Diseño de tarifas en empresas reguladas: una nueva axiomatización del sistema de Aumann-Shapley

José Alcalde

Resumen: Este artículo presenta un análisis de sistemas de tarifación para monopolios sociales. Probamos que el mecanismo de Aumann y Shapley es el único capaz de satisfacer una serie de propiedades que reflejan la neutralidad del sistema de tarifación.

La obtención de este mecanismo a partir de una extensión aditiva de la tarifación proporcional al coste marginal nos permite interpretar la propuesta de estos autores desde un punto de vista económico, así como relacionar este sistema de precios con las propuestas clásicas de Ramsey y Boiteux.

Abstract: This paper presents an analysis of tarifs for social monopolies. We show that the Aumann-Shapley mechanism is the unique satisfying a set of axioms yielding neutral tarifs.

We obtain this mechanism by means of an additive extension of the marginal cost pricing rule. This way to derive our rule permits us to have new economic interpretations about what the Aumann-Shapley advice is and to connect it with the results by Ramsey and Boiteux.

Este trabajo presenta un análisis normativo del problema de tarifación en el seno de un monopolio social multiproducto. Nuestro punto de partida será justificar la necesidad de que ciertas propiedades sean satisfechas por cualquier sistema de tarifación. El objetivo es caracterizar el conjunto de reglas que satisfagan todas y cada una de las propiedades propuestas.

José Alcalde es miembro del Departamento de Fonaments de l'Anàlisi Econòmia de la Universidad de Alicante, España.

El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por la Comisión Interministerial para la Ciencia y la Tecnología mediante el proyecto PB94-1504. El autor agradece los comentarios de Íñigo Iturbe-Ormaetxe, Hervé Moulin y Guillermo Owen. Agradece, asimismo, de manera muy especial, el apoyo prestado por Salvador Barberà a lo largo de la elaboración de este trabajo.

La existencia de empresas reguladas plantea una cuestión cuya solución no resulta, en caso alguno, trivial. Nos estamos refiriendo al establecimiento de un sistema de precios para los bienes producidos dentro de tal empresa. Este problema se acentúa particularmente en el caso de un monopolio socialmente regulado, como resultado del requisito adicional de equilibrio presupuestario. En este contexto, Ramsey (1927) y Boiteux (1956) estudian la selección de tarifas óptimas para dichas empresas. Sus conclusiones recomiendan un sistema de tarifación que adolece de una serie de limitaciones. Entre las que podemos citar la necesidad de un alto grado de información por parte del decisor público. En efecto, el sistema de tarifas propuesto depende de la elasticidad-precio de la demanda. Tales requisitos de información conducen a desestimar estas propuestas por ser inoperantes en el contexto en el que pretendemos aplicarlas.

Habida cuenta de la dificultad de implementar estas reglas de tarifación, nos encontramos en la literatura con dos enfoques distintos, ambos encaminados a resolver o eludir dicha cuestión. Uno de ellos ha dado origen a la denominada Nueva Teoría de la Regulación.[1] El segundo, adoptado en este trabajo, hace referencia a un estudio axiomático de reglas de tarifación.

La idoneidad del tipo de aproximación adoptada se fundamenta, esencialmente, en que el requisito de información necesario para implementar dichas reglas es mínimo. En efecto, como veremos a lo largo del artículo, únicamente necesitamos conocer la función de costes y el nivel de producción. Por otra parte, de las propiedades exigidas al mecanismo que analizaremos se desprende que éste captura un cierto grado de equidad en el tratamiento de los distintos bienes. Esta equidad debe entenderse en relación con la estructura de los costes de producción.

El mecanismo que vamos a analizar fue descrito por Aumann y Shapley (1974). Estos autores realizan un estudio acerca de los *Juegos no atómicos* y presentan una función de valor para dicha familia de juegos, conocida en la literatura como "mecanismo de Aumann y Shapley". Diversos autores han analizado este mecanismo como propuesta de solución a un problema de reparto de costes.[2] Todos ellos coinciden

[1] Para una revisión de la literatura sobre la regulación, véase Caillaud, Guesnerie, Rey y Tirole (1988), Laffont (1994) y Laffont y Tirole (1993).

[2] Tauman (1988) presenta una excelente revisión de la literatura hasta finales de la década de 1980.

en presentar dicha función de valor como la propuesta idónea ante cualquier problema de reparto de costes que se pudiera presentar dentro de una familia muy amplia. La justificación empleada se fundamenta en una aproximación axiomática al problema. Esto es, cada uno de los autores que analizan dicho mecanismo presenta un conjunto de propiedades, justifica la necesidad de su cumplimiento y concluye que la regla de Aumann y Shapley (1974) es el único sistema de tarifación que las satisface.

Si bien la propuesta de Aumann y Shapley ha sido ampliamente elogiada gracias al conjunto de propiedades satisfechas, queda un vacío en cuanto a la interpretación de las tarifas propuestas por este mecanismo. En este sentido cabe destacar que dicha solución queda definida en Samet y Tauman (1982) como *la medida de Lebesgue del coste marginal de producción en la álgebra de Borel generada por el intervalo [0, 1]*. En este trabajo proponemos una expresión alternativa a la presentada por Aumann y Shapley. Esta nueva formulación nos permitirá ofrecer una justificación en términos económicos de la regla propuesta por dichos autores.

El proceso desarrollado en este artículo mantiene este espíritu axiomático tan vastamente analizado. Propondremos una extensión aditiva de la tarifación proporcional al coste marginal. De esta manera, obtenemos un mecanismo que satisface un conjunto de propiedades de cumplimiento deseado. Mas aún, dicho mecanismo viene determinado, en la economía en la cual queda descrito, mediante cinco propiedades básicas, lo que conduce al resultado principal del artículo (Teorema 3.1).

Es en el estudio de las propiedades satisfechas por este mecanismo donde se aprecia la conexión entre dicha extensión aditiva de la tarifación proporcional al coste marginal y el mecanismo de Aumann y Shapley. En efecto, se comprueba que la propuesta de estos autores surge de modo natural como una extensión aditiva de la tarifación proporcional al coste marginal.

El contenido de este artículo está expuesto de la manera siguiente. En el apartado 1 presentamos el modelo de referencia. En el 2 se presentan un conjunto de propiedades básicas, y se justifica la necesidad de su cumplimiento por parte de cualquier sistema de tarifación; asimismo, se expone el concepto central de nuestro trabajo: el mecanismo de Aumann y Shapley. Dedicamos el apartado 3 a la presentación de nuestro resultado principal: el mecanismo de Aumann y Shapley queda completamente caracterizado por el conjunto de axiomas presentados a lo largo del apartado 2. Finalmente, dedicamos un apartado a la exposición de algunas conclusiones que se desprenden del conjunto del trabajo.

1. Conceptos previos

Consideramos una empresa que produce n bienes distintos. Dichos bienes son indizados por $\{1,..., i,..., n\}$. Para cada tecnología posible, F, y para cada nivel de precios de los factores, P, encontramos asociada una función de costes de la empresa. En nuestro modelo no desempeñará un papel relevante el nivel de precios de los factores empleados por la empresa a lo largo del proceso productivo. Por lo tanto, podemos identificar cada función de costes con la función de producción que la genera:

$$C_F(q) = \min_{q \geq F(X)} \sum_j P_j X_j$$

donde P_j es el precio del factor j, X denota el vector de factores usados en la producción, y $q = (q_1,..., q_i,..., q_n)$ representa el nivel de producción de cada uno de los bienes elaborados por esta empresa.

Un problema de tarifación para nuestra empresa vendrá completamente determinado por un par $(C_F, \overline{q})$ compuesto por la función de costes y el nivel de producción. Impondremos que cada $\overline{q}_i$ sea estrictamente positivo para cada i —ningún bien deja de producirse— y que C_F esté bien definida en cada nivel de producción q' no superior a $\overline{q}$.

El problema al cual queremos dar respuesta es el siguiente. Consideremos una empresa que produce a unos costes C_F y debe satisfacer una demanda $\overline{q}$. ¿Qué precio deberá imponerse a cada uno de los bienes? La respuesta dependerá del conjunto de propiedades que exijamos al sistema de tarifas. No obstante las restricciones presentes en la manera en que nuestro agente toma las decisiones, podemos establecer un concepto genérico de mecanismo de tarifación como una regla que asigne una tarifa a cada problema concreto.

Definición 1. Sea Ξ el conjunto de las posibles funciones de costes para una empresa. Decimos que φ es un sistema de tarifación en Ξ si a cada problema $(C_F, \overline{q})$, con C_F en Ξ, le asocia un vector de tarifas:

$$\varphi(C_F,\overline{q}) = \left(\varphi_1(C_F,\overline{q}),\ldots,\varphi_i(C_F,\overline{q}),\ldots,\varphi_n(C_F,\overline{q})\right).$$

El conjunto de funciones de costes de referencia, C, puede marcar una restricción importante no sólo al conjunto de posibles mecanismos de tarifación, sino también al ámbito de aplicación de los mismos. En este sentido, podemos pensar en el coste marginal como una buena propuesta de sistema de tarifación. Esto es, considerando C como el conjunto de funciones de $\mathbb{R}^n$ para las cuales todas las derivadas parciales estén definidas, consideremos el mecanismo que asocia a cada bien su coste marginal de producción:

$$\varphi_i^{MC}(C_F,\overline{q}) = \frac{\partial C_F}{\partial q_i}(\overline{q}). \tag{1.1}$$

Los mecanismos inspirados en el coste marginal tienen una interpretación atractiva. Recordemos que las tarifas recomendadas por el mecanismo desempeñan el papel del precio al cual debe ser ofertado cada bien. Esto nos lleva a pensar en el coste marginal de producción como el precio que establecería una empresa que maximizara beneficios en un contexto competitivo de producción simple bajo condiciones de diferenciabilidad. Inspirados en esta idea consideraremos funciones cuyo gradiente esté definido en el interior relativo de $\mathbb{R}^n_+$. En este contexto queda perfectamente definida la regla de tarifación al coste marginal expuesta en (1.1). Sin embargo, dicha regla podría conducir a situaciones en las cuales los beneficios de la empresa regulada fuesen no nulos.[3] Habida cuenta de que un monopolio social estaría sometido a la obtención del equilibrio presupuestario, esta recomendación no sería válida en nuestro contexto.

Una posible solución a este problema sería ponderar el coste marginal por un coeficiente de proporcionalidad. De esta manera, obtenemos la regla de tarifación proporcional al coste marginal:

$$\varphi_i^{PMC}(C_F,\overline{q}) = \frac{\frac{\partial C_F}{\partial q_i}(\overline{q})}{\sum_{k=1}^{n} \overline{q}_k \frac{\partial C_F}{\partial q_k}(\overline{q})} C_F(\overline{q}). \tag{1.2}$$

[3] El lector podrá encontrar una justificación a tal hecho en Alcalde (1991).

Este procedimiento de tarifación queda claramente definido en el caso de funciones diferenciables, tal y como sucede en el caso del mecanismo del coste marginal. Sin embargo, este mecanismo adolece, entre otros, de un problema importante: no cumple con la propiedad de la aditividad.[4] La importancia de que dicha propiedad se cumpla queda manifiesta en el siguiente ejemplo, donde se observa cómo la simple agregación de las funciones de costes de dos bienes lleva a proponer tarifas distintas del coste medio de producción.

Ejemplo 1. Considere una empresa que produce dos bienes x e y. Suponga que la función de costes de producción de cada uno de los bienes es, respectivamente:

$$C_x(q_x) = q_x,\ C_y(q_y) = q_y^2.$$

La tarifa propuesta por el procedimiento proporcional al coste marginal aplicado a cada una de las funciones sería

$$\varphi_x^{PMC}(C_x, \bar{q}_x) = 1, \text{ y } \varphi_y^{PMC}(C_y, \bar{q}_y) = \bar{q}_y.$$

Sin embargo, si el mismo procedimiento es aplicado a la función de costes agregados definida tal como

$$C_{x+y}(q_x, q_y) = C_x(q_x) + C_y(q_y)$$

tenemos que

$$\varphi_x^{PMC}\left(C_{x+y}, (\bar{q}_x, \bar{q}_y)\right) = 1 - \frac{\bar{q}_y^2}{\bar{q}_x + 2\bar{q}_y^2}.$$

Dado que cada bien se produce en cantidades positivas, la opción de agregar costes conduciría indefectiblemente a subvencionar el precio del bien x vía un aumento "artificial" del precio del bien y.

El problema de aditividad no surge únicamente en el caso de agregación en procesos productivos independientes. Alcalde (1991) muestra cómo se pueden dar problemas de agregación similares en cuanto al empleo de factores se refiere. Young (1985) presenta diversos ejemplos donde también aparecen problemas de incentivos derivados de situaciones de agregación.

[4] El concepto de aditividad se presenta en el apartado 2. Este mecanismo tampoco satisface una propiedad de incentivos que Young (1985) denomina monotonía. [Véase también Alcalde (1991).]

El intento de resolver este problema nos lleva a pensar en cómo, apoyándonos en la idea subyacente a la tarifación proporcional al coste marginal expresada en (1.2), podemos construir un mecanismo que no adolezca de dicho problema. Pero surge una cuestión previa. ¿Cuál es el conjunto de economías para el que tiene sentido hablar de adaptaciones aditivas al mecanismo anteriormente mencionado?

La idea implícita en las funciones de costes que emplearemos en este artículo es la existencia de un número de fases, m, por las que debe pasar el conjunto de bienes a lo largo del proceso productivo. Asociada a cada una de estas fases encontramos una función de costes. La función de costes de producción se obtendrá a partir de la mera adición de las funciones de costes de todas y cada una de estas fases o subprocesos productivos. Ideas alternativas pueden emplearse para la justificación de esta descomposición aditiva. Entre ellas podríamos citar distinción entre costes administrativos, costes del proceso productivo propiamente dicho, costes publicitarios, etc. A estas funciones deberemos imponerles su diferenciabilidad en el interior relativo de $\mathbb{R}_+^n$. En particular, analizamos funciones que generalizan las funciones de tipo Cobb-Douglas.

Restringiremos nuestro análisis al conjunto de funciones C, comprendiendo tal conjunto todas las funciones que aplican $\mathbb{R}_+^n$ en $\mathbb{R}$ y que revisten la forma

$$C_F(q) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \prod_{i=1}^{n} q_i^{\beta_{ij}} \tag{1.3}$$

para algún entero m, donde α_j y β_{ij} son reales no negativos para cualquier $i = 1,..., n$ y cada $j = 1,..., m$. Además suponemos que para cada j existe al menos un i tal que β_{ij} es positivo.[5]

La idea de proceso productivo como agregación de diversos subprocesos puede verse plasmada en una descomposición de la función

[5] Esta última condición nos garantiza la no existencia de costes fijos en ninguna de las funciones de costes consideradas.

de costes en m funciones distintas, que denominamos *básicas*, cada una de las cuales reviste la forma

$$C_F^j(q) = \alpha_j \prod_{i=1}^{n} q_i^{\beta_{ij}}. \tag{1.4}$$

Esta descomposición es la que nos permite pensar en una extensión aditiva de la tarifación proporcional al coste marginal. Pero antes de presentar nuestro mecanismo debemos delimitar sobre qué tipo de descomposiciones de las funciones de costes operará el mismo.

Definición 2. Sea C_F una función en C, sea $C_F^M = \left\{C_F^1,\ldots,C_F^j,\ldots,C_F^m\right\}$ una familia de funciones básicas de C. Decimos que C_F^M es la descomposición básica de C_F si se satisface:

i) $C_F = \sum_{j=1}^{m} C_F^j$, y

ii) $\forall j, j', \left[C_F^j = \delta C_F^{j'} \text{ para algún real } \delta\right] \Rightarrow [j = j']$.

Obsérvese cómo la incorporación de la condición *ii)* asegura la unicidad de la descomposición básica de cada función en C, del mismo modo que impide la inclusión de subprocesos productivos simulados, como sería la consideración de funciones básicas constantemente nulas.

2. El mecanismo de Aumann y Shapley

Aumann y Shapley (1974) presentan una función de valor para funciones de costes continuamente diferenciables que reviste la forma

$$\varphi_i^{AS}(C_F,\overline{q}) = \int_0^1 \frac{\partial C_F}{\partial q_i}(t\overline{q})dt. \tag{2.1}$$

Una interpretación de (2.1) desde el punto de vista económico no parece, *a priori*, muy esperanzadora. El precio recomendado para cada bien coincidirá con *el valor esperado de su coste marginal cuando la producción se distribuye uniformemente a lo largo del segmento [0, $\overline{q}$].*

Es fácilmente comprobable que, en el caso de funciones básicas de C, la propuesta de dichos autores coincide con la tarifa proporcional al coste marginal. Ello nos permite reformular la expresión (2.1) para funciones en C.

Definición 3. Definimos el sistema de tarifación de Aumann y Shapley en C como aquel que a cada función de costes C_F en C, y a cada nivel de producción $\overline{q}$ en $\mathbb{R}_{++}^n$ le asocia el vector $\varphi^{AS}(C_F, \overline{q})$, cuya componente i-ésima es

$$\varphi_i^{AS}(C_F,\overline{q}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\overline{q})}{\sum_{k=1}^{n} \overline{q}_k \frac{\partial C_F^j}{\partial q_k}(\overline{q})} C_F^j(\overline{q}), \tag{2.2}$$

donde $\left\{C_F^1,\ldots,C_F^k,\ldots,C_F^m\right\}$ es la descomposición básica de C_F.

A continuación presentamos un conjunto de propiedades que servirán de base para caracterizar el mecanismo de Aumann y Shapley tal y como figura en la expresión (2.2).

Una propiedad que debemos requerir a cualquier sistema de tarifación que se aplique a un monopolio social es que, sea cual fuere la cantidad de bienes producidos y la tecnología empleada, la tarifa recomendada debe garantizar el equilibrio presupuestario. Ésta es la esencia de nuestro Axioma 1.

Axioma 1. Equilibrio presupuestario

Sea φ un sistema de tarifación en C. Diremos que φ satisface el equilibrio presupuestario si para cada C_F en C y cualquier nivel de producción $\overline{q}$ en $\mathbb{R}_{++}^n$ se satisface que

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{q}_i \varphi_i(C_F,\overline{q}) = C_F(\overline{q}). \tag{2.3}$$

La segunda propiedad que vamos a considerar ya fue enunciada anteriormente. Se trata de la aditividad. La idea subyacente en este concepto es la de invarianza ante agregaciones de costes. Algunos problemas derivados del incumplimiento de este axioma fueron puestos de manifiesto en el ejemplo 1.

Axioma 2. Aditividad

Sea φ un sistema de tarifación en C. Diremos que φ es aditivo si para cualesquier par de funciones en C, C_F y C_G, se verifica que, para cualquier nivel de producción $\overline{q}$

$$\varphi(C_F + C_G, \overline{q}) = \varphi(C_F, \overline{q}) + \varphi(C_G, \overline{q}). \tag{2.4}$$

El espíritu de la propiedad que introducimos a continuación está muy relacionado con la idea de neutralidad a la que hacíamos referencia en el Axioma 2. Si anteriormente pedíamos que el mecanismo considerado fuese inmune ante agregaciones en las funciones de costes, el Axioma 3 requiere invarianza ante cambios en las escalas de medida empleadas.

Ilustremos la necesidad de que el Axioma 3 sea satisfecho. Considere el lector una empresa que produce derivados lácteos. Supóngase que la cantidad de nata producida viene medida en litros y que, por cualquier motivo, se estima más oportuno medir su producción en galones. La neutralidad de la regla de tarifación exigiría que no se produjese un cambio en el precio.

Axioma 3. Independencia de escala

Sea C_F una función de C, y sean $\lambda_1,\ldots, \lambda_i,\ldots, \lambda_n$ n escalares positivos. Sea C_G una función en C que satisface la siguiente relación con C_F.

$$C_G(q_1,\ldots, q_i,\ldots, q_n) = C_F(\lambda_1 q_1,\ldots, \lambda_i q_i,\ldots, \lambda_n q_n). \tag{2.5}$$

Decimos que el mecanismo φ es independiente de la escala de medida si, para cualquier vector de producción $\overline{q}$ en $\mathbb{R}^n_{++}$ y para cada $i = 1,\ldots, n$, verifica que

$$\varphi_i(C_G, \overline{q}) = \lambda_i \varphi_i(C_F, (\lambda_1 \overline{q}_1,\ldots, \lambda_i \overline{q}_i,\ldots, \lambda_n \overline{q}_n)). \tag{2.6}$$

La siguiente propiedad es clásica en el ámbito de la Teoría de Juegos Cooperativos. Nos estamos refiriendo a la inmunidad ante bie-

nes simulados.[6] En concreto, nuestro Axioma 4 pretende evitar que bienes de producción no costosa tengan asignado un precio positivo. El incumplimiento de esta propiedad por parte de una regla de tarifación permitiría la coexistencia de un déficit presupuestario en el monopolio social y la satisfacción del Axioma 1. Esta posibilidad existiría al considerar un bien simulado (o ficticio) al cual se le asocia un precio positivo y es producido en cantidades positivas.

Axioma 4. Inmunidad ante bienes simulados

Sea φ un sistema de tarifación en C. Diremos que φ es inmune ante bienes simulados si para cada función C_F en C, cada nivel de producción q y cada bien i, se satisface que,[7] si existe

$$C_F^r : \mathbb{R}^{n-1}_+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } C_F(q_{-i}, q_i) = C_F^r(q_{-i}),$$

entonces, para cada $\overline{q} = (\overline{q}_{-i}, \overline{q}_i)$

$$\varphi_i(C_F, \overline{q}) = 0. \tag{2.7}$$

La última propiedad que introducimos es denominada simetría parcial. Su ámbito de aplicación es el conjunto de funciones básicas y pretende reflejar una idea de trato simétrico a todos y cada uno de los bienes en cada subproceso productivo. Supongamos que en un subproceso productivo el coste marginal de producción de dos bienes es idéntico. Entonces, puesto que la contribución marginal de ambos bienes al coste de producción en este subproceso es la misma, un sistema de tarifación debe proponer que la participación de tales bienes en dicho subproceso les lleve a aumentar el precio de ambos en la misma cuantía.

Nótese que, en el caso de funciones básicas de C, la relación entre el coste marginal de dos bienes depende únicamente del nivel de producción de dichos bienes. Este hecho refuerza la necesidad de que tal propiedad sea satisfecha.

---

[6] Este término es conocido en la literatura como *dummy*.

[7] Hacemos uso de la notación clásica en la Teoría de Juegos y denotamos por $q = (q_{-i} \cdot q_i)$ al vector cuya componente i-ésima sea q_i y q_{-i} es el vector resultante de eliminar en q dicho elemento.

Axioma 5. Simetría parcial

Sea φ un sistema de tarifación en C. Diremos que φ es parcialmente simétrico si para cada par de bienes, i, k y para cada C_F^j, función básica de C, se satisface que

$$\left[\frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\overline{q}) = \frac{\partial C_F^j}{\partial q_k}(\overline{q})\right] \Rightarrow \left[\varphi_i\left(C_F^j,\overline{q}\right) = \varphi_k\left(C_F^j,\overline{q}\right)\right]. \qquad (2.8)$$

Cabe ahora preguntarse si es posible conciliar las propiedades introducidas en los axiomas presentados a lo largo de este apartado. La respuesta es positiva y constituye el objeto del apartado 3. El único sistema de tarifación capaz de lograr dicha conciliación es la regla de Aumann y Shapley.

3. Caracterización del mecanismo de Aumann y Shapley

Presentamos en este apartado el principal resultado del trabajo. Comprobaremos que el sistema de tarifación de Aumann y Shapley descrito por (2.2) se revela como la única propuesta neutral al problema estudiado.

Teorema 3.1. *Existe un único sistema de tarifación que satisface los axiomas 1 a 5 para cualquier problema (C_F, $\overline{q}$) con C_F en C. Dicho sistema es la regla de Aumann y Shapley.*

Antes de proceder a la demostración del Teorema 3.1 enunciaremos un conjunto de resultados que nos facilitarán la presentación de la prueba.

Los lemas 3.2 y 3.3 se presentan como un apoyo a la Proposición 3.4, que muestra el cumplimiento del Axioma 3 por parte del mecanismo de Aumann y Shapley (1974). Omitimos las pruebas de ambos lemas.[8]

Lema 3.2. *Sea C_F^j una función básica de C, y sean $\lambda_1,\dots, \lambda_i,\dots, \lambda_n$ n escalares positivos. Sea C_G una función en C que satisface (2.5). Entonces, para cualquier vector de producción $\overline{q}$ en $\mathbb{R}^n_{++}$ y cada bien $i = 1,\dots, n$, se satisface que*

$$\varphi_i^{AS}(C_G,\overline{q}) = \lambda_i\varphi_i^{AS}\left(C_F^j,(\lambda_1\overline{q}_1,\dots,\lambda_i\overline{q}_i,\dots,\lambda_n\overline{q}_n)\right).$$

Este lema establece que el mecanismo de Aumann y Shapley satisface el Axioma 3 en el conjunto de funciones básicas de C.

Lema 3.3. *Sea C_G una función en C, y sean $\lambda_1,\dots, \lambda_i,\dots, \lambda_n$ n escalares positivos. Sólo existe una función C_G en C tal que, para todo q de $\mathbb{R}^n_{++}$*

$$C_G(q_1,\dots,q_i,\dots,q_n) = C_F(\lambda_1 q_1,\dots,\lambda_i q_i,\dots,\lambda_n q_n).$$

Proposición 3.4. *El mecanismo de Aumann y Shapley satisface el Axioma 3, Independencia de escala, en* C.

Demostración: Sea C_F una función de C, y sean $\lambda_1,\dots, \lambda_i,\dots, \lambda_n$ n escalares positivos. Sea $\left\{C_F^1,\dots,C_F^k,\dots,C_F^m\right\}$ la descomposición básica de C_F. Con base en el Lema 3.3 sabemos que existe una única función C_G en C que satisfaga (3.1). Además, si $\left\{C_G^1,\dots,C_G^k,\dots,C_G^{m'}\right\}$ es la descomposición básica de C_G se satisfará que ambas descomposiciones tengan el mismo número de elementos, esto es, $m = m'$.

Si calculamos el resultado de aplicar el mecanismo de Aumann y Shapley sobre C_G cuando el nivel de producción es $\overline{q}$ y aplicamos el Lema 3.2, se tiene que

$$\varphi_i^{AS}(C_G,\overline{q}) = \sum_{j=1}^{m}\varphi_i^{AS}\left(C_G^j,\overline{q}\right) = \sum_{j=1}^{m}\lambda_i\varphi_i^{AS}\left(C_F^j,\overline{q}\right) = \lambda_i\varphi_i^{AS}(C_F,\overline{q})$$

como queríamos demostrar. ■

El resultado que presentamos a continuación es esencial para entender la prueba del Teorema 3.1. En la Proposición 3.5 mostramos que, en cada subproceso productivo, fijado el nivel de producción, existe una única modificación en la escala de medidas que lleva a igualar el coste marginal de todos los bienes que afectan el coste asociado a dicho subproceso.

[8] Las pruebas de estos resultados pueden consultarse en Alcalde (1991).

Proposición 3.5. Sea $C_F^j(q) = \alpha_j \prod_{i=1}^{n} q_i^{\beta_{ij}}$ una función básica de C, y sea $S = \{i | \beta_{ij} \neq 0\}$ el conjunto de bienes cuya producción es costosa en el subproceso C_F^j. Sea $\Psi = \left\{\lambda \in \mathbb{R}_{++}^n | \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\beta_{ij}} = 1\right\}$. Para cada nivel de producción $\bar{q} \in \mathbb{R}_{++}^n$ existe un único valor de C, digamos $\tilde{\lambda}$, en el conjunto

$$\left\{\lambda \in \Psi | \forall_i, k \in S, \frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\lambda \bar{q}) = \frac{\partial C_F^j}{\partial q_k}(\lambda \bar{q})\right\} \cap \{\lambda \in \Psi | \lambda_i = 1 \forall_i \notin S\}. \quad (3.2)$$

Demostración: Dado $\bar{q} \in \mathbb{R}_{++}^n$, tomemos $\tilde{\lambda}_i = 1$ para cada $i \notin S$. Puesto que C_F^j es una función básica de C, para cada i de S se satisfará que

$$\frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\tilde{\lambda}\bar{q}) = \beta_{ij}(\tilde{\lambda}_i \bar{q}_i)^{-1} C_F^j(\tilde{\lambda}\bar{q}). \quad (3.3)$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = 1 \in S$. De (3.3) sabemos que, para cada i en S y $\tilde{\lambda}$ en Ψ se satisfará que

$$\tilde{\lambda}_i = \frac{\beta_{ij}\bar{q}_1}{\beta_{1j}\bar{q}_i}\tilde{\lambda}_1. \quad (3.4)$$

Por otra parte, dado que $\tilde{\lambda} \in \Psi$, debe satisfacerse que

$$\prod_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i^{\beta_{ij}} = 1. \quad (3.5)$$

El sistema formado por las ecuaciones en (3.4) y (3.5) consta de tantas variables como elementos tiene S e igual número de ecuaciones. Si sustituimos las ecuaciones de (3.4) en (3.5) obtendremos que

$$\prod_{i \in S} \left(\frac{\beta_{ij}\bar{q}_1}{\beta_{1j}\bar{q}_i}\right)^{\beta_{ij}} \tilde{\lambda}_1^{\sum_{i \in S} \beta_{ij}} = 1,$$

de donde podemos concluir que

$$\tilde{\lambda}_1 = \left[\prod_{i \in S} \left(\frac{\beta_{1j}\bar{q}_i}{\beta_{ij}\bar{q}_1}\right)^{\beta_{ij}}\right]^{\frac{1}{\sum_{i \in S} \beta_{ij}}}$$

es la única solución real positiva y, para cada i de S, se cumplirá que $\tilde{\lambda}_i$, obtenido a partir de (3.4), es también único. ■

Estamos ahora en disposición de probar el Teorema 3.1.

Demostración [Teorema 3.1]: En primer lugar, argumentaremos que el mecanismo de Aumann y Shapley satisface los axiomas 1 a 5. Los axiomas 1 y 2 se satisfacen por construcción. Para comprobar el cumplimiento del Axioma 4, analicemos una función C_F y consideremos un bien, i, que satisfaga el antecedente de (2.7). Para cada j, elemento de la descomposición básica de C_F, se satisfará que $\beta_{ij} = 0$ o $\alpha_j = 0$. De ello se desprende que $\frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\bar{q})$ ha de ser nulo para cualquier $\bar{q}$. Por lo tanto ha de cumplirse, necesariamente, que $\varphi_i^{AS}(C_F, \bar{q}) = 0$. Se comprueba directamente, a partir de su propia definición, que este mecanismo satisface el Axioma 5. El análisis del Axioma 3 fue el objeto de nuestra Proposición 3.4 anterior.

Por otra parte, sea φ un sistema de tarifación que satisfaga los axiomas 1 a 5. Probaremos que $\varphi \equiv \varphi^{AS}$.

Dado que φ es aditivo, podemos centrar nuestro análisis sobre funciones básicas. Consideraremos, por lo tanto, una función C_F^j básica de C, $C_F^j(q) = \alpha_j \prod_{i=1}^{n} q_i^{\beta_{ij}}$.

Denotemos por $S = \{i | \beta_{ij} \neq 0\}$, el conjunto de bienes cuya producción es costosa para el subproceso estudiado. Con base en el Axioma 4 sabemos que, para cada $\bar{q}$ y cada $i \notin S$ se satisfará que

$$0 = \varphi_i(C_F^j, \bar{q}) = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}} \bar{q}_i^{-1} C_F^j(\bar{q}) = \varphi_i^{AS}(C_F^j, \bar{q}),$$

por lo tanto, queda por analizar el caso en que $i \in S$.

Sea $\Psi = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^n_{++} \mid \prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{\beta_{ij}} = 1\right\}$. Para cada $\bar{q} \in \mathbb{R}^n_{++}$ y para cada $\lambda \in \Psi$ se tiene que

$$C_F^j(\bar{q}) = C_F^j(\lambda\bar{q}). \tag{3.6}$$

En virtud del Axioma 3 sabemos que $\varphi_i\left(C_F^j, \bar{q}\right) = \lambda_i \varphi_i\left(C_F^j, \lambda\bar{q}\right)$. Para $\bar{q}$ dado, sea $\tilde{\Psi}$ el conjunto definido en (3.2). Como se comprobó en la Proposición 3.5, dicho conjunto consta de un único elemento $\tilde{\lambda}$. Con base en el axioma 1 y en 3 (3.6) sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \bar{q}_i \varphi_i\left(C_F^j, \tilde{\lambda}\bar{q}\right) = C_F^j\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right) = C_F^j(\bar{q}),$$

además, por construcción de $\tilde{\lambda}$, se verifica que, para cada i, i' de S, $\frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\lambda\bar{q}) = \frac{\partial C_F^j}{\partial q_{i'}}(\lambda\bar{q})$ por lo que, con base en el Axioma 5 se satisfará que $\varphi_i\left(C_F^j, \tilde{\lambda}\bar{q}\right) = \varphi_{i'}\left(C_F^j, \tilde{\lambda}\bar{q}\right)$ para cada i, i' en S. Conjugando esta propiedad con el Axioma 1 obtenemos que, para todo i en S,

$$\varphi_i\left(C_F^j, \tilde{\lambda}\bar{q}\right) \sum_{k \in S} \tilde{\lambda}_k \bar{q}_k = C_F^j\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right).$$

Por otra parte, gracias al Teorema de Euler sabemos que

$$C_F^j\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i \bar{q}_i \frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}},$$

luego

$$\varphi_i\left(C_F^j, \tilde{\lambda}\bar{q}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \beta_{ij}} \frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right)$$

para cada i de S. Dado que

$$\frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right) = \tilde{\lambda}_i^{-1} \frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\bar{q}),$$

se tiene, en virtud del Axioma 3, que

$$\varphi_i\left(C_F^j, \bar{q}\right) = \tilde{\lambda}_i \varphi_i\left(C_F^j, \tilde{\lambda}\bar{q}\right) = \tilde{\lambda}_i \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}} \frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}\left(\tilde{\lambda}\bar{q}\right) = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}} \frac{\partial C_F^j}{\partial q_i}(\bar{q})$$
$$= \varphi_i^{AS}\left(C_F^j, \bar{q}\right),$$

con lo cual concluye la prueba del Teorema 3.1.

Conclusiones

Hemos presentado en este artículo una nueva axiomatización de uno de los sistemas de tarifación más estudiado en la literatura económica: el mecanismo de Aumann y Shapley.

La forma a partir de la cual obtenemos el mecanismo de Aumann y Shapley nos permite pensar en él como una extensión aditiva de la tarifación proporcional al coste marginal. Esta apreciación nos otorga la posibilidad de acercar este sistema de cómputo de precios al comportamiento que presentarán los gestores de empresas en un entorno competitivo, base de los modelos que elaboraran Ramsey (1927) y Boiteux (1956).

Para concluir, presentamos una interpretación, en términos económicos, de la propuesta de Aumann y Shapley. Para ello, incluimos un análisis a partir de lo que los costes de producción suponen. En el caso en que el equilibrio presupuestario sea un requisito, Axioma 1, pensar en precios puede ser considerado equivalente a hablar del coste unitario de producción. Partiendo de esta premisa, podemos decir que el mecanismo presentado expone una manera de imputar el coste medio de producción. La forma que se recomienda surge de repartir el coste que se deriva de cada fase del proceso productivo y agregar los costes imputados en las distintas fases. Si analizamos el coste (total) imputado en un subproceso productivo a un bien, éste será

$$\bar{q}_i \varphi_i^{AS}\left(C_F^j, \bar{q}\right) = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}} C_F^j(\bar{q}),$$

esto es, el coste imputado a un bien, i, es una proporción del coste total de producción. Dicha proporción reviste la forma

$$\phi_i^j = \frac{\bar{q}_i \varphi_i^{AS}\left(C_F^j, \bar{q}\right)}{C_F^j(\bar{q})} = \frac{\beta_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} \beta_{kj}} = \left[1 + \frac{\sum_{k \neq i} \beta_{kj}}{\beta_{ij}}\right]^{-1}.$$

β_{ij} puede ser interpretado como la externalidad que produce el bien i sobre el resto de bienes en cuanto al coste del subproceso productivo j se refiere. De acuerdo con esta concepción podemos presentar la parte del coste imputado al bien i en el subproceso j como la relación entre la externalidad que dicho bien genera a los demás y la que él soporta del resto de los bienes. Como casos particulares, podemos ver que si el bien i genera una externalidad infinita (en relación con la soportada), éste asumirá el total del coste asociado a dicho subproceso. En el caso opuesto, donde esta relación se hace nula, no asumirá coste alguno derivado de este subproceso. Esta interpretación permite una justificación al empleo de la regla de Aumann y Shapley que, desde un punto de vista económico, enriquece las presentadas por otros autores [*e.g.* Samet y Tauman (1982)].

Referencias bibliográficas

Aczél, J. (1966), *Lectures on Functional Equations and their Applications*, Nueva York, Academic.

Alcalde, J. (1991), "Un nuevo mecanismo de reparto de costes", Universitat Autònoma de Barcelona, (Paper de Treball 22.91).

Aumann, R.J. y L.S. Shapley (1974), *Values of Non-Atomic Games*, Princeton, Princeton University Press.

Billera, L.J. y D.C. Heath (1982), "Allocation of Shared Cost: A Set of Axioms Yielding a Unique Procedure", *Mathematics of Operations Research*, 7, pp. 32-39.

Billera, L.J., D.C. Heath y J. Raanan (1978), "Internal Telephone Billing Rates —A Novel Application of Non-Atomic Game Theory", *Operations Research*, 26, pp. 956-965.

Boiteux, (1956), "Sur la gestion des monopoles publics astreints à l'equilibre budgétaire", *Econometrica*, 24, pp. 22-40.

Caillaud, B., R. Guesnerie, P. Rey y J. Tirole (1988), "Government Intervention in Production and Incentives Theory: A Review of Recent Contributions", *Rand Journal of Economics*, 19, pp. 1-26.

Chilov, C. (1973), *Analyse mathématique*, Moscú, MIR.

Laffont, J.J. (1994), "The New Economics of Regulation Ten Years After", *Econometrica*, 62, pp. 507-537.

Laffont, J.J. y J. Tirole (1993), *A Theory of Incentives in Procurement and Regulation*, Cambridge, MIT Press.

Mirman, L.J. y Y. Tauman (1982), "The Continuity of the Aumann-Shapley Price Mechanism", *Journal of Mathematical Economics*, 9, pp. 235-249.

——— (1982), "Demand Compatible Equitable Cost Sharing Prices", *Mathematics of Operations Research*, 7, pp. 40-56.

Ramsey, R. (1927), "A Contribution to the Theory of Taxation", *Economic Journal*, 37, pp. 47-61.

Samet, D. y Y. Tauman (1982), "The Determination of Marginal Cost Prices under a Set of Axioms", *Econometrica*, 50, pp. 895-909.

Samet, D., Y. Tauman y I. Zang (1984), "An Application of the Aumann-Shapley Prices to the Transportation Problem", *Mathematics of Operations Research*, 9, pp. 25-42.

Shapley, L.S. (1953), "A Value for N-Person Games", en H.W. Kunh y A.W. Tucker (eds.), *Contributions to the Theory of Games II*, Annals of Mathematical Studies 28, Princeton, Princeton University Press.

Tauman, Y. (1988), "The Aumann-Shapley Prices: A Survey", en Alvin E. Roth (ed.), *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge, Cambridge University Press.

Young, H.P. (1985), "Producer Incentives in Cost Allocation", *Econometrica*, 53, pp. 757-765.