Ministerio de Cultura y Educación

# Geometría

## Materiales de Capacitación

Dirección Nacional de Gestión de
Programas y Proyectos

Programa Nacional de Capacitación Docente

MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION

**Ministro de Cultura y Educación**

Ing. Agr. Jorge Alberto Rodríguez

**Secretaria de Programación y Evaluación Educativa**

Lic. Susana Beatriz Decibe

**Subsecretaria de Programación y Gestión Educativa**

Lic. Inés Aguerrondo

**Director Nacional de Gestión de Programas y Proyectos**

Prof. Darío Pulfer

**Coordinadora del Programa Nacional de Formación y Capacitación Docente**

Prof. Cristina Armendano

*..."Se advierte entre los matemáticos, una imaginación asombrosa... Repetimos: existía más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero"...*

Voltaire.

Citado en EL HOMBRE QUE CALCULABA - Malba Tahan V. E., Barcelona, 1981.

Sr/a Profesor/a:

En este módulo nos acercamos a usted para hacerle llegar una propuesta para la enseñanza de algunos temas de Geometría. Se trata de sugerencias e ideas que creemos pueden servir para despertar en nuestros alumnos la imaginación matemática, para ayudarlos a conocer las propiedades geométricas del mundo que los rodea.

Recordemos que deben ser nuestros alumnos, si bien con nuestra guía, los descubridores de ese mundo mediante su actividad creativa. La intuición y el rigor deben unirse en el estudio de la Geometría.

Ésta es simplemente, como ya dijimos, una propuesta. Valoraremos toda sugerencia y opinión que nos haga llegar.

*Equipo de Capacitación.*
*Área: Matemática.*

# UNA PROPUESTA METODOLÓGICA

Una propuesta desde la primera clase de Geometría hasta... algún momento de los años siguientes.

## I - TRIÁNGULOS

Pedimos a nuestros alumnos que para la próxima clase traigan (o les llevamos nosotros), varios triángulos recortados en papel (hasta puede ser de diario).

Que busquen quiénes tienen triángulos iguales a los de otro. ¿Cómo hacen para saberlo? ¿Los superponen? ¿Miden los lados? Si al superponerlos coinciden, no cabe duda: son iguales. ¿Y si miden los lados? También.

¿Valen los mismos criterios para comparar rectángulos, cuadriláteros, polígonos cualesquiera, círculos? Que discutan.

Comentario intercalado:

*Lo ideal sería que en el aula hubiera siempre objetos disponibles para que los alumnos que quisieran recurrieran a los que les parecieran convenientes, (no a los que nosotros les decimos). Ejemplos: cajitas de distintas formas y tamaños (si es posible algunas que no sean paralelepípedos), esferas de telgopor, cartulinas en formas de distintos polígonos, varillas, bandas elásticas, hilos.*

Continuamos preguntando, o tratando de que se pregunten. ¿Para esferas, cubos? Va a ser difícil superponerlos. Escuchamos propuestas.

¿Para segmentos, ángulos? Aquí es posible que aparezca por primera vez el problema de la infinitud: ¿el ángulo es hasta donde lo dibujamos o sigue hasta el infinito?...

Intentemos ahora establecer criterios para ver si son iguales sin superponerlos, en cada caso.

Segmentos: es fácil. "Miden lo mismo". Tienen igual longitud. Pueden medirse con una regla.

Círculos: basta con que tengan igual radio o igual diámetro.

¿Esferas? ¡También!. ¿Otros criterios? ¿Longitud de su ecuador?

¿Cubos? Igual lado, que se llama *arista*.

¿Triángulos? Los triángulos están formados por lados que son segmentos y por ángulos. Dos triángulos son iguales cuando tienen sus tres lados y sus tres ángulos respectivamente iguales ("respectivamente" no aparecerá naturalmente). Pero es muy probable que an tes de que lleguen a decir lo anterior, algunos alumnos hayan propuesto: basta que los lados coincidan; no hace falta medir también los ángulos.

Que lo verifiquen para varios triángulos. Que intenten con los tres lados de un triángulo (se puede trabajar con varillas), construir otro distinto.

¿Será lo mismo para los cuadriláteros? Que busquen y discutan ellos. Que vean que en algunos casos particulares (rectángulo, por ejemplo), vale, y en otros no. Que construyan rombos distintos con lados respectivamente iguales.

Enunciamos:

Si dos triángulos tienen los tres lados respectivamente iguales, seguro que son iguales.

¿Y si dos triángulos tienen los tres ángulos respectivamente iguales? Nuevamente que busquen, discutan, respondan ellos. Dibujar casos, buscar ejemplos de triángulos distintos con ángulos iguales.

Algunos <u>ejercicios</u> sugeridos:

1) Buscar otras figuras que no sean triángulos en las que alcance con la igualdad de lados para asegurar que son iguales.

2) Buscar objetos en los que aparezcan triángulos. Por ejemplo: pirámides.

3) ¿Hay pirámides con todas sus caras triangulares? ¿Y con todas sus caras triangulares iguales?

*Muchos ejercicios tendrán respuestas "provisorias". En algunos casos, más adelante, podrán completarse con justificaciones rigurosas. Lo importante es que los alumnos vayan familiarizándose con entes geométricos planos y espaciales, planteándose preguntas, ingeniándose para responderlas.*

4) Dar tres segmentos cualesquiera y construir el triángulo que los tiene por lados. ¿Siempre existe? ¿Puede haber distintos?

Es una oportunidad para relacionar el tema con aritmética: desigualdades.

5) Si ya dio ejes cartesianos: Dibujar el triángulo cuyos vértices son los puntos: (1,2), (0,5), (4,3). Dibujar otro igual a él y con un vértice en (0,0). ¿Puede dibujarse otro de perímetro doble? ¿Tienen alguna relación sus lados con los del triángulo anterior? ¿Siempre?

## II - ALGUNOS TRIANGULOS PARTICULARES

Llevamos tetraedros regulares, desarmados para que nos sea más cómodo.

Que los chicos los armen. De paso tienen la respuesta del ejercicio 3 anterior. Sugerimos doblar para adentro una de la cuatro caras, como si no existiera, para poder mirar dentro del tetraedro.

Sus caras son triángulos equiláteros. ¿Qué quería decir? De paso, etimología de la palabra.

¿Cómo son los ángulos de cada cara? Medirlos. Seguramente no obtendrán siempre 60°, pero sí valores aproximados a éste. Aprovechar para asegurar el manejo del transportador.

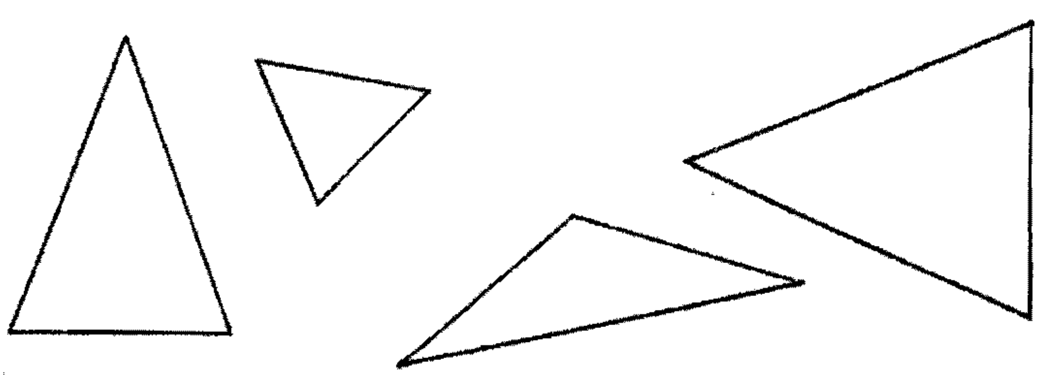
¿Siempre valdrán todos lo mismo? ¿Y ese valor será 60°? A ver: que construyan ellos otros tetraedros, más grandes, enormes, o más pequeños, pequeñísimos. Que se ingenien para construirlos. Plieguen, midan, ...Más adelante volveremos sobre esto y daremos una respuesta segura.

Triángulos isósceles:

Un triángulo que tiene dos lados iguales se llama isósceles.

¿Y si tiene los tres iguales? Es equilátero, pero podemos considerarlo un triángulo isósceles muy particular, pues cumple la condición exigida: dos lados iguales y el tercero, aunque no lo pidamos... también es igual.

Al tercer lado, el que no está obligado a ser igual, lo llamaremos *base*, aunque el triángulo no esté apoyado sobre él.



Señalar la base en cada uno de estos triángulos isósceles.

Después de ensayar:

> Por un punto de una recta pasan en el espacio infinitas rectas perpendiculares a ella, y todas están en un mismo plano.

Diremos que esa recta y ese plano son perpendiculares.

Un ejemplo: cuando estamos de pie, nuestro "eje" es perpendicular al plano del piso.

¿Y si consideramos la recta en un plano y un punto en ella? ¿Cuántas perpendiculares pasan por ese punto en ese plano?

> Por un punto de una recta, en un plano, pasa una y sólo una perpendicular.

Sea ahora una recta y un punto fuera de ella. ¿Pasan perpendiculares? ¿Cuántas? *¿Ya adivina qué le vamos a decir?: "No se lo diga; que busquen, ensayen, se arriesguen".*

> Por un punto exterior a una recta pasa una y sólo una perpendicular en todo el espacio.

Algunos <u>ejercicios</u> sugeridos:

1) ¿Cuántas rectas perpendiculares dos a dos pueden pasar por un punto en el plano? ¿Y en el espacio?

2) Volver a examinar la pirámide recta construida. ¿Por qué la llamamos recta? Indicarlo usando conceptos geométricos.

3) De los poliedros conocidos, ¿hay alguno con sus caras perpendiculares?

> Se llama *mediatriz* de un segmento en un plano a la recta perpendicular a dicho segmento en el plano, en su punto medio.

<u>Propiedad</u> (que usaremos mucho):

> Los puntos de la mediatriz están a igual distancia de ambos extremos del segmento.

plano, pero al ubicar el centro de la esfera se tienen cuatro y entonces éste puede estar en cualquier punto de una recta, ¿cuál?).

Podríamos continuar así:

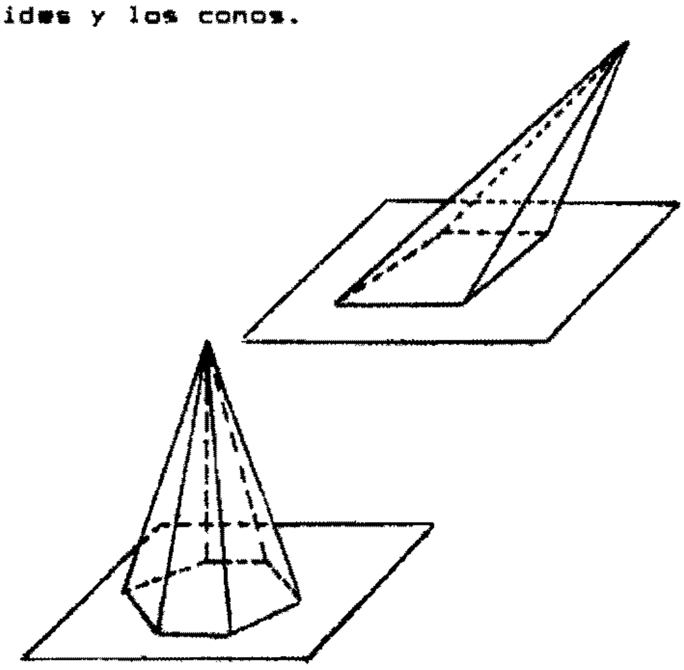
Dada en un plano una recta $e$, se llama *simetría de eje* $e$, la correspondencia entre los puntos de dicho plano que a cada punto $A$ le asigna un $A'$ tal que $e$ es la mediatriz de $\overline{AA'}$.

Y dado un plano $\alpha$ se llama *simetría respecto del plano* $\alpha$ a la correspondencia entre los puntos del espacio que a cada punto $A$ le asigna un $A'$ tal que $AA'$ es la recta perpendicular a $\alpha$ en el punto medio de $\overline{AA'}$.

Propiedades. Dibujos. Es un buen momento para tratar el tema de las simetrías y trabajar con espejos.

## VI - EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

Comencemos con las pirámides y los conos.



Dado un polígono en un plano, y un punto exterior al plano, los segmentos determinados por ese punto y cada vértice del polígono determinan una pirámide.

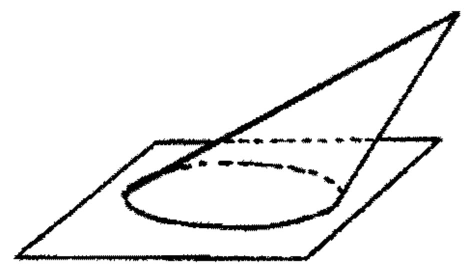
El polígono dado es la *base* de la pirámide, y los triángulos son las *caras laterales*.

El punto exterior es el vértice principal. Los segmentos determinados por ese vértice y los del polígono, y los lados del polígono son las *aristas* de la pirámide.

El segmento de perpendicular al plano de la base desde el vértice es la *altura* de la pirámide.

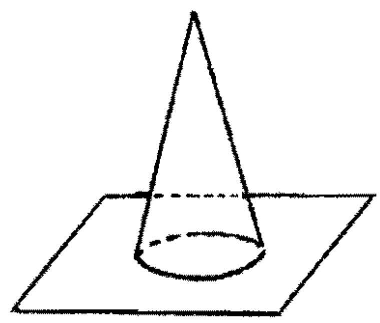
Si el polígono dado es regular, la pirámide se llama *regular*. Si el pie de la altura es el centro del polígono, la pirámide se llama *recta*.

Dada una circunferencia en un plano y un punto exterior al mismo, los segmentos determinados por ese punto y cada uno de los de la circunferencia determinan un *cono*.



El círculo es la *base* del cono. La recta de cada segmento es una generatriz.

El punto exterior al plano es el *vértice*. El segmento de perpendicular al plano de la base desde el vértice es la *altura*. Si el pie de la altura es el centro del círculo, el cono se llama *recto*.



Que los alumnos busquen ejemplos de conos y pirámides en la realidad, que identifiquen sus elementos. Que construyan algunos.

En algún curso, podría llegar a verse que el cono puede ser pensado como el límite de una sucesión de pirámides regulares, de la misma manera que el círculo , de una sucesión de polígonos regulares de cantidad creciente de lados.

¿Cómo son las caras laterales de una pirámide?. Enunciemos y demostremos:

> Las caras laterales de una pirámide recta regular son triángulos isósceles iguales.

La demostración, la podemos hacer para una pirámide de base cuadrada. La propiedad puede extenderse a cualquier base regular.

*Recomendamos muy especialmente* no demostrar *este teorema apoyándose en un dibujo, sino en un "esqueleto" de pirámide construido con varillas clavadas en una base de telgopor. Usted podría seguirlo también con varillas, y no sobre el dibujo. Tengamos en cuenta que tanto el dibujo como esta estructura, son "figuras de análisis" en las que nos apoyamos: ninguna aportará más rigor a una demostración y es más sencillo pensar en tres dimensiones si "vemos" en tres dimensiones.*

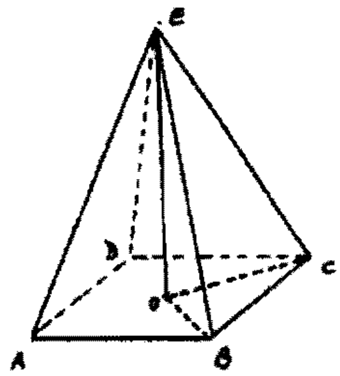
Comparemos primeramente los dos triángulos "verticales" $\overset{\Delta}{EOB}$ y $\overset{\Delta}{EOC}$.

¿Qué elementos iguales tienen?

$\overline{EO}$ común.

$\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son mitades de diagonales de un cuadrado, o radios de la circunferencia en que se inscribe.

Los ángulos en O son rectos pues la altura de la pirámide es perpendicular a todas las rectas del plano de la base que pasan por su pie.




Luego, los dos triángulos son iguales, y la cara lateral BEC resulta un triángulo isósceles.

Análogamente se demuestra para las demás. ¿Qué ocurre si comparamos ahora todas las aristas laterales? Son iguales. ¿Cómo son entonces los triángulos de dos caras laterales si los comparamos? En efecto, por tener los tres lados respectivamente iguales, son iguales.

Algunos ejercicios sugeridos:

1) Demostrar que todas las generatrices del cono recto circular son iguales.

2) Creemos que es hora de dar el Teorema de Pitágoras en el plano y en el espacio, y aprovechar para hacer ejercicios y problemas de superficies y volúmenes de pirámides y conos, en los que falten datos calculables por Pitágoras.

3) La altura de un triángulo equilátero queda determinada por el valor del lado. Expresarla.

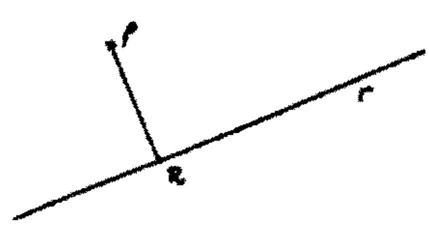
Idem para otros polígonos regulares y su apotema.

4) ¿Existen pirámides regulares cuyas caras laterales sean triángulos equiláteros? ¿Con base triangular?, ¿cuadrada?, ¿pentagonal?, ¿hexagonal?...

Distancia

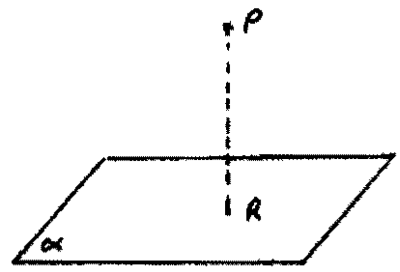
Si definimos como *distancia* entre dos puntos A y B al segmento $\overline{AB}$, llamaremos *distancia de un punto a una recta* al segmento de la perpendicular a la recta por el punto, comprendido entre la recta y el punto.

Distancia de P a r = $\overline{PR}$.




Y llamaremos *distancia de un*

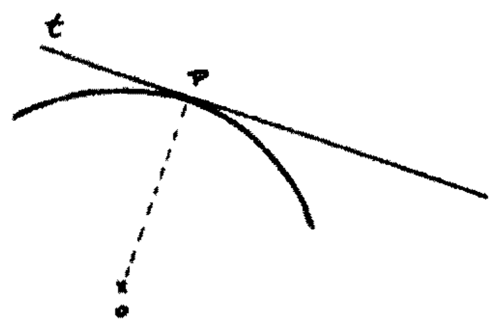
*plano* $\alpha$ al segmento de la perpendicular a $\alpha$ por P, comprendido entre P y el plano $\alpha$.




Es evidente que la distancia es el menor de los segmentos que pueden trazarse del punto a la recta o al plano. ¿Es único?

## VII - RECTAS, PLANOS Y FIGURAS CIRCULARES

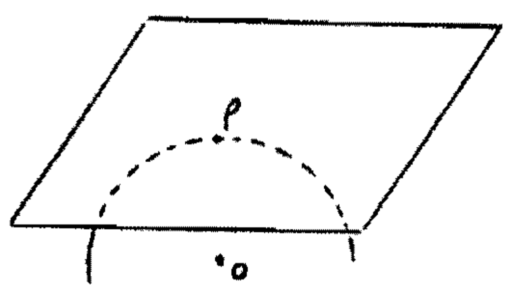
Si una recta es perpendicular a un radio de una circunferencia con su extremo perteneciente a ella, se llama *tangente* a la misma.




¿Cuántos puntos en común tienen la circunferencia y la recta? ¿A qué distancia se encuentra el centro de la circunferencia de la recta?

Es evidente que la recta tangente y la circunferencia tienen un solo punto común. Todos los demás son exteriores, quedan fuera de la circunferencia, porque $\overline{OP}$ es menor que cualquier otro segmento determinado por O y un punto de la recta.

Consideremos ahora el caso tridimensional. Tenemos una esfera, ¿cuántas rectas perpendiculares a un radio de la superficie esférica en su extremo hay? ¿Cuántos planos? El plano que cumple esta condición se denomina *plano tangente* a la superficie esférica. Es evidente que es único y que tiene un solo punto común con ella; todos los los demás son exteriores, ¿por qué afirmamos todo esto?




Algunos <u>ejercicios</u> sugeridos:

1) Demostrar que la tangente a una circunferencia en un punto existe siempre y es única.

2) Idem para el plano tangente a una superfecie esfé-

rica en un punto.

3) Construir la tangente a una cicunferencia por un punto de la misma. Justificar la construcción.

4) Diremos que una recta es *exterior* a una circunferencia cuando todos sus puntos son exteriores a ella. ¿Qué relación existe en este caso entre el radio y su distancia al centro? ¿Cuántas rectas exteriores a una circunferencia podemos trazar?

5) Idem para un plano exterior a una superficie esférica y para una recta exterior a una superficie esférica.

6) Si una recta no es ni tangente ni exterior a una circunferencia, en su plano, decimos que es *secante*. ¿Cuántos puntos tienen en común? Relación entre radio y distancia al centro.

¿Por qué se debió aclarar en la definición: "en su plano"?

7) Idem para plano secante a una superficie esférica.

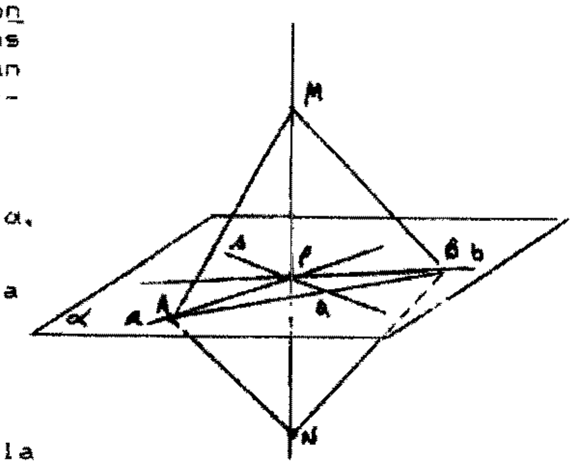
8) Circunferencias exteriores, interiores, secantes, tangentes (¡ de dos clases!). Condiciones de la distancia entre los centros. Idem para superficies esféricas.

<u>Comentario intercalado:</u>

*Hay teoremas clásicos de Geometría del Espacio que se demuestran con los elementos vistos hasta aquí. Proponemos tres, para usted. No los creemos necesarios para los alumnos, si no van a aplicarlos en problemas o situaciones interesantes.*

<u>Teorema:</u>

Si una recta incidente con un plano es perpendicular a dos rectas de dicho plano que pasan por el punto de incidencia, entonces es perpendicular a todas las rectas de dicho plano que pasan por ese punto, (es decir, es perpendicular al plano).




**H)** $r$ es incidente con $\alpha$ en $P$.
$a$ y $b$ son rectas del plano $\alpha$,
$r \perp a$ , $r \perp b$

Sea $s$ una recta cualquiera del plano $\alpha$ que pasa por $P$.

**T)** $s \perp r$

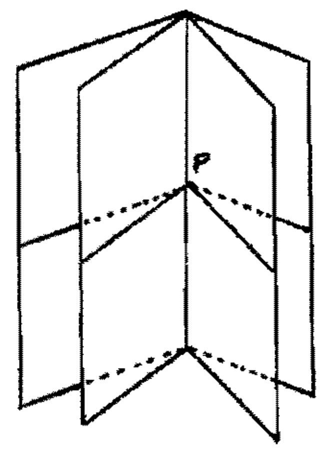
**D)** Sean los puntos $M$ y $N$ en la recta $r$ tales que $P$ sea el punto medio de $\overline{MN}$. Entonces $a$ es la mediatriz de $\overline{MN}$ en $\alpha$, y cualquier punto A de a equidista de M y de N.

Entonces los triángulos $\overset{\triangle}{AMB}$ y $\overset{\triangle}{ANB}$ son iguales por tener sus tres lados respectivamente iguales, y los ángulos marcados en A resultan iguales.

Llamemos Q a la intersección de $\underset{\triangle}{\overline{AB}}$ con la recta s de la hipótesis, y comparemos los triángulos MAQ y NAQ, que tienen un lado común ($\overline{AQ}$), $\overline{AM} = \overline{AN}$ (lo dijimos antes), y los ángulos en A iguales. Entonces los triángulos son iguales y resultan $\overline{QM} = \overline{QN}$.

Pero entonces Q, por equidistar de M y de N, pertenece a la mediatriz de $\overline{MN}$, que es s por pasar por Q y el punto medio de $\overline{MN}$. Entonces $s \perp r$. ▌

Sea una recta y un punto P en ella. Ya sabemos que en cada plano que pasa por esa recta, hay una y sólo una perpendicular por el punto P.



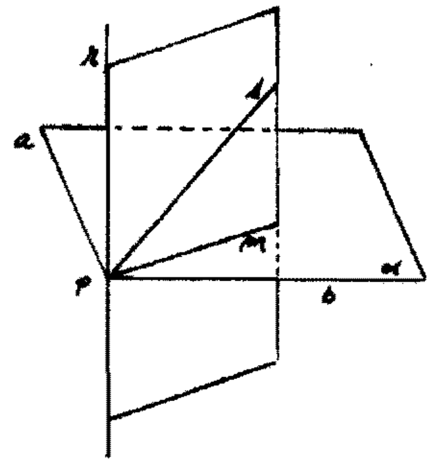

Teorema:

Esas rectas están todas en un mismo plano. En otras palabras: Todas las perpendiculares a una recta en un punto son coplanares. (Y ese plano es perpendicular a la recta en P).

H) $P \in r$
$a, b, c, \ldots \perp r$ en P

T) $a, b, c, \ldots$ son coplanares.

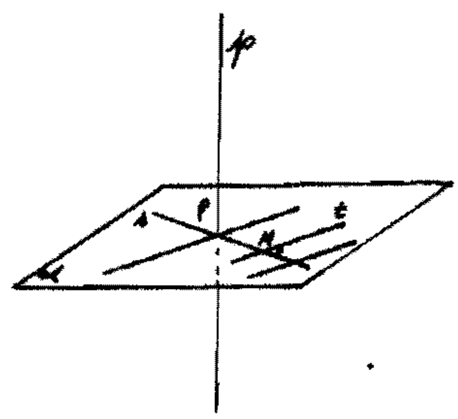
D) Dos cualesquiera de esas rectas, como son incidentes, determinan un plano $\alpha$. Por el teorema anterior, r es perpendicular a todas las rectas de ese plano que pasan por P. Para demostrar el teorema, bastará demostrar que toda recta que pasa por P y no está en $\alpha$, no puede ser perpendicular a r.




En efecto. Sea s que pasa por P y no está en $\alpha$. El plano determinado por r y s tiene en común con $\alpha$ una recta: m que es perpendicular a r en P, por el teorema anterior. Luego, s no puede ser perpendicular a r, porque por P pasarían, en el plano rs, dos rectas perpendiculares a r. Por lo tanto, s no puede ser perpendicular a r y en consecuencia de esto, toda recta que es perpendicular a r en P, está incluida en el mismo plano. ▌

## Teorema de las tres perpendiculares

Si por el pie de una perpendicular a un plano se considera una recta cualquiera, toda perpendicular a ésta en el plano dado es perpendicular al plano determinado por las dos primeras.




H) $p \perp \alpha$ en P

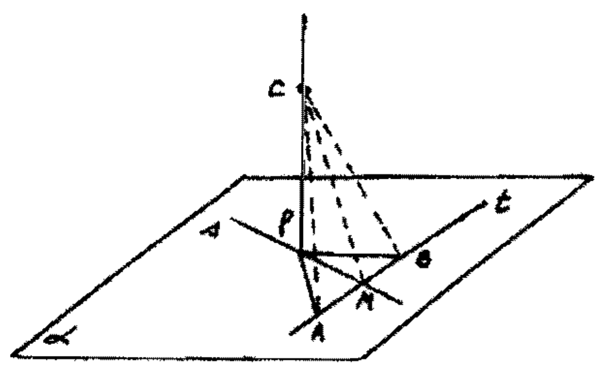
$s$ pasa por P , $s \subset \alpha$
$t \perp s$ , $t \subset \alpha$

T) $t \perp$ plano ps

D) Si t pasara por P, sería ya perpendicular al plano ps, por ser perpendicular a p y a s .

Si t no pasara por P, pasaría por un punto $M \in s$ (ver dibujo o materializar con varillas o agujas sobre telgopor).

Sea en t , el segmento $\overline{AB}$ con M como punto medio. Entonces s es la mediatriz de $\overline{AB}$ en α y en consecuencia $\overline{PA} = \overline{PB}$ (1).




Sea $C \in p$. Los triángulos $\overset{\triangle}{CPA}$ y $\overset{\triangle}{CPB}$ son iguales por tener un lado común ($\overline{CP}$), $\overline{PA} = \overline{PB}$ por (1) y los ángulos en P rectos.

Por lo tanto $\overline{CA} = \overline{CB}$.

El $\overset{\triangle}{ABC}$ es entonces isósceles y como $\overline{CM}$ es la mediana correspondiente a su base, es también su altura, es decir es perpendicular a AB (que es la recta t).

Ya está: t resulta perpendicular a s por hipótesis y perpendicular a CM por lo que dijimos, entonces es perpendicular al plano ps, por ser perpendicular a dos rectas que pasan por M. ▌

Ejercicio:

s, claro, está en el plano ps. Pero, ¿también lo está CM? ¿Por qué?

Volviendo a nuestra propuesta de aula:

## VIII - PARALELISMO

Comencemos por la siguientes definiciones:

> Dos planos son *paralelos* cuando no tienen ningún punto común o cuando coinciden.
>
> Dos rectas son *paralelas* cuando no tienen ningún punto común o cuando coinciden... ¡y existe un plano que las contiene a ambas!

Pedimos a los alumnos que busquen en la cajita, en el aula, en cubos, pirámides, etc.,ejemplos y contraejemplos. En particular, que busquen rectas no coplanares sin puntos comunes. Les diremos que se llaman *alabeadas*.

Si tenemos una recta y un punto exterior a ella, ¿cuántas rectas paralelas a la recta dada pasan por ese punto? Que piensen, ensayen y postulen.
Y por un punto exterior a un plano, ¿cuántos planos paralelos a ese plano pasan?

Enunciemos:

> Por un punto exterior a una recta, pasa una y sólo una paralela a dicha recta.
>
> Por un punto exterior a un plano, pasa uno y sólo un plano paralelo al dado.

Por un punto exterior a un plano, ¿pasa sólo una paralela al plano? ¿Cuántas pasan?

Si un plano es paralelo a otro, todas las rectas del primero son paralelas a ese otro. Demostrarlo.

Algunos ejercicios sugeridos:

1) Demostrar la transitividad del paralelismo de

rectas (en el plano y en el espacio).

2) Demostrar que si en un plano, una recta es incidente con una de dos paralelas, también es incidente con la otra.

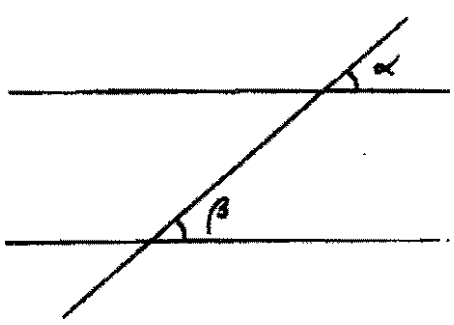
¿Por qué la afirmación no es válida si se omite "en un plano"? Mostrarlo mediante un contraejemplo.

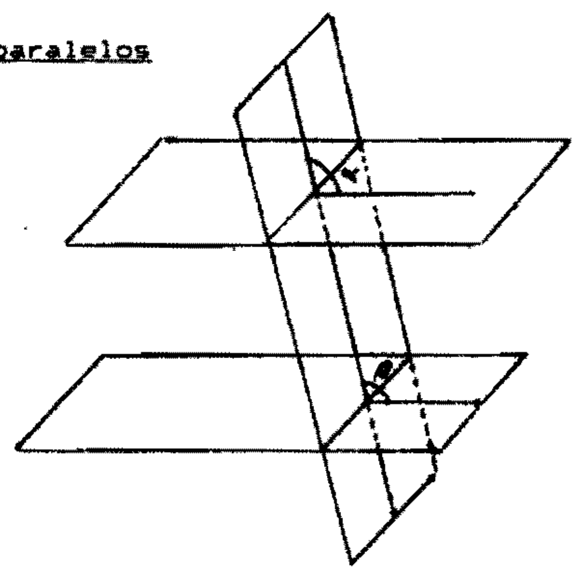
3) Demostrar que en un plano, dos rectas perpendiculares a una tercera son paralelas. ¿Y si se omite "en un plano"?

4) En un plano, si una recta es perpendicular a una de dos paralelas, es perpendicular también a la otra.

5) Determinar si las afirmaciones anteriores son verdaderas cuando se omite "en un plano" y se sustituye "recta" por "plano". Demostrarlas en caso de que lo sean y mostrar contraejemplos si no lo son.

<u>Ángulos entre rectas y planos paralelos</u>





$\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se llaman *ángulos correspondientes*.

Creemos que es útil introducir aquí el concepto de traslación de vector v, y observar que la imagen de una recta a través de una traslación es una recta paralela a la primera. Ello facilita el reconocimiento de ángulos correspondientes entre paralelas y su propiedad:

Los ángulos correspondientes entre paralelas son iguales.

Y si trabajamos en el espacio:

Los diedros correspondientes entre planos paralelos son iguales.

Algunos <u>ejercicios</u> sugeridos:

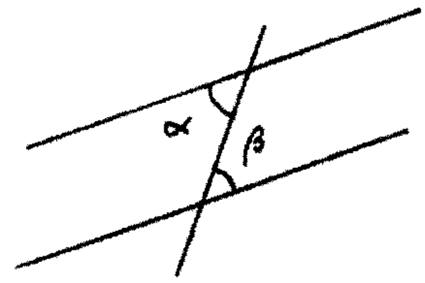
1) Demostrar que en un plano, dos ángulos de lados paralelos del mismo sentido son iguales.

¿Y si se elimina "del mismo sentido"? ¿En todos los casos?

Esta propiedad también se verifica cuando los ángulos de lados paralelos del mismo sentido no son coplanares, pero la demostraremos en clases posteriores.

2) $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ se llaman *alternos internos*. Demostrar que entre paralelas son iguales.

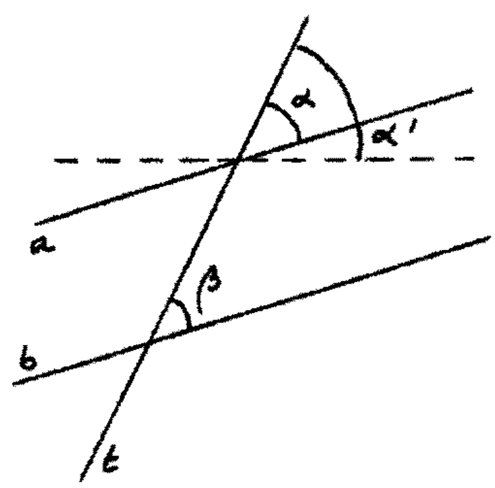
Idem en el espacio.




Los recíprocos de las propiedades anteriores son también propiedades que se verifican, y nos proveen criterios para saber que dos rectas o dos planos son paralelos. Podemos sugerir a los alumnos que investiguen si se verifican antes de decírselo nosotros.

<u>Teorema:</u>

Si dos rectas al ser cortadas por una tercera, forman ángulos correspondientes iguales, entonces son paralelas.




H) $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son correspondientes entre las rectas a y b con la transversal t.

$\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

T) a // b.

D) Supongamos que a y b no fueran paralelas. Y consideremos la paralela a b por el vértice de $\hat{\alpha}$, que tiene que existir por el postulado de paralelismo. Esta formaría con la transversal t, un ángulo $\hat{\alpha}'$ igual a $\hat{\beta}$ (por ser correspondiente entre paralelas).
Por lo tanto igual a $\hat{\alpha}$. Pero entonces $\hat{\alpha}$ y $\hat{\alpha}'$ serían dos ángulos iguales que, al superponerse, no coincidirían. Absurdo, que provino de suponer que las rectas a y b no eran paralelas. Luego, la tesis debe verificarse. ∎

Algunos ejercicios sugeridos:

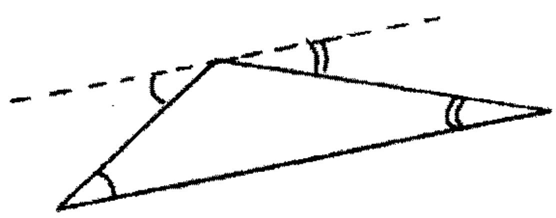
1) Demostrar el teorema para los ángulos alternos internos entre paralelas.

2) ¿Qué ocurre con los ángulos adyacentes a éstos últimos? ¿Qué propiedad verifican? Demostrarla.
¿Y con sus opuestos por el vértice? Idem.

Teorema importantísimo:

Los tres ángulos de un triángulo suman un llano.

Para demostrar este teorema, basta trazar la paralela a un lado por el vértice opuesto, y "mirar mucho" los ángulos, para luego aplicar sus propiedades.



Algunos ejercicios sugeridos, (que exijan de paso):

1) Demostrar que cada ángulo exterior de un triángulo es suma de los interiores no adyacentes a él.

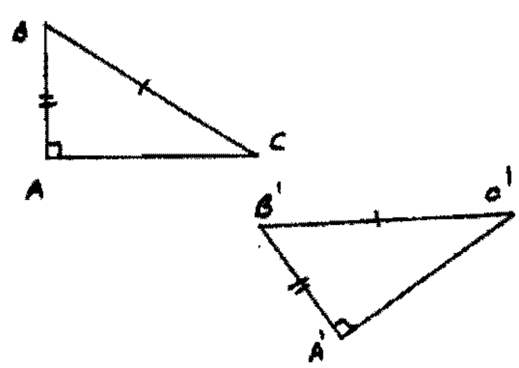
2) Hallar el valor de cada ángulo de un triángulo equilátero. ¿Por qué los tres son iguales?

3) Hallar el valor de cada ángulo de un polígono regular de 5 lados, 6 lados, 7 lados,...

4) Demostrar que todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del mismo.
Idem en el espacio para el plano bisector de un diedro.

5) También valen los recíprocos de (4). Para demostrarlo, enunciaremos un criterio de igualdad de triángulos rectángulos:

Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente iguales, entonces son iguales.




En efecto, si por A' trazamos la perpendicular a A'B', ésta es única, y única en un semiplano su intersección con la circunfernc ia de centro B' y radio $\overline{BC}$. Luego no puede haber dos triángulos distintos con los elementos señalados iguales.

Ahora sí: Demostrar los recíprocos de (4).

6) Demostrar que las bisectrices de un triángulo concurren en un punto que equidista de los lados, y es centro de la circunferencia inscripta (es tangente a los tres lados del triángulo).

## IX - ÁNGULOS Y CIRCUNFERENCIAS

La propiedad del ángulo inscripto sólo requiere, para su demostración:

* suma de los ángulos de un triángulo.
* propiedades del triángulo isósceles.

Vale la pena, pues, proponerla y demostrarla ya. Por otra parte nos parece realmente interesante y curiosa, ya que no es evidente y la intuición, creemos, nos diría lo contrario.

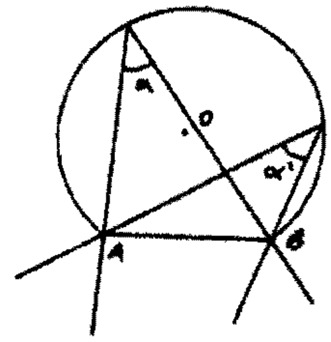
Podemos, si queremos, agregar la noción de arco capaz.

### Arco capaz

Los puntos desde los que un segmento dado $\overline{AB}$ se ve bajo un mismo ángulo dado $\hat{\alpha}$, forman el *arco capaz* del $\hat{\alpha}$ sobre $\overline{AB}$.

¿Cuáles son los lados de $\hat{\alpha}$? ¿Qué característica tienen los ángulos con vértice en el arco capaz cuyos lados pasen por los extremos del segmento?

Los lados de esos ángulos $\hat{\alpha}$, pasan por A y por B . De acuerdo con el teorema anterior, el arco capaz es un arco de circunferencia en el cual todos los ángulos inscriptos son iguales a $\hat{\alpha}$.



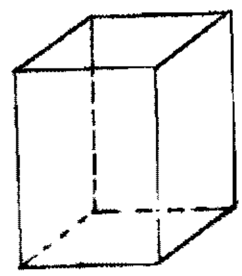
Algunos ejercicios sugeridos:

1) Construir el arco capaz de un ángulo dado $\hat{\alpha}$, sobre un segmento dado $\overline{AB}$. (Bastará determinar el centro O de la circunferencia, pues el radio es $\overline{OA} = \overline{OB}$ ).

2) Un caso sencillo es la construcción del arco capaz de un ángulo recto. ¿Por qué?

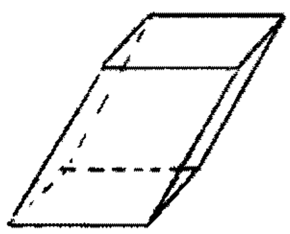
## X - PARALELOGRAMOS Y PARALELEPIPEDOS

A partir de la noción y propiedades del paralelismo pueden estudiarse los paralelogramos y sus propiedades, a la manera clásica. Y nuevamente "saltar al espacio".



Para comenzar el estudio de los prismas, proponemos no definirlos; sólo enumerar sus características:

* las bases paralelas iguales.
* las aristas laterales paralelas, todas iguales.
* las caras laterales son todos paralelogramos.



Tratemos que los alumnos relacionen estas propiedades y analicen cómo pueden deducirse unas de otras.

Merece un estudio especial el prisma recto regular o paralelepípedo. Sugerimos estudiar sus propiedades usando como apoyo una caja de zapatos, sin tapa, para mirar adentro.

Que los alumnos conjeturen propiedades, las discutan, las enuncien...

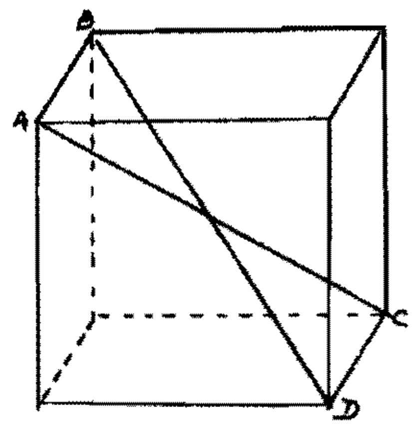
No sólo las bases, sino también las caras laterales son rectángulos. Demostrémoslo.

Sabemos que son paralelogramos. Pero al ser un prisma recto, las aristas laterales son todas perpendiculares a las bases, y a los lados de las mismas pues pasan por su pie. Luego las caras laterales por ser paralelogramos con ángulos rectos son rectángulos.

Las caras laterales opuestas son iguales. ¿Por qué podemos afirmarlo?

Materializar las diagonales con hilos enganchados en los vértices de la caja de zapatos. Materialicemos ahora los planos diagonales con hojas de papel que "encajen" en la caja.

Que los alumnos busquen y conjeturen propiedades, que intenten demostrarlas. Por ejemplo:




Las cuatro diagonales son iguales, y se cortan en un punto, que es el punto medio de todas.

La igualdad puede demostrarse por el Teorema de Pitágoras en el espacio, o bien demostrando que cada plano diagonal es un rectángulo. Sea, por ejemplo, ABCD: es un paralelogramo pues $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales y paralelos. Además AB y AD son perpendiculares por ser AD una recta del plano perpendicular a AB por A.

Como cada diagonal es común a dos planos diagonales y su punto medio es único, la intersección de todas es dicho punto.

Podemos estudiar a continuación superficies laterales y totales, volúmenes.

Y luego seguir con los cilindros. Sus propiedades. Superficies y volúmenes...

# ALGUNOS PROBLEMAS

PARA

# INTRODUCIR O INTEGRAR TEMAS

Los autores opinan que la dificultad que tienen los alumnos para reconocer, emplear y operar, se debe en gran parte, a la separación en capítulos aislados y a la ingenuidad de *suponer que el alumno no tiene conocimientos previos*, aunque no los haya incorporado de forma ideal.

Al iniciar la clase proponemos un problema:

Un camino recto une las ciudades A y B . Ese camino tiene una longitud de 80 km . También podemos ir de A a C y luego pasar a B . De A a C, hay 60 km y de B a C, 40 km , siendo ambos caminos rectos.

Existen alternativas en la presentación: puede darse el dibujo o pedirlo como parte de la respuesta. La segunda alternativa es más rica porque exige la construcción de un triángulo con regla y compás, cuando se conocen los tres lados.

Comenzamos a hacer preguntas:

¿Cuál es el camino más largo?. ¿Por qué?.

La línea de autobus 17 une directamente A con B a una velocidad media de 40 kilómetros cada hora. (En un curso elemental, preferimos decir kilómetros cada hora a kilómetros por hora). ¿Cuánto tarda para ir de A hasta B ?

La línea 78 va de A a C a 60 kilómetros cada hora y de C a B a 40 kilómetros cada hora. ¿Cuánto tarda esta línea en completar el viaje?

¿Cuál es la ventaja horaria de una línea sobre la otra?

Algunas posibles continuaciones del problema, podrían ser:

La línea 17 cobra el viaje a razón de 0,06$ por kilómetro y la línea 78 cobra 0,045$ por kilómetro. La línea 17 hace un descuento del 10%, sólo a los estudiantes. La línea 78 hace un descuento del 5% sólo a los jubilados. ¿Qué línea conviene tomar a los estudiantes? ¿Y a los jubilados? Se supone que el nivel de los servicios es el mismo.

¿Qué variante aparece en el problema si la velocidad de la línea 78 entre B y C pasa a ser de 80 kilómetros cada hora, manteniéndose constantes los demás datos?

Algunas observaciones y comentarios

Opinamos que no es conveniente definir segmento como intersección de semirrectas. La noción de segmento es más sencilla que la de semirrecta. Los docentes que quieran enseñar algo sobre conjuntos, podrán hacer preguntas sobre intersección. ¿Cuál es la intersección del segmento $\overline{AB}$ con el segmento $\overline{BC}$ ?

No tiene importancia simbolizar puntos con mayúsculas o con minúsculas. Es simplemente una convención.

Las bifurcaciones del problema son muchas y se puede complicar según el nivel del curso o del programa del curso.

Por ejemplo, el gráfico puede exigirse en escala; el transportador permitirá medir los ángulos entre caminos.
Las posiciones de las ciudades pueden darse con referencia a un diagrama cartesiano.

Con velocidades, tiempos, recorridos y precios se pueden representar distintas funciones lineales.

Desde A , podríamos elegir entre los caminos AB y ACB mediante una pauta al azar (Por ejemplo: si al tirar un dado sale as o seis, voy por AB; en caso contrario por ACB). Si 180 personas siguen esta pauta, ¿cuántos aproximadamente irán por cada camino? ¿Por qué decimos aproximadamente?

El problema que estamos analizanda, podría ser planteado a alumnos de entre 12 y 14 años. Para alumnos de más de 14 años, el problema podría incluir el empleo del teorema del seno, del teorema del coseno, sistemas de ecuaciones, etc.

A medida que se avanza, también pueden emplearse caminos construidos con arcos de circunferencia...

No es necesario que continuemos porque usted lo hará mejor que nosotros. La idea central es: siempre que podamos, empleemos el tanto por ciento, las longitudes, las funciones... *No aislemos los conocimientos*, como en general lo hemos hecho hasta ahora. Evitemos que el alumno piense: "*con la evaluación se acabaron los ángulos; ahora vienen los vectores; mañana es la prueba de...*"

Los profesores que han hecho experiencias parecidas a la propuesta, las han encontrado provechosas y los alumnos han participado con entusiasmo.

**¡CUIDADO!**

Sin embargo deben evitarse las complicaciones excesivas a que puede llevarnos nuestra creatividad en un primer problema porque puede haber una dispersión malsana. Algunas ideas habrá que dejarlas para problemas posteriores.

## Un problema de triángulos...

* Dibujar tres triángulos en papel cuadriculado (por grupo).

* Determinar el área de cada uno de dos maneras distintas (una directa , otra indirecta), analizando las limitaciones de cada método.

* Elaborar una tabla con los resultados de todos los grupos con los siguientes datos:

| **Área** *(método directo)* | **Área** *(método indirecto)* | **Base** | **Altura** |
|---|---|---|---|
| | | | |

* Proponer posibles gráficos de: **A = f(h)** y **A = f(b)**.
¿Qué requisitos deberían cumplirse?.

* ¿Qué tipos de gráficos esperan obtener? ¿Qué información esperan obtener a partir de ellos?

* *"Comparar"* Área directa e indirecta. (Considerar las diferencias de los valores de la tabla con *"= b"* e *"= h"*).
Promediar los valores obtenidos por medición directa y comparar ese valor promedio con el valor obtenido por fórmula.

* Realizar gráficos de **A = f(h)** y **A = f(b)**, pero usando los resultados obtenidos por medición directa.
Discutir el trazado de la "recta más probable".

## Algunas observaciones y comentarios

La situación problemática anterior, puede ser trabajada grupalmente. Por ejemplo a tres grupos se les pide que trabajen con tres triángulos cuya base sea 6 cm , a otros tres contrs triángulos de 4 cm de altura.

Siguiendo las consignas, determinan el área de manera directa (contando cuadraditos) e indirecta (utilizando fórmula). Si dejamos trabajar solos a los alumnos, puede incluso que a algunos se les ocurra contar los cuadraditos de un rectángulo y dividir luego por dos. Si lo hacen , preguntemos: ¿Qué están aplicando?

Al graficar, discutamos con ellos si es posible considerar sólo un punto o debemos considerar las indeterminaciones de la medición. A estas indeterminaciones se las denomina en las ciencias experimentales, errores. Este nombre no está representando una equivocación sino una limitación en las mediciones. Discutamos con los chicos su importancia.

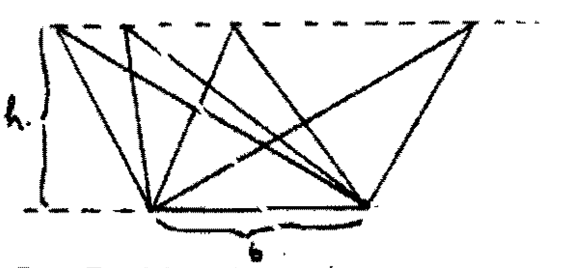
Con respecto a los gráficos cartesianos obtenidos, ¿Se trata de funciones? ¿Y sus inversas? Discutir qué tipo de dependencia de las variables hay. ¿Qué tipo de funciones aparecen? ¿Proporcionalidad?

Dada una base y una altura determinadas, ¿existen varios triángulos con estas medidas? ¿O es uno sólo? Son infinitos. Podemos trabajar con gomitas y verificarlo.

¿Qué relación hay entre las superficies de todos ellos? Son iguales. ¿Y entre sus perímetros? Son distintos.

¿Cuál es el de menor perímetro?

¿Cuántos triángulos isósceles con las restricciones dadas hay? Uno si la altura es la correspondiente a la base. ¿Y si no? ¿Cuántos que no sean iguales? ¿Oblicuángulos? ¿Acutángulos? ¿Rectángulos?



Estas y otras preguntas pueden ser planteadas para que las discutan, para que formulen sus hipótesis,las verifiquen o las refuten. No debemos olvidar el papel fundamental de las demostraciones en Geometría.

Cambiemos ahora un poco el problema: Si damos una mediana y la base, (o una mediatriz y la base, o una bisectriz y la base), planteemos la situación y veamos entre todos qué conclusiones extraemos. Dejemos que los alumnos conjeturen y arriesguen.

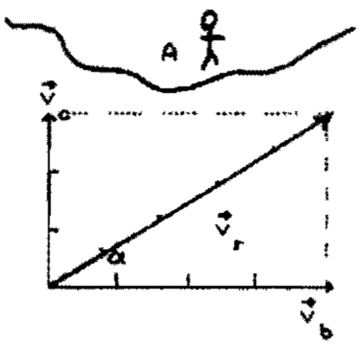
También es posible partir de un cuadrilátero en vez de un triángulo. ¿Qué elementos podemos fijar? ¿Qué cuadriláteros aparecen? ¿Qué propiedades presentan? ¿Cómo demostrarlas?

Demos un "salto al espacio". Trabajemos con una pirámide. Con una base fija, por ejemplo: un cuadrado. Juguemos con su altura, o con las alturas de sus caras laterales.
Surge la pirámide recta. Analicemos sus propiedades. Demostrémoslas. ¿Cómo son las alturas de las caras? ¿Qué tipo de triángulos son las caras?

O si no, veamos qué pasa con el cono. Recto, oblicuo...

Volvamos al caso plano: en lugar de un triángulo o un cuadrilátero, podríamos haber propuesto pensar y medir partiendo de otro polígono. Si no es regular, no hay tantas propiedades para demostrar. Si es regular, ¿es rico en propiedades diversas? ¿Hay muchos polígonos posibles o dado el número de lados y la medida de uno de ellos, el polígono queda determinado? Trabajemos en este caso calculando su apotema en función del lado. Sólo necesitamos el Teorema de Pitágoras. Trabajemos con varios polígonos...

## Una entrada a vectores



$\vec{v}_b$=velocidad del bote = 4 km/h
$\vec{v}_c$= velocidad de la corriente = 3 km/h
$\vec{v}_r$= velocidad resultante
Angulo entre corriente y velocidad bote = 90°
El Sr. A ve desplazarse el bote en la dirección $\vec{v}_r$

¿Cuál es el valor absoluto de $\vec{v}_r$?
Medimos según la escala. Aproximadamente 5 km/h.

*** Los dos vectores no pueden sumarse alegremente : 4 + 3**

Si los alumnos conocen el teorema de Pitágoras pueden aplicarlo. De lo contrario hay dos opciones:

a) enseñar brevemente la propiedad.
b) conformarse con la medición aproximada.

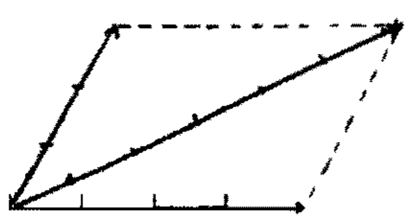
Antes de dar reglas, hay que preguntar a los alumnos: ¿cuál creen que es la resultante?, ¿hacia donde?

Según lo que sepan los alumnos, puede calcularse $\hat{\alpha}$.

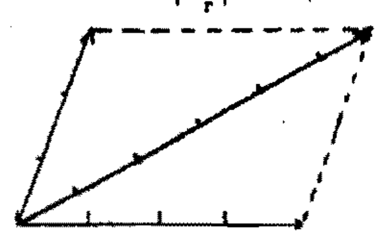
---------- o ----------

Cambiamos a continuación, la dirección de la velocidad de la corriente.

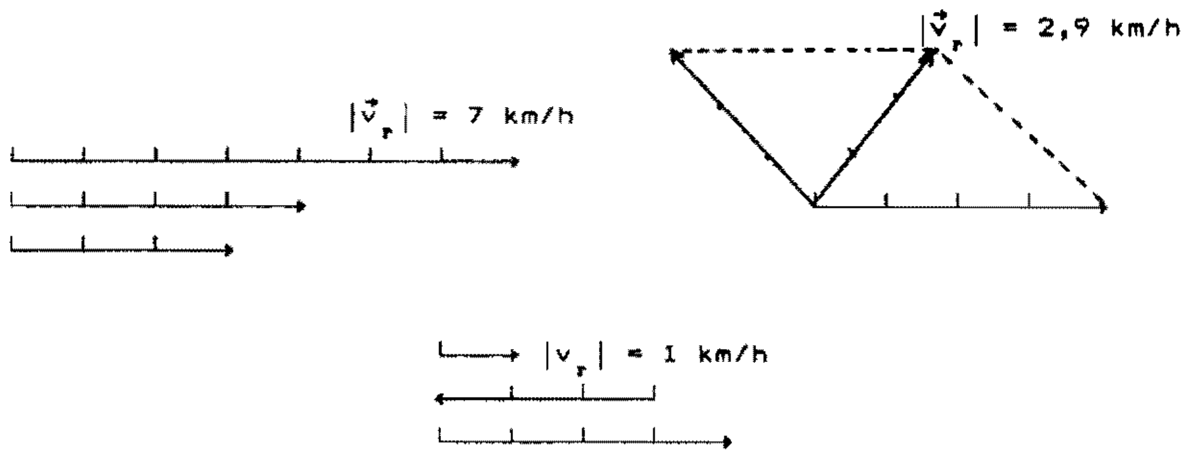
$|\vec{v}_r|$ = 6,2 km/h



$|\vec{v}_r|$ = 5,8 km/h



No parece prudente emplear el teorema del coseno; basta con medirlo en escala.



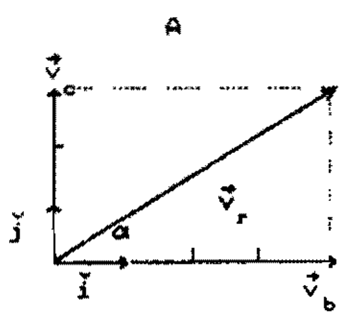

Si se dispone de una computadora, es fácil hacer los cambios de velocidad y ver cómo los paralelogramos se *"abren"*.

**Observación:** Puede aprovecharse la ocasión para repasar propiedades de los paralelogramos.

---------- o ----------

<u>Una continuación posible:</u>

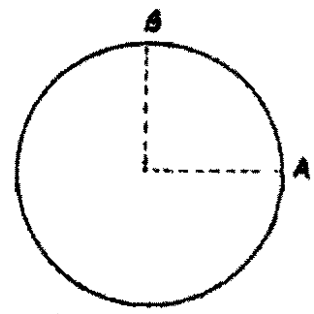
Un vector puede representarse en un sistema cartesiano adoptando los vectores $\check{i}$ y $\check{j}$ como *base* (no se define base , sino que se la emplea en el sentido del lenguaje ordinario).




$\vec{v}_{bote} = 4\ \check{i}$ $\qquad$ $\vec{v}_{corriente} = 3\ \check{j}$

$v_{resultante} = 4\ \check{i} + 3\ \check{j}$

*Problema:*




Un automóvil se mueve sobre una circunferencia con una rapidez(módulo de $\vec{v}$) igual a 3 m/s. Calcular el cambio de velocidad cuando pasa del punto A al B.

Trasladamos las velocidades a un sistema de ejes :

$$\vec{v}_B = -3\,\check{i} + 0\,\check{j}$$
$$\vec{v}_A = 0\,\check{i} + 3\,\check{j}$$

Restamos:

$$\Delta\vec{v} = -3\,\check{i} - 3\,\check{j}$$

Hacemos la prueba:

$$\Delta\vec{v} + \vec{v}_A = -3\,\check{i} - 3\,\check{j} + 0\,\check{i} + 3\,\check{j} = -3\,\check{i} + 0\,\check{j}$$

Observaciones:

Puede aprovecharse la ocasión para repasar longitud de la circunferencia.

No es pertinente calcular el área porque no tiene que ver con este problema.

Mejor hacer preguntas: ¿Cuál es la diferencia entre $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_A$, cuando el automóvil vuelve al punto A? , etc.

# ALGUNOS PROBLEMAS INTERESANTES

1) Tito es un criador de ovejas de la Patagonia. En su rebaño hay sólamente cuatro ovejas negras. Un día Tito encontró a sus cuatro ovejas negras ubicadas en forma equidistante, es decir de tal manera que la distancia entre dos cualesquiera de ellas es siempre igual. ¿Cómo estaban ubicadas las cuatro ovejas de Tito?

2) Nos hemos comunicado con un ser extraterrestre que nos ha transmitido el siguiente mensaje:

"Vivo en un planeta que no tiene atmósfera y que tiene varios soles. Cualquier lugar de la superficie de mi planeta está iluminado en todo momento por alguno de estos soles de manera directa. Si alguno de ellos se apagara, se oscurecerían algunas zonas de mi planeta."

¿Cuántos soles tiene el planeta de nuestro amigo? ¿Dónde están ubicados?

3) (a) Una mosca está encerrada en una caja cúbica de acrílico transparente de 1m de arista. La mosca está posada en un vértice de la caja. En el vértice opuesto hay una gota de miel. ¿Qué distancia debe volar la mosca para llegar a la gota de miel?

(b) ¿Cuánto mide la diagonal principal de un cubo de arista $\alpha$?

(c) Responder la misma pregunta para una caja no cúbica (paralelepípedo rectángulo) cuyas aristas tienen longitudes $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$.

(d) ¿Te animas a enunciar (y demostrar ...) un Teorema de Pitágoras tridimensional?

(e) Si la mosca ahora no puede volar y debe trasladarse caminando por las paredes de la caja, ¿qué distancia recorre para llegar hasta la gota de miel?

4) En una cartulina plana se han realizado tres agujeros de las siguientes formas y dimensiones respectivamente:

*1*- Un cuadrado de 10 cm de lado.

*2*- Un triángulo isosceles de 10 cm de base y 10 cm de altura correspondiente a dicha base.

*3*- Un círculo de 10 cm de diámetro.

Nos piden que determinemos, si es posible, un cuerpo sólido que pueda pasar *ajustadamente* a través de los tres agujeros.

("*Ajustadamente*" significa que cuando el sólido atraviesa la cartulina debe obturar totalmente el agujero correspondiente, entrando en contacto con todos los puntos del borde del agujero).

5) (a) ¿Es posible obtener una sección plana de un tetraedro regular que sea un cuadrilátero? ¿Y un cuadrado...?

(b)¿Puede seccionarse un cubo y obtener un triángulo equilátero? ¿Y un hexágono regular?

6) (a) Un cuadrado tiene lado $\ell$. En su interior, ¿es posible ubicar un triángulo equilátero de la misma longitud de lado? ¿Pueden ubicarse más triángulos que tengan estas mismas características?

(b) Pensemos ahora en la situación tridimensional análoga: Se tiene un cubo de arista $\alpha$. ¿Es posible ubicar dentro de él un tetraedro regular de arista $\alpha$? ¿O tal vez quepan dos...?

7) Juan está cansado de los calendarios tradicionales y afirma que está diseñando uno muy original. No es plano; todos los meses tienen en él la misma importancia ; no hay dos meses que se encuentren sobre el mismo plano y no queda lugar en él para ningún otro mes.

¿Es posible construir ese almanaque? ¿Qué forma tiene?

8) En mis manos tengo un poliedro de 9 vértices. En 3 de esos vértices confluyen 6 caras (en cada uno), mientras que en los 6 restantes vértices inciden 4 caras en cada uno. Todas las caras del poliedro son triángulos.

(a) ¿Cuántas caras tiene el poliedro?
(b) ¿Cuántas aristas tiene el poliedro?

9) (a) Consideremos un cubo. En cada cara, ubiquemos un punto en el centro de la misma. Unamos con segmentos los puntos correspondientes a caras adyacentes. Se ha formado así un nuevo poliedro (o en realidad el esqueleto de un poliedro).

1- ¿De qué poliedro se trata?
2- ¿Qué pasa si repetimos la operación a partir de él?
3- Contar vértices, aristas y caras de los poliedros que aparecen en el problema.

(b) Probar qué ocurre si el poliedro original es un tetraedro, un octoedro, un dodecaedro y un icosaedro (todos ellos regulares).

(c) Extraer conclusiones de (a) y (b).

(d) Analizar el problema planteado con otros poliedros conocidos: prismas, pirámides, bipirámides (de distintas bases).

10) Se dispone de 6 palillos de igual longitud con los que se quiere formar 4 triángulos equiláteros iguales cuyos lados tengan la misma longitud que cada palillo. ¿Es posible solucionar este problema? ¿De qué manera?

11) Jacinto tiene un trozo de cartulina de 20 cm por 15 cm. Según ha dicho, puede construir una caja de 9 cm por 16 cm de base, con la mayor altura posible para guardar los 112 dados de 1 cm de arista que tiene desparramados por ahí. Se pide:

(a) Construir la caja.

(b) Dar las instrucciones que permitan dicha construcción.

(c) ¿Cuál es la mayor altura posible a la que hace mención el relato?

(d) ¿Tiene tapa la caja?

(e) ¿Qué parte de la caja es ocupada al guardar los dados?

12) Se trazan tres circunferencias del mismi radio que pasan por un mismo punto. Demostrar que la circunferencia que pasa por los otros tres puntos en que se cortan las circunferencias dadas dos a dos tiene el mismo radio que las anteriores.

13) Se tiene un tetraedro regular de arista a . Encontrar la amplitud del ángulo con vértice en el punto medio de la arista y cuyos lados respectivos quedan determinados por dicho vértice y dos vértices del tetraedro. Analizar todas las posibilidades.

14) Un cubo tiene una esfera inscripta en él.

(a) Analizar qué sucede si el diámetro de la esfera inicial se reduce a la mitad, a la tercera parte, a la cuarta ya así sucesivamente (un número finito de veces), con la relación entre el radio y el número de esferitas que caben en el cubo (Todas tangentes entre ellas y tangentes a las caras del cubo).

(b) ¿Qué puede concluir acerca del volumen comprendido entre el cubo y la (las) esfera (esferas)? Justifique.

(c) Pase este problema al plano, teniendo en cuenta que:

*cubo* → *cuadrado*
*esfera* → *circulo*

Analice la relación entre el radio del circulo y el número de ellos que *"caben"* en el cuadrado.

¿Qué sucede con la superficie entre el cuadrado y los circulos?

15) En un prisma recto caben 64 esferitas congruentes entre sí y tangentes entre ellas y respecto de las caras del prisma.

(a) ¿Cuáles son las posibles dimensiones del prisma?

(b) De todos los prismas posibles, ¿cuál es el de menor área total?

(c) Hallar el volumen comprendido entre el prisma y las esferitas?

(d) ¿Qué sucedería con este volumen si cada esfera redujese su diámetro a la mitad? ¿Y si lo duplicara?

16) (a) Sobre cada uno de los lados de un triángulo rectángulo se traza una semicircunferencia cuyo diámetro tiene la medida de ese lado. Demostrar que el área del semicírculo construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidos sobre los catetos.

(b) Consideremos ahora el mismo triángulo, y construyamos sobre cada lado un hexágono regular cuyos lados sea iguales al lado correspondiente del triángulo. ¿Puede afirmarse algo respecto de las áreas de los tres hexágonos?

(c) ¿Es posible generalizar esa propiedad para el caso en que se construya un polígono regular cualquiera? ¿En qué se basa la demostración correspondiente?

17) En el interior de un vaso cilíndrico de 10 cm de diámetro de la base y 20 cm de altura, hay una gota de miel a 3 cm del borde superior del vaso. Una mosca está posada fuera del vaso a la misma altura y en la posición diametralmente opuesta. ¿Cuál es el camino más corto que puede seguir la mosca? (Considerar si le conviene caminar o volar en algún momento).
*(Esta mosca no es la misma del problema 3; aquella ya no podía volar. Pero ambas moscas son amigas y conocen el Teorema de Pitágoras).*

18) En un dodecaedro, la suma de las longitudes de todas las aristas es 9 dm y la suma de las areas de las caras que concurren en un vértice es 46,35 $cm^2$. ¿Cuál es la la longitud del camino más corto que une el centro de una cara y una arista?

# ÍNDICE