ISSN 0041 - 6932

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

VOLUMEN 32, NUMERO 4

1986

BAHIA BLANCA

1987

La U.M.A. reconoce, además de miembros honorarios e institucionales, tres categorías de asociados: titulares, adherentes (estudiantes solamente) y protectores.

Toda la correspondencia administrativa, relativa a suscripciones y números atrasados de la Revista, información y pago de cuotas de asociados debe dirigirse a:

UNION MATEMATICA ARGENTINA

Departamento de Matemática
Facultad de C. Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria
1428 Buenos Aires - Argentina

La presentación de trabajos para la Revista debe efectuarse en la siguiente dirección:

REVISTA DE LA U.M.A.
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca
Argentina

Los autores reciben gratuitamente 50 separatas.

2º SEMESTRE 1986

Este fascículo se publica mediante un subsidio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

REVISTA DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

VOLUMEN 32, NUMERO 4

1986

BAHIA BLANCA

1987

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

GENERALIZED OPERATOR RICCATI EQUATIONS WITH TWO POINT BOUNDARY CONDITIONS

Lucas Jódar

ABSTRACT. Boundary problems for generalized Riccati equations whose coefficients are time-dependant closed linear operators densely defined on a separable complex Hilbert space H are studied. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions are given.

1. INTRODUCTION.

This paper is concerned with the resolution problem of generalized Riccati operator equations with two point boundary conditions of the type

$$\left.\begin{aligned} dU/dt\, U(t) &= A(t)+B(t)U(t)-U(t)C(t)-U(t)D(t)U(t) \\ E\,U(b)-U(0)F &= G \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

This equation arises in control theory, [10], transport theory, [14], and filtering problems, [1]. The Cauchy problem for this equation has been studied in [8], when $C(t) = -B(t)^*$, being $B(t)^*$ the adjoint operator of $B(t)$. If H is finite-dimensional, the coefficient operators are time-invariant, and $E=F=I$, $G=0$, $C=-B^*$, problem (1.1) has been studied in [17]. In a recent paper, [16], we study the problem (1.1), when the coefficient operators which appear in the differential equation are time-invariant bounded linear operators on H. In the following we study the problem (1.1) for the time-dependant case, and the coefficient are closed linear operators densely defined on a complex separable Hilbert space H.

The key idea is to reduce the boundary problem to the resolution problem of an algebraic operator equation of Riccati type

$$M + NX - XP - XQX = 0 \qquad (1.2)$$

From conditions for the resolution problem (1.2), conditions for the resolution problem (1.1) are obtained. Solutions of (1.1) are expressed in terms of solutions of (1.2). We apply the results to the study of the existence problem of b-periodic solutions for the differential equation which appear in (1.1).

If S is a linear operator on H, with domain $D(S)$ we denote the numerical range of S by

$$\Theta(S) = \{z \in C \ ; \ (Sx,x) = z \ ; \ \|x\| = 1\}$$

and $\sigma(S)$ its spectrum. In accordance with the definition given in [8], when S is a closed operator on H and generates an analytic semigroup denoted by $\exp(tS)$, we define the fractional powers:

$S^{\alpha} = (S^{-\alpha})^{-1}$

$$S^{-\alpha} = \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{tS}\, t^{\alpha-1}\, dt \qquad (\alpha > 0)$$

We wish to express our thanks to Professors Hendrisk Kuiper and Hiroki Tanabe for providing us with preprints and copies of their papers.

2. ASSUMPTIONS ON ABSTRACT EVOLUTION EQUATIONS.

For the sake of convenience, we state some results from the theory of abstract evolution equations which will be used in the sequel. The results of this section can be found in [7], [8], and [9]. In what follows, we denote by Σ a fixed closed angular domain $\Sigma = \{\lambda; \ |\lambda| \leqslant \delta+\pi/2\}$, $0 < \delta < \pi/2$. Let us consider the abstract evolution equation

$$d/dt\ u(t) = V(t)u(t) \quad , \quad 0 \leqslant t \leqslant b \ , \qquad (2.1)$$

in a Hilbert space W. $u = u(t)$ is a function on $[0,b]$ to W and $V(t)$ is a function on $[0,b]$ to the set of closed densely defined linear operators acting in W.

We first state the assumptions to be made in the theorems.

(H.1) For each $t \in [0,b]$, $V(t)$ is a densely defined, closed linear operator. The resolvent set $\rho(V(t))$ of $V(t)$ contains Σ. The resolvent of $V(t)$ satisfies

$$\|(\lambda I - V(t))^{-1}\| \leqslant M/|\lambda|$$

for any $\lambda \in \Sigma$ and $t \in [0,b]$, where M is a constant independent of λ and t.

(H.2) $(-V(t))^{-1}$, which is a bounded operator for each t, is continuously differentiable in $t \in [0,b]$ in the uniform operator topology.

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\lambda I - V(t))^{-1} \right\| \leq \frac{N}{|\lambda|^{1-\alpha}}$$

where N and α are constants independent of t and α with $0 < \alpha < 1$.

(H.4) $d(-V(t))^{-1}$ is Hölder continuous in $t \in [0,b]$ in the uniform topology.

Under the hypothesis (H.1)-(H.4), there exists a fundamental operator U(t,s) for the equation (2.1) which satisfies

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} U(t,s) \right\| = \| V(t)U(t,s) \| \leq \frac{C}{t-s} ,$$

and consequently, a Cauchy problem for equation (2.1) has only one strongly continuous differentiable solution (see the proof and examples in [7]).

If $\omega \in R$, $0 < \delta < \pi/2$, we denote $S_{\omega,\partial} = \{z \in C;\ |\arg(z-w)| \leq \partial + \pi/2\}$ and $\Sigma_{\omega\,\delta}$ is the closure of the complement of $S_{\omega,\delta}$ in the complex plane C. Are also sufficient conditions for ensuring the existence of a fundamental operator, the following hypothesis:

(H.5) V(t) is a densely defined, closed linear operator and $D(V(t)) \cap D(V(s))$ is dense for any s,t in [0,b].

(H.6) $\Theta(V(t)) \subset \Sigma_{\omega\,\delta}$, $\omega < 0$, $0 < \delta < \pi/2$, $t \in [0,b]$.

(H.7) There exists a, $0 < a < 1$, and a constant C_V such that

$$\| V(t) - V(v))V^{-1}(s) \| \leq C_V\ |t-v|^a$$

uniformly for all $0 \leq t, v, s \leq b$.

From hypothesis (H.5)-(H.7) and lemma 7 of [8], the domains D(V(t)) are independent of t, and there exists a fundamental solution U(t,s) for equation (2.1), (see [8],[9]).

3. ON THE RESOLUTION OF THE BOUNDARY PROBLEM.

The first result is a necessary condition for the resolution problem (1.1).

THEOREM 1. *Let* U(t) *be a solution of* (1.1), *where the coefficient operators* A(t), B(t), C(t), D(t) *for all* t *in the interval* [0,b] *and* E, F *and* G *are bounded linear operators on* H. *Suppose that the following conditions are satisfied:*

(i) *The operator function* $t \dashrightarrow A(t)+B(t)U(t)$, *generates a funda-*

mental operator.

(ii) *The operator function* $t \dashrightarrow \begin{bmatrix} C(t) & D(t) \\ A(t) & B(t) \end{bmatrix}$, *generates a fundamental operator* $U(t,s)$.

Then $U_o = U(0)$ *satisfies the algebraic operator equation*

$$M + NX - XP - XQX = 0 \tag{3.1}$$

where

$$\left.\begin{array}{ll} M = E\,U_3(b,0) - G\,U_1(b,0) \;, & P = F\,U_1(b,0) \\ N = E\,U_4(b,0) - G\,U_2(b,0) \;, & Q = F\,U_2(b,0) \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

$$U(t,s) = \begin{bmatrix} U_1(t,s) & U_2(t,s) \\ U_3(t,s) & U_4(t,s) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Proof. From the hypothesis (i), there exists only one solution of the following problem

$$d/dt\; Y(t) = (C(t)+D(t)U(t))Y(t) \;;\; Y(0) = I$$

If we define $Z(t) = U(t)Y(t)$, computing it follows that

$$d/dt\; Z(t) = (A(t)+B(t)U(t))Y(t) \;;\; Z(0) = U(0) = U_o.$$

Thus $\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$, satisfies $\begin{bmatrix} Y(0) \\ Z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ U_o \end{bmatrix}$, and

$$d/dt \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(t) & D(t) \\ A(t) & B(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = W(t) \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

From hypothesis (ii), and the properties of a fundamental operator, it follows that

$$\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = U(t,0) \begin{bmatrix} I \\ U_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1(t,0)+U_2(t,0)U_o \\ U_3(t,0)+U_4(t,0)U_o \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

Since $U(t)$ satisfies the boundary condition associated with (1.1), from the expression of $Z(t)$ it follows that

$$EZ(b) = E\,U(b)Y(b) = (G+U_oF)Y(b)$$

and from (3.5)

$$E(U_3(b,0)+U_4(b,0)U_o) = (G+U_oF)(U_1(b,0)+U_2(b,0)U_o) \tag{3.6}$$

$$(EU_3(b,0)-GU_1(b,0))+(EU_4(b,0)-GU_2(b,0)U_o-U_oF\;U_1(b,0)-U_oFU_2(b,0)U_o = 0$$

From (3.2) the result is proved.

THEOREM 2. *Let* U_o *be a solution of equation* (3.1) *with coefficient given by* (3.2). *If hypothesis* (ii) *of theorem* 1 *is satisfied and*

(iii) $U_1(t,0)+U_2(t,0)U_o$ *is invertible for all* t *in* [0,b],

then (1.1) *is solvable, and a solution is given by the expression*

$$U(t) = (U_3(t,0)+U_4(t,0)U_o)(U_1(t,0)+U_2(t,0)U_o)^{-1} \tag{3.7}$$

Proof. From hypothesis (ii) of theorem 1, there exists a fundamental solution of problem (3.4). Now, we define $Y(t) = U_1(t,0)+U_2(t,0)U_o$, and $Z(t) = U_3(t,0)+U_4(t,0)U_o$, for all t in [0,b]. Thus U(t) given by (3.7) can be expressed by $U(t) = Z(t)Y(t)^{-1}$. It is easy to check that the operator function $t \dashrightarrow \begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$ satisfies (3.4) with the initial condition $\begin{bmatrix} Y(0) \\ Z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ U_o \end{bmatrix}$. By differentiation, it follows that

$$d/dt\, U(t) = \{d/dt\ Z(t)\}(Y(t))^{-1} - Z(t)(Y(t))^{-1}\{d/dt Y(t)\}(Y(t))^{-1} =$$

$$= A(t) + B(t)U(t) - U(t)C(t) - U(t)D(t)U(t)$$

with $U(0) = U_o$. Since U_o is a solution of (1.2) then satisfies (3.6) and postmultiplying this equation by $(Y(b))^{-1}$, it follows that $EU(b) - U(0)F = G$.

The following corollary contains as a particular case theorem 2 of [16], when the coefficient are time-invariant linear operators on H.

COROLLARY 1. Let us consider problem (1.1), where $A(t) = A, B(t) = B, C(t) = C, D(t) = D$ are densely defined closed linear operators on H. If the operator

$$W = \begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix}$$

generates a fundamental operator $U(t,s) = \begin{bmatrix} U_1(t,s) & U_2(t,s) \\ U_3(t,s) & U_4(t,s) \end{bmatrix}$,

such that U_o is a solution of (1.2) and

$U_1(t,0) + U_2(t,0)U_o$ is invertible for all t in [0,b]

then U(t) given by (3.7) is a solution of (1.1).

Proof. Is immediate from theorem 2.

REMARK 1. If A,B,C and D are bounded linear operators on H, then operator W of corollary 1 generates the fundamental operator defined by $U(t,s) = \exp(W(t-s))$, and from corollary 1, it follows theorem 2 of [16].

COROLLARY 2. (Lyapunov equations). Let us consider the following boundary problem

$$\left.\begin{aligned} d/dt\, U(t) = A(t) + B(t)U(t) - U(t)C(t) \\ EU(b) - U(0)F = G \end{aligned}\right\} \qquad (3.8)$$

If the operator functions $t \dashrightarrow B(t)$ and $t \dashrightarrow C(t)$ are generators of fundamental operators $U_B(t,s)$ and $U_C(t,s)$, respectively, $A(t)$ is bounded for all t in $[0,b]$ and

$$\begin{aligned} N &= E\, U_B(b,0) \quad ; \quad P = F\, U_C(b,0) \\ M &= -G\, U_C(b,0) + E\int_0^b U_B(b,s)A(s)U_C(s,0)ds \end{aligned} \qquad (3.9)$$

then problem (3.8) is solvable, if and only if, the equation $M + NX - XP = 0$ is solvable. Moreover the relationship between solutions of both problems is given by

$$U(t) = U_B(t,0)U_o U_C(0,t) + \int_0^t U_B(t,s)A(s)U_C(s,t)ds \qquad (3.10)$$

Proof. It is easy to show that the operator

$$U(t,s) = \begin{bmatrix} U_C(t,s) & 0 \\ \int_s^t U_B(t,v)A(v)U_C(v,s)dv & U_B(t,s) \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

is a fundamental operator of system (3.4) with $D(t) = 0$. If $U(t)$ is a solution of (3.8) and if $Y(t)$ is the only solution of

$$d/dt\, Y(t) = C(t)Y(t) \quad ; \quad Y(0) = I \quad ; \quad t \in [0,b]$$

then $Z(t) = X(t)Y(t)$ satisfies $d/dt\, Z(t) = (A(t) + B(t)X(t))Y(t)$, for all t in $[0,b]$. Thus $\begin{bmatrix} Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$ satisfies (3.4), with $D(t) = 0$, and $\begin{bmatrix} Y(0) \\ Z(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ X(0) \end{bmatrix}$. In analougous way to the proofs of theorems 1 and 2, with $D(t) = 0$, the result is proved. In fact, the hypothesis (iii) of theorem 2 is satisfied since $U_1(t,0) = U_C(t,0)$ and $U_2(t,0) = 0$; thus (3.8) is solvable, if and only if, the equation $M+NX-XP = 0$ is solvable. Substituting expressions $U_3(t,0)$ and $U_4(t,0)$ of (3.7) by the correspondent blocks given by (3.11), the result is concluded.

In the previous section, the resolution problem (1.1) has been reduced to an algebraic operator equation (3.1). This equation ap-

[6], [12].

4. APPLICATIONS.

In this section we apply some last results for obtaining b-periodic solutions of generalized operator Riccati equations. Let us consider a generalized operator Riccati equation of the type

$$d/dt\, U(t) = A(t)+B(t)U(t)-U(t)C(t)-U(t)D(t)U(t) \qquad (4.1)$$

The following fact gives sufficient conditions for the existence of b-periodic solutions of (4.1).

THEOREM 3. *With the hypothesis of theorem 2, when* $E=F=I$, $G=0$ *and the coefficient functions* $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ *and* $D(t)$ *are* b-*periodics, the operator function* $U(t)$ *given by* (3.7) *is a* b-*periodic solution of* (4.1).

Proof. This is a consequence of theorem 2, for obtaining a solution in $[0,b]$. Extending b-periodically this solution, the result is proved.

THEOREM 4. *Let us consider* (4.1) *with* $D(t) = 0$. *If* $A(t)$, $B(t)$ *and* $C(t)$ *are* b-*periodic* $(b > 0)$ *operator functions which satisfy the hypothesis of corollary 2*; *if* N, M *and* P *are given by* (3.9) *and*

$$\sigma_\partial(N) \cap \sigma_\pi(P) = \emptyset \qquad (4.2)$$

where $\sigma_\partial(N) = \{\lambda \in C;\ \lambda-N$ *is not onto*$\}$ *and* $\sigma_\pi(P)$ *is the approximate point spectrum of* P, *then there exists a solution* U_0 *of* $M+NX-XP = 0$ *and* $U(t)$, *given by* (3.10), *is a* b-*periodic solution of* (4.1), *with* $D(t) = 0$.

Proof. From hypothesis (4.2) and theorem 5, p.1387, [4], there exists a solution U_0 of equation $M+NX-XP = 0$. Now, from corollary 2, $U(t)$ given by (3.10) is a solution in $[0,b]$. Extending b-periodically $U(t)$, the result is concluded.

COROLLARY 3. Substituting hypothesis (4.2) in theorem 4 by

$$\sigma(N) \cap \sigma(P) = \emptyset \qquad (4.3)$$

there exists only one b-periodic solution of (4.1) with $D(t) = 0$.

Proof. It is a consequence of theorem 4 and Rosemblun's theorem, [13], p.8.

REFERENCES

[1] R.S.Buoy and P.D.Joseph, *Filtering for stochastic processes with Applications to Guidance*, Interscience, New York, 1968.

[2] W.A.Coppel, *Matrix quadratic equations*, Bull.Aus.Math.10 (1974), 377-401.

[3] J.Daughtry, *Isolated solutions of quadratic matrix equations*, Linear Algebra and its Applications 21, 89-94 (1978).

[4] C.Davis and P.Rosenthal, *Solving linear equations*, Can.J.Math. Vol.XXVI, N°6, p.1384-1389, (1974).

[5] J.Eisenfeld, *Operator equations and nonlinear eigenparameter problems*, J.Funct.Anal.12 (1973), 475-490.

[6] V.Hernândez and L.Jôdar, *Sobre la ecuación cuadrática en operadores* A+BT+TC+TDT=0, Stochastica Vol.VII N°2, (1983).

[7] T.Kato and H.Tanabe, *On the abstract evolution equation*, Osaka Math.J.14 (1962), 107-133.

[8] H.J.Kuiper, *Generalized Operator Riccati Equations*, Technical Report N°69, April (1982), Arizona State Univ. (To appear in SIAM J.Math.Anal.).

[9] G.E.Ladas and V.Lakshmikantham, *Differential Equations in Abstract Spaces*, Academic Press, New York 1972.

[10] J.L.Lions, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*, Springer Verlag, New York, 1970.

[11] D.L.Lukes and D.L.Russel, *The quadratic criterion for distributed systems*, SIAM J.Control. Vol.7 N°1 (1969), 101-121.

[12] K.Martensson, *On the Matrix Riccati Equation*, Inf.Sci. 3 (1971), 17-49.

[13] H.Radjavi and P.Rosenthal, *Invariant Subspaces*, Springer Verlag, New York 1973.

[14] R.Redheffer, *On the relation of transmission line theory to scattering and transfers*, J.Math.Physics, 41 (1962), p.1-41.

[15] L.Tartar, *Sur l'Étude Directe d'Équations non Linéaires Intervenant en Théorie du Contrôle Optimal*, J.Funct. Anal.6, (1974), 1-47.

[16] L.Jôdar, *Boundary Problems for Riccati and Lyapunov Equations*, Proc.Edinburgh Math.Soc. (To appear).

[17] W.H.Kwon and A.E.Pearson, *Linear Systems with Two Point Boundary Lyapunov and Riccati Equations*, IEEE Trans. on Autom. Control, AC-27 (1982), 436-441.

Department of Mathematics, E.T.S.I.I.
Polytechnical University of Valencia
P.O. Box 22.012, Valencia (SPAIN).

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

HOMOTOPY STABILITY IN BANACH ALGEBRAS

Gustavo Corach

INTRODUCTION.

Let A be a (real or complex) Banach algebra with identity. Several algebraic objects associated to A are considered in this paper. Their common feature is that the general linear group $GL_n(A)$ acts over them defining fibre bundle structures.

In Section 1 we study the map $t_a: GL_n(A) \to U_{k,n}(A)$ defined by multiplication at left, where $U_{k,n}(A)$ is the set of left-invertible nxk-matrices on A ($k \leq n$) and a is a fixed element of $U_{k,n}(A)$; this map is a Serre fibration and, under some Hermite conditions [2,7], it follows that $U_{k,n}(A)$ is a Banach homogeneous space. In Section 2 we study the space $P_n(A)$ of idempotent matrices in $M_n(A)$; for each $p \in P_n(A)$ the map $u \mapsto upu^{-1}$ ($u \in GL_n(A)$) is a fibration. In Section 3 we relate the definition of Grassmannian manifold for Banach algebras, studied by Porta and Recht [10] to the more classical definition $M_{k,n}(A) = GL_n(A)/GL_k(A) \times GL_{n-k}(A)$; we show that, under some connectedness conditions, these spaces are homotopically equivalent. In Section 4 we prove that the sequences $\{\pi_i(GL_n(A))\}_n$, $\{\pi_i(P_n(A))\}_n$, $\{\pi_i(Grass(M_n(A)))\}_n$ and $\{\pi_i(M_{k,n}(A))\}_n$ stabilize under some "stable range conditions" introduced by Bass [1].

These results provide another link between algebraic K-theory and Banach algebra theory. As an application we show that the Grothendieck group $K_0(A)$, which may be presented (Karoubi [8]) as a direct limit $\lim P_{2n}(A)/GL_{2n}(A)$, can be identified with $P_{2n}(A) / GL_{2n}(A)$, for n large enough. Our final result is a Banach algebra version of a theorem of Suslin [2,17]: for $n \geq 1$ and r-1 in the stable range of A, the neutral component of $GL_r(A_n)$ acts transitively on $U_{1,r}(A_n)$, where $A_n = A(I^n)$ in the Banach algebra of continuous maps from $[0,1]^n$ into A. We also prove the analogous of Bass-Quillen conjecture for Banach algebras ([10], p.XI) which is related to Serre's problem. The proof, which is easier than those of Suslin and Bass for the algebraic result, suggests that several problems from algebraic K-theory can be clarified in the Banach algebra category.

The author wishes to thank M.Karoubi for introducing him into the subjects and A.R.Larotonda for many estimulating conversations.

1. UNIMODULAR MATRICES.

Let A be a ring with unit. For $k \leq n$ let $U_{k,n}(A)$ be the set of left invertible nxk matrices: $U_{k,n}(A) = \{a \in A^{n\times k}$; there exists $b \in A^{k\times n}$ with $b.a = 1 \in M_k(A)\}$.

If A is a Banach algebra $U_{k,n}(A)$ is an open subset of $A^{n\times k}$. In particular, $U_{k,n}(A)$ is arcwise connected if it is connected.

The action of $GL_n(A)$ on $U_{k,n}(A)$ defined by left multiplication gives, for each $a \in U_{k,n}(A)$, a mapping $t_a: GL_n(A) \to U_{k,n}(A)$ $t_a(\pi) = \sigma.a$. If A is a Banach algebra t_a is a Serre fibration [2], so it induces an exact homotopy sequence [7]

$$(1.1) \qquad \ldots \to \pi_i(S_a,1) \to \pi_i(GL_n(A),1) \to \pi_i(U_{k,n}(A),a) \to \pi_{i-1}(S_a,1) \to \ldots$$

where S_a is the *stabilizer* of a by the action of $GL_n(A)$:

$$S_a = \{\sigma \in GL_n(A) \ ; \ \sigma.a = a\} .$$

1.2. REMARK. In general t_a is not surjective. When $GL_n(A)$ acts transitively on $U_{k,n}(A)$, A is called (n,k)-*Hermite*. See [4] for a closer study of these Banach algebras.

The exact sequence of t_a is better understood when a is the nxk matrix e whose columns are the first k canonical vectors of A^n. In this case

$$S_e = L_{k,n}(A) = \{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \in GL_n(A) \ ; \ x \in A^{k\times(n-k)} \ , \ \sigma \in GL_k(A)\}$$

which is homeomorphic to the product $GL_k(A) \times A^{k\times(n-k)}$. Now, $A^{k\times(n-k)}$ being contractible, the exact sequence becomes where a is induced by the inclusion $\sigma \to \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ of $GL_k(A)$ into $GL_n(A)$.

1.4. THEOREM. *If* A *is* (n,k)-*Hermite then* $U_{k,n}(A)$ *is homeomorphic to the Banach homogeneous space* $GL_n(A)/L_{k,n}(A)$.

Proof. Given a topological group G and a closed subgroup H the projection $p: G \to G/H$ is a (locally trivial) fibre bundle if it admits a local section at H [7]. In particular, if G is a Banach-Lie group p is always a fibre bundle. Thus, if A is (n,k)-Hermite, then $t_e: GL_n(A) \to U_{k,n}(A)$ is a fibre bundle and it induces a homeomorphism $\overline{t}_e: GL_n(A)/L_{k,n}(A) \to U_{k,n}(A)$.

1.5. THE COMMUTATIVE CASE. The image of t_e is open and closed [4] so A is (n,k)-Hermite if $U_{k,n}(A)$ is connected. Now, if A is a complex commutative Banach algebra, a simple application of the Novodvorski-Taylor theory shows that $U_{k,n}(A)$ is connected if and only if all maps from the spectrum X(A) of A into $U_{k,n}(\mathbf{C})$ (the Stieffel manifold of k-frames in $\mathbf{C}^n$) are null-homotopic. Thus, if X(A) is dominated by a compact space of (Lebesgue) dimension at most $2(n-k)$, $U_{k,n}(A)$ is connected [11,4].

1.6. Let X be a compact space and A(X) the Banach algebra of all (continuous) maps from X into A, with the sup norm. For every x in X the evaluation morphism $\varepsilon = \varepsilon_x: A(X) \to A \quad \varepsilon(f) = f(x)$ has an algebra section ; more precisely, the morphism $s: A \to A(X) \quad s(a) =$ = the constant map $x \mapsto a$, satisfies $\varepsilon \circ s = 1_A$. In general, an epimorphism of Banach algebras $\phi: A \to B$ induces a Serre fibration $\phi: U_{k,n}(A) \to U_{k,n}(B)$ which is a fibre bundle when ϕ admits an algebra section. In this case, if $\phi(a_o) = b_o$ and $F = \{a \in U_{k,n}(A);\ \phi(a_o) = b_o\}$, the homotopy sequence of the fibration $F \to U_{k,n}(A) \to$ $\to U_{k,n}(B)$ splits at each i and produces short exact sequences

$$0 \to \pi_i(F,a_o) \to \pi_i(U_{k,n}(A),a_o) \to \pi_i(U_{k,n}(B),b_o) \to 0 .$$

Returning to the situation $\phi = \varepsilon$, $a_o = b_o = e$, when $X = S^\ell$ and $i = 0$, we get

$$0 \to \pi_\ell(U_{k,n}(A),e) \to \pi_o(U_{k,n}(A(S^\ell)),e) \to \pi_o(U_{k,n}(A),e) \to 0$$

Thus, if $U_{k,n}(A)$ is connected there is a bijection between

$\pi_\ell(U_{k,n}(A),e)$ and the set of connected components of $U_{k,n}(A(S^\ell))$. This remark will be used in §4.

2. PROJECTIONS.

Let B a ring with unit and P(B) the subset of idempotents of B: $P(B) = \{b \in B;\ b^2 = b\}$. For each $b \in P(B)$, $B^{\cdot}$ acts on P(B) by inner automorphisms, that is b defines a map $\theta_b : B^{\cdot} \to P(B)$ $\theta_b(\sigma) = \sigma b \sigma^{-1}$. If B is a Banach algebra, each θ_b is an open map and its image M_b is open and closed in P(B); moreover, P(B) is a Banach manifold, θ_b defines a fibre bundle over M_b and there is a homotopy sequence

$$\ldots \to \pi_i(R_b,b) \to \pi_i(B^{\cdot},1) \to \pi_i(P(B),b) \to \pi_{i-1}(R_b,b) \to \ldots$$

where $R_b = \{\sigma \in B^{\cdot}\ ;\ \sigma b = b\sigma\}$ [13,14].

If A is a Banach algebra and B is the algebra of all nxn-matrices on A, $B = M_n(A)$, let $P_n(A) = P(B)$. For b=1 (see §1)

$$R_b = R_{k,n}(A) = \{\begin{pmatrix} \sigma & x \\ 0 & \tau \end{pmatrix} \in GL_n(A)\ ;\ \sigma \in GL_k(A)\ ,\ \tau \in GL_{n-k}(A)\ ,\ x \in A^{k\times(n-k)}\}\ ,$$

which is clearly homeomorphic to the product $GL_k(A) \times GL_{n-k}(A) \times$ $\times\ A^{k\times(n-k)}$.

Thus, the exact sequence of θ_e becomes

$$\ldots \to \pi_i(GL_k(A),1) \to \pi_i(GL_{n-k}(A),1) \xrightarrow{\beta} \pi_i(GL_n(A),1) \to$$
$$\pi_i(P_n(A),e) \to \pi_{i-1}(GL_k(A),1) \to \pi_{i-1}(GL_{n-k}(A),1) \to \ldots$$

where β is the homomorphism induced by the inclusion $(\sigma,\tau) \mapsto \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ of $GL_k(A) \times GL_{n-k}(A)$ into $GL_n(A)$.

3. THE GRASSMANN MANIFOLD.

Porta and Recht [13] propose the following algebraic definition for the Grassmann manifold: given a ring A with unit, let P(A) be the set of idempotent elements of A, $P(A) = \{a \in A;\ a^2 = a\}$ and consider the equivalence relation $\sim$ on P(A) defined by $a \sim b \iff ab = b$ and $ba = a$. The Grassmannian of A is the set Grass(A) =

3.1. THEOREM. *Let* $\beta: P(A) \to \mathrm{Grass}(A)$ *be the projection map. Then*

3.1.1. β *is an open map;*

3.1.2. $\mathrm{Grass}(A)$ *is paracompact;*

3.1.3. β *has a continuous global section;*

3.1.4. β *is a homotopy equivalence.*

In the particular case when A the algebra $M_n(\mathbf{R})$ of all nxn real matrices, Grass(A) can be identified with the classical Grassmannian $\bigcup_{0\le k\le n} G_{k,n}$, where $G_{k,n}$ is the set of all k-dimensional subspaces of $\mathbf{R}^n$. Moreover, the connected components of Grass(A) are, precisely, the $G_{k,n}$.

Let us study more closely the Grassmannian of $M_n(A)$ when A is a Banach algebra. For this, we identify $A^k \times A^{n-k}$ with A^n and consider the following subgroups of $GL_n(A)$:

$$L_{k,n}(A) = \left\{\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \in GL_n(A) \quad ; \quad x \in A^{k\times(n-k)} \quad , \quad \sigma \in GL_{n-k}(A)\right\},$$

$$H_{k,n}(A) = \left\{\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(A) \quad ; \quad \tau \in GL_k(A)\right\}.$$

We set $M_{k,n} = M_{k,n}(A) = GL_n(A)/L_{k,n}(A) \times H_{k,n}(A)$. Observe that $H_{k,n}(A)$ is isomorphic to $GL_k(A)$ (as topological groups) and that $L_{k,n}(A)$ is isomorphic to the semidirect product $A^{k\times(n-k)} \times GL_{n-k}(A)$. This remark, the general theory of Banach-Lie homogeneous spaces [9] and a well-known result of Palais [12, Th.15] yield the following

3.2. PROPOSITION. a. $M_{k,n}(A)$ *is homeomorphic to* $M_{n-k,n}(A)$;
b. $M_{k,n}(A)$ *is homotopically equivalent to* $GL_n(A)/GL_k(A) \times GL_{n-k}(A)$.

As a consequence of b., the exact sequence of the fibration $L_{k,n} \times H_{k,n} \to GL_n \to GL_n/GL_k \times GL_{n-k}$ becomes

$$(3.3)\qquad \begin{aligned} \ldots &\to \pi_i(GL_{n-k}(A),1) \times \pi_i(GL_k(A),1) \to \pi_i(GL_n(A),1) \\ &\to \pi_i(M_{k,n}(A),\bar{1}) \to \pi_{i-1}(GL_{n-k}(A),1) \times \pi_{i-1}(GL_k(A),1) \to \ldots \end{aligned}$$

In connection with (1.1) we have

3.4. PROPOSITION. *If* A *is* (n-k)*-Hermite,* t_e *induces a principal lo-*

cally trivial fibre bundle $U_{k,n}(A) \to M_{k,n}(A)$ *whose fibers are homeomorphic to* $GL_k(A)$. *In particular* $M_{k,n}(A)$ *is homeomorphic to* $U_{k,n}(A)/GL_k(A)$.

3.5. REMARK. Let X be a compact space and A(X) the algebra of A-valued continuous maps on X. It is easy to prove that $GL_m(A(X))$ is isomorphic to $C(X,GL_m(A))$ (as topological groups). In the same way we get a homeomorphism from $M_{k,n}(A(X))$ onto $C(X,M_{k,n}(A))$. If $M_{k,n}(A)$ is connected, from the fibration properties of the evaluation maps $M_{k,n}(A(X)) \to M_{k,n}(A)$ we can prove that $\pi_i(M_{k,n}(A))$ is in a bijective correspondence with the set $[S^i,M_{k,n}(A)]$ (cf. [4,2.4]). This is particularly useful when A is a complex commutative algebra, for in this case

$$[S^i,M_{k,n}(A)] \leftrightarrow [S^i \times X(A),M_{k,n}(\mathbb{C})] \ .$$

3.6. PROPOSITION. *For each* $k \leq n$ $M_{k,n}(A)$ *is homeomorphic to a union of connected components of* $\mathrm{Grass}(M_n(A))$. *Moreover, if* $U_{k,n}(A)$ *is connected,* $M_{k,n}(A)$ *is (homeomorphic to) a connected component of* $\mathrm{Grass}(M_n(A))$.

Proof. Consider the composition $GL_n(A) \xrightarrow{\theta_e} P_n(A) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Grass}(M_n(A))$. It is easy to see that, if σ has the form $\sigma = \begin{pmatrix} \tau & x \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$ with $\tau \in GL_k(A)$, $\rho \in GL_{n-k}(A)$ and $x \in A^{k\times(n-k)}$, then $\beta(\sigma e\sigma^{-1}) = \beta(e)$. Thus we get a map $\overline{\theta}_e : M_{k,n}(A) \to \mathrm{Grass}(M_n(A))$. But θ_e and $\beta \circ \theta_e$ both are open maps and their images are closed in $P_n(A)$ and $\mathrm{Grass}(M_n(A))$, respectively. The result follows, then, by (3.4).

3.7. COROLLARY. If $U_k(A^n)$ is connected

$$\pi_i(M_{k,n}(A),\overline{e}) = \pi_i(\mathrm{Grass}(M_n(A)),\beta(e)) \ ,$$

where $\overline{e}$ denotes the image of $e \in U_k(A^n)$ in $M_{k,n}(A)$ by the fibre map of (3.3).

4. STABILIZATION.

is the least integer n such that, for every ${}^t a \in U_{1,n+1}(A)$ there exist elements $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in A with ${}^t(a_1+x_1a_{n+1}, a_2+x_2a_{n+1}, \ldots$ $\ldots, a_n+x_na_{n+1}) \in U_{1,n}(A)$.
If no such integer exists we set $sr(A) = \infty$. Some results relating $sr(A)$ to the topology of A may be found in [5], [6], [15]. We quote two of them, from which we shall deduce several consequences.

4.1. PROPOSITION. ([6]). *Let* A *be a Banach algebra. For every* n *and* k *such that* $n \geqslant sr(A) + k$, $U_{k,n}(A)$ *is connected.*

4.2. THEOREM. ([6, th.5.12]). *Let* X *be a compact space and* A *a Banach algebra. Then* $sr(A(X)) \leqslant d + sr(A)$, *where* d *is the (topological) dimension of* X.

(This result answers, partially, the questions 1.8 and 7.3 raised by Rieffel [15]).

From (1.3), (1.6), (4.1) and (4.2) we get

4.3. COROLLARY. Let A be a Banach algebra and $n \geqslant sr(A) + i+k$. Then

(i) $\pi_i(U_{k,n}(A), e)$ is trivial;

(ii) $\pi_i(GL_k(A), 1) \cong \pi_i(GL_n(A), 1) \cong \pi_i(GL(A), 1) = K_{i+1}^{top}(A)$ ([9]).

Let us consider the commutative square

$$\begin{tikzcd} GL_n(A) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta_e"'] & GL_{n+1}(A) \arrow[d, "\theta_{e'}"] \\ P_n(A) \arrow[r, "j"] & P_{n+1}(A) \end{tikzcd}$$

where $i(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $j(p) = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and e' is the (n+1)xk matrix defined in the same way that e (§1). Comparing the homotopy sequences of θ_e and $\theta_{e'}$ (§2) and using 4.3.ii we get

4.4. COROLLARY. Let A be a Banach algebra and k, $n-k \geqslant sr(A)+i$. Then

$$\pi_i(P_n(A), e) \cong \pi_i(P_{n+1}(A), e').$$

(Observe that k appears implicitely in this formula, for e and e' depend on k).

Next, we use the preceding corollaries, 3.1.4 and 3.3 to obtain a similar result for the Grassmannian manifolds defined in §3:

4.5. COROLLARY. Let A be a Banach algebra. For k, $n-k \geqslant \mathrm{sr}(A) + i$ it holds

(i) $\pi_i(\mathrm{Grass}(M_n(A)),\ \beta(e)) \cong \pi_i(\mathrm{Grass}(M_{n+1}(A)),\ \beta(e'))$

(ii) $\pi_i(M_{k,n}(A),\bar{e}) \cong \pi_i(M_{k,n+1}(A),\bar{e}')$.

The next result concerns the group $K_o(A)$. This is the Grothendieck group of the category of projective finitely generated left A-modules. Karoubi 8 has given an alternative description of $K_o(A)$: the action of $GL_n(A)$ on $P_n(A)$ defined in §2 allows us to consider a direct limit

(4.6) $\quad \widehat{P_2(A)} \to \widehat{P_4(A)} \to \ldots \to \widehat{P_{2n}(A)} \xrightarrow{i_n} \widehat{P_{2n+2}(A)} \ \ldots$

where $\widehat{P_n(A)} = P_n(A)/GL_n(A)$ and i_n is induced by the mapping

$$p \mapsto \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Karoubi shows that $K_o(A)$ is isomorphic to $\varinjlim \{\widehat{P_{2n}(A)}, i_n\}$. We prove now that the sequence $\{\widehat{P_{2n}(A)}, i_n\}$stabilizes if $\mathrm{sr}(A)$ is finite. More precisely

4.7. PROPOSITION. *Let* A *be a Banach algebra and* $n \geqslant \mathrm{sr}(A)$. *Then*

$$\widehat{P_{2n}(A)} \cong \widehat{P_{2n+2}(A)}.$$

Let $X = P_{2n}(A)$, $Y = P_{2n+2}(A)$, $H = GL_{2n}(A)$ and $G = GL_{2n+2}(A)$. Observe that $\widehat{P_{2n}(A)} = X/H$ and $\widehat{P_{2n+2}(A)} = Y/G$ and that we have a commutative square

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X/H & \xrightarrow{\bar{f}} & Y/G \end{array}$$

where $\bar{f}$ (class of p) = class of $\begin{pmatrix} p & & \\ & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{pmatrix}$, for $p \in X$. By (4.2) and (4.3) $\pi_o(f)\colon \pi_o(X) \to \pi_o(Y)$ and $\pi_o(i)\colon \pi_o(H) \to \pi_o(G)$ are bijections and we have observed that, for each y in X (or Y), $U = \{\sigma q \sigma^{-1}$; $\sigma \in H$ (or G)$\}$ is open and closed in X (or Y). Thus, the connected component of q is contained in U. A straightforward argument shows that $\bar{f}$ is, then, a bijection. The proof finishes just remarking

[3, Th.3], [17, Th.12.4]. Let A a commutative noetherian ring with Krull dimension d, let $A_n = A[t_1,\dots,t_n]$ the A-algebra of polynomials in n indeterminates. Suslin proved that, for every $n \geq 1$ the set of elementary matrices $E_r(A_n)$ acts transitively on $U_{1,r+1}(A_n)$ if $r \geq 1 + \max\{d,(d+n)/2\}$.

(Recall that, for a ring C, $E_r(C)$ is the subgroup of $GL_r(C)$ generated by the rxr-matrices $1+e^c_{ij}$, where $c \in C$ and $(e^c_{ij})_{k\ell} = c\delta_{ik}\delta_{j\ell}$). In a topological setting, $A[t_1,\dots,t_n]$ is replaced by $A(I^n)$ (the notation is like in 1.6), $E_r(C)$ by the neutral component $GL_r(C)_0$ of $GL_r(C)$ and the Krull dimension by the stable rank. More precisely we have the following

4.8. THEOREM. *Let* A *be a Banach algebra. Let* $A_n = A(I^n)$ *the algebra of continuous maps* $I^n = [0,1]^n \to A$. *Then, for every* $n \geq 1$, $GL_r(A_n)_o$ *acts transitively on* $U_{1,r}(A_n)$ *if* $r \geq sr(A) + 1$.

Proof. Recall that $t\colon GL_r(B)_o \to U_{1,r}(B)$, $t(\sigma) =$

$= \sigma \begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \vdots\\ \sigma_{n1}\end{pmatrix}$ is a Serre fibration for every Banach algebra B (§1).

In particular, $GL_r(B)_o$ acts transitively on $U_{1,r}(B)$ if and only if $U_{1,r}(B)$ is connected. It is also known that the connected components of $U_{1,r}(B(X))$ are in a bijective correspondence with the set $[X,U_{1,r}(B)]$ of homotopy classes of maps $X \to U_{1,r}(B)$ [4,2.4]. Then, for B = A and $X = I^n$ we get that $U_{1,r}(A_n)$ is connected if and only if $[I^n,U_{1,r}(A)]$ is trivial and, I^n being contractible, this happens if and only if $U_{1,r}(A)$ is connected. But $U_{1,r}(A)$ is connected for $r \geq sr(A) + 1$ (see 4.1). This concludes the proof.

4.9. COROLLARY (of the proof). Let A be a Banach algebra. Then A_n is (m,k)-Hermite if and only if A is (m,k)-Hermite.

The result answers affirmatively the Banach algebra analogous of question (H) in [10] p.XI and, consequently, of Bass-Quillen conjecture. See the introduction of Lam's book for details.

REMARKS. 1. In the category of Banach algebras this result offers some advantages over that of Suslin: in fact, it holds even for non-commutative Banach algebras and the number sr(A) is smaller than max {sr(A), (sr(A)+n)/2} when n is large.

2. In the terminology of Rieffel [15], Theorem 4.8 says that the connected stable rank of A_n is a most sr(A)+1. In connection with that paper, it should be noted that left and right connected stable ranks, introduced in [15], actually coincide, for the spaces of left and right unimodular rows are homotopy equivalent [4]. This answers question 4.8 of [15].

REFERENCES

[1] H.Bass, *K-theory and stable algebra*, Publications Mathématiques 22 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Paris, 1964), pp.489-544.

[2] H.Bass, *Algebraic K-theory*, (Benjamin, New York, 1968).

[3] H.Bass, *Libération des modules projectives sur certains anneaux de polynômes*, Séminaire Bourbaki 1973/74, Exposé 448.

[4] G.Corach and A.R.Larotonda, *Unimodular matrices in Banach algebra theory*, Proc.Amer.Math.Soc. 96(1986),473-477.

[5] G.Corach and A.R.Larotonda, *Stable range in Banach algebras*, J.Pure Appl.Algebra 32(1984),289-300.

[6] G.Corach and A.R.Larotonda, *A stabilization theorem for Banach algebras*, J.Algebra 101(1986), 433-449.

[7] S.T.Hu, *Homotopy theory*, (Academic Press, New York, 1959).

[8] M.Karoubi, *K-théorie de certaines algèbres d'opérateurs*, Lecture Notes in Mathematics 725, Springer (1979).

[9] M.Karoubi et O.E.Villamayor, *K-théorie algèbrique et K-théorie topologique I*, Math.Scand. 28 (1971), 265-307.

[10] T.Y.Lam, *Serre's conjecture*, Lecture Notes in Mathematics 635, Springer (1978).

[11] V.Ya. Lin, *Holomorphic fiberings and multivalued functions of elements of a Banach algebra*, Funct.Anal.Appl. 7 (1973), 122-128.

[12] R.S.Palais, *Homotopy theory of infinite-dimensional manifolds*, Topology 5 (1966); 1-16.

[13] H.Porta and L.Recht, *Spaces of projections in a Banach algebra*, Universidad Simón Bolívar, 1977.

[14] I.Raeburn, *The relationship between a commutative Banach algebra and its maximal ideal space;* J.Funct.Anal. 25 (1977),

gebras, Proc.London Math.Soc. (3), 46 (1983), 301-333.

[16] J.L.Taylor, *Topological invariants of the maximal ideal space of a Banach algebra*, Adv.in Math. 19 (1976), 149-206.

[17] L.N.Vaserstein and A.A.Suslin, *Serre's problem on projective modules over polynomial rings and algebraic K-theory*, Math. USSR Isvestija 10 (1976).

Instituto Argentino de Matemática
Viamonte 1636
1055 Buenos Aires
Argentina

Recibido en junio de 1986
Versión corregida febrero de 1987.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

A GENERALIZATION OF THE FUNDAMENTAL FORMULA FOR CYLINDERS

Ursula M. Molter

1. ABSTRACT.

Using the G_n-invariant measure on the set of the convex infinite cylinders congruent to Z_q that touch a convex body K, we can generalize the fundamental kinematic formula for cylinders in the sense of Hadwiger in [2].

We obtain a bilinear combination of the "Quermassintegrale" of K and Z_q, with coefficients depending on the first n moments of a non-negative Borel measurable function.

2. INTRODUCTION.

Hadwiger, [2], found a generalization of the kinematic fundamental formula for convex bodies, extending the domain of integration to the whole group of motions in E_n, G_n. He proved that this integral is again a bilinear combination of the "Quermassintegrale" of the convex bodies.

On the other hand, in [1] we find the definition of n+1 functionals on convex bodies, which include the "Quermassintegrale" as particular cases.

In this paper we generalize the fundamental kinematic formula for cylinders in the same sense that Hadwiger in [2]. We show that we obtain a bilinear combination of the "Quermassintegrale" of the convex body and the infinite convex cylinder. This generalization includes [1] and [2] as particular cases.

The proof is essentially based on the existence of a tangential measure on the set of infinite convex cylinders congruent to a fixed one Z_q ([3]) and results much easier.

3. NOTATION.

Let E_n be the n-dimensional euclidean space with unit sphere Ω_n. λ_n is the Lebesgue-measure in E_n and $\omega_n = \lambda_n(\Omega_n)$. We denote by K_n the set of all convex, compact and non-empty subsets K in E_n, $K \in K_n$ is called a convex body. For $K \in K_n$, $W_i^n(K)$ are the "Quermassintegrale" of K ($i = 0,\ldots,n$). If $\delta \geqslant 0$, K_δ is the parallel body in the distance δ of K, and the following Steiner formula holds ([4], p.220-221):

$$\lambda_n(K_\delta) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j^n(K)\, \delta^j$$

$$(3.1) \qquad W_i^n(K_\delta) = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} W_{i+j}^n(K)\, \delta^j \quad .$$

Now we define infinite convex cylinders as in [4], p.270. Let O be a fixed point in E_n and let L_{n-q} be a (n-q)-plane through O. Let D be a bounded convex body in L_{n-q}. For each point x in D we consider the q-plane orthogonal to L_{n-q} through x. The union of all such L_q is the cylinder Z_q. The q-planes L_q are the generators and D a normal cross section of Z_q. As in [4], p.272, we take

$$(3.2) \qquad W_i^n(Z_q) = \begin{cases} W_i^{n-q}(D) & 0 \leqslant i \leqslant n-q \\ 0 & n-q < i \leqslant n \end{cases}$$

We will now explain briefly the fundamental kinematic formula for cylinders ([4], p.272). Let $Z(D)_q$ be the set of all cylinders congruent to Z_q and let γ_D be the normalized G_n-invariant measure on $Z(D)_q$ ([5], p.106). If $K \in K_n$, A is the set of cylinders of $Z(D)_q$ that intersect K, that is $A = \{Z \in Z(D)_q \;/\; Z \cap K \neq \emptyset\}$.

We denote with $\gamma_D(K)$, the measure of A in the sense of γ_D, $\gamma_D(K) = \int_A d\gamma_D$, and the fundamental formula for cylinders ([4], p.272) holds:

$$(3.3) \qquad \gamma_D(K) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{t=0}^{n-q} \binom{n-q}{t} W_{t+q}^n(K)\, W_{n-t-q}^n(Z_q)$$

4. GENERALIZATION OF THE FUNDAMENTAL FORMULA (3.3).

Let $f: (0,\infty) \to [0,\infty)$ be an arbitrary Borel measurable function for which holds:

i) $f(0) \neq 0$

ii) The first n moments

$$(4.1) \qquad M_k(f) = \int_0^\infty f(r)\, r^k\, dr \qquad (k = 0,\dots,n-1)$$

are finite.

If we denote with $r = d(K,Z)$ the distance between the convex body K and the cylinder Z, we make the following integral

$$(4.2) \qquad R_q(f,K,Z_q) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-q}} \int f(r)\, d\gamma_D \quad ,$$

where we integrate over the whole space $Z(D)_q$.

The existence of this integral is assured by the existence of the moments of f (4.1).

PROPOSITION. *If* $R_q(f,K,Z_q)$ *is as in* (4.2), *the following fundamental formula holds*

$$(4.3) \qquad R_q(f,K,Z_q) = \frac{1}{\omega_{n-q}} \sum_{t=0}^{n-q} \sum_{s=0}^{t} C_s(f) \binom{n-q}{t-s} \binom{s+n-t-q}{s} W^n_{t+q}(K)\, W^n_{s+n-t-q}(Z_q)$$

$$\text{with} \quad C_0(f) = f(0) \quad , \quad C_s(f) = s\, M_{s-1}(f) \qquad (s = 1,\dots,n).$$

That means that $R_q(f,K,Z_q)$ *is a bilinear combination of the "Quermassintegrale" of* K *and* Z_q. *The moments of* f *appear in the coefficients.*

Proof. We need some previous results. Let $Z(D,K)_q$ be the set of all cylinders congruent to Z_q that touch K (they have non-empty intersection with K, but can be separated weakly by an hyperplane). If A_δ is the set of cylinders congruent to Z_q that intersect K_δ and not K, $A_\delta = \{Z \in Z(D)_q \,/\, Z \cap K_\delta \neq \emptyset$ and $Z \cap K = \emptyset\}$, then we have $Z(D,K)_q = \lim_{\delta\to 0} A_\delta$.

In [3] we defined a G_n-invariant measure ϕ_D on $Z(D,K)_q$ which results natural as it verifies $\phi_D(Z(D,K)_q) = \lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\delta}\, \gamma_D(A_\delta)$.

We also showed in [3] that $\phi_D(Z(D,K)_q)$ is a bilinear combination

$$(4.4) \qquad \phi_D(Z(D,K)_q) = \sum_{j=0}^{n-q-1} \binom{n-q}{j+1} \frac{j+1}{\omega_n} W^n_{n-j}(K)\, W^n_{j+1}(Z_q)$$

Now we may prove (4.3). Following (4.2),

$$R_q(f,K,Z_q) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-q}} \int f(r)\, d\gamma_D .$$

With an obvious reformulation we reach to

$$(4.5) \quad R_q(f,K,Z_q) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-q}} [f(0)\ \gamma_D(K) + \int_0^\infty (f(r)\ \phi_D(Z(D,K_r)_q)\ dr]$$

where $Z(D,K_r)_q$ denotes the set of cylinders congruent to Z_q that touch K_r (with K_r the parallel body to K in the distance r).

Using (4.4) we obtain

$$\phi_D(Z(D,K_r)_q) = \sum_{j=0}^{n-q-1} \binom{n-q}{j+1} \frac{j+1}{\omega_n} W^n_{n-j}(K_r)\, W^n_{j+1}(Z_q)$$

and taking (3.1) into account, it is

$$\phi_D(Z(D,K_r)_q) = \sum_{j=0}^{n-q-1} \sum_{k=0}^{j} \frac{j+1}{\omega_n} \binom{n-q}{j+1} \binom{j}{k} W^n_{j+1}(Z_q)\, W^n_{n-j+k}(K)\ r^k .$$

Now we take $s = k+1$, $t = n+k-j-q$, and get

$$\phi_D(Z(D,K_r)_q) = \sum_{t=1}^{n-q} \sum_{s=1}^{t} \frac{s\ r^{s-1}}{\omega_n} \binom{n-q}{t-s} \binom{s+n-t-q}{s} W^n_{t+q}(K)\, W^n_{s+n-t-q}(Z_q) .$$

Hence

$$(4.6) \qquad \int_0^\infty f(r)\ \phi_D(Z(D,K_r)_q)\ dr =$$

$$= \sum_{t=1}^{n-q} \sum_{s=1}^{t} \frac{s\ M_{s-1}(f)}{\omega_n} \binom{n-q}{t-s} \binom{s+n-t-q}{s} W^n_{t+q}(K)\, W^n_{s+n-t-q}(Z_q) .$$

If we now use formula (3.3) for γ_D and together with (4.6) replace them in (4.5), we reach the desired result.

5. SPECIAL CHOOSES FOR f, q AND D.

5.1 Special choose for f.

If we take $f(0) = 1$ and $f(r) = 0$ $(r > 0)$ then from (4.3) we obtain (3.6) except an irrelevant constant

$$R_q(f,K,Z_q) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-q}} \gamma_D(K) .$$

5.2 Special choose for q.

In the case q=0, that means D is a convex body in E_n, by straightforward calculations we get

$$R_0(f,K,D) = \frac{1}{\omega_n} \sum_{t=0}^{n} \sum_{s=0}^{t} C_s(f)\binom{n}{t-s}\binom{s+n-t}{s} W_t^n(K)\, W_{s+n-t}^n(Z_q).$$

Hence $R_0(f,K,D) = J(f;K,D)$, where $J(f;K,D)$ is the kinematic integral defined by Hadwiger in [2].

5.3 Special choose for D.

Finally, if we take D in L_{n-q} as a point P, Z_q results a q-plane in E_n and taking into account that $W_0^n(Z_q) = W_0^{n-q}(P) = \omega_{n-q}$ and $W_k^n(Z_q) = W_k^{n-q}(P) = 0 \quad 1 \leq k \leq n$, from (4.3) we obtain

$$R_q(f,K,P) = \sum_{t=0}^{n} C_t(f) \binom{n-q}{t} W_{t+q}^n(K).$$

That is $R_q(f,K,P) = P_q(f,K)$, where $P_q(f,K)$ are the functionals defined in [1].

REFERENCES

[1] BOKOWSKY,J., HADWIGER,H und WILLS,J.M., *Eine Erweiterung der Croftonschen Formeln für konvexe Körper*, MATHEMATIKA 23 (1976), 212-219.

[2] HADWIGER,H., *Eine Erweiterung der kinematischen Hauptformel der Integralgeometrie*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Univ.Hamburg, 44, Dezember 1975, 84-90.

[3] MOLTER,U., *Tangential measure on the set of convex infinite cylinders*, Journal of Applied Probal.23, 961-972 (1986).

[4] SANTALO,L.A., *Integral Geometry and Geometric Probability*, Reading Mass.: Addison-Wesley (1976).

[5] SCHNEIDER,R., *Integralgeometrie*, Vorlesungen an der Universität Freiburg im Sommersemester 1979 (1979).

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
1428 Capital Federal, ARGENTINA.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

ON FINITE BASIC SETS IN METRIC SPACES

Dolores Alía de Saravia
Elda G. Canterle de Rodríguez

ABSTRACT. We prove that for every non-finite, locally connected, metrizable, topological space there exists a compatible distance such that it is not possible to choose a finite subset B and uniquely determine the points of the space by their distances to the points in B. The proof makes use of Cantor's function which is shown to be subadditive.

1. INTRODUCTION.

Let (M,d) be a metric space. A subset B of M is called basic if and only if every point in M is uniquely determined by its distances to the points in B [1].

It has recently been shown [1] that: i) every compact connected Riemannian manifold (M,g) with the distance d naturally associated to g does admit a finite basic set; ii) a compact connected topological space M can be imbedded in a finite dimensional Euclidean space if and only if M is metrizable and admits a distance with a finite basic set.

For a given topological space there may exist many different compatible distances. We show that, under certain conditions, some of them do not admit finite basic sets.

For example: Let M be the real interval [0,1]; M with the usual distance admits {0} as a finite basic set; but no finite basic set exists for M with distance $d(x,y) = f(|x-y|)$, where f is the Cantor function. Clearly d is not compatible with any Riemannian metric on M; but d is compatible (Corollary 3.4) with the usual topology [2].

2. DEFINITIONS.

Let K be the Cantor set:

$$K = \{x : x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/3^i \ , \quad x_i \in \{0,2\}\}$$

(that is, $K \subset [0,1]$ is the set of the numbers admitting a ternary representation without digits 1).

We shall call Cantor's function the following one:

$f: [0,\infty) \to [0,1]$ and if $x = x_0 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i/3^i$ with x_i in $\{0,1,2\}$ for $i > 0$, x_0 in $N \cup \{0\}$ then

i) if $x_0 > 0$ then $f(x) = 1$.

ii) if $x_0 = 0$ and for each i in N $x_i \neq 1$, then $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/2/2^i$.

iii) if $x_0 = 0$ and for some i in N $x_i = 1$, then

$$f(x) = \sum_{i=1}^{I-1} x_i/2/2^i + 1/2^I, \text{ where } I = \min\{i : x_i = 1\}.$$

Note that we are using a ternary expansion for the fractional part of x and a binary expansion for $f(x)$. Whenever x admits two ternary expansions, the above rule results in two expansions for $f(x)$, both with the same value.

3. PROPERTIES OF CANTOR'S FUNCTION.

(F1) f is constant over every interval without points in K.

(F2) $f(x) = 0$ if and only if $x = 0$.

(F3) f is non-decreasing.

(F4) f is continuous.

(F5) f is subadditive.

The first four properties are well known. We shall prove the fifth one. (Theorem 3.3).

LEMMA 3.1. *For any* x,y *in* K, $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Proof. Let $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/3^i$, $y = \sum_{i=1}^{\infty} y_i/3^i$ with x_i, y_i in $\{0,2\}$.

It follows that $x_i + y_i \in \{0,2,4\}$.

We consider two complementary cases:

Case 1: For each i in N, $x_i + y_i \neq 4$. In this case $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i+y_i)/3^i$ is a ternary expansion for $x+y$; therefore

Case 2: For some i in N, $x_i + y_i = 4$. Let J and I be:

$$J = \min\{j \in N: x_j = y_j = 2\},$$
$$I = \max(\{i \in N: x_i = y_i = 0,\ i < J\} \cup \{0\}).$$

It follows that $0 \leqslant I < J < \infty$, $x_I = y_I = 0$, $x_J = y_J = 2$, $i < I \Rightarrow x_i+y_i \leqslant 2$, $I < i < J \Rightarrow x_i+y_i = 2$.

(For example: $x = 0\,.\,0\,0\,2\,0\,0\,0\,2\,0\,2\,0\,2\,2\,0\,2\,0\,2\,0\,2\,\ldots\ldots$

$$y = \underbrace{0\,.\,2\,0\,0\,2\,0\,0}_{x_i+y_i\leqslant 2}\ \underset{\uparrow I}{0}\ \underbrace{0\,2\,0\,2\,0\,0\,2}_{x_i+y_i = 2}\ \underset{\uparrow J}{2}\ 2\,0\,0\,0\,\ldots\ldots$$

I = 6 ; J = 14;).

Therefore $\quad x \leqslant \sum_{i=1}^{I-1} x_i/3^i + 1/3^I \quad , \quad y \leqslant \sum_{i=1}^{I-1} y_i/3^i + 1/3^I$

and
$$x+y \leqslant \sum_{i=1}^{I-1} (x_i+y_i)/3^i + 2/3^I.$$

Using the definition of f and the fact that f is non-decreasing,
$$f(x+y) \leqslant \sum_{i=1}^{I-1} (x_i+y_i)/2/2^i + 1/2^I .$$

On the other hand,
$$f(x) + f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i+y_i)/2/2^i \geqslant \sum_{i=1}^{I-1} (x_i+y_i)/2/2^i + R ,$$

where $\quad R = \sum_{i=I}^{J} (x_i+y_i)/2/2^i.$

But $\quad R = (0+0)/2/2^I + \sum_{i=I+1}^{J-1} 2/2/2^i + (2+2)/2/2^J = 1/2^I .$

Hence $\quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$

LEMMA 3.2. *For any* x *in* [0,1] *there exists* x' *in* K *such that* $x \leqslant x'$ *and* $f(x) = f(x')$.

Proof. Of course, if $x \in K$ we choose $x' = x$; if $x \notin K$ any ternary expansion of x will have some 1's. Let $I = \min\{i \in N: x_i = 1\}$.

We choose $\quad x' = \sum_{i=1}^{I-1} x_i/3^i + 2/3^I.$

THEOREM 3.3. (Subadditivity of Cantor's function). *For any* x,y *in* $[0,\infty)$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Proof. We consider two cases.

Case I: x,y in [0,1]. Let $x',y' \in K$ such that (Lemma 3.2):

$x \leqslant x'$, $f(x) = f(x')$, $y \leqslant y'$, $f(y) = f(y')$. Then $f(x+y) \leqslant$ $\leqslant f(x'+y') \leqslant f(x') + f(y') = f(x) + f(y)$. (The first inequality holds because f is non decreasing; the second one because of Lemma 3.2).

Case II: $x > 1$ or $y > 1$. It follows $f(x) = 1$ or $f(y) = 1$; also $x+y > 1$. Hence $1 = f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Properties (F2) to (F5) allow us to claim that:

COROLLARY 3.4. If (M,d) is a metric space so is $(M,f\circ d)$ and both distances d and $f\circ d$ induce the same topology on M. (See for example [3], page 153).

4. SOME PROPERTIES OF METRIZABLE AND LOCALLY CONNECTED SPACES.

Let (M,d) be a locally connected metric space and f the Cantor function as defined above.

We know that finite subsets of metrizable spaces are closed; and connected components of open subsets of locally connected spaces are open. Therefore,

(M1) Every connected component of an open subset of M is either unitary or infinite.

(M2) If $C \subset M$ is infinite and connected then any non-empty open subset of C is infinite.

LEMMA 4.1. *If* C *is a connected, open and infinite subset of* M *and* p *is a point of* M *then there exists a connected, open and infinite subset* C' *of* C *such that for any two* x,y *in* C', $f(d(x,p)) =$ $= f(d(y,p))$.

Proof. Let $d_p(x) = d(p,x)$; $d_p\colon M \to [0,\infty)$ is a continuous function, then the image $d_p(C)$ is a connected subset of $[0,\infty)$ and (by M1) it is either a unitary set or a non degenerate interval.

If $d_p(C)$ is unitary so is $f(d_p(C))$ and we can take $C' = C$.

If $d_p(C)$ is a non degenerate interval it will be possible to select a,b in R with $a < b$ and $(a,b) \subset d_p(C) - K$ (for K is closed and null); thus $f(a) = f(x) = f(b)$ for any x in (a,b).

Let $A = d_p^{-1}((a,b)) \cap C$. It holds: A is open, $d_p(A) = (a,b) \subset$

(because of M2) and connected.

LEMMA 4.2. *If* $C \subset M$ *is connected, open and infinite and* $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\} \subset M$ *then there exists an infinite* $C' \subset M$ *such that for any two* q, q' *in* C' *and any* p_i *in* B, $f(d(p_i, q)) = $
$= f(d(p_i, q'))$.
(In other words, no finite basic set exists for $(M, f \circ d)$).

Proof. It suffices to apply n times Lemma 4.1.

THEOREM 4.3. *For any metrizable, connected and infinite space there exists a compatible distance such that any basic set is infinite.*

Proof. We shall give a method to select an appropriate distance d'. Let M be the space and d one of the compatible distances. By M_1, connected components of M can be either unitary or infinite. If every component is unitary we select $d'(x,y) = 1$ for any two different x,y in M, and $d'(x,x) = 0$ for any x in M. (In this case the only basic set will be M). On the contrary if some components are infinite, we select $d' = f \circ d$. By applying Lemma 4.2 to one of the infinite components of M we conclude that no finite basic set exists for (M,d').

We gratefully acknowledge Dr.C.Sánchez for suggesting this problem and for his constant encouragement.

REFERENCES

[1] C.Sánchez, *The distance in compact Riemannian manifolds*, Revista Unión Matemática Argentina, 32 (1985), 79-86.

[2] D.Alía de Saravia and E.G.Canterle de Rodríguez, *Sobre conjuntos básicos finitos en espacios métricos*, Communication to the Unión Matemática Argentina, 1985.

[3] J.L.Kelley, *Topología general*, (EUDEBA, 1962).

Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta
Buenos Aires 177
4400 - Salta - Argentina

Recibido en octubre de 1986.

Revista de la
Unión Matemática Argentina
Volumen 32, 1986.

THE TAYLOR POLYNOMIAL AS BEST LOCAL APPROXIMATION IN RECTANGLES

Sergio Favier, Carmen Fernández and Felipe Zó

SUMMARY. Let R_ε be the rectangle $0 \leqslant x_1 \leqslant \varepsilon^{\alpha_1}$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \varepsilon^{\alpha_2}$, ... , $0 \leqslant x_m \leqslant \varepsilon^{\alpha_m}$ where $\alpha_i \geqslant 1$ and $\min_{1\leq i\leq m} \alpha_i = 1$. Given f in $L^2(R_1)$, set $P_\varepsilon(f)$ for the L^2 projection onto the algebraic polynomials of degree not greater than n, where the projection is taken on R_ε. If $f \in C^{n_\alpha+1}$ with $n_\alpha > n \max_{1\leq i\leq m} \alpha_i$, and Tf is the Taylor polynomial of f of degree n developed at x=0, then $P_\varepsilon f$ converges to Tf as $\varepsilon \to 0$. Where $\max_{1\leq i\leq m} \alpha_i < (n+1)n^{-1}$, the rectangles R_ε can be replaced by a family $\{F_\varepsilon\}$ regular with respect to $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, and we have a similar result with the best L^p approximation on the sets F_ε. Throught this note we shall use Peano-like derivatives.

1. INTRODUCTION.

The notion of best local approximation may roughly be described as follows. Let f be a real-valued function defined on the unit cube Q in $\mathbf{R}^m$, $Q = \{x \ / \ 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$, and assume that f is in a normed linear space X with norm $\| \ \|$. Let V be a subset of X, and suppose we wish to best approximate f by elements of V near a point $x \in Q$, say x=0. Then we consider a family of regions $\{R_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ shrinking down to zero as $\varepsilon \to 0$, and we look for a $P_\varepsilon f \in V$ which minimizes the expression $\|(f-P)\chi_{R_\varepsilon}\|$ with $P \in V$, where χ_{R_ε} denotes the characteristic function of the set R_ε. If such P_ε exists it will be called a best approximation of f on the region R_ε. In case that $P_\varepsilon f$ tends to some $P_o f$ in V, as $\varepsilon \to 0$, we say that $P_o f$ is a best local approximation of f at x=0 by elements of V.

V is taken as the class of algebraic polynomials, generalized polynomials, or quasi-rational approximation. Recently, higher dimensional results have been obtained in [1], [2].

The purpose of this note is to call the attention to the fact that in higher dimensions it is important how the family $\{R_\varepsilon\}$ shrinks to zero, even considering as approximating class the algebraic polynomials. It will follow, using the techniques in [2], that if $\{R_\varepsilon\}$ is a regular family with respect to the balls centered at the origin, then the best local approximation of f with respect to this family is the Taylor polynomial. Since the balls can be changed for a regular family and still we get the Taylor polynomial, we see that the balls are good regions to obtain a local approximation.

We have a different situation if we take as $\{R_\varepsilon\}$ a one-parametric family of rectangles whose sides are parallel to the axis. We shall see that the Taylor polynomial is the best L^2 local approximation with respect to this family. Moreover, we prove that rectangles which are not too flat can be replaced by a regular family with respect to them. But in general not any affine transformation of rectangles will give a suitable family for local approximation.

This note is self-contained.

II. NOTATION AND RESULTS.

Let f be a Lebesgue measurable function defined on Q, and $E \subseteq Q$ a measurable set. We set

$$\|f\|_{p,E} = \left(\int_E |f(t)|^p \frac{dt}{|E|}\right)^{1/p} \quad , \quad 0 < p < \infty \quad ,$$

where $|E|$ denotes the Lebesgue measure of E. We always assume $|E| > 0$. The expression $\|f\|_{\infty,E}$ means the essential supremum on E. Thus, we have a norm on $L^p(Q)$ for $1 \leqslant p \leqslant \infty$ and a metric otherwise. Let $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ be an m-tuple of real numbers with $\alpha_i \geqslant 1$ and $\min\{\alpha_i\} = 1$. The non-homogeneous dilation $(\varepsilon^{\alpha_1}x_1,\varepsilon^{\alpha_2}x_2,\ldots,\varepsilon^{\alpha_m}x_m)$ is denoted by $\delta_\varepsilon(x)$, and set $R_\varepsilon = \delta_\varepsilon Q$. We say that a family $\{F_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ of measurable sets in $\mathbf{R}^m$ is a regular family with respect to α, if there exists a constant $c > 0$ such that for every ε the set F_ε is contained in R_ε and $|F_\varepsilon| \geqslant c\varepsilon^{|\alpha|}$, where $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m$.

The real algebraic polynomials in m variables with degree not grea

ter than n will be denoted by Π^n. Thus if $P \in \Pi^n$ we use the standard notation $P(x) = \sum_{|\beta| \leq n} a_\beta x^\beta$, with $x^\beta = x_1^{\beta_1}, x_2^{\beta_2}, \dots, x_m^{\beta_m}$.
We shall often use the next inequality.

(2.1) *Let* $\{F_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ *be a regular family with respect to* α *and* $p > 0$. *Then, there exists a constant* $c > 0$ *such that for every* $P \in \Pi^n$ *and* ε, *it follows that*

$$\|P\|_{\infty,Q} \leqslant c\varepsilon^{-n|\alpha|_\infty} \|P\|_{F_\varepsilon, p} \quad \textit{where} \quad |\alpha|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \alpha_i .$$

Note that in (2.1) the constant c is independent of $P \in \Pi^n$ and ε. Let $f \in L^p(Q)$, $0 < p$ and assume that there exist $Tf \in \Pi^n$ and a finite number R_f such that $\|f-Tf\|_{F_\varepsilon,p} \leqslant R_f\ \varepsilon^{n+1}$ for every $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Then we say that Tf is a Taylor polynomial of degree n of f at the origin. If such is the case we write $f \in T^p_{n+1}$. By (2.1) we have the uniqueness of Tf if $|\alpha|_\infty < (n+1)n^{-1}$ and elementary examples show the lack of uniqueness for $|\alpha|_\infty > (n+1)n^{-1}$. Sometimes the class Π^n is replaced by a smaller one $\Pi^{n,\alpha}$ and we have uniqueness of $Tf \in \Pi^{n,\alpha}$ for every α, see [6].
Given $f \in L^p(Q)$ we call $B^p_\varepsilon(f) = B^p_{F_\varepsilon}(f)$ the set of all $P_\varepsilon f \in \Pi^n$ such that $\|f-P_\varepsilon f\|_{F_\varepsilon,p} = \inf_{P\in\Pi^n} \|f-P\|_{F_\varepsilon,p}$. A compactness argument together with (2.1) shows that $B^p_\varepsilon(f) \neq \emptyset$. For p outside the range $(1,\infty)$, $B^p_\varepsilon(f)$ may have more than one element. For example we can find an $f \in C^\infty$ such that $B^\infty_Q(f)$ has infinitely many quadratic polynomials, [5]. The next statement is an easy consequence of (2.1).

THEOREM 1. *Let* $f \in T^p_{n+1}$, $0 < p \leqslant \infty$. *Let* $\{F_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ *be a regular family with respect to* α *with* $|\alpha|_\infty < (n+1)n^{-1}$. *Let* Tf *be the Taylor polynomial of degree* n *of* f. *Then, for every* $P \in B^p_\varepsilon(f)$ *we have*

$$\|P-Tf\|_{\infty,Q} \leqslant cR_f\varepsilon^{n+1-n|\alpha|_\infty}$$

where the constant c *depends on* Π^n, *the family* $\{F_\varepsilon\}$ *and* p.

We call n_α the minimum integer ℓ such that $\ell \geqslant n|\alpha|_\infty$. If $f \in T^p_{n_\alpha+1}$ the restriction to Π^n of a Taylor polynomial of degree n_α is uni-

THEOREM 2. *Let* $f \in T^2_{n_\alpha+1}$, *let* Tf *be the Taylor polynomial of* f *of degree* n, *and* $P_\varepsilon(f)$ *the* $L^2(R_\varepsilon)$ *projection of* f *onto* Π^n. *Then* $\| P_\varepsilon(f) - Tf \|_{\infty,Q}$ *tends to zero as* $\varepsilon \to 0$.

III. PROOFS.

The next Lemma is a general version of a similar one in [2]. The proof is included here for the sake of completness.

LEMMA. *Let* $\{\mu_\varepsilon\}_{0<\varepsilon\leq 1}$ *be a family of measures on* Q *uniformly absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure. Suppose that* $\mu_\varepsilon(Q) = 1$ *for every* ε. *Then there exists a constant* $c > 0$, $c = c(p,n)$ *such that for any* $P \in \Pi^n$ *and* $\varepsilon > 0$ *we have*

$$c \, \| P \|_{\infty,Q} \leqslant \left(\int_Q |P(x)|^p \, d\mu_\varepsilon(x) \right)^{1/p} \leqslant \| P \|_{\infty,Q}$$

In fact, suppose for the moment that for some $p > 0$, the statement does not hold. Then there exist sequences $\{P_\ell\}$ in Π^n and $\{\varepsilon_\ell\}$ such that for every ℓ we have $\| P_\ell \|_{\infty,Q} = 1$ and $\left(\int_Q |P_\ell(x)|^p \, d\mu_\varepsilon(x) \right)^{1/p} \leqslant$ $\leqslant 1/\ell$.

Now assume, by taking a subsequence, if necessary, that for some $P_o \in \Pi^n$, $\| P_\ell - P_o \|_{\infty,Q} \to 0$ as $\ell \to \infty$. Then $\| P_o \|_{\infty,Q} = 1$ and given $\varepsilon > 0$ for all ℓ large we have $\left(\int_Q |P_o(x)|^p \, d\mu_{\varepsilon_\ell}(x) \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon$.

Given $\delta > 0$ we set $N_\delta = \{x \in Q \,/\, |P_o(x)| < \delta\}$. Then, for ℓ large we have $\varepsilon^p > \delta^p \, (1 - \mu_{\varepsilon_\ell}(N_\delta))$. Since $P_o \neq 0$, $|N_\delta| \to 0$ as $\delta \to 0$, we arrive at a contradiction in the last inequality by observing that our measures are uniformly absolutely continuous. So the Lemma is proved.

In order to get (2.1), set $P^\varepsilon(t) = P(\delta_\varepsilon t)$ and $d\mu_\varepsilon(t) = \dfrac{\varepsilon^{|\alpha|}}{|F_\varepsilon|} \chi_{F_\varepsilon}(\delta_\varepsilon t)$.

Observe that $\sup_{0<\varepsilon\leq 1} \mu_\varepsilon(E) \to 0$ as $|E| \to 0$, if $\{F_\varepsilon\}$ is a regular family with respect to α.

Thus, a change of variables and the Lemma yield

$$\| P^\varepsilon \|_{\infty,Q} \leqslant c \, \| P \|_{p,F_\varepsilon} \quad \text{for any } P \in \Pi^n \text{ and } \varepsilon > 0.$$

Moreover, the norm $\| P^\varepsilon \|_{\infty,Q}$ is equivalent to $\max_{|\beta|\leq n} \varepsilon^{\alpha\cdot\beta} |a_\beta|$, where

$P(x) = \sum_{|\beta|\le n} a_\beta x^\beta$ and $\alpha.\beta = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_m\beta_m$. Thus, we obtain

$$\varepsilon^{\alpha.\beta}|a_\beta| \leqslant \Big\| \sum_{|\beta|\le n} a_\beta x^\beta \Big\|_{p,F_\varepsilon} \quad , \; |\beta| \leqslant n \tag{3.2}$$

Clearly, (3.2) implies (2.1).

REMARK 1. The inequality (2.1) remains valid if we consider polynomials $P(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i u_i(x)$ in the sense of [1]. That is, we assume that each u_i is C^{n+1} in a neighborhood of zero, and the Wronskian determinant of the square matrix $(\partial^\beta u_i(0))$, $|\beta| \leqslant n$, $i = 1,\ldots,k$ being nonzero. Here, $k = \mathrm{card}\{\beta : |\beta| \leqslant n\}$. Then for $n|\alpha|_\infty < n+1$ and any ε small we have

$$\|P\|_{\infty,Q} < c\,\varepsilon^{-n|\alpha|_\infty} \|P\|_{p,F_\varepsilon}$$

$p > 0$ and $\{F_\varepsilon\}$ regular with respect to α.
In fact, by the Taylor theorem

$$P(x) = \sum_{|\beta|\leqslant n} \frac{1}{\beta!} A_\beta(0)x^\beta + \sum_{|\beta|=n+1} \frac{1}{\beta!} A_\beta(\xi)x^\beta = P_1(x) + R(x)$$

where $A_\beta(\xi) = \sum_{i=1}^{k} a_i \partial^\beta u_i(\xi)$.

Now, for a constant c, not necessarily the same on each ocurrence, we have

$$\|P\|_{p,F_\varepsilon} \leqslant c\varepsilon^{n+1} \max_{1<i<k} |a_i| \leqslant c\varepsilon^{n+1} \|P\|_{\infty,Q}$$

$$\|P_1\|_{p,F_\varepsilon} - c\,\|R\|_{p,F_\varepsilon} \leqslant c\,\|P\|_{p,F_\varepsilon}$$

and by (2.1), we have

$$\|P_1\|_{\infty,Q} \leqslant c\varepsilon^{-n|\alpha|_\infty}\|P_1\|_{p,F_\varepsilon} .$$

Since the vectors $(A_\beta(0))$ and (a_i) are related by a nonsingular matrix the norm $\|P_1\|_{\infty,Q}$ is equivalent to $\|P\|_{\infty,Q}$ and the remark follows.

Theorem 1 is a consequence of the definition of $B^p_\varepsilon(f)$ and (2.1). In fact, for $P \in B^p_\varepsilon(f)$ we have and Theorem 1 follows.

We can not expect, in general, convergence of the best approximation polynomial $P_\varepsilon(f)$ to the Taylor polynomial when $|\alpha|_\infty > (n+1)n^{-1}$. Thus, if $|\alpha|_\infty > (n+1)n^{-1}$ it is easy to find a regular family $\{F_\varepsilon\}$ such that $\|P_\varepsilon(f)\|_{\infty,Q}$ tends to infinity for smooth functions f. If $|\alpha|_\infty = (n+1)n^{-1}$ the norm of $P_\varepsilon(f)$ will remain bounded, but in general, the polynomial $P_\varepsilon(f)$ will not converge to Tf. We shall give an example. First consider a further observation.
Set $P_E(f)$ for the L^2 projection onto Π^n, where the L^2 norm is taken over the set E.
Let L be a nonsingular affine transformation of $\mathbf{R}^m$ onto $\mathbf{R}^m$. Then for $f \in L^2(Q)$ and measurable $E \subseteq Q$ we have

(3.3) $$P_{LE}(f) = P_E(f\circ L)\circ L^{-1}$$

To obtain (3.3), we use a change of variables and the uniqueness of the L^2 projection. Thus, the L^p version of (3.3) is also true for $1 < p < \infty$.

(3.4) EXAMPLE. Set $\Pi^n = \Pi^1(x,y)$ and $E = \{(x,y) \;/\; 0 \leqslant y \leqslant c(x)\;,\; 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, where c is a positive continuous function. Suppose for the moment that there exists c(x) such that $P_E(x^2)(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y$ has the coefficient $a_2 \neq 0$. Now let $F_\varepsilon = \delta_\varepsilon E$ where $\delta_\varepsilon(x,y) = (\varepsilon x\;,\;\varepsilon^\alpha y)$. Then (3.3) yields $P_{F_\varepsilon}(x^2)(x,y) = \varepsilon^2(a_0 + a_1\varepsilon^{-1}x + a_2\varepsilon^{-\alpha}y)$. Therefore, $\|P_{F_\varepsilon}\|_{\infty,Q}$ tends to infinity for $\alpha > 2$ and if $\alpha = 2$, P_{F_ε} does not converge to the Taylor polynomial. It remains to find a function c(x) with the required conditions. But $a_2 \neq 0$ iff

$$\Delta(c) = \begin{vmatrix} \int_0^1 c(x)\,dx & \int_0^1 x\,c(x)\,dx & \int_0^1 x^2c(x)\,dx \\ \int_0^1 x\,c(x)\,dx & \int_0^1 x^2c(x)\,dx & \int_0^1 x^3c(x)\,dx \\ \int_0^1 c^2(x)\,dx & \int_0^1 x\,c^2(x)\,dx & \int_0^1 x^2c^2(x)\,dx \end{vmatrix} \neq 0$$

Now if $c \in \Pi^1(x)$, $c(x) = b_0 + b_1x$, the determinant $\Delta(c) = \Delta c(b_0,b_1)$ belongs to $\Pi^4(b_0,b_1)$. But $\Delta(c)$ is not the zero polynomial. So there exist (b_0,b_1) such that $\Delta(c) \neq 0$. Moreover we can choose a positive c(x). Since for b_1 fixed $\Delta(c)(b_0,b_1) \in \Pi^4(b_0)$ then $\Delta c(b_0,b_1) \neq 0$ for all large b_0.

The next property for the L^2 projection P_Q will be used.

$$P_Q(x^\beta)(x) = \sum_{\substack{|\gamma|\le n \\ \gamma\le\beta}} a_\gamma(\beta)\, x^\gamma . \tag{3.5}$$

Here $\gamma \leqslant \beta$ means that for each component holds $\gamma_i \leqslant \beta_i$.

In fact, let $V_0, V_1, \ldots, V_n$ be an orthonormal system in Π^n of $[0,1]$. Then $V_\gamma(x) = V_{\gamma_1}(x_1)\, V_{\gamma_2}(x_2) \ldots V_{\gamma_m}(x_m)$, $|\gamma| \leqslant n$ is an orthonormal system in Π^n of Q. Clearly, $V_\gamma(x) = \sum_{\sigma\le\gamma} a_\sigma^\gamma x^\sigma$. Now in the expression

$$P_Q(x^\beta) = \sum_{|\gamma|\le n} (x^\beta, V_\gamma)_{L^2(Q)}\, V_\gamma$$

we have $(x^\beta , V_\gamma)_{L^2(Q)} = 0$ if $\gamma \leqslant \beta$ does not hold.

By using the form for $V_\gamma(x)$ and a change in the order of sums we get

$$P_Q(x^\beta)(x) = \sum_{\substack{|\gamma|\le n \\ \gamma\le\beta}} \Big(\sum_{\substack{\gamma\le\sigma\le\beta \\ |\sigma|\le n}} (x^\beta, V_\sigma)\, a_\gamma^\sigma \Big)\, x^\gamma ,$$

and (3.5) is proved.

We make a few comments on (3.5). This property implies that if $f \in L^2(Q)$ is independent of some set of variables then $P_Q f$ does not depend on the same set of variables. We can replace Q in (3.5) by $E = AQ+v$, $v \in \mathbf{R}^m$ and A a diagonal positive matrix and still have the same order in the sum. This follows at once by (3.3).

(3.6) EXAMPLE. Let E be the square with vertices $(\pm 1,0),(0,\pm 1)$ and P_E the projection on Π^n, polynomials in the variables x and y. Then there exists ℓ such that $P_E(x^\ell)$ depends of the two variables x and y. Thus (3.5) is not invariant by rotations. The example (3.6) could "be proved" by a long calculation or else we may use the next argument. Let $y = c(x)$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ the piecewise polynomial function which gives the upper boundary of E. We claim that $P_E(c^2)$ is a polynomial in Π^n which does depend on the variable y. Otherwise, $c^2(x) - P_E(c^2)(x)$ will be orthogonal to the subspace

$P_E(c^2) \neq 0$. Now approaching c^2 by polynomials in the variable x we get our claim.

Now we prove Theorem 2. First note that if $f \in T^2_{n_\alpha+1}$ by (2.1) and (3.2) the restriction to Π^n of the Taylor polynomial of degree n_α is uniquely determined. We write

$f(x) = Tf(x) + \sum_{n<|\beta|\leq n_1} a_\beta x^\beta + R(x)$ with $Tf \in \Pi^n$ and $\|R\|_{2,R_\varepsilon} \leq R_f \varepsilon^{n_\alpha+1}$.

Since $\|P_\varepsilon(R)\|_{2,R_\varepsilon} \leq 2\|R\|_{2,R_\varepsilon}$, by (2.1) and (3.2) $\|P_\varepsilon(R)\|_{\infty,Q} \to 0$ as $\varepsilon \to 0$.

On the other hand, by (3.2) and (3.5), we have

$$P_\varepsilon(x^\beta)(x) = \sum_{\substack{|\gamma|\leq n \\ \gamma\leq\beta}} \varepsilon^{\alpha.\beta-\alpha.\gamma} a_\gamma(\beta)\, x^\gamma$$

So if $|\beta| > n$ we have $P_\varepsilon(x^\beta) \to 0$, and the Theorem follows.

REMARK 2. Theorem 2 is no longer true if Q is replaced by a rotation of it. This follows from example (3.6).

REMARK 3. In Theorem 2 the sets R_ε can be replaced by $R^*_\varepsilon = [0,\phi_1(\varepsilon)] \times \ldots \times [0,\phi_n(\varepsilon)]$ where the positive functions ϕ_i behave like powers. That is, there exists $s > 0$ such that for every pair i,j we have $\phi_i^s(\varepsilon) = o(\phi_j(\varepsilon))$. Now we should assume a smoothness condition according to s and n.

It could be of some interest to obtain a similar result to Theorem 2 for $p \neq 2$.

REFERENCES

[1] C.K.Chui, H.Diamond and L.A.Raphael, *Best local approximation in several variables*, J.Approx.Th.40 (1984), 343-350.

[2] C.K.Chui, H.Diamond and L.A.Raphael, *On best data approximation*, J.Approx.Th. and its Appls. 1 (1984), 37-56.

[3] C.K.Chui, O.Shisha and P.W.Smith, *Padé approximants as limits of best rational approximants*, J.Approx.Th. 12 (1974), 201-204.

[4] C.K.Chui, O.Shisha and P.W.Smith, *Best local approximation*, J.Approx.Th.15 (1975), 371-381.

[5] T.J.Rivlin and H.S.Shapiro, *Some uniqueness problems in approximation theory*, Comm.Pure Appl.Math.13 (1960), 35-47.

[6] C.Sadosky and M.Cotlar, *On quasi homogeneous Bessel potential operators*, Proce. Symposia in Pure Math.AMS 10 (1967), 275-287.

Sergio Favier(*), Carmen Fernández(*) and Felipe Zó(*),(**)

(*) Facultad de Ciencias Físico Matemáticas y Naturales-Universidad Nacional de San Luis - Chacabuco y Pedernera-5700 San Luis-ARGENTINA

(**) IMALS - Universidad Nacional de San Luis - CONICET.

U.M.A. 86 EN SANTA FE Y PARANA

En un caluroso atardecer de la bella ciudad de Santa Fe de la Vera-cruz, minutos después de las 18 horas del miércoles 8 de octubre, cantábamos el Himno Nacional en el Acto Inaugural de esta doble Reunión Anual, realizado en el Paraninfo de la Universidad Nacional del Litoral.

Después de los discursos protocolares tuvo lugar la primera actividad académica de la Reunión, la Conferencia Julio Rey Pastor, a cargo este año del Dr. Alberto P. Calderón, quien fue presentado por uno de sus orgullosos discípulos, el Dr. Segovia Fernández. Don Alberto ("el maestro" lo llamó Segovia) nos maravilló con su disertación sobre la importancia de la enseñanza de la Matemática.

El día siguiente comenzó, en las instalaciones de la Universidad Tecnológica Nacional, la febril actividad de los casi mil concurrentes a este evento, cerca de novecientos asistentes a la Reunión de Educación Matemática, y más de cien expositores y auditores de la Reunión de Comunicaciones Científicas. Esa actividad, desarrollada a lo largo del jueves 9 y el viernes 10 de octubre en la forma de sesiones paralelas (hasta cuatro simultáneas de carácter científico y dos de Educación) con comunicaciones y conferencias de muy buen nivel, absorbió nuestros esfuerzos durante esas cuarenta y ocho horas.

En total hubo casi setenta comunicaciones científicas y más de treinta comunicaciones de Educación Matemática. El Dr. Néstor Aguilera (P.E.M.A.- Santa Fe) disertó sobre "Análisis numérico de flujos con cavidades". El Dr. Roberto Miatello (I.M.A.F.- Córdoba) expuso sobre "Formas cuspidales holomorfas de peso 1 y 2". La conferencia del Dr. Angel Larotonda (F.C.E.N.- U.B.A.) tuvo el sugestivo título "Gérmenes y espectros", mientras que la disertación del Dr. Felipe Zo (F. Ciencias - U.N.San Luis) se denominó "Mejor aproximación lineal". Finalmente, tuvimos el agrado de contar con la presencia de un distinguido visitante, el Dr. Antonio Fasano (I.U.Dini - Florencia - Italia) quien expuso sobre el tema "Problemas de frontera libre. Teoría y aplicaciones".

En el área de Educación Matematica, la Prof. Ana T. Aragón (U.N. de Salta) disertó sobre "Evaluación del aprendizaje de Matemática en la escuela secundaria". La Prof. Gema Fioriti (I.P.E.A. - Comahue) expuso sobre "Los problemas y el aprendizaje matemático". El Prof. Lic. Aldo Figallo (U.N. de San Juan) habló sobre "Angulos y Trigonometría". La Prof. Lidia Vicente (Prov. de Bs.As.) pronunció una conferencia sobre el tema "Reflexiones sobre una educación matemática para todos".

El sábado 11 de octubre cruzamos el Paraná a través del túnel Hernandarias y nos reunimos en el teatro Tres de Febrero de la capital entrerriana, para escuchar dos interesantes conferencias de cierre, "Transformaciones rígidas del plano" pronunciada por el Dr. Juan A. Tirao (I.M.A.F. - Córdoba) y "Enseñanza informática en la escuela secundaria" expuesta por el Ing. Hugo Ryckeboer (U.B.A. - U.C.P.B.A.- U. San Luis).

Como broche de oro nos reunimos en un hermoso parque situado en las "cuchillas" próximas a Paraná, para saborear un asado, que fue amenizado por las canciones y el humor de la delegación salteña, con libreto y dirección de la Nena Díaz. En la despedida un agradecimiento especial a la Comisión Organizadora Local, integrada, entre otros, por la Dra. Harboure de Aguilera y la Lic. Elena F. de Carrera. ¡Muchas gracias por su extraordinaria eficacia y cordialidad!.

F. A. Toranzos

RESUMENES DE LAS COMUNICACIONES PRESENTADAS A LA XXXVI REUNION ANUAL DE LA UNION MATEMATICA ARGENTINA

ALGEBRA Y LOGICA

ANDRUSKIEWITSCH,N. (F.A.M.A.F.- U.N.Córdoba): *Graduaciones en anillos de polinomios.*

Se construyen graduaciones en anillos de polinomios, dando a cada variable un peso arbitrario. Recíprocamente, toda graduación de un anillo de polinomios $R[X_1,\dots,X_n] = A_0 \oplus A_1 \dots$ tal que $A_0 = R$ es isomorfa a una de aquéllas si R verifica: todo R-módulo proyectivo finitamente generado es libre.

Si R es un cuerpo, se clasifican también todas las graduaciones de $R[X,Y]$.

ARAUJO,J.O. (F.C.E.- U.N.del Centro): *La versión ortogonal de un teorema de Blichfeldt.*

Presentamos una versión real del teorema de Blichfeldt en (1). Con G notamos un grupo finito irreducible de $O_n(R)$ y para u,s en $O_n(R)$ fijamos el producto interno $(u,s) = tr(u^t s)/n$.

1- LEMA. Si u y s en $O_n(R)$ no conmutan y los valores propios de u tienen argumentos en $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, entonces $(s,u) \angle (s,u.s.u^{-1})$.

2- LEMA. Sea H un subgrupo normal abeliano de G. Si algún elemento de H tiene por lo menos dos componentes primarias, entonces G es imprimitivo.

3- TEOREMA. Sea G primitivo y u en G tal que sus valores propios estén en un sector circular de amplitud no superior a $\frac{\pi}{3}$. Si H es el subgrupo de G generado por los conjugados de u y K el centralizador de u en G, entonces:
i) H = (u). ii) Si $K \neq G$, $(G:H) = 2$ y u posee exactamente dos valores propios w, $\overline{w}$ en C. iii) Si $K \neq G$, los espacios propios de u forman un sistema de imprimitivismo de G en C^n.

REFERENCIAS. (1) Dornhoff L.: Group Representation Theory - M.Dekker, 1972 New York.

CARBAJO,R., CISNEROS,E. y GONZALEZ,M.I. (F.C.E.e I.- U.N.Rosario): *Caracterización de algunos radicales de un "skew" anillo de grupo.*

Se logran caracterizaciones para el Radical Generalizado, el Radical Fuertemente Primo y el Radical Singular de un anillo de grupo $R = K*G$, donde K es un anillo y G un grupo totalmente ordenado cuyos elementos actúan como automorfismos sobre K.

Si indicamos con $N(A)$, $S(A)$ y $Z(A)$ al Radical Generalizado, al Fuertemente Primo y al Radical Singular respectivamente de un anillo A, entonces se obtienen los siguientes resultados:

a) $N(R) = S*G$ siendo $S = N(R) \cap K$.

b) $S(R) = T*G$ donde T es la intersección de todos los ideales de K G-fuertemente primos.

c) $Z(R)\ K = Z_G(K)$ donde $Z_G(K) = \{x \in K$ / el anulador a derecha de x es G esencial en $K\}$.

COSTA,H.A. (F.C.E.y N.- U.N.Catamarca): *El método de inducción completa y sus variantes.*

Un análisis de algunas de las variantes que, en sus aplicaciones, tiene el Método de Inducción Completa muestra el hecho de que, en su mayoría, dichas variantes no han sido justificadas.

En este trabajo se presentan demostraciones rigurosas de las cinco variantes de mayor aplicación.

FIGALLO,A.V. (I.M.- U.N.San Juan): *Los reticulados de Monteiro.*

En este trabajo se introduce la noción de Reticulados de Monteiro, se caracteriza a los Reticulados de Monteiro Simples y se demuestra que todo Reticulado de Monteiro no trivial es Subproducto directo de Reticulados de Monteiro simples.

∇x es una abreviatura de $x \vee {\sim}x$.

DEFINICION. Un reticulado de Monteiro es un álgebra $(A,\wedge,\vee,\sim,\Delta)$ de tipo de similaridad $(2,2,1,1)$ que satisface los siguientes axiomas:

A1) $x\wedge(x\vee y) = x$	A2) $x\wedge(y\vee z) = (z\wedge x)\vee(y\wedge x)$	A3) ${\sim\sim}x = x$
A4) $x = \Delta x \vee {\sim}\nabla x$	A5) $\Delta x = \Delta x \vee {\sim}\Delta x$	A6) $\Delta\nabla x = \nabla x$
A7) $\Delta(x\wedge{\sim}x) = \Delta(y\wedge{\sim}y)$	A8) $\Delta(x\vee y) = (\Delta x \vee \Delta y)$	A9) $\nabla(x\wedge y) = \nabla x \wedge \nabla y$

GLUSCHANKOF,D.A. (F.C.E.y N.- U.B.A. y CONICET): *Objetos inyectivos y sistemas deductivos en álgebras deductivas.*

El teorema de extensión de Sikorski afirma que toda álgebra de Boovalente) formulaciones más generales, siguiendo dos vías distintas: por un lado que "toda álgebra de Boole completa es inyectiva en la categoría de los retículos distributivos" (1) y que "toda álgebra de Boole completa es inyectiva en la categoría de las álgebras de Heyting" (2).

En la presente exposición se extiende la generalización de la segunda vía a la categoría de las álgebras deductivas con cero. De modo similar se demuestra la equivalencia entre el teorema del ideal primo para álgebras de Boole y la existencia de sistemas deductivos maximales en álgebras deductivas con cero. Por último, se demuestra que en la categoría de las álgebras de Hilbert con cero los únicos objetos inyectivos son las álgebras de Boole completas. Este resultado extiende el presentado en (2) para álgebras de Heyting y lo mejora al no usarse el lema de Zorn y realizarse la demostración enteramente en el marco de ZF.

(1) D.Gluschankof y M.Tilli: "On some extension theorems in functional analysis and the theory of Boolean algebras" (inédito).

(2) R.Balbes y A.Horn: "Injective and projective Heyting algebras", Trans.A.M.S. vol.148 (1970), pp.549-559.

GLUSCHANKOF,D.A. y TILLI,M. (F.C.E.y N.- U.B.A. y CONICET): *El teorema de extensión de Sikorski y la integral booleana.*

Es un resultado conocido (1) que el teorema de Hahn-Banach es estrictamente más débil que el teorema del ideal primo para álgebras de Boole. Menos conocido es el resultado de J.Bell (2) que el teorema de extensión de Sikorski es estrictamente más fuerte que el del ideal primo. Los dos primeros teoremas son equivalentes a la existencia de ciertas medidas: sobre el intervalo [0,1] en el primer caso y sobre el álgebra de Boole 2 en el segundo. En ambos casos los teoremas se pueden reformular afirmando la existencia de integrales para esas medidas.

Teniendo en cuenta que los tres teoremas son similares en su formulación de teoremas de extensión, se expone una formulación equivalente al teorema de Sikorski en la forma de existencia de una integral sobre álgebras de Boole completas $\int d\mu\colon B^X \to B$ donde X es un conjunto cualquiera, μ es una medida booleana y vale la acotación

$$\int_X h\, d\mu \geqslant \bigvee_{b\in B} (b \wedge \mu(h^{-1}(b))) \quad (\text{con } h \in B^X).$$

(1) D.Pincus: "Independence of the Prime Ideal Theorem from the Hahn Banach Theorem", Bull.A.M.S., 78 n°5 (1972), pp.766-770.

(2) J.Bell: "On the strength of the Sikorski extension theorem for Boolean algebras", J.of Symb.Logic, 41, 3 (1983), pp.841-845.

INZA,M.J. y MARZORATTI,S.C. (F.C.E.- U.N.del Centro): *Sobre la independencia de los axiomas de álgebras de Nelson.*

H.Rasiowa en (1) definió el concepto de Algebra de Nelson con una axiomática sin igualdad. D.Brignole y A.Monteiro, en (2), exhiben una axiomática con igualdad y más reducida equivalente a la anterior, vía inducción transfinita. D.Brignole en (3) presenta el mismo resultado utilizando solamente aritmética. L.Monteiro y A.Monteiro (2) estudiaron y obtuvieron ciertos resultados sobre la independencia de los axiomas allí presentados, pero tales estudios y demostraciones no fueron publicados hasta la fecha. En esta comunicación presentamos dichos resultados obtenidos en forma independiente.

REFERENCIAS. (1) Rasiowa H.: N-lattices and constructive logic with strong negation. Fundamenta Matematicae., v.46 (1958), pp.61-80.

(2) Brignole D. - Monteiro A.: Caractérisation des Algèbres de Nelson par des égalités - Notas de Lógica Matemática-Inst.de Matemática - U.N.S. - 1964.

(3) Brignole D.: Equational Characterization of Nelson Algebras - Notas de Lógica Matemática - Instituto de Matemática - U.N.S. - 1974.

MARTINEZ,N.G. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Eliminación de cuantificadores en las lógicas de Lukasiewicz.*

Se define la noción de completitud adecuada para las lógicas n-valentes de Lukasiewicz: Dada una fórmula cerrada A de una Ln-teoría T, A se dirá Ln-decidible si para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\vdash_T S_i A$ ó $\vdash_T -S_i A$ (donde los S_i son los operadores modales correspondientes al álgebra de Lukasiewicz n-valente propia PL_n).

Así, las teorías Ln-completas serán aquéllas en la que todas las fórmulas cerradas son Ln-decidibles. Las teorías Ln-completas conservan las propiedades de las teorías completas clásicas y puede obtenerse de manera natural un teorema de eliminación de cuantificadores:

Se dice que una Ln-teoría admite eliminación débil de cuantificadores (EDC) si para cada fórmula A en L(T) y para cada i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $\vdash_T S_i A \Longleftrightarrow S_i B_i$, con B_i una fórmula abierta.

TEOREMA. Sea T una Ln-teoría no trivial; si T satisface la condición de isomorfismo y la condición de submodelo, T admite, T admite EDC.

Como en el caso clásico, la eliminación débil de cuantificadores es prácticamente suficiente para asegurar la Ln-completitud de una teo

MARTINEZ FAVINI-BUBOST,C. y OUBIÑA,L. (F.C.E.- U.N.La Plata): *Fórmulas sobre un conjunto, hipergrafos de intervalos y reticulados.*

Se definen las fórmulas sobre un conjunto y se construyen algoritmos sobre las mismas que permiten el reconocimiento de los hipergrafos de intervalos, mediante fórmulas excluidas, y la determinación de todas sus orientaciones. Se establece una relación entre clases de equivalencia de fórmulas, pirámides (caso particular de hipergrafos de intervalos) y una clase de reticulados, obtenida mediante extensiones atómicas de anticadenas y rejas.

PUDDU,S. y SABIA,J. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *La palabra* X^rY^s *es universal para casi todo grupo alternado.*

Una palabra $W(X,Y) \in F$, donde F es el grupo libre de rango dos generado por X, Y se dice universal en un grupo G, si para todo $g \in G$ existen $x, y \in G$ tal que $W(x,y) = g$. Dada la palabra $W = X^rY^s \in F$, con r y s enteros no nulos demostramos que existe N un número natural que depende de r y de s tal que W es universal en A_n para todo $n \geqslant N$.

TILLI,M. y GLUSCHANKOF,D.A. (F.C.E.y N.- U.B.A. y CONICET): *Transitividad y combinadores.*

Existe una evidente relación entre la transitividad, la asociatividad y la propiedad triangular de las teorías ordinales, algebraicas y métricas, respectivamente. Esto se debe a la existencia de una estructura común a esos tres tipos de teorías. Su común significado se puede expresar mediante el carácter funcional del combinador que expresa la composición de funciones. De aquí y mediante el empleo de los combinadores básicos se deriva un sistema axiomático para esa estructura común subyacente.

Se deriva, además, una notación simplificada de ese carácter funcional que asimila esas propiedades al cociente de números, por ejemplo, la propiedad transitiva se podría expresar como

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a} .$$

Se pueden deducir los teoremas que este "cociente" cumple y se muestran contraejemplos que lo diferencian del cociente de números, por ejemplo $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{\frac{b.c}{d}} \neq \dfrac{a.d}{b.c}$ en general.

TOLOSA,J.J. (D.M.- U.N.del Sur): *Las álgebras* I_D-$\neg$.

Llamaremos álgebras I_D-$\neg$ a toda álgebra $(A,\to,\neg,1)$ de tipo de similaridad (2,1,0) que verifica los axiomas siguientes para todo x,y en A:

A1) $x\to x = 1$, A2) $x\to(y\to z) = (x\to y)\to(x\to z)$, A3) $(x\to y)\to x = x$
A4) $\neg\neg x = \neg x\to\neg 1$, A5) $\neg x\to(x\to y) = 1$, A6) $\neg y\to(x\to\neg(x\to y))=1$
A7) $\neg(x\to y)\to\neg y = 1$, A8) $(x\to y)\to((y\to x)\to((\neg x\to\neg y)\to((\neg y\to\neg x)\to x)))=$
$= (x\to y)\to((y\to x)\to((\neg x\to\neg y)\to((\neg y\to\neg x)\to y)))$. Entonces se prueba:

TEOREMA 1. Toda álgebra I_D-$\neg$ simple es isomorfa a $(T,\to,\neg,1)$, donde $T = \{0,1/2,1\}$ y $\to,\neg$ están dados por las tablas:

$\to$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1	1	1
1	0	1/2	1

x	$\neg$x
0	1
1/2	0
1	0

Sea $B = \{0,1\}$ la I_D-$\neg$ subálgebra no trivial de T. Entonces:

TEOREMA 2. Toda álgebra I_D-$\neg$ no trivial es subproducto directo de copias de T y B.

VARGAS,J.A. (I.M.A.F.-C.I.E.M.- U.N.Córdoba): *Horociclos en grupos algebraicos finitos.*

Sean $K \subset F$ cuerpos finitos. Sea G un grupo algebraico definido sobre K. Sean G(K) (G(F)) los puntos racionales sobre K (F) respectivamente. Un horociclo en G(F)/G(K) es la órbita de los puntos racionales en F de un subgrupo unipotente maximal de G definido sobre F. En esta comunicación se da una descripción en términos de espacios homogéneos del espacio de los horociclos.

ANALISIS MATEMATICO

AIMAR,H. (P.E.M.A.- Santa Fe): *Funciones BMO y la desigualdad de Harnack para operadores elípticos y parabólicos.*

Se obtiene una extensión del lema de John y Nirenberg que contiene el caso elíptico (John y Nirenberg) y el caso parabólico (Moser y Fabes y Garofalo) y que puede ser aplicado al estudio de operadores elípticos y parabólicos degenerados. En este trabajo se considera una aplicación al caso parabólico degenerado estudiado por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j})\, u ,$$

donde $A = (a_{ij}(x,t))$ es una matriz simétrica de funciones medibles tal que

$$\lambda w(x)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda w(x)|\xi|^2$$

y $w(x) \in A_{1+2/n}$, entonces, para pequeños valores positivos de ε, la función u^{ε} satisface una condición de tipo A_2 con respecto a las bolas de una quasi métrica asociada naturalmente al operador.

AIMAR,H. y SCOTTO,R. (P.E.M.A.- CONICET): *Desigualdad Maximal para Promedios Pesados de Variables Aleatorias Independientes de a Pares e Idénticamente Distribuidas.*

Se trata de establecer condiciones necesarias y suficientes sobre una sucesión de números no negativos w_i, llamados pesos, para que se satisfaga una desigualdad del tipo

$$P(\sigma_p^* > \lambda) \leqslant \frac{C}{\lambda^p} E(|X|^p) \qquad \text{donde} \qquad \sigma_p^* := \sup_{n\geq 1} \frac{1}{(\sum_{i=1}^{n} w_i)^{1/p}} \left|\sum_{i=1}^{n} x_i w_i\right| .$$

Damos una solución completa del problema para el caso p=1, y algunos resultados parciales para el resto.

ANDRUCHOW,E. y STOJANOFF,D. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Levantamiento de raíces en álgebras de Banach.*

Sean A y B álgebras de Banach sobre $\mathbb{C}$ con unidad y $f: A \to B$ un epimorfismo de álgebras. El resultado central es que si $b \in B$ y $q(b)=0$ para cierto $q \in \mathbb{C}[X]$ de raíces simples, entonces existe $a \in A$ con $f(a) = b$ y $q(a) = 0$ si y sólo si existe $c \in f^{-1}(b)$ tal que en $\sigma_A(c)$ las raíces α_i de q estén desconectadas. Corolarios de esto son los siguientes resultados (generalización de otros de Calkin (1941) y Olsen (1971)):

Si $A_p = \{a \in A \ / \ p(a) = 0\}$ para $p \in \mathbb{C}[X]$ de raíces simples entonces $f: A_p \to B_p$ es suryectiva en los siguientes casos:

1. $A = L(X)$ con X espacio de Banach y $B = A/K(X)$ con $K(X)$ los operadores compactos.
2. A cualquiera y $B = A/R(A)$ donde $R(A)$ es el radical.

Con las mismas técnicas se obtiene una extensión de un resultado similar a los anteriores de Rickart, para elementos de un álgebra con ciertas propiedades espectrales.

BENEDEK,A.I. y PANZONE,R. (INMABB - CONICET - U.N. del Sur): *Un teorema de Steiner.*

Sea J una curva de Jordan cerrada, D su interior, $D_r = \{x;d(x,D) \leqslant r\}$, $S_r = D_r \setminus D$. Si J es rectificable, entonces $|S_r| \leqslant r.(\text{longitud de } J)+\pi.r^2$. Si no lo es, aún siendo $|J| = 0$, existen curvas tales que $|S_r|$ tiende a cero más lentamente que $|\log r|^a$ con $-1 < a < 0$.

Se discute el uso de resultados semejantes en una demostración de Carleman del teorema de H.Weyl sobre distribución asintótica de autovalores.

CAPRI,O.N. (F.C.E.y N.- U.B.A.) y SEGOVIA,C. (I.A.M.- CONICET): *Convergencia de integrales singulares en* L^1 *con peso.*

Se demuestra que para un operador integral singular K y una función f en L^1_w, con w en la clase A_1 de Muckenhoupt, si la imagen Kf también pertenece a L^1_w entonces el operador truncado K_ε aplicado a f converge en L^1_w a Kf. Esto es una generalización de la versión ponderada de un resultado de A.P. Calderón y O.N.Capri. Como aplicación del método desarrollado se obtiene una nueva demostración de un resultado de R.L.Wheeden sobre H^1_w.

DICKENSTEIN,A. y SESSA,C. (F.C.E.y N.- U.B.A. - CONICET): *Residuos e ideales II.*

Dados U abierto en C^n, I un haz de ideales de funciones analíticas en U y h una función holomorfa en U, se tiene el problema general de de caracterizar cuándo $h \in I(U)$. Sabemos que si I es localmente una intersección completa, para cada punto x la pertenencia $h \in I_x$ es equivalente a la anulación cerca de x de h.R , donde R es la corriente residual asociada a un apropiado sistema de generadores de I_x.

Esta última condición puede ser formulada como la anulación sobre los ceros del ideal I_x de ciertos operadores diferenciales aplicados a h.

sobre el conjunto de ceros $Z(I)$ en todo el abierto U. Más precisamente, se prueba: i) el máximo orden de los operadores involucrados en cada punto, permanece constante a lo largo de cada componente irreducible Y de $Z(I)$, notado n_Y; y ii) en un punto x que pertenece a varias componentes, dicho orden máximo n es:

$$n = \text{máx } \{n_Y : x \in Y, \ Y \text{ comp. irreducible de } Z(I)\}.$$

HARBOURE,E., MACIAS,R. y SEGOVIA,C. (P.E.M.A.): *Extrapolación de desigualdades de tipo débil.*

Se investigan propiedades de extrapolación para pares de pesos en las clases A(p,q). Más específicamente, dado un operador que es acotado de $L^p(u)$ a $L^\infty(v)$ para todos los pares (u,v) en $A_{\beta,\infty}$, se demuestra que también satisface desigualdades de tipo débil con pares de pesos en A(p,q) donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\beta}$.
Como ejemplo de aplicación se da una característica de los pares de pesos para los cuales la función maximal "sharp" de la integral fraccionaria satisface esta clase de desigualdades.

MARANO,M.A. y CUENYA,H.H. (D.M.F.C.- U.N.de Río Cuarto): *Aproximación sobre pequeños intervalos.*

Sea f una función continua en un intervalo I de la recta. Es sabido que si P es un polinomio que minimiza $\int_I |f-Q|dx$ entre todos los polinomios Q de grado a lo sumo r-1, entonces f-P se anula en un subconjunto de I de medida positiva o bien tiene r cambios fuertes de signo.

Si ahora la aproximación se realiza sobre s intervalos disjuntos, cada uno de ellos de amplitud 2ε, y $r = sq + r'$, q entero, $0 \leqslant r' < s$, se demuestra en el presente trabajo que si P_ε es un polinomio de mejor aproximación de f, entonces para ε suficientemente pequeño ocurre que en cada uno de los intervalos $f - P_\varepsilon$ se anula en un subconjunto de medida positiva o bien tiene q cambios fuertes de signo.

Un resultado análogo es demostrado cuando la aproximación es efectuada sobre un conjunto finito de puntos de la recta.

MARQUEZ,V. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Un problema parabólico con una no linealidad en los valores de contorno.*

Sea $\Omega \subset R^n$ un dominio anular con frontera exterior S e interior Γ, ambas suaves. Se considera la ecuación $u_t = \Delta u$ en $\Omega \times (0,T)$, $T > 0$, con valores de contorno $u=1$ en $S \times (0,T)$, $u_n = u/h$ en $\Gamma \times (0,T)$, donde u_n es la derivada normal interior y $h(x,t) = \sigma(x) + \int_0^t (u_n(x,\tau)-\varepsilon)^+ \, d\tau$ en $\Gamma \times (0,T)$, y valores iniciales $u(x,0) = u_0(x)$, $x \in \Omega$. Bajo ciertas hipótesis sobre u_0 y $0 < \sigma_* \leqslant \sigma(x)$ resulta el siguiente

TEOREMA. Existe una única solución (u,h) con
$u \in H^1(\Omega \times (0,T)) \cap L^\infty(\Gamma \times (0,T))$ y $h \in L^\infty(\Gamma \times (0,T))$.

La misma se obtiene mediante un proceso iterativo.

MIATELLO,R.J. (U.N.Córdoba) y WALLACH,N.R. (U.de Rutgers): *Autofunciones de Δ en $L^2d(\Gamma\backslash G/K)$: un teorema de completitud.*

Sea $M = \Gamma\backslash G/K$, G un grupo de Lie semisimple conexo de rango 1, $K \subset G$ un subgrupo maximal compacto, $\Gamma \subset G$ un subgrupo discreto, sin torsión de G de covolumen finito. Sea Δ el operador de Laplace-Beltrami en M; $\Delta \geqslant 0$ es elíptico y $L^2(M) = L^2_d(M) \oplus L^2_c(M)$ donde el espectro de Δ es discreto (resp. continuo) en $L^2_d(M)$ (resp. $L^2_c(M)$). Es un problema abierto el determinar un sistema ortonormal completo de autofunciones en $L^2_d(M)$. Por analogía a la teoría de series de Eisenstein hemos definido una familia meromorfa de autofunciones de Δ, $M(\nu,g)$, $\nu \in \mathbf{C}$, que no está genéricamente en $L^2(M)$. Los polos de $M(\nu,g)$ $(\mathrm{Re}\,\nu \geqslant 0)$ son simples $(\nu_0 \neq 0)$ o doble si $\nu_0 = 0$. El principal resultado es el siguiente:

TEOREMA. Sea $F = \{\operatorname{Res}_{\nu=\nu_0} M(\nu,g) \,|\, \nu_0 \neq 0\} \cup \{\lim_{\nu\to 0} \nu^2 M(\nu,g)\}$. Se tiene que $F \subset L^2_d(M)$, y si f es una autofunción de Δ con al menos un coeficiente de Fourier no nulo y f es ortogonal a F, entonces $f=0$.

COROLARIO. Si $G = SO(n,1)$, la familia F contiene un sistema ortonormal completo de $L^2_d(M)$.

OBSERVACION. Se obtiene un teorema análogo para autofunciones de Δ actuando en secciones de fibrados vectoriales canónicos sobre M.

Se consideran soluciones fuertes a problemas elípticos del siguiente tipo

$$L\,u = a^{ij}D_{ij}u = f \qquad i,j = 1,\dots,n$$

donde a^{ij} satisfacen: $0 \leqslant |\xi|^2\lambda(x) \leqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant |\xi|^2 \ \forall\, \xi \in \mathbf{R}^n$, $\forall\, x \in \Omega$, donde Ω es un dominio acotado en $\mathbf{R}^n$.

Bajo estas condiciones se puede obtener un principio del máximo relacionado con el obtenido por Aleksandrov para el caso $\lambda(x)$ = constante > 0. A partir de este resultado es posible llegar a la acotación local de las subsoluciones de este tipo de problemas que satisfagan ciertas condiciones de integrabilidad.

SHILLOR,M. (Imperial College), TARZIA,D.A. (U.N.de Rosario) y BOUILLET,J.E. (I.A.M.- CONICET y U.B.A.): *Flujo saliente crítico para un problema de Stefan estacionario.*

Se considera un material $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ con una frontera $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ regular y se supone que la temperatura de cambio de fase es 0°C. Se impone una temperatura $b > 0$ sobre Γ_1 y un flujo de calor saliente $q > 0$ sobre Γ_2. Entonces: (i) Se obtiene una cota inferior para el flujo de calor saliente crítico para obtener un problema de Stefan estacionario a dos fases. (ii) Se obtiene además una cota superior en el caso en que el dominio sea convexo. (iii) En algunos ejemplos con simetría, dichas cotas superior e inferior coinciden con el valor crítico.

SUAREZ,F.D. (I.A.M.- CONICET): *Un problema de aproximación en álgebras de Banach.*

Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de álgebras de Banach complejas, conmutativas y unitarias. Si el morfismo f es suryectivo se ha estudiado el problema de cuándo el morfismo de grupos inducido sobre los elementos inversibles de A y B es suryectivo. Bajo la hipótesis menos restrictiva de que f tenga imagen densa estudiaremos aquí un problema análogo en un contexto más general.

Si definimos el conjunto de unimodulares de A como $U_n(A) = \{a \in A \ / \ \sum_{i=1}^{n} Aa_i = A\}$, el problema consiste en estudiar bajo qué condiciones la aplicación inducida $f_n\colon U_n(A) \to U_n(B)$ tiene imagen densa. Para esto, debemos desarrollar herramientas análogas a las usadas cuando f es suryectivo.

TILLI,M. y GLUSCHANKOF,D.A.(*) (F.C.E.y N.- U.B.A. y (*) CONICET): *Una generalización del metateorema de Bloch.*

A partir del conocido principio heurístico que afirma que "una familia de funciones holomorfas que tiene la propiedad P en un dominio D es una familia normal si P no puede ser poseída por funciones enteras no constantes" se expone una generalización para espacios de funciones continuas.

Se define una seudoderivación (que en el caso de funciones analíticas estaría representada por la derivada esférica) y un criterio general de normalidad que correspondería al teorema de Marty para funciones analíticas o meromorfas. Ambos conceptos se ligan por medio de una acotación que en analíticas correspondería a la de Pommerenke y de allí se deriva un teorema que correspondería al presentado por L.Zalcman (1) en el caso particular de funciones analíticas.

Se generaliza el resultado para cualquier R^n y, siguiendo a Zalcman, se muestra la identidad conceptual entre los teoremas grande y chico de Picard.

(1) L.Zalcman: "A heuristic principle in complex function theory", Am.Math.Monthly, 82 (1975), pp.813-817.

VIVIANI,B.E. (P.E.M.A.- Santa Fe): *Una Descomposición Atómica del Predual de* BMO(ρ) *en espacios de tipo homogéneo.*

Es un hecho conocido en $\mathbf{R}^n$ que el espacio de las funciones de ρ-variación media acotada, BMO(ρ), coincide con el espacio dual de H_ω, para adecuadas funciones ρ y ω; donde H_ω generaliza a los espacios de Hardy H^p, para $\omega(t) = t^p$.

Se desarrolla una teoría maximal de estos espacios H_ω en el contexto de la teoría de los espacios de tipo homogéneo y se obtiene una descomposición de sus elementos en términos de ρ-átomos, para ρ y ω convenientes.

ZORKO,C. (U.B.A. - U.T.N.(Regional Rafaela)): *El espacio de Morrey generalizado como espacio dual.*

Dados Ω abierto en R^n y $\varphi(t)$ una función real positiva se define el espacio de Morrey generalizado $M^p_{\varphi,o}(\Omega)$ en forma análoga al espacio de Morrey clásico, pero empleando en su definición a $\varphi(t)$. Se define en forma análoga el espacio $H^{p,\varphi}(\Omega)$. Cuando $\varphi(t)$ es no creciente nach. Se demuestra un resultado que asegura que $M^q_{\varphi,o}(\Omega)$ es el espacio dual de $H^{p,\varphi}(\Omega)$.

GEOMETRIA

AFFENTRANGER,J.F.(F.C.E.y N. - U.B.A. - CONICET): *Comportamiento asintótico de conjuntos convexos en el plano hiperbólico.*

Sea K(t) una familia de convexos que para $t \to \infty$ tiende a cubrir todo el plano hiperbólico de tal manera que $K(t_1) \subset K(t_2)$ si $t_1 < t_2$. Si F(t) y L(t) son el área y la longitud de K(t), entonces:

(i) Santaló-Yáñez (1972) demuestran que si los K(t) son h-convexos (convexos respecto de horiciclos), se verifica siempre
$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{F(t)} = 1.$$

(ii) Gallego-Reventós (1985) prueban que si se impone a los K(t) únicamente la condición de convexidad, entonces el cuociente L(t)/F(t) puede tender a cualquier valor entre 1 e infinito.

(iii) En la nota generalizamos este último resultado, demostrando el siguiente teorema:

Sea $N \in \mathbf{N}$, $N > 1$. Para cualquier $\lambda \in (0,\infty)$ existe una familia de convexos K(t), tal que $\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{(F(t))^N} = \lambda$.

BIRMAN,G.S. (F.C.E.y N.- U.B.A. y CONICET): *Una fórmula de Santaló en* L-P.

Llamemos L-P al semiplano de Lorentz-Poincaré dado por el semiplano superior $y > 0$ con métrica $ds^2 = \frac{dx^2-dy^2}{y^2}$ de curvatura seccional constante 1. Si z es número doble, $z = x+ey$ con $e^2 = 1$, $e \neq \pm 1$, también se puede expresar $ds^2 = \frac{4\, dz \wedge d\bar{z}}{(z-\bar{z})^2}$ y el grupo SL(2,R) actúa sobre L-P como grupo de transformaciones $z' = \frac{az+b}{pz+q}$ con z,z' números dobles, $a,b,p,q \in R$ y $aq-bp = 1$.

TEOREMA. En L-P, sea C una curva simple, cerrada, pura por partes, borde de un conjunto convexo K de área F. Sea σ la longitud del segmento de geodésica que se obtiene intersectando la geodésica G con K, entonces

$$\int_{G\cap K\neq\emptyset} (\sigma + sh\sigma)dG = F^2.$$

DOTTI, I.G. (F.M.A.y F.- U.N.de Córdoba): *Curvatura de Ricci en variedades homogéneas.*

Sea M una variedad riemanniana homogénea G un grupo transitivo de isometrías y H la isotropía en $m \in M$. Se tiene entonces que M es isométrica a $G/_H$ donde la métrica en $G/_H$ es traslación a izquierda de un producto interno Ad(H) invariante en m, complemento Ad(H) invariante de h en g.

Eligiendo convenientemente una métrica invariante a izquierda en G resulta $\pi: G \to G/_H$ una submersión riemanniana con fibras totalmente geodésicas. Como consecuencia del resultado de O'Neill se prueba

(1) $\mathrm{Ric}^*Y = \mathrm{Ric}\ Y + \frac{1}{2}\sum_i \|[Y,Y_i]^v\|^2$ donde Ric*(resp.Ric) denota curvatura de Ricci en $G/_H$ (resp.G), $Y \in m$ es ortonormal e Y_i, $i = 1,\ldots,k$ es una base ortonormal de m.

A partir de (1) se obtiene una demostración algebraica del siguiente hecho: "Si M es compacta entonces toda métrica G invariante en M tiene direcciones de Ric $\geqslant 0$ y si G es semisimple, direcciones de Ric > 0". Dichas direcciones se obtienen en los autovectores de autovalor máximo de la transformación simétrica, respecto de una métrica canónica en G.

DUBSON, A.S. (I.A.M.): *Multiplicidad de intersección de ciclos lagrangianos y ciclos evanescentes.*

Sean: M una variedad analítica real, lisa, simpléctica; X e Y dos subvariedades subanalíticas (eventualmente singulares) cuyas partes lisas son lagrangianas, y z_o un punto de $X \cap Y$. Se define la multiplicidad de intersección $m(M,X,Y,z_o)$ de X e Y en z_o aún en el caso $\dim(X \cap Y) > 0$.

La condición M analítica, simpléctica X,Y subanalíticas y lagrangianas asegura la existencia de una deformación canónica de X e Y a una "posición general" en un entorno de z_o. Se calculan invariantes de singularidades y dimensiones de espacios de ciclos evanescentes en términos de intersección de "ciclos característicos" en el cotangente de M.

Esta comunicación continúa el estudio anunciado en una comunicación anterior (1985) con título similar. Se define el rango de visibilidad de un punto p en un conjunto S del plano como la proyección radial de la estrella de p en S sobre una circunferencia con centro en p. Se obtiene el siguiente:

TEOREMA. Sea S un dominio de Jordan simple del plano cuya frontera no tiene puntos singulares (puntos de acumulación de puntos de inflexión) y sea $x_0 \in$ front S. La función de visibilidad es continua en x_0 si y sólo si el rango de visibilidad de x_0 en S está incluído en una semicircunferencia.

Este resultado mejora aquél comunicado a la U.M.A. en 1985 ya que es innecesaria la condición de diferenciabilidad de la frontera de S antes requerida. El método es afín-local.

FORTE CUNTO,A.M. y TORANZOS,F.A. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Visibilidad en un dominio de Jordan suave.*

Se estudia, mediante un tratamiento afín-local (no diferencial), la visibilidad en un conjunto compacto S del plano cuya frontera es una curva suave de Jordan. Describimos las estrellas de los distintos tipos de puntos de la frontera de S. Se demuestra que el mirador (convex kernel) de S es la intersección de las estrellas de los puntos de inflexión de su frontera.

Este resultado generaliza un teorema previo de B.Halpern (Proc. Amer.Math.Soc.- 1969). Se obtienen tres teoremas de "tipo Krasnoselsky" en los que aparecen los puntos de inflexión de la frontera de S.

OLMOS,C.E. (C.I.E.M.- U.N.Córdoba - CONICET): *Inmersiones totalmente geodésicas de espacios K-simétricos de* R^n.

Se generaliza a subvariedades extrínsecamente K-simétricas compactas de R^n el siguiente resultado: "Dada una subvariedad compacta extrínsecamente 2-simétrica de R^n existe una inmersión totalmente geodésica en una grassmanniana adecuada".

Para ello se construyen espacios K-simétricos que generalizan naturalmente a las grassmannianas que son espacios 2-simétricos.

OVEJERO,R.G. (U.N. de Salta): *Estructura métrica de la formulación hamiltoniana.*

La formulación hamiltoniana de la mecánica clásica establece una estructura simpléctica que en su forma canónica se basa en los productos exteriores de los diferenciales de las coordenadas de configuración por las correspondientes coordenadas de impulsos. Ahora bien, en cada uno de esos espacios existen invariantes proporcionados por las energías potencial y cinética, respectivamente, que permiten introducir en cada uno de ellos una métrica.

Autores clásicos admiten para ambos espacios un mismo tensor métrico. En este trabajo se expresa un contraejemplo simple que muestra que, habiendo interacción, la estructura métrica de ambos espacios es diferente y la intensidad de la interacción se refleja en esa diferencia, que preserva no obstante la estructura simpléctica del espacio de fase.

Esta circunstancia implica consecuencias aparentemente no triviales cuando se extiende a los dominios de las mecánicas relativista y cuántica.

SANCHEZ,C.U. (F.A.M.A.F.(U.N.C.)- CONICET): *S-estructuras regulares en esferas.*

En este trabajo se determinan todas las S-estructuras regulares (estructuras K-simétricas) que pueden definirse en las esferas. Esta clasificación se hace usando resultados sobre subvariedades extrínsecamente simétricas.

TIRAO,J.A. (F.A.M.A.F.- U.N.de Córdoba): *Conexiones invariantes en espacios homogéneos.*

Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado conexo de G. Suponemos que G actúa efectivamente en G/H. Interesan las conexiones afines ∇ sobre G/H que son G-invariantes y también las que además son invariantes por conjugación por elementos del $N_G(H)$.

En este trabajo se establece una condición suficiente para la existencia de tales conexiones en términos de representaciones de dimensión finita de G.

ZILBER,J.C. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Una caracterización de anillos analíticos locales.*

Un anillo analítico puede pensarse como una C-álgebra A tal que para todo abierto $U \subset C^n$, se tiene determinado un conjunto $A(U) \subset A^n$, con la propiedad de que toda función holomorfa $f: U \to C$ se interpreta como una función $A(U) \to A$. Por ejemplo, si $A = \mathcal{O}_{m,p}$ (anillo de y $U \subset C$ es $U = C-\{0\}$, entonces $A(U) \subset \mathcal{O}_{m,p}$ es:

$A(U) = \{f_p \in \mathcal{O}_{m,p} \ / \ f(p) \neq 0\}$.

Se demuestra que A es un anillo analítico local (en el sentido de que existe un morfismo local π: $A \to C$ de anillos analíticos) si y sólo si, A tiene las siguientes propiedades:

1) Para todo cubrimiento por abiertos de un abierto U, $U = \bigcup_{\alpha\varepsilon I} U_\alpha$, entonces $A(U) = \bigcup_{\alpha\varepsilon I} A(U_\alpha)$.
2) $A(\phi) = \phi$.

Esta demostración es válida para anillos analíticos en cualquier topos de Grothendick. Por ejemplo, se aplica al haz estructural de un espacio analítico.

MATEMATICA APLICADA

AIMARETTI,R.J. (F.C.E.e I.- U.N.Rosario): *Ecuaciones Diofantinas Polinomiales y el Problema de Control con Modelos.*

En el problema de control monovariable (1 entrada, 1 salida) es posible lograr un buen diseño de controladores empleando el método de persecución perfecta de modelos. Específicamente (utilizando la transformada de Laplace), se desea llevar la función transferencia t(s) de un sistema a la forma deseada (modelo) $t_d(s)$. La solución del problema planteado es equivalente a hallar la solución de grado mínimo de una ecuación diofantina polinomial del tipo:

$$k(s)\ p(s) + h(s)\ r(s) = Q_F(s) \qquad (1)$$

En este trabajo presentamos una metodología que emplea fundamentalmente el algoritmo de Euclides para el cómputo de la mencionada solución de (1) (concretada en un programa de diseño asistido por un ordenador tipo PC). Además se realiza una implementación del control obtenido a través de un lazo de feedforward y un lazo de coordinación (entre el modelo y el sistema) que hacen al sistema completo en lazo cerrado relativamente insensible a pequeñas variaciones de la planta y posibles perturbaciones no medibles. Damos varios ejemplos con resultados computacionales de simulación que muestran la eficacia del procedimiento de síntesis logrado.

APARICIO,L.V. (PLAPIQUI, U.N.S.- CONICET) y PALOSCHI,J.R. (D.M., U.N.del Sur): *Experiencias realizadas con métodos de continuación en Ingeniería Química.*

Los métodos de continuación han sido diseñados con la finalidad de aumentar el radio de convergencia de los métodos empleados para resolver sistemas de ecuaciones algebraicas no lineales. Consisten en transformar el problema:

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

en

$$h(x,\theta) = 0\ .$$

Variando θ entre 1 y 0 se obtiene una serie de subproblemas, cuyas soluciones conducen progresivamente a la solución de (1).

Las homotopías tradicionalmente propuestas en la literatura son:

$$h(x,\theta) = f(x) - \theta\, f(x_0) \qquad [1]$$

$$h(x,\theta) = (1-\theta) f(x) + \theta(x-x_0) \qquad [2]$$

Sin embargo, se ha encontrado que su empleo produce inconvenientes numéricos que disminuyen la robustez originalmente asignada a continuación. En este trabajo se produce un nuevo enfoque del método que, en combinación con diferentes homotopías, mejora considerablemente su comportamiento. Asimismo se presenta una estrategia de resolución de los problemas intermedios que se suma a las ventajas anteriormente mencionadas. Los métodos han sido probados con problemas de simulación en Ingeniería Química.

REFERENCIAS

[1] Broyden,C.C."A new method of solving nonlinear simultaneous equations". Computer Journal. 12, 1969.

[2] Meyer,G.H. "On solving nonlinear equations with a one parameter operator imbedding". SIAM J. NUMERICAL ANAL., 6,N°4, 1968.

AVILA,O.J. (F.C.E.- U.N.de Salta): *Ajuste de ponderaciones logarítmicas en un modelo econométrico.*

Se considera el modelo econométrico con retardos distribuídos:

$$y_t = \alpha + (w_o x_t + w_1 x_{t-1} + w_2 x_{t-2} + \dots + w_p x_{t-p}) + \varepsilon_t \qquad (1)$$

bajo condiciones de homocedásticidad para ε_t y con ponderaciones logarítmicas. Se propone realizar un ajuste funcional continuo de los w_j con condiciones de contorno $w_{-1} = 0$ y $w_{p+1} = 0$, en particular a una polinomial de grado G en la variable $z = \log(j+1)$. En este trabajo se demuestra que bajo tales condiciones y para G = 4 el modelo (1) admite simplificación con la consecuente posibilidad de estimar las ponderaciones y los coeficientes.

BANCORA,M.C. (PROMAR (CONICET-UNR)), CHOW,P.L. y MENALDI,J.L. (Wayne State University, USA): *Solución numérica de un problema de control estocástico con costo lineal en el control.*

Se trata del problema del control óptimo de un oscilador lineal amortiguado estocástico.

La inecuación diferencial asociada tiene un operador parabólico no coercivo y aparecen restricciones biláteras respecto de una derivada primera. Se resuelve el problema $0 = \min\{\frac{\partial u}{\partial t} + Lu \ , \ \frac{\partial u}{\partial y} + c \ , \ c - \frac{\partial u}{\partial y}\}$. Se proponen dos discretizaciones que satisfacen el principio del máximo discreto y dan origen a dos problemas aproximados resueltos por relajación. Se prueba la convergencia de las soluciones aproximadas y se dan la función de feedback óptimo y una estimación del error.

Se resuelve un ejemplo al cual se le aplican ambos logaritmos, usando el primero como inicializador del segundo.

CALVO,M.C., LOPEZ,M.C., NORIEGA,R.J. y SCHIFINI,C.G. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Invariancia de gauge de las expresiones de Euler-Lagrange.*

En este trabajo se prueba que si las expresiones de Euler-Lagrange correspondientes a un Lagrangiano concomitante de segundo orden en la métrica y de primer orden en los potenciales de gauge, mínimamente acoplado con la métrica, son invariantes por transformaciones de gauge, entonces para n par (siendo n la dimensión de la variedad), existe un Lagrangiano invariante por transformaciones de gauge que da las mismas ecuaciones de campo. Esto restringe severamente las posibles ecuaciones de campo que sean covariantes tanto para un cambio de coordenadas como para un cambio de gauge. Se prueba asimismo que el resultado es falso para n impar.

CANZIANI,G.A. (I.A.M.- CONICET y F.C.E.y N.- U.B.A.): *Un problema de ocupación de espacios al azar en Bioquímica.*

Se estudia la ligadura no cooperativa de ligandos compactos de interés bioquímico (proteínas) a interfases fosfolípido-agua, con una estructura de *mosaico regular* que permite la difusión lateral (membranas, vesículas, etc). En una presentación anterior se trataron los casos de ligandos lineales y de ligandos en forma de discos.

En el presente trabajo se estudia el caso de ligandos cuya forma se aproxima a *elipses*. La consideración de que los ejes de las elipses toman orientaciones al azar, lleva a desarrollar criterios geométricos de particular interés. Los parámetros de densidad se obtienen por simulación con métodos de tipo Monte-Carlo.

CAPUTTI,T. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Soluciones ε-optimales en programación convexa no diferenciable.*

Un problema de continuo interés en la teoría de la programación matemática es la caracterización de soluciones óptimas para el problema: minimizar f(x) sujeta a $x \in E \subset R^n$.

La situación que interesa es aquélla en la que se logran soluciones ε-optimales ($\varepsilon > 0$). La cuestión, para el caso convexo no diferenciable no restricto, es fácilmente resuelta, pues:

f tiene un ε-mínimo en x* si y sólo si $0 \in \partial_\varepsilon f(x^*)$, donde $\partial_\varepsilon f(x^*)$ es la ε-subdiferencial de f en x*.

En el caso restricto, se deriva una fórmula útil para calcular la ε-subdiferencial de una función convexa general, la función de máximo. Además, se prueba un teorema central de ε-optimalidad del tipo de Kuhn-Tucker para la clase de problemas de programación convexa no diferenciable de la forma:

minimizar f(x) sujeta a $g_i(x) \leq 0$ para $i = 1,2,\ldots,p$; $Ax = b$; $x \in Q$; $x \in R^n$.

CASTAGNINO,M., LARA,L. y AQUILANO,R. (I.F.R.- (CONICET-UNR)): *Transformaciones relativistas en las singularidades de una atmósfera estelar de acreción.*

Se propone un modelo simple para describir la fluctuación de la luminosidad en eruptores de rayos X y novas recurrentes. Mediante el tratamiento clásico y corrección post-newtoniana.

El modelo consiste en un núcleo esférico de neutrones rodeado de un gas de fermiones, limitado por una cáscara. Se halla un grupo de transformación que simplifica la resolución del sistema, el cual está descripto por un operador diferencial no lineal. Se demuestra que el mismo presenta a lo sumo dos puntos singulares. Se muestra además la existencia de una bifurcación cuando se describe la solución en términos de la masa de la cáscara y la masa del gas de fermiones.

CHIAPPA,R.A. y LAURENCENA,B.R. (U.N.del Sur): *Indices de Wiener en ciertos árboles valuados.*

a sus moléculas. Con el mismo objetivo y para aplicarlos a éteres alifáticos se calculan dos índices "tipo Wiener" en ciertos árboles valuados.

DUBUC,E. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *Transformada de Fourier y un algoritmo para la multiplicación de enteros.*

En la literatura se ha observado que la transformada de Fourier discreta puede considerarse en "espacios" de dimensión finita k sobre el anillo Z_n. Si k es una potencia de 2 se dispone del algoritmo rápido para calcular el transformado de un vector. Utilizando el hecho que la convolución de dos vectores se transforma en el producto (coordenada a coordenada) de los transformados, puede calcularse el producto de dos enteros (cuyos dígitos formen un vector en $(Z_n)^k$) transformándolos primero, multiplicando dígito a dígito, y luego antitransformando el resultado. En teoría, ello lleva un tiempo $O(k\ \ell n_2 k)$, mientras que la multiplicación usual tarda $O(k^2)$.

Describiremos algunos detalles de estas ideas y presentaremos un algoritmo para multiplicar enteros y su implementación en Turbo Pascal, comparándolo con una implementación del algoritmo de multiplicar de la escuela primaria.

GARGUICHEVICH,G. y SANZIEL,M.C. (PROMAR (CONICET-UNR)): *Comparación de las soluciones de un problema de Stefan y de algunos modelos aproximados cuando el calor específico tiende a cero.*

Se trata el problema de Stefan unidimensional a una fase con temperatura constante θ_o en el borde $x=0$ y se compara la solución del mismo con las de los modelos aproximados correspondientes a los métodos Cuasiestacionario, del Balance Integral Calórico y Variacional o de Biot. Se establece la convergencia uniforme, sobre intervalos de tiempo acotados, de las soluciones del modelo de Stefan y del Balance Integral Calórico a la solución cuasiestacionaria cuando el calor específico c tiende a cero. Para el modelo de Biot la convergencia se verifica únicamente para la frontera libre. En cada caso se da una estimación del error.

GONZALEZ,R.L.V. (PROMAR (CONICET) - U.N.R.): *Solución Numérica de Inecuaciones Cuasi-Variacionales Asociadas a Problemas de Optimización con Controles Monótonos.*

Los problemas de optimización con controles monótonos conducen al estudio de la inecuación cuasi-variacional (QVI):

$\min(Lv, \partial v/\partial z) = 0$, siendo $Lv = \frac{\partial}{\partial x} v.f+h-av$. En este trabajo se desarrollan métodos de solución numérica de estas inecuaciones, basados en el uso de aproximaciones internas del espacio $W^{1,\infty}$ por medio de elementos finitos lineales. El problema discretizado que resulta de esa forma de aproximación, es resuelto por medio de un algoritmo iterativo de tipo relajación. Se muestra asimismo cómo esta metodología puede ser extendida para tratar también el problema de control monótono con tiempos de detención.

GONZALEZ,R.L.V. y TARZIA,D.A. (PROMAR (CONICET-UNR)): *Sobre la optimización de flujos térmicos en un dominio sin cambios de fases.*

El problema de optimización tratado es el de maximizar el flujo de salida de calor sobre una parte de la frontera de un dominio, mientras sobre otra porción de la frontera se fija la distribución de temperatura. La optimización se realiza bajo la condición de que no se produzcan cambios de fases.

Tratamos el problema con la técnica de optimización de funcionales convexos (en espacios de Banach) dentro de conjuntos con restricciones. Demostramos la existencia y unicidad de la solución, dando asimismo la forma explícita de la solución y de los correspondientes multiplicadores de Lagrange asociados al problema.

MARCHI,E. and SAAD,E. (I.M.A. San Luis - U.N.S.L.- CONICET): *Weak pseudo saddle point and weak pseudo equilibrium point in general game.*

In this paper we introduce several diferent "weak concepts" of solution in theory of general games.

We begin studying two-person general games to generalize the Pseudo Saddle Point introduced by the first author, to weak pseudo saddle point for general two-person game . In particular, in the case of zero - sum we have obtained the classical concept of saddle point. Next we are in the position to extend the previous results in the general case with any arbitrary number of players, in several directions.

MILASZEWICZ,J.P. y MOLEDO,L.P. (F.C.E.y N. y F.C.E., U.B.A.): *Sobre sistemas de tipo input-output.*

Sea B una matriz cuadrada de orden n de términos no negativos tal que $(s\,I - B)\,x = y$.

Con N_+ y N_- designamos a los índices para los cuales las correspondientes componentes de y son, respectivamente, positivas y negativas. Si con K designamos genéricamente a una componente totalmente conexa del grafo de B, N_K designa a los índices involucrados en K; para cada una de tales K, supondremos que alguna coordenada de y en K es no nula.

Si N_+ es no vacío, supondremos que tiene intersección no vacía con cada N_K. Vale entonces, para todo i, $\min\{0, \min_{N_-} x_j\} \leqslant x_i \leqslant$ $\leqslant \max\{0, \max_{N_+} x_j\}$.

NEME,A.J. (I.M.A.San Luis - U.N.S.L.- CONICET): *Un teorema límite sobre el "core" de una economía con externalidades.*

En este trabajo se define un concepto de "core" en economías de intercambio con externalidades y se prueba el siguiente teorema límite:

TEOREMA. Sea (σ, F) una economía con externalidades cuyas funciones de utilidad son estrictamente cóncavas. Si la K - réplica de una redistribución X está en el "core" para cualquier K entonces existe un vector precio $P \in S^{\ell-1}$ tal que (X,P) es un equilibrio competitivo (NE).

NORIEGA,R.J., SCHIFINI,C.G. (F.C.E.y N.- U.B.A.) y PRELAT,D. (CONICET-CAECE): *Lagrangianos concomitantes de la métrica y de la forma de curvatura.*

Con el objeto de obtener las restricciones de las posibles teorías de campo de gauge se estudia en este trabajo la forma general de los Lagrangianos concomitantes de una métrica y de los coeficientes de la forma de curvatura que sean densidades escalares e invariantes por transformaciones de gauge. Se prueba que dichos Lagrangianos son funciones de las trazas de los productos de los coeficientes mixtos de la forma de curvatura. Se conjetura la posible reducción a trazas de productos de dos y tres coeficientes.

NORIEGA,R.J., SCHIFINI,C.G. (F.C.E.y N.- U.B.A.) y PRELAT,D. (CONICET-CAECE): *Aproximación por polinomios invariantes.*

Se demuestra que todo escalar concomitante del tensor métrico y de una familia arbitraria de campos tensoriales se puede aproximar uniformemente (localmente) por polinomios en las variables tensoriales que son invariantes por cambios de coordenadas ortogonales. Asimismo, se encuentra la forma general de los tensores isotrópicos cartesianos. Como los coeficientes de los polinomios invariantes son de este tipo, esto permite encontrar la forma del escalar concomitante en cada caso particular. Esto ha sido hecho específicamente para los escalares concomitantes de una métrica hasta orden 2.

NORIEGA,R.J. y SCHIFINI,C.G. (F.C.E.y N.- U.B.A.): *El problema equivariante inverso y las ecuaciones de Maxwell.*

Se prueba en este trabajo que si B^i es un concomitante tensorial de primer orden en la métrica y de segundo orden en un covector, y si además B^i es la expresión de Euler-Lagrange de un Lagrangiano, no necesariamente tensorial, concomitante de la métrica y de primer orden en un covector, existe entonces un Lagrangiano equivalente (con igual expresión de Euler-Lagrange) que es una densidad escalar. Las ecuaciones de campo resultan ser las habituales ecuaciones de Maxwell, lo cual da una suerte de unicidad de estas últimas si se suponen principios de covariancia.

OVIEDO,J.A. (I.M.A.San Luis - U.N.S.L.- CONICET): *Sobre el Número de Vértices de las 2-caras del Convexo de Asignación.*

En teoría de Convexidad, es conocido el problema de caracterizar vértices y caras.

En esta comunicación, se muestra que las caras de dimensión dos del Convexo de Asignación tienen a lo más cuatro puntos extremos (vértices). También se da una caracterización para determinar el número de vértices de una cara de dimensión dos, en función del soporte de ciertos vértices.

RODRIGUEZ,R. (F.C.E.- U.N.La Plata): *Esquemas óptimos para la estimación de perturbaciones en E.D.O..*

Se desarrolla un esquema que generaliza diversos métodos presentados en trabajos anteriores por P.E.Zadunaisky y el autor, para estimar perturbaciones p(t) que afectan un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma:

$$\ddot{y}(t) = f(t,y(t)) + p(t)$$

en el que son datos medibles los valores de la solución y de su derivada sobre los nodos de una malla uniforme.

método y eventualmente el paso de la malla, a fin de minimizar la parte principal de los errores globales con que se estiman las perturbaciones.

SPINADEL, V.W. de (F.C.E. y N.- U.B.A.): *Conjuntos límites de sistemas lineales de control.*

El concepto de conjunto límite de ecuaciones diferenciales ordinarias puede ser generalizado para sistemas de control del tipo

$$\dot{x} = f(x,u)$$

donde $u(t) \in U$, conjunto de controles, en sentido "fuerte" y "débil".

En este trabajo se estudian, en particular, los conjuntos límites de sistemas de control lineales del tipo

$$\dot{x} = A\,x + B\,u \qquad u(t) \in U$$

así como las relaciones entre estos conjuntos límites y los conjuntos "soportados", presentados por la autora en la XXXV Reunión Anual de la UMA ("Aspectos geométricos de las zonas alcanzables en problemas de control óptimo").

TILLI, M. (F.C.E. y N.- U.B.A.): *Transformada de Fermat-Fourier de alto cruce por cero.*

Es bien sabido que la Fast Fourier Transform (FFT) computa la transformada con N.log(N) multiplicaciones reales (en coma flotante en la computadora), produciéndose un error de redondeo que debe ser agregado al producido por la discretización de la señal. Se han hecho intentos de reducir aquél reemplazando como codominio a los complejos por un Z_r donde r es un número de Mersenne o de Fermat, dando origen a las llamadas Mersenne Number Transform (MNT) y Fermat Number Transform (FNT). Además de eliminarse los errores de redondeo, se podrían obtener ventajas adicionales de lograr implementarse eficientemente la aritmética respectiva módulo r. En el caso de la MNT ha sido logrado (One's complement arithmetic). En el caso de la aritmética de Fermat su implementación se hace ineficiente por las dificultades para su representación en computadora, ya que la obvia similitud con la representación standard de un número binario se ve compensada porque la imparidad es un exceso, mientras que en el caso de Mersenne es un defecto ($2^{2^n}+1$ y $2^{2^n}-1$ respectivamente).

Presentamos aquí un método que aprovecha esta desventaja para detectar los cruces por cero que, dado el carácter optimal de la FFT clásica, la implementación de un test de este tipo significaría una pérdida de eficacia en el caso del peor caso (ningún valor nulo). La idea central estriba en representar al cero como un elemento supernumerario meramente con un bit de control, que de cualquier manera debe testearse en el cálculo de la FNT clásica, no aumentando por lo tanto la complejidad, y reduciendo las operaciones en el caso de alto cruce por cero.

VILLA,L.T. (INIQUI (CONICET-U.N.Salta) y TARZIA,D.A. (PROMAR (CONICET-U.N.Rosario)): *Un modelo de frontera libre para la desactivación de un catalizador en un sistema difusión-reacción gas-sólido.*

Se considera un gas reactante A acompañado por una especie química P que se difunden en el seno de una pastilla sólida prismática soporte de un catalizador.

Suponiendo que la especie P actúa selectivamente como veneno del catalizador inactivando los sitios activos mediante una reacción química rápida e irreversible, bajo adecuadas hipótesis físico-químicas se puede modelar el proceso como: un problema de frontera libre para la concentración de veneno P (que determina la frontera que ubica el frente de reacción entre el veneno y los sitios activos del catalizador) y un problema de frontera móvil (con frontera móvil igual a la frontera libre dada por el problema anterior) a dos fases para la concentración del gas reactante A. Más aún, el primer problema consiste en uno de reacción-difusión gas-sólido.

JOSE MARIA ARANGO
1914 - 1985

José María Arango nació en Bahía Blanca el 11 de mayo de 1914 y murió en esta ciudad el 15 de diciembre de 1985.

Su nombre está estrechamente ligado a la Universidad Nacional del Sur, cuya larga gestación vivió casi desde los instantes iniciales y de la que fue Profesor desde el año 1956, cuando se creó, hasta jubilarse en 1982.

Cursó sus estudios universitarios en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata, de donde egresó en 1936 con el título de Ingeniero Civil.

De regreso en Bahía Blanca en 1937 inició su actividad profesional, sumándose poco tiempo después al núcleo de personas e instituciones educacionales y culturales de la ciudad que reclamaban la creación de una universidad en Bahía Blanca. Ya en 1924 se había elevado un proyecto en ese sentido a la Cámara de Diputados de la Nación, que no llegó a tratarse, y en 1939 se presentó uno nuevo, similar al anterior, que no fue sancionado. Ante este fracaso un grupo de vecinos de Bahía Blanca resuelve tomar la iniciativa y concretar lo que era ya un reclamo público, creando como entidad privada la Universidad del Sur, que comienza su actividad el 1° de mayo de 1940.

El Ing.Arango participa desde el principio en este entusiasta esfuerzo como Profesor de la cátedra de Análisis Matemático I y de un Curso de Introducción, colaboración ad-honorem que se extiende durante todo el período de funcionamiento de esa universidad libre, la que en mayo de 1944 cierra sus puertas por falta de recursos y apoyo oficial.

En 1946 el gobierno de la Provincia de Buenos Aires crea con sede en Bahía Blanca el Instituto Tecnológico del Sur dependiente de la Universidad Nacional de La Plata, base de la actual Universidad Nacional del Sur, fundada finalmente en enero de 1956. El Ing.Arango se desempeña como Profesor de los cursos de Análisis Matemático I y II, en el Instituto Tecnológico primero y luego en el Departamento de Matemática de la flamante y anhelada Universidad, de cuya Comisión Organizadora se lo nombra miembro.

Durante su larga actuación en la Universidad Nacional del Sur se prodigó generosamente a sus alumnos, procurando transmitirles su gusto por la matemática y hacer fáciles, atractivos y naturales los razonamientos y cálculos, que ilustraba invariablemente con "un ejemplito". Fueron numerosos los apuntes y trabajos de carácter didáctico que escribió destinados a sus cursos de Análisis Matemático y Cálculo, y sus clases se distinguían por el esmero cuidadoso con que las presentaba y la solvencia y elegancia de las exposiciones.

Paralelamente a su labor docente el Ing.Arango colaboró sin retaceos en la tarea de promover y consolidar el desarrollo de la actividad académica, desempeñando numerosos cargos en el gobierno de la Universidad Nacional del Sur, entre otros: Director del Departamento de Matemática desde 1957 a 1968; Director Interino del Departamento de Física desde 1957 a 1965; Director a cargo del Instituto de Matemática desde diciembre de 1964 a julio de 1965; Rector Sustituto de la Universidad desde 1968 a 1970; Miembro del Tribunal Académico; Miembro del Consejo Asesor del Departamento de Ciencias Exactas desde 1980 a 1982.

En 1966 fue distinguido con medalla de oro de reconocimiento por 25 años de actuación en pro de la Universidad, que recibió de manos del Sr.Presidente de la Nación, Dr.Arturo U.Illia. En 1980 presidió la Comisión de Actos del 25 Aniversario de la Universidad Nacional del Sur.

Tuvo también actuación en la enseñanza a nivel secundario desde 1945 a 1951, como Profesor de Matemática en la Escuela Superior de

Comercio, y de Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal en la Escuela Industrial de Bahía Blanca.

Como Ingeniero Civil ocupó distintos cargos en el Consejo Directivo del Centro de Ingenieros de Bahía Blanca en el período 1939 a 1948, y desde 1969 hasta su muerte integró el Tribunal de Honor. Su gusto por la matemática y su irrenunciable vocación docente lo llevaron a dejar en 1961 la práctica profesional para dedicarse exclusivamente a la docencia universitaria. La Unión Matemática Argentina lo contaba entre sus miembros.

Espíritu sensible , ávido lector, agudo observador, también colaboró con la ya centenaria Biblioteca Popular Bernardino Rivadavia, casa madre de la cultura bahiense, de cuyo Consejo Directivo formó parte en varios cargos, siendo Presidente desde 1975 a 1983.

En 1972 se le encomendó la redacción del capítulo "La Matemática en el Sur (Período 1923-1972)" del tomo I de la obra "Evolución de las Ciencias en la República Argentina, 1923-1972", editada por la Sociedad Científica Argentina.

En lo personal era naturalmente cortés y afable, poseedor de una sólida cultura y un fino sentido del humor. Tenía el don de la palabra galana y justa, y sus escritos y dictámenes eran famosos por su cuidado estilo y juicio certero.

En ocasión de su jubilación, al despedirse de los docentes del Departamento de Matemática nos dijo: "Agradezco este acto de amistad que me resisto a llamar despedida. ¿Cómo podría despedirme de la U.N.S. si está casi en las raíces de mi existencia y en la justificación de mi vida?". Y más adelante: "¿Cómo decirle adiós a esta Universidad que me enorgullezco de haber ayudado a levantar tras muchos esfuerzos y vicisitudes?. Por seguirla dejé una profesión que también me gustaba mucho. Los años, que pasaron inexorables, me procuraron creo que millares de alumnos que fueron mis amigos; lástima si desde mi concepción del deber aplacé a tantos. Quede la ardua sentencia para quienes se hallen menos comprometidos. Si como algunos creen, entregué a la Universidad estimables esfuerzos, también ¿qué no me dió la Universidad?. Colmó tan largamente mis aspiraciones, me procuró tantas oportunidades de aprender, me proporcionó tantos amigos". Y terminó diciendo: "Por eso, volviendo al principio, repito que me quedo en la U.N.S., como dice la expresión corriente, hasta que males mayores nos separen, que espero siempre sus saludos, queridos amigos. Confío que olviden mis flaquezas y que si me señalan a algún nuevo compañero lo hagan recordando que pasé aquí muchos años y quise mucho a la Universidad. De modo que no adiós, sino hasta la semana que viene, si Dios quiere".

Su entrañable adhesión a la tarea de construir una Universidad nueva y mejor, a la que prestó destacados servicios, lo ha hecho acreedor al recuerdo respetuoso de toda la comunidad universitaria.

María Luisa Gastaminza

Alberto A. Suárez

COMENTARIOS BIBLIOGRAFICOS

ABSTRACT ALGEBRA, by G.D.Crown, M.H.Fenrick and R.J.Valenza, Dekker, New York, 1986.

Este libro ha sido concebido como texto para un curso de álgebra siguiendo a no más de un par de cursos introductorios. Los autores han supuesto que, para muchos de los alumnos, éste sería su curso terminal de álgebra; y han preferido enfatizar la ejemplificación, sacrificando un mayor desarrollo de los temas tratados, para ilustrar la naturalidad y universalidad de los métodos algebraicos.

El libro cubre el lenguaje básico de grupos, anillos, módulos y cuerpos, con una presentación moderna, basada en los métodos diagramáticos, que destaca las propiedades universales de factorización.

En las cuestiones específicas, para grupos se han escogido los teoremas de Sylow, presentados vía el eficiente enfoque de acciones de grupo, y los grupos resolubles, para ser aprovechados posteriormente en la teoría de cuerpos. Para anillos, se ha desarrollado la teoría elemental de factorización y se han incluido las álgebras de polinomios y matrices. Finalmente, para cuerpos, se ha hecho una aproximación económica a la teoría de Galois; debe destacarse la inclusión de un tratamiento elemental de la resolubilidad de ecuaciones.

Acertada, sin dudas, esta selección de tópicos. Hubiera sido deseable la inclusión en módulos de un tema específico, como ser alguno de los teoremas de estructura de módulos sobre dominios principales.

La ejercitación es abundante y variada.

J.J.Martínez

MODULES OVER VALUATION DOMAINS, by L.Fuchs and L.Salce, Dekker, New York, 1985.

Este libro establece los fundamentos para el tratamiento sistemático de la teoría de módulos sobre dominios de valuación, sin restricciones de finitud y con énfasis en el aspecto estructural, orientado por los grupos abelianos (o, si se prefiere, por los módulos sobre dominios principales). Los autores, que han contribuido significativamente al desarrollo del tema, hacen uso de las poderosas técnicas actuales de la teoría de módulos.

Los dos primeros capítulos contienen los preliminares sobre anillos de valuación y módulos; se tratan cuestiones de divisibilidad, que desempeñan un papel fundamental en la teoría. Las técnicas homológicas y topológicas relevantes se introducen en los tres capítulos siguientes. La materia plena se desarrolla en los nueve capítulos restantes, con el tratamiento de divisibilidad, inyectividad, torsión, invariantes y módulos seriales.

Cada capítulo contiene listas de ejercicios y es cerrado con notas sobre el desarrollo histórico de los temas tratados, comentarios y problemas abiertos. También se incorpora una extensa bibliografía.

Debe destacarse el gran valor informativo de esta monografía, que incluso ofrece resultados nuevos sobre varias clases importantes de módulos.

Excelente es el calificativo que resume el estilo expositorio.

J.J.Martínez

MATHEMATICAL PROGRAMMING: AN INTRODUCTION TO OPTIMIZATION, Melvyn W.Jeter, Marcel Dekker Inc., 1986.

El autor se propuso escribir un libro de introducción a la optimización para alumnos que hayan estudiado un curso de álgebra lineal y uno de análisis en varias variables. Y lo hizo en forma adecuada.

La obra se ubica entre aquéllas muy elementales - que contienen gran cantidad de material introductorio y algo de optimización - , y las avanzadas - que suponen que mucho es conocido, y presentan teoría, pero poco cálculo -.

No deja de revisar en forma somera los temas que se suponen bien conocidos por un alumno del nivel descripto. Pero en aquéllos que no suelen formar parte de los cursos básicos y son indispensables para el desarrollo, se detiene más. Así, cuando llega el momento oportuno en la exposición, define, demuestra y ejemplifica sobre conjuntos afines y convexos, o funciones convexas de varias variables. Aunque entre lectores que cursan ciencias matemáticas esto puede ser conocido, seguro que no lo es para alumnos de ingeniería o ciencias económicas. De esta manera, el estilo de la exposición es adecuado también para llevar a un alumno no muy entrenado en la matemática, a niveles razonables de conocimiento de la teoría de optimización.

La enumeración de los capítulos del libro es ilustrativa:

linear programming problem.
3. The primal simplex procedure.
4. Duality and the linear complementarity problem.
5. Other simplex procedures.
6. Network programming.
7. Convex and concave functions.
8. Optimality conditions.
9. Search techniques for unconstrained optimization problems.
10. Penalty functions methods.

Como se ve, para un curso de programación lineal bastan los capítulos 1 al 6; los cuatro finales corresponden a la no-lineal.

Los problemas básicos de la teoría están bien motivados y abundantes ejemplos se intercalan entre teoremas y algoritmos. Es elogiable el estilo coloquial con que se exponen los ejemplos: se sigue el algoritmo paso a paso, indicando apropiadamente los cambios que suceden en cada uno.

Cada item dentro de cada capítulo finaliza con ejercicios, y si bien los de los primeros capítulos pueden resolverse sin apoyo computacional, no sucede lo mismo con los de los últimos, que exigen tener los programas correspondientes.

Carlos Enrique D'Attellis

INDICE DEL VOLUMEN 32

Números 1 y 2 (1985) y Números 3 y 4 (1986)

NORMAS PARA LA PRESENTACION DE ARTICULOS

Los artículos que se presenten a esta revista no deben haber sido publicados o estar siendo considerados para su publicación en otra revista.

Cada trabajo deberá ser enviado en su forma definitiva, con todas las indicaciones necesarias para su impresión. No se envían pruebas de imprenta a los autores.

Cada artículo debe presentarse por duplicado, mecanografiado a doble espacio. Es deseable que comience con un resumen simple de su contenido y resultados obtenidos. Debe ponerse especial cuidado en distinguir índices y exponentes; distinguir entre la letra O y el número cero, la letra l y el número uno, la letra i y ι (iota.), ε y $\in$ etc. Los diagramas deben dibujarse en tinta china. Los símbolos manuscritos deben ser claramente legibles. Salvo en la primera página, deben evitarse en lo posible notas al pie.

El artículo deberá acompañarse de una lista completa de los símbolos utilizados en el texto.

La recepción de cada trabajo se comunicará a vuelta de correo y en su oportunidad, la aceptación del mismo para su publicación.

Los trabajos deben enviarse a la siguiente dirección:

Revista de la U.M.A.
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca
Argentina.

NOTES FOR THE AUTHORS

Submission of a paper to this journal will be taken to imply that it has not been previously published and that it is not being considered elsewhere for publication.

Papers when submitted should be in final form. Galley proofs are not sent to the authors.

Papers should be submitted in duplicate, neatly typewritten, double spaced. It is desirable that every paper should begin with a simple but explicit summary of its content and results achieved. Special care should be taken with subcripts and superscripts; to show the difference between the letter O and the number zero, the letter l and the number one, the letter i and ι (iota), ε and $\in$, etc. Diagrams should be drawn with black Indian ink. Symbols which have been inserted by hand should be well spaced and clearly written. Footnotes not on the first page should be avoided as far as possible.

A complete list of the symbols used in the paper should be attached to the manuscript.

Reception of a paper will be acknowledged by return mail and its acceptance for publication will be communicated later on.

Papers should be addressed to the following address:

Revista de la U.M.A.
Instituto de Matemática
Universidad Nacional del Sur
8000 Bahía Blanca
Argentina.

INDICE

Volumen 32, Número 4, 1986

Reg. Nac. de la Prop. Int.
Nº 3491

Correo Argentino
Bahia Blanca, Correo Central (Bs. As.) y Suc 60 (Buenos Aires)

TARIFA REDUCIDA
CONCES. Nº 1/Dto. 21

FRANQUEO PAGADO
CONCES. Nº 25/Dto. 21

AUSTRAL IMPRESOS
VILLARINO 739
BAHIA BLANCA