**Matemática Discreta**
**Segundo curso del Grado en Matemáticas, UAM**
**Curso 2010-2011**

**Hoja 1**

**1.** En una caja tenemos bolas rojas, azules, etc. Las hay de $n$ colores distintos, y tantas de cada color como necesitemos. ¿Cuántos collares distintos –de longitud en principio arbitraria– podremos fabricar si exigimos que las cuentas del collar sean de colores distintos?

**2.** Vamos a fabricar tarjetas de identificación poniendo símbolos en las casillas de una matriz $3 \times 3$. En las filas pueden repetirse los símbolos, pero los tres de cada columna han de ser distintos. ¿Cuántos símbolos son necesarios si queremos que haya al menos $10^9$ tarjetas distintas?

**3.** Hállense los cardinales de los conjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} X &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \cap B = \emptyset\} \\ Y &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \subset B\} \\ Z &= \{(A,B) : A, B \subset \{1,\dots,n\},\ A \subsetneq B\} \end{aligned}$$

**4.** (a) Queremos ordenar las 27 letras del alfabeto de forma que $a$ y $b$ no aparezcan consecutivamente. ¿De cuántas maneras distintas se podrá hacer?

(b) ¿Y si además $a$ y $c$ no pueden aparecer consecutivamente?

**5.** Tenemos un conjunto $\mathcal{X}$ y unos subconjuntos suyos $A_1, \dots, A_n$. Pruébense, por inducción, las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} &(a) \quad |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \ \le \ \min_{j=1,\dots,n} |A_j|; \\ &(b) \quad |A_1 \cap \cdots \cap A_n| \ \ge \ \sum_{j=1}^{n} |A_j| - (n-1)|\mathcal{X}|\,. \\ &(c) \quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \ \le \ \sum_{j=1}^{n} |A_j| \\ &(d) \quad |A_1 \cup \cdots \cup A_n| \ \ge \ \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|\,. \end{aligned}$$

**6.** ¿Cuántos números naturales menores que 60000 son primos con 30?

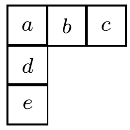
**7.** Un acertijo (algo truculento) debido a Lewis Carroll. En una batalla, de entre los 100 combatientes 80 perdieron un brazo, 85 una pierna, 70 un ojo y 75 una oreja. Un número indeterminado de ellos, $x$, perdió las cuatro cosas. Demuéstrese que $10 \le x \le 70$.

**8.** Debemos colocar 7 libros *distintos* en una estantería. Tres de ellos son libros de programación, otros tres son de matemática discreta y el restante es un libro de cálculo. ¿De cuántas formas lo podemos hacer si exigimos que no vayan juntos tres libros de la misma asignatura?

**9.** El temario de las oposiciones a Secundaria consta de 72 temas. El procedimiento en el examen es el siguiente: se sortean 5 temas y el opositor puede elegir el que más le guste.

Queremos estudiar únicamente $k$ de los temas, de manera que la probabilidad de que en el examen salga (al menos) un tema de los que nos hemos preparado sea, como mínimo, de un 95 %. ¿Cuál es el mínimo $k$ que garantiza esto?

**10.** En las cinco casillas de la pieza que se exhibe a la derecha podemos situar números naturales, con las siguientes restricciones: la suma de las tres casillas horizontales debe valer 21, y la suma de las tres verticales también. Necesitaríamos 2500 piezas distintas. ¿Las hay?




**11.** Una rana saltarina está situada en la casilla inferior izquierda de un tablero de ajedrez de $8 \times 8$, con la intención de llegar a la casilla opuesta en cuatro saltos, avanzando en cada uno de ellos hacia arriba y hacia la derecha. ¿De cuántas maneras lo puede hacer?

**12.** (a) Compruébese que el número de listas de longitud $n$ con ceros y unos, en las que hay exactamente $r$ unos, y sin unos consecutivos, es

$$\binom{n-r+1}{r}.$$

(b) ¿De cuántas formas distintas se puede extraer de $\{1, 2, \ldots, n\}$ un conjunto de $r$ números, de forma que no haya dos consecutivos?

**13.** Sea $D_n(k)$ el número de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ que fijan exactamente $k$ elementos. Así, $D_n(0)$ coincide con $D_n$, el número de desbarajustes de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pruébese que

$$D_n(k) = \binom{n}{k} D_{n-k},$$

donde conviene definir $D_0 = 1$.

**14.** Compruébese que

$$\max_{j=0,\ldots,2m} \left\{ \binom{2m}{j} \right\} = \binom{2m}{m}.$$

Obténgase y pruébese el resultado análogo para los coeficientes binómicos $\binom{n}{j}$, donde $n$ es impar.

**15.** Pruébense, con argumentos combinatorios, las siguientes identidades:

*a)* $$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}$$

*b)* $$\binom{2n}{n}^2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(n-k)!^2\, k!^2}$$

(*Indicación*: cuenta el número de maneras de elegir dos subconjuntos de tamaño $n$ de $\{1, \ldots, 2n\}$ no necesariamente disjuntos).

*c)* $$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{k}$$

(*Indicación*: clasifica los subconjuntos en función de su mayor elemento).