entre $\cos\alpha \cos ß$)
$= [\text{tg}\alpha + \text{tg}ß]/[1 – \text{tg}\alpha\ \text{tg}ß]$

$\text{tg}(\alpha – ß) = [\text{tg}\alpha – \text{tg}ß]/[1 + \text{tg}\alpha\ \text{tg}ß]$

Ángulos dobles

Ejemplo
Hallar $\text{sen}(2\alpha)$

$\text{sen}(2\alpha) = \text{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha\ \text{sen}\alpha = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha – \text{sen}^2\alpha$
$\text{tg}(2\alpha) = 2\ \text{tg}\alpha / [1 – \text{tg}^2\alpha]$

Ángulos mitad

Ejemplo
Hallar $\text{sen}(\alpha/2)$

$\cos\alpha = \cos^2(\alpha/2) – \text{sen}^2(\alpha/2) = 1 – \text{sen}^2(\alpha/2) – \text{sen}^2(\alpha/2) = 1 – 2\text{sen}^2(\alpha/2)$

$2sen^2(\alpha/2) = 1 - \cos\alpha$

$$sen(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg(\alpha/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

Los ángulos triples, cuádruples, etc. resultan de aplicar las funciones anteriores para α + 2α, 2α + 2α, etc.

Ejemplos
En todos los casos deberá verificarse la identidad.

cscA – senA = ctgA cosA
(1/senA) – senA = (1 – sen^2A)/senA = cos^2A/senA = (cosA/senA)cosA = ctgA cosA

senA + cosA ctgA = cscA
senA + cosA (cosA/senA) = (sen^2A + cos^2A)/senA = 1/senA = cscA

tgA + 2cosA cscA = secA cscA + ctgA
(senA / cosA) + 2cosA (1/senA) = [sen^2A + 2cos^2A]/(senA cosA) =
[sen^2A + cos^2A + cos^2A]/(senA cosA) = (1 + cos^2A)/(senA cosA) =
1/(senA cosA) + cos^2A / (senA cosA) = cscA secA + ctgA

(tgA + ctgA)(cosA + senA) = cscA + secA
[(senA / cosA) + (cosA / senA)](cosA + senA) = [(sen^2A + cos^2A)/(senA cosA)](cosA + senA) =
[1/(senA cosA)](cosA + senA) = cosA / (senA cosA) + senA / (senAcosA) = 1/senA + 1/cosA =
cscA + secA

tg^2A – sen^2A = tg^2A sen^2A
(sen^2A / cos^2A – sen^2A) = sen^2A [(1/cos^2A) – 1] = sen^2A (1 – cos^2A)/cos^2A =
sen^2A sen^2A / cos^2A = sen^2A tg^2A

(secA – tgA)(cscA + 1) = ctgA
[(1/cosA) – senA/cosA][1/senA + 1] = [(1 – senA)/cosA][(1 + senA)/senA] =
(1 – sen^2A)/[senA cosA] = cos^2A / [senA cosA] = cosA / senA = ctgA

csc^4A – ctg^4A = csc^2A + ctg^2A
(csc^2A + ctg^2A)(csc^2A – ctg^2A) = (csc^2A + ctg^2A)(1) = csc^2A + ctg^2A

(1 – senA)(secA + tgA) = cosA
(1 – senA)(1/cosA + sen/cosA) = (1 – senA)[1 + senA]/cosA = (1 – sen^2A)/cosA = cos^2A/cosA = cosA

senA /(1 – cosA) = cscA + ctgA
[senA (1 + cosA)] / [(1 – cosA)(1 + cosA)] = (senA + senA cosA)/(1 – cos^2A) =
(senA + senA cosA)/sen^2A = senA/sen^2A + senAcosA/sen^2A = (1/senA) + cosA/senA = cscA + ctgA

(ctgA – 1)/(ctgA + 1) = (1 – tgA)/(1 + tgA)
(1 – 1/ctgA) /(1 + 1/ctgA) = (1 – tgA)/(1 + tgA)