ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 20/03/2023

Β' ΜΕΡΟΣ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Συμβολίζω την άγνωστη συνάρτηση, έστω u, είναι συνάρτηση πολλών μεταβλητών πχ/: $u = u(x,y)$ και στην Δ.Ε εμφανίζονται μερικές παράγωγοι

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΔΕ

1. Εξίσωση Laplace: $\Delta u = 0$, στον $\mathbb{R}^2$

Αν $u = u(x,y)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ όπου Δ = Λαπλασιανή

2. Εξίσωση Θερμότητας: $u_t - \Delta u = 0$, $u = u(x,y,t)$.

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ όπου $u(x,y,t)$: θερμοκρασία στο σημείο (x,y) την χρονική στιγμή t.

3. Κυματική Εξίσωση: $u_{tt} - \Delta u = 0$, $u = u(x,y,t)$, $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$

↳ περιγράφει κύματα

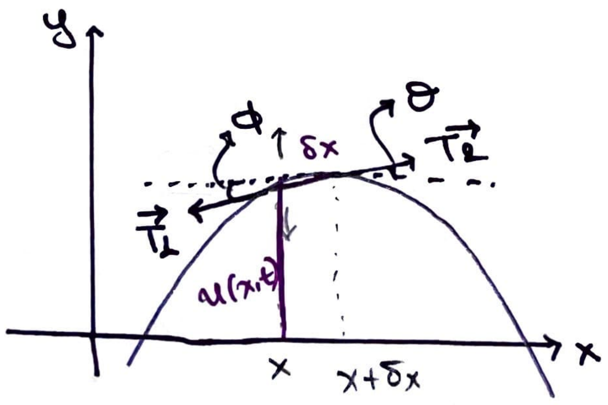
4. Πρώτης τάξης Δ.Ε: (εμφανίζει μία παράγωγο)

πχ: $u_t + u_x = f(x)$, $u = u(x,t)$

→ Πως εμφανίζεται μια τέτοια ΜΔΕ;

Ας δούμε την κυματική εξίσωση, σε μία απλή περίπτωση.

Το πρόβλημα παλλόμενης χορδής.



Παραδοχή: Τα σημεία της χορδής κινούνται μόνο κατακόρυφα όχι οριζόντια.

$\vec{T_1} = (-T_1\cos\phi, -T_1\sin\phi)$

$\vec{T_2} = (T_2\cos\theta, T_2\sin\theta)$

$u(x,t)$ = μετακίνηση του σημείου x την χρονική στιγμή t.

(<u>Υπόθεση</u>: Το βάρος της χορδής είναι αμελητέο σε σχέση με τις δυνάμεις τάσης.) 2

Αφού το κομμάτι της χορδής δx <u>δεν</u> μετακινείται οριζόντια θα έχω ότι: $T_1\cos\phi = T_2\cos\theta = T$ (= τάση των χορδή ανεξ. από το x) $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} T_1 = \dfrac{T}{\cos\phi} \\ T_2 = \dfrac{T}{\cos\theta} \end{array}\right]$

Η κατακόρυφη δύναμη είναι ίση με:

$$T_2\sin\theta - T_1\sin\phi = T\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - T\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = T(\tan\theta - \tan\phi)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\theta = u_x(x+\delta x,t) \\ \tan\phi = u_x(x,t) \end{array}\right] = T\left[u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)\right]$$

Νόμος Νεύτωνα: $\underbrace{\text{Δύναμη (η κατακόρυφη)}}_{T[u_x(x+\delta x,t)-u_x(x,t)]} = \underbrace{\text{μάζα}}_{\rho\cdot\delta x \ (*)}$ επί $\underbrace{\text{επιτάχυνση}}_{u_{tt}(x,t)}$

$$T\left[u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)\right] = \rho\cdot\delta x \cdot u_{tt}(x,t)$$

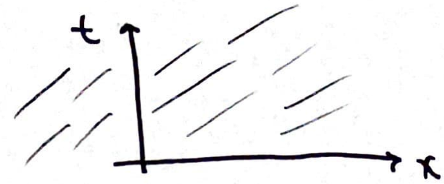
(*)
- Μάζα = πυκνότητα επί μήκος $= \rho\cdot\delta x$
- όπου $\rho = \dfrac{\text{βάρος}}{\text{μήκος}}$

Άρα: $T\left[u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)\right] = \rho\cdot\delta x\, u_{tt}(x,t) \Rightarrow$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{T}{\rho}\,\frac{u_x(x+\delta x,t) - u_x(x,t)}{\delta x}$$

Για $\delta x \to 0$: καταλήγω $u_{tt}(x,t) = \dfrac{T}{\rho}u_{xx}(x,t) \xRightarrow{\frac{T}{\rho} = c^2}$

$$\Rightarrow \boxed{u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t)}$$



▸ ΜΔΕ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Αναζητώ συνάρτηση $u(x,t)$ που ικανοποιεί $u_t+u_x=0$, $u(x,0)=\phi(x)$, $x\in\mathbb{R}$, $t>0$. Ορίζω $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\vec{n}$ μοναδιαίο.

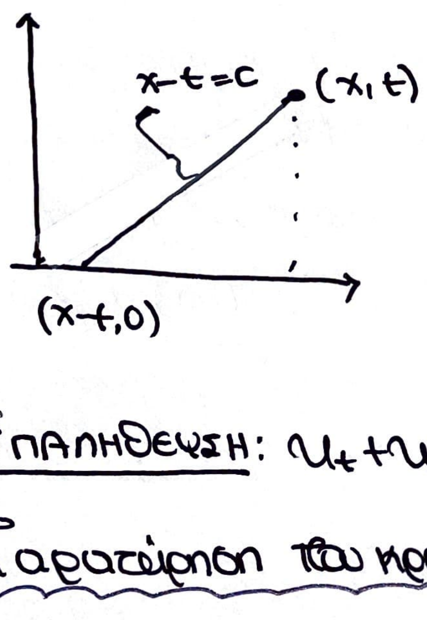
$$u_t+u_x=(u_t,u_x)\cdot(1,1)=\sqrt{2}\,\underbrace{(u_t,u_x)}_{\nabla u}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{\vec{n}}$$

$$\sqrt{2}\cdot\underbrace{\nabla u\cdot\vec{n}}_{=\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}}$$

$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ = κατα κατεύθυνση παράγωγος (στην κατεύθυνση $\vec{n}$)

Συνεπώς, η εξίσωση $u_t+u_x=0$ είναι ισοδύναμη με

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0,\quad \vec{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



Και κατα μήκος της ευθείας $x-t=$ σταθ η $u(x,t)=$ σταθερή. Οπότε εάν (x,t) τυχαίο σημείο η ευθεία $x-t=c$ τέμνει τον άξονα στο σημείο $(x-t,0)$

Άρα: $u(x,t)=u(x-t,0)=\phi(x-t)$

<u>Επαλήθευση</u>: $u_t+u_x=(\phi(x-t))_t+(\phi(x-t))_x=-\phi'(x-t)+\phi'(x-t)=0$

<u>Παρατήρηση που κρατάμε</u>: Υπάρχουν κάποιες καμπύλες (στο παράδειγμα είναι οι ευθείες $x-t=c$) κατα μήκος των οποίων η λύση μας ικανοποιεί κάποια ΣΔΕ (στο παράδειγμα $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}=0$)

↳ Οι καμπύλες αυτές λέγονται <u>χαρακτηριστικές καμπύλες</u>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί η λύση του προβλήματος

(*) $u_t + a u_x = b$, $a,b \in \mathbb{R}$, $u(x,0) = \phi(x)$

ΛΥΣΗ

Έστω $\vec{\sigma}(s) = (x(s), t(s))$ οι χαρακτηριστικές καμπύλες

Κατά μήκος αυτής της καμπύλης. Έστω $z(s) = u(x(s), t(s))$

Τότε έχω $z'(s) = u_x(x(s),t(s)) \underbrace{\frac{dx(s)}{ds}}_{=a} + u_t(x(s),t(s)) \underbrace{\frac{dt(s)}{ds}}_{1=}$ (1)

Θέλω η $z'(s)$ να είναι ίση με το αριστερό μέλος της (*)

Συνεπώς, $\frac{dx(s)}{ds} = a \Rightarrow x(s) = as + c_1$

$\frac{dt(s)}{ds} = 1 \Rightarrow t(s) = s + c_2$

Πως επιλέγω τις σταθερές c_1, c_2;

⇝ Απάντηση: Τις επιλέγω έτσι ώστε όταν $s=0$, να βρίσκομαι πάνω στην καμπύλη (εδώ ο άξονας των x) που μου έχουν δώσει τα αρχικά (ή συνοριακά) δεδομένα. Δηλαδή θέλω $(x(0), t(0)) = (x_0, 0)$

Δηλαδή $(c_1, c_2) = (x_0, 0) \Rightarrow \begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ Η αναπαράσταση των χαρ. καμπυλών είναι $\left.\begin{matrix} x(s) = as + x_0 \\ t(s) = s \end{matrix}\right\}$

Κατά μήκος των χαρ. της ΣΔΕ από (1)

$z'(s) = b \Rightarrow z(s) = bs + z_0$

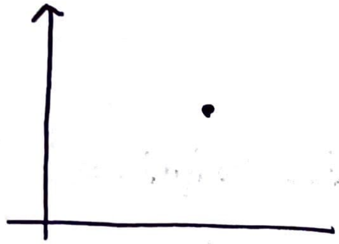
$z_0 = z(0) = u(x_0, y_0) = u(x_0, 0) = \phi(x_0)$

Μέχρι στιγμής: $x(s) = as + x_0$

$t(s) = s$

$z(s) = bs + \phi(x_0)$

Εστω (x,t) τυχαίο σημείο. Θα βρω την $u(x,t)$.



Απο το (x,t) περνάει κάποια χαρ. καμπύλη

$(x(s), t(s))$: $x = as + x_0$

$t = s$

$z(s) = bs + \phi(x_0)$

Βρίσκω τα s, x_0 που αντιστοιχούν σ' αυτή την καμπύλη

$s = t$ (αντιστροφή) και έχω ότι:

$x_0 = x - at$

$$u(x,t) = u(x(s), t(s)) = z(s) = bt + \phi(x_0) = bt + \phi(x - at)$$

στο (x,t)

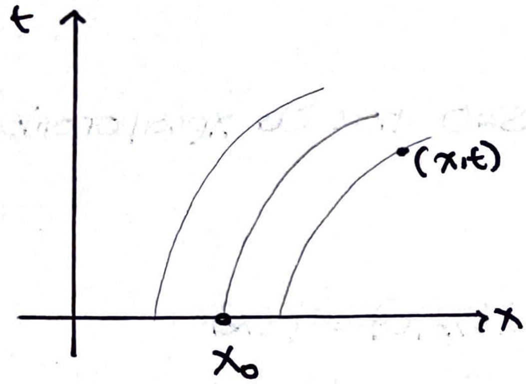
για την χαρακτηριστική

με $s = t$, $x_0 = x - at$

Διαφορικές Εξισώσεις | Τρίτη 21/03/2023

• Μέθοδος Χαρακτηριστικών για Πρωτοτάξιες (ΜΔΕ)

Παρ 1| $u_t + t u_x = (t+x)u$, $t>0$, $u(x,0)=\phi(x)$, $u(x,t)$



Πρόβλημα Cauchy = δίνω δεδομένα για $t=0$, $x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ Βήμα 1, Εύρεση χαρακτηριστικών καμπύλων $(x(s),t(s))$, s = παράμετρος

$t = s + c_1$

$$\frac{dx(s)}{ds} = t(s), \quad \frac{dt(s)}{ds} = 1 \Rightarrow x'(s) = s + c_1 \overset{\text{ολοκληρώνω}}{\rightsquigarrow} x = \frac{1}{2}s^2 + c_1 s + c_2$$

→ Για να βρω τις σταθερές ολοκλήρωσης (c_1,c_2), απαιτώ για $s=0$ το αντίστοιχο σημείο της χαρ. καμπύλης βρίσκεται εκεί όπου μας έχουν δώσει τα αρχικά δεδομένα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα πάνω στον άξονα x. Έστω στο σημείο $(x,t)=(x_0,0)$. Δηλ $(x(0),t(0)) = (x_0,0) \Leftrightarrow (c_2,c_1) = (x_0,0)$

Άρα $c_2 = x_0$, $c_1 = 0$.

Βήμα 2| Βρίσκω και λύνω την ΣΔΕ που ικανοποιεί η λύση κατά μήκος των χαρ. καμπυλών $z(s) = u(x(s),t(s))$

Έστω η ΜΔΕ: $a(t,x,u)u_t + b(t,x,u)u_x = F$ και έστω οι χαρ. καμπύλες: $z(s) = u(x(s),t(s))$, $\frac{dt}{ds} = a(t(s),x(s),z(s))$, $\frac{dx}{ds} = b(t(s),x(s),z(s))$, $\frac{d}{ds}u(x(s),t(s)) = u_x \underbrace{\frac{dx}{ds}}_{b} + u_t \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{a}$

Συνέχεια βήματος 2

$$z'(s) = (t(s)+x(s))\,z(s) = \left(\frac{1}{2}s^2+s+x_0\right) z(s)$$

$$\frac{z'(s)}{z(s)} = \frac{1}{2}s^2+s+x_0 = (\ln|z|)' = \frac{1}{2}s^2+s+x_0 \Rightarrow$$

$$\ln|z| = \frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2+x_0 s \Rightarrow \left.|z| = e^{c_3} e^{\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2+x_0 s}\right] \quad (1)$$

Για να βρώ την σταθερά c_3 θα βάλω $s=0$ και θα χρησιμοποιήσω τα αρχικά δεδομένα (δηλ $u(x_0,0)=\phi(x)$)

Για $s=0$ | Έχω $z(0) = u(x(0),t(0)) = u(x_0,0) = \phi(x_0)$

Ενώ το δεξί μέλος της (1) είναι $= e^{c_3}$. Άρα $|\phi(x_0)| = e^{c_3}$

και $\boxed{z(s) = \phi(x_0)\, e^{\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2+x_0 s}}$ (2)

ΒΗΜΑ 3º | Γράφω την τελική λύση της εξίσωσης. Έστω (x,t) τυχαίο σημείο με $t>0$. Από το σημείο αυτό βρίσκω ποια χαρακτηριστική καμπύλη περνάει. Έστω ότι περνάει η $(x(s),t(s))$. Στο σημείο (x,t) θα είναι:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}s^2+x_0 \\ t &= s \end{aligned}\right\} (3)$$

Στην (3) λύνω ως προς x_0, s : $\left.\begin{aligned} s &= t \\ x_0 &= x-\frac{1}{2}t^2 \end{aligned}\right]$

«κάνω αναστροφή»

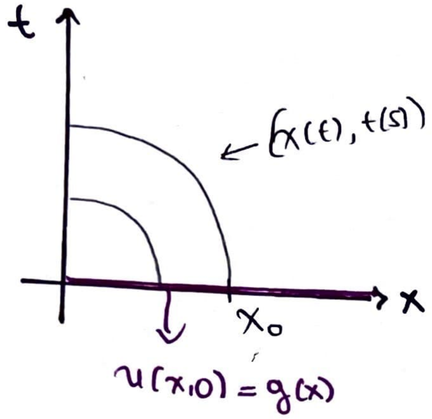
Οπότε έχω $u(x,t) = \underbrace{u(x(s),t(s))}_{\text{για το } s, x_0 \text{ που βρήκα με την αναστροφή}} = z(s) \overset{(2)}{=}$

$$= \phi(x_0)\, e^{\frac{1}{6}s^3+\frac{1}{2}s^2+x_0 s} = \phi\left(x-\frac{1}{2}t^2\right) e^{\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{2}t^2+\left(x-\frac{1}{2}t^2\right)t}$$

$$= \phi\left(x-\frac{1}{2}t^2\right) e^{-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+xt}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

$$x u_t - t u_x = u \,, \quad t>0,\ x>0,\ u(x,0)=g(x) \text{ για } x>0$$



ΒΗΜΑ 1

$$\frac{dt(s)}{ds} = x$$

$$\frac{dx(s)}{ds} = -t \Rightarrow x'' = -\underset{-x}{\underset{\parallel}{t'}} \Rightarrow \boxed{x''+x=0}$$

$$\chi\Pi = 0 \Rightarrow k^2+1=0 \Rightarrow k=\pm i$$

$$x(s) = c_1\cos s + c_2 \sin s$$

$$t(s) = c_1 \sin s - c_2 \cos s$$

Για $s=0$: $(x(0),t(0)) = (x_0,0) \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} c_2=0 \\ c_1=x_0 \end{matrix}}$

Άρα, $\boxed{\begin{matrix} x(s) = x_0\cos(s) \\ t(s) = x_0\sin(s) \end{matrix}}$ (1)

ΒΗΜΑ 2 $z(s) = u(x(s),t(s))$, $z'(s) = z(s) \Rightarrow z(s) = c_3 e^s$

Για $s=0$: έχω $z(0) = u(x(0),t(0)) = u(x_0,0) = g(x_0) = c_3$

Άρα $\underline{c_3 = g(x_0)}$ και $\underline{z(s) = g(x_0)e^s}$

ΒΗΜΑ 3 Έστω (x,t) τυχαίο. Αναστρέφουμε την (1):

$$\left.\begin{matrix} \tan s = \frac{t}{x} \Rightarrow s = \arctan\frac{t}{x} \\ x_0 = (x^2+t^2)^{\frac{1}{2}} \end{matrix}\right\} \quad (2)$$

$$u(x,t) = \underbrace{u(x(s),t(s))}_{\text{για τα } s,\, x_0 \text{ που δίνει η (2)}} = z(s) = g(x_0)e^s = g\left[(x^2+t^2)^{\frac{1}{2}}\right] e^{\arctan\frac{t}{x}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

SOS

$$xu_x + yu_y + u_z = u \ , \quad u(x,y,0) = h(x,y) \ , \ z>0$$

ΛΥΣΗ

ΒΗΜΑ 1

$$\frac{dx(s)}{ds} = x \ , \quad \frac{dy(s)}{ds} = y \ , \quad \frac{dz}{ds} = 1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x(s) = c_1 e^s \\ y(s) = c_2 e^s \\ z(s) = s + c_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Για $s=0$ δηλαδή $(\underset{c_1}{x(0)}, \underset{c_2}{y(0)}, \underset{c_3}{z(0)}) = (x_0, y_0, 0) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} c_1 = x_0 \\ c_2 = y_0 \\ c_3 = 0 \end{array}}$

ΒΗΜΑ 2

$$\left.\begin{array}{l} f(s) = u(x(s), y(s), z(s)) \\ f'(s) = f(s) \Rightarrow f(s) = c_4 e^s \end{array}\right\} \Rightarrow f(s) = h(x_0, y_0) e^s$$

$$c_4 = f(0) = u(x_0, y_0, 0) = h(x_0, y_0)$$

(*) αντιστροφη: $\left.\begin{array}{l} s = z \\ y_0 = y e^{-z} \\ x_0 = x e^{-z} \end{array}\right\}$

ΒΗΜΑ 3

$$u(x,y,z) = \ldots = f(s) = h(x_0, y_0) e^s =$$

$$= h(xe^{-z}, ye^{-z}) e^z$$