UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

WENDER FERREIRA LAMOUNIER

A GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DO ESPAÇO EUCLIDIANO $\mathbb{R}^n$

Boa Vista - RR
2014

WENDER FERREIRA LAMOUNIER

A GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DO ESPAÇO EUCLIDIANO $\mathbb{R}^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Joselito de Oliveria.

Boa Vista - RR
2014

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

L236g Lamounier, Wender Ferreira.
A geometria analítica do ensino médio no contexto do Espaço euclidiano R^n / Wender Ferreira Lamounier – Boa Vista, 2014.
61 f.

Orientador: Profº. Dr. Joselito de Oliveira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em rede.

1 – Geometria analítica. 2 – Espaço Euclidiano. 3 – Hiperplano. 4 – Hiperesfera. I - Título. II – Oliveira, Joselito de (orientador).

CDU – 514.12

WENDER FERREIRA LAMOUNIER

A GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO NO CONTEXTO DO ESPAÇO EUCLIDIANO $\mathbb{R}^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Sociedade Brasileira de Matemática-SBM e Universidade Federal de Roraima-UFRR, como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Matemática, defendida em 28 de abril de 2014, e avaliado pela seguinte banca examinadora:

Joselito de Oliveira

Prof. Dr. Joselito de Oliveira - UFRR
Orientador

Carlos A R Cunha

Prof. Dr. Carlos Alberto Raposo da Cunha - UFSJ

Luciano F. Silva

Prof. Dr. Luciano Ferreira Silva - UFRR

Ao saudoso pai, Manoel Afonso Lamounier.
As tuas palavras de ensinamento faz-me continuar batalhando e vencendo, transpondo os obstáculos.
A mãe guerreira, Joana Darc Ferreira Lamounier, pela luta e dedicação em prol da minha educação.
A irmã companheira, Janaina Lamounier Ferreira, que durante toda a minha vida esteve sempre do meu lado.

AGRADECIMETOS

Ao meu Senhor e Salvador que tem sido minha Fonte de sabedoria.

A minha amada esposa Noara Milene Medeiros Lamounier e ao meu agraciado filho Daniel Medeiros pela paciência e compreensão ao tempo que abdiquei de ficarmos juntos para me dedicar a esse trabalho e por acreditarem sempre no meu potencial.

Ao prof. Dr. Joselito de Oliveira pela orientação e direcionamento na escolha do tema.

A a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo apoio financeiro.

A Sociedade Brasileira de Matemática – SBM pela criação e direção do PROFMAT e a Universidade Federal de Roraima – UFRR pela implementação desse curso.

Aos professores do PROFMAT - UFRR, pela competência e incentivo.

Aos colegas do curso, Ana Maria, Jerrimar, Valter, Rodson, Denis, Admilson e Eduardo, pelo apoio e companheirismo.

RESUMO

Neste trabalho é apresentada uma abordagem dos temas estudados na Geometria Analítica do Ensino Básico. Destinado a professores e alunos de iniciação científica do Ensino Médio tem por finalidade transpor a nossa limitada visualisação das formas e relações geométricas vistas na Geometria Analítica básica, estudando-as a luz de uma visão n-dimensional. Usa-se como suporte teórico a Álgebra Vetorial, que nos possibilitará o entendimento de como funciona no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ os elementos da Geometria Analítica. Inicialmente são apresentados alguns elementos da Álgebra Vetorial que nortearão o estudo no referido espaço, encontrados na literatura. Apresenta-se as condições para a colinearidade e coplanaridade de pontos. Bem como o cálculo da distância entre pontos, entre ponto e reta, entre retas e entre ponto e hiperplano, as posições relativas entre retas, entre reta e o hiperplano e entre hiperplano e hiperesfera.

Palavras-chaves: Espaço Euclidiano. Hiperplano. Hiperesfera.

ABSTRACT

In this work a wider approach of the topics studied in the Analytical Geometry of Basic Education will be presented. For teachers and high school students, aims to overcome our limited visualization of geometric shapes and geometric relationships seen in the Analytic Geometry Basic, studying the light of an n-dimensional view. Is used as the theoretical support the Vector Algebra, which will enable us to understand how it works in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ elements of analytic geometry. Initially some elements of Vector Algebra that will guide the study in Euclidean space. It presents the conditions for collinearity and coplanarity of points. As well as calculating the distance between points, between point and the straight, between straights, between point and hyperplane and the relative positions between straights, between straight and hyperplane and between hyperplane and hypersphere.

Keywords: Euclidean space. Hyperplane. Hypersphere.

Sumário

INTRODUÇÃO

No Ensino Médio estudam-se elementos da Geometria Analítica, numa abordagem não vetorial, tais como as fórmulas de distância entre pontos e entre pontos e retas, posições entre retas e entre retas e circunferências, equações de retas e circunferências através de representações algébricas no $\mathbb{R}^2$ (IEZZI, 2005). Da mesma forma na graduação o acadêmico de matemática estuda esses elementos numa abordagem vetorial tanto no plano como no espaço. Mas como seria a representação desses elementos em dimensões maiores que 3? Então esse questionamento nos levou a estudar os referidos elementos geométricos no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Observou-se então que esse objeto de estudo encontrava-se de forma fragmentada na literatura, como, por exemplo em (LIMA, 2005) e (SANTOS, 2007).

Esta dissertação tem como objetivo reunir todos esses elementos seguindo a mesma sequência didática encontrada em livros do Ensino Médio como por exemplo (IEZZI, 2005), representando esses elementos estudados no Ensino Médio para o Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Proporcionando assim, uma visão mais ampla da Geometria Analítica estudada na Educação Básica, bem como o acesso da teoria por estudantes do Programa de Iniciação Cientifica no Ensino Médio (PICEM) e da Licenciatura em Matemática, e finalmente por professores.

O estudo para a elaboração desta dissertação desenvolveu-se de forma bibliográfica referente ao tema. Após esse levantamento começou-se a estudar a teoria, e posteriormente começamos a pesquisar e desenvolver as demonstrações necessárias para a representação dos elementos da Geometria Analítica do Ensino Médio, vistos em (Iezzi, 2005), para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ definido em (Lima, 2005) e discutidos em (Santos, 2007). Exemplos das definições e resultados são apresentados, resgatando assim a Geometria Analítica do Ensino Médio.

No capítulo um será apresentada a teoria que servirá de suporte teórico para o trabalho, onde definiremos o Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$, seus elementos e a fórmula da distância entre pontos no $\mathbb{R}^n$. No capítulo dois apresentaremos as equações, paramétricas e simétricas, da reta no $\mathbb{R}^n$. O Teorema de Pitágoras para vetores no $\mathbb{R}^n$, encontrado em (HÔNIG, 1976 p. 191) , e o cálculo da distância entre ponto e reta. No capítulo três será apresentado a equação do hiperplano e estudaremos a distância entre ponto e hiperplano, posições relativas entre retas, distância entre retas paralelas e posições relativas entre reta e o hiperplano. No capítulo quatro será apresentado a equação da hiperesfera, bem como um estudo sobre as posições relativas entre hiperplano e hiperesfera.

Observamos que alguns dos resultados apresentados neste trabalho, salvo engano, não se encontram na literatura do referido campo de estudo.

Capítulo 1

PRELIMINARES

Nesse capítulo construiremos a teoria suporte do desenvolvimento do trabalho. Na primeira seção definiremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ apresentando alguns exemplos particulares usados no ensino médio. Na segunda seção definiremos igualdade de potos no $\mathbb{R}^n$ e a relação entre vetores e pontos no $\mathbb{R}^n$. Na seção três definiremos as operações de soma de vetores no $\mathbb{R}^n$, bem como o produto de vetor por escalar e demosntraremos uma proposição de simetria entre vetores do $\mathbb{R}^n$. Na seção quatro definiremos produto interno e norma de vetores no $\mathbb{R}^n$ e apresentaremos algumas propriedades relacionadas bem como a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Na seção cinco chegaremos a fórmula da distância entre dois pontos do $\mathbb{R}^n$. Na seção seis discutiremos a colinearidade de pontos.

1.1 O Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$

Apresentaremos a seguir a definição de Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$. Mostraremos como é apresentado ponto e vetor no $\mathbb{R}^n$ e a relação de igualdade. Em seguida serão apresentados alguns exemplos para o $\mathbb{R}^n$, quando $n = 1, 2$ e 3.

Definição 1.1.1 (Definição de Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$)**.** *Chamamos de Espaço Euclidiano n-dimensional o produto cartesiano de n fatores iguais a $\mathbb{R}$, isto é;*

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}}_{n \text{ fatores de } \mathbb{R}}, \, n \geq 1$$

(LIMA, 2005, p. 1).

Dessa forma os pontos do $\mathbb{R}^n$ são todas as n-uplas $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ cujas coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ são números reais.

Exemplo 1.1.1. *De acordo com a definição (1.1.1), podemos conhecer algumas estruturas euclidianas conhecidas como:*

i) $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ *é a reta, ou seja, o conjunto dos números reais.*

ii) $\mathbb{R}^2$ *é o plano ou seja o conjunto dos pares ordenados* (x, y)*, onde* x *e* y *são números reais.*

iii) $\mathbb{R}^3$ *é o espaço euclidiano tridimensional da Geometria Analítica, cujos pontos são as ternas ordenadas* $P = (x, y, z)$*, onde* x*,* y *e* z *são reais.*

1.2 Coordenadas e vetores no $\mathbb{R}^n$

Os elementos de $\mathbb{R}^n$ serão às vezes chamados pontos e às vezes vetores. Geometricamente, considerar $x \in \mathbb{R}^n$ como vetor significa imaginar a seta que tem origem no ponto 0 e extremidade em x. (LIMA, 2005, p. 2)

Geometricamente, considerar $x \in \mathbb{R}^n$ como vetor significa imaginar um segmento orientado com origem no ponto 0 e extremidade no ponto x. Isto é, o vetor $x = \overrightarrow{0x} = (x_1 - 0, x_2 - 0, ..., x_n - 0)$. Desta forma é como se o vetor x fosse o segmento orientado $\overrightarrow{0x}$, com origem no ponto $0 = (0,\ 0,\ ...,\ 0)$ e extremidade em $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Com isso, o vetor $v = \overrightarrow{AB}$, onde $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, é dado por $v = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n)$.

De acordo com o discutido em Lima (2005), apresentaremos a seguinte definição.

Definição 1.2.1 (Igualdade entre dois pontos no $\mathbb{R}^n$)**.** *Sejam* $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *e* $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$*, pontos do* $\mathbb{R}^n$*. Desse modo temos que* $A = B$ *quando,* $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_n$*.*

Por essa definição suponhamos dois pontos quaisquer $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, por exemplo. Então $A = B$ quando suas respectivas coordenadas são iguais, isto é, $a_i = b_i$, para $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 1.2.1.

1) *Sejam* $A = (a_1, a_2)$ *e* $B = (b_1, b_2)$*, pontos do* $\mathbb{R}^2$ *(plano), então para* $A = B$ *temos* $a_1 = b_1$ *e* $a_2 = b_2$*.*

2) *Sejam* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $B = (b_1, b_2, b_3)$*, pontos do* $\mathbb{R}^3$ *(espaço), então para* $A = B$ *temos* $a_1 = b_1$*,* $a_2 = b_2$ *e* $a_3 = b_3$*.*

1.3 Operação de Soma e Produto por escalar em $\mathbb{R}^n$

Nessa seção apresentaremos a definição de soma e produto de vetores por escalar no $\mathbb{R}^n$ bem como a simetria entre pontos no $\mathbb{R}^n$ de acordo com Lima(2005), de modo a organizar melhor nossa construção matemática.

Definição 1.3.1. *Dados* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$*,* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *vetores do* $\mathbb{R}^n$ *e um número real* α*, definimos a soma* $x + y$ *e o produto* $\alpha \cdot x$ *como:*

i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

ii) $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, ..., \alpha \cdot x_n)$

Observação 1.3.1. *O elemento neutro para a adição é o* $\boldsymbol{0} = (0, 0, ..., 0)$*. e o simétrico de* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *é* $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$*, pois* $x + (-x) = \boldsymbol{0}$*.*

Proposição 1.3.1 (Simetria)**.** *Sejam* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *e* $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$*,* y *é o simétrico de* x *se, e somente se,* $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2, ..., y_n = -x_n$*.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponha y simétrico de x, isto é, $x + y = \mathbf{0}$. Assim,

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (0, 0, ..., 0),$$

isto é,

$$(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n) = (0, ..., 0).$$

Logo $x_i + y_i = 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Somando ambos os membros por $-x_i$ temos

$$\begin{aligned} (-x_i) + (x_i + y_i) &= -x_i + 0 \\ (-x_i + x_i) + y_i &= -x_i \\ 0 + y_i &= -x_i \\ y_i &= -x_i \end{aligned}$$

Desse modo temos

$$y = (y_1, y_2, ..., y_n) = (-x_1, -x_2, ..., -x_n) = (-1)(x_1, x_2, ..., x_n) = -x$$

.

($\Longleftarrow$) Suponha $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2, ..., y_n = -x_n$, isto é,
$y = (-x_1, ..., -x_n)$.

Então,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \\ &= (x_1 + (-x_1), x_2(-x_2), ..., x_n + (-x_n)) \\ &= (0, 0, ..., 0) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

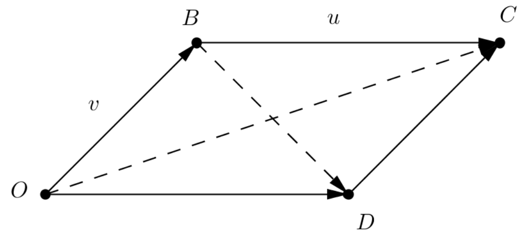
Logo y é o simétrico de x. O que prova a proposição. $\square$

Para o ser humano é possível fazer uma representação geométrica apenas para $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, enquanto que para o $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 4$ a única representação que temos é a algébrica. Portanto, em se tratando do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ todas as argumentações serão feitas lançando mão da álgebra vetorial.

Quando estudamos as operações de vetores no plano como por exemplo a soma definida anteriormente, que pode ser representada da seguinte forma: seja $v = \overrightarrow{0B}$ e $u = \overrightarrow{BC}$

a soma é representada pelo segmento orientado $\overrightarrow{0C}$. Como na figura abaixo:

Figura 1.1:



Fonte: HEFEZ (2012, p. 194)

Observando o paralelogramo temos que $v = \overrightarrow{0B}$, $u = \overrightarrow{BC}$, $v + u = \overrightarrow{0C}$ e que $u - v = \overrightarrow{BD}$. Além disso, podemos observar que $u = \overrightarrow{0D}$. Concluindo esse fato temos que a soma de dois vetores é a diagonal maior do paralelogramo cujos lados são formados pelas setas que representam os vetores, e a diferença entre eles é representado pela diagonal menor desse paralelogramo.

Trazendo esse fato para o caso do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, se considerarmos os pontos $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $Q = (y_1, y_2, ..., y_n)$ e os vetores u e v tais que; $u = \overrightarrow{0P}$ e $v = \overrightarrow{0Q}$, onde 0 é o vetor nulo. Dessa forma $v - u = \overrightarrow{PQ}$.

1.4 Produto interno e norma no $\mathbb{R}^n$

Apresentaremos aqui as definições de norma e produto interno para vetores no $\mathbb{R}^n$, mostraremos algumas propriedades e uma demonstração para o Teorema de Cauchy-Schwarz apresentado em Lima (2005).

Usaremos a definição dada por Lima (2005) para o *produto interno canônico.*

Definição 1.4.1 (Produto Interno). *Dados dois vetores $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, o produto interno de x e y é dado por:*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n$$

.

Para esse produto interno vale também as seguintes propriedades:

Proposição 1.4.1. *Sejam,* $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$ *e* $z = (z_1, ..., z_n)$ *vetores do* $\mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$ *então*

i) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

ii) $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle;$

iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \cdot \langle x, y\rangle; \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $x \neq \boldsymbol{0}$, *então* $\langle x, x\rangle > 0$

Demonstração.

i)

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n \\ &= y_1 \cdot x_1 + ... + y_n \cdot x_n \\ &= \langle y, x\rangle\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\langle x + z, y\rangle &= (x_1 + z_1) \cdot y_1 + ... + (x_n + z_n) \cdot y_n \\ &= x_1 \cdot y_1 + z_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n + z_n \cdot y_n \\ &= (x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n) + (z_1 \cdot y_1 + ... + z_n \cdot y_n) \\ &= \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\langle \alpha \cdot x, y\rangle &= \alpha \cdot x_1 \cdot y_1 + ... + \alpha \cdot x_n \cdot y_n \\ &= \alpha \cdot (x_1 \cdot y_1 + ... + x_n \cdot y_n) \\ &= \alpha \cdot \langle x, y\rangle; \quad \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

iv) Se $x = (x_1, ..., x_n) \neq \mathbf{0}$, então existe pelo menos um $x_k \neq 0$; $1 \leq k \leq n$. Assim

$$\langle x, x \rangle \ = \ x_1^2 + ... + x_k^2 + ... + x_n^2.$$

Desse modo, para $x_k \neq 0$ temos que $x_k^2 > 0$ qualquer que seja x_k; $\quad 1 \leq k \leq n$. Portanto $\langle x, x \rangle > 0$.

□

"Há uma infindade de normas que se pode considerar no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. A norma euclidiana é motivada pela fórmula do comprimento de um vetor no plano em coordenadas cartesianas, ..."(LIMA, 2005).

Diante disso, vamos considerar para esse estudo a norma euclidiana definida a seguir.

Definição 1.4.2 (Norma)**.** *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ a norma de x é definida por:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle},$$

isto é,

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Observação 1.4.1.

1 *Tem-se $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$, de modo que $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$ e $\|x\| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.*

2 *O número $\|x\|$ chama-se norma euclidiana ou comprimento do vetor $x \in \mathbb{R}^n$ (LIMA, 2005, p. 4).*

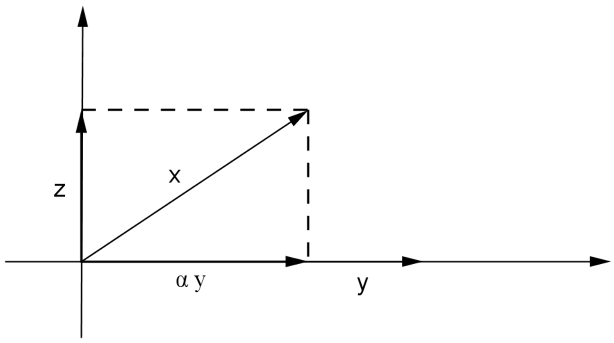
Definição 1.4.3 (Vetores ortogonais)**.** *Dois vetores $x, y \in \mathbb{R}^n$ são ortogonais quando $\langle x, y \rangle = 0$.*

Um fato direto é que $\mathbf{0}$ é ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^n$. Também e_i é ortogonal a e_j se $i \neq j$, enquanto que $\langle e_i, e_i \rangle = 1$.

Lema 1.4.1. *Dados* x *e* y *vetores do* $\mathbb{R}^n$*, com* $y \neq \boldsymbol{0}$ *e* $\alpha = \langle x, y\rangle/\|y\|^2$*, o vetor* $z = x - \alpha y$ *é ortogonal a* y*.*

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $z = x - \alpha y$, então

Figura 1.2:



Fonte: LIMA (2005, p. 5)

$$\begin{aligned}\langle z, y\rangle &= \langle x - \alpha y, y\rangle\\ &= \langle x, y\rangle - \alpha\langle y, y\rangle\\ &= \langle x, y\rangle - \alpha\|y\|^2\\ &= \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Teorema 1.4.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^n$*, tem-se* $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$*. Vale a igualdade se, e somente se, um dos vetores* x, y *é um múltiplo escalar do outro.*

Demonstração. A desigualdade é verificada para $y = 0$. Se, porém, $y \neq 0$, poremos $\alpha = \langle x, y\rangle/\|y\|^2$. Como acabamos de ver o vetor $z = x - \alpha y$ é ortogonal a y. Segue-se daí que

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \|z + \alpha \cdot y\|^2 \\
&= \langle z + \alpha y, z + \alpha y \rangle \\
&= \langle z, z + \alpha \cdot y \rangle + \langle \alpha \cdot y, z + \alpha \cdot y \rangle \\
&= \langle z, z \rangle + \langle z, \alpha \cdot y \rangle + \langle \alpha \cdot y, z \rangle + \langle \alpha \cdot y, \alpha \cdot y \rangle \\
&= \langle z, z \rangle + \alpha \cdot \langle z, y \rangle + \alpha \cdot \langle y, z \rangle + \alpha^2 \cdot \langle y, y \rangle \\
&= \|z\|^2 + \alpha^2 \cdot \|y\|^2 + 2\alpha \cdot \langle z, y \rangle, \quad \langle z, y \rangle = 0 \text{ pois } z \text{ e } y \text{ são ortogonais} \\
&= \|z\|^2 + \alpha^2 \cdot \|y\|^2
\end{aligned}
$$

Daí temos,

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 &\geq \alpha^2 \|y\|^2 = \langle x, y \rangle^2 / \|y\|^2, \text{ ou seja,} \\
\|x\|^2 \|y\|^2 &\geq \langle x, y \rangle^2 \\
\sqrt{\|x\|^2 \cdot \|y\|^2} &\geq \sqrt{\langle x, y \rangle^2} \\
\sqrt{\|x\|^2} \cdot \sqrt{\|y\|^2} &\geq |\langle x, y \rangle| \\
\|x\| \cdot \|y\| &\geq |\langle x, y \rangle|
\end{aligned}
$$

Se $z = \mathbf{0}$, então $x - \alpha y = \mathbf{0} \Longrightarrow x = \alpha y$.

Logo tome

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2\|y\|^2 &= \|\alpha y\|^2\|y\|^2 \\
&= \langle \alpha y, \alpha y\rangle\langle y, y\rangle \\
&= \alpha\alpha\langle y, y\rangle\langle y, y\rangle \\
&= \alpha\langle y, y\rangle\alpha\langle y, y\rangle \\
&= \langle \alpha y, y\rangle\langle \alpha y, y\rangle \\
&= \langle \alpha y, y\rangle^2 \\
&= \langle x, y\rangle^2.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Portanto a igualdade acontece se, e somente se, $z = 0$, ou seja, $x = \alpha \cdot y$. □

A norma euclidiana $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ goza das seguintes propriedades:

Proposição 1.4.2. *Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$*

1. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ *(desigualdade triangular);*
2. $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, *onde $|\alpha|$ significa o valor absoluto de α.*
3. $x \neq 0 \Rightarrow \|x\| > 0$ *e* $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Demonstração. Prova de *1.*

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ vetores do $\mathbb{R}^n$. Assim

$$\|x + y\| = \sqrt{\langle x + y, x + y\rangle}. \tag{1.2}$$

Elevando ambos os membros da igualdade acima ao quadrado obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x + y\rangle + \langle y, x + y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle.
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Como $\|x+y\|^2 \geq 0$ então $\langle x, y\rangle \geq 0$.

Do teorema de *Cauchy-Schwarz* temos que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Logo

$$\begin{aligned} \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &\leq (\|x\| + \|y\|)^2 \\ \|x+y\| &\leq \|x\| + \|y\|. \end{aligned}$$

Prova de *2*.

Seja α um número real, logo

$$\begin{aligned} \|\alpha \cdot x\| &= \sqrt{\langle \alpha \cdot x, \alpha \cdot x\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2 \cdot \langle x, x\rangle} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\langle x, x\rangle} \\ &= |\alpha| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Prova de *3*.
Se $x = (x_1, ..., x_n) \neq \mathbf{0}$, então pela proposição 1. 4. 1 $\langle x, x\rangle > 0$, logo como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} > 0.$$

Então

$$\|x\| > 0.$$

$\square$

Observe que: $\|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\|$.

Observamos que a norma no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma função real $\| \quad \| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. O que nos leva ao fato de que a norma no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ da origem a uma noção de distância em $\mathbb{R}^n$ da seguinte forma:

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, a distância de x e y é definida por

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

.

Exemplo 1.4.1.

1 Dados $x, y \in \mathbb{R}, d(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x-y)^2}$.

2 Dados $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos do $\mathbb{R}^2$, temos que $P_1 - P_2 = (x_1 - y_1, x_2 - y_2)$. Então

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \|P_1 - P_2\| \\ &= \sqrt{\langle (x_1 - y_1, x_2 - y_2), (x_1 - y_1, x_2 - y_2) \rangle} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}. \end{aligned}$$

1.5 Distância entre pontos do espaço euclidiano

De acordo com a definição de norma no $\mathbb{R}^n$, discutiremos a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos do $\mathbb{R}^n$ conforme apresentada por Santos (2007).
Seja $P = (x_1, ..., x_n)$ e $Q = (y_1, ..., y_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$, tais que os vetores $v = \overrightarrow{0P}$ e $u = \overrightarrow{0Q}$.
Dessa forma temos

$$\begin{aligned} v = \overrightarrow{0P} = (x_1 - 0, ..., x_n - 0) = (x_1, ..., x_n) = P \\ u = \overrightarrow{0Q} = (y_1 - 0, ..., y_n - 0) = (y_1, ..., y_n) = Q. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Então,

$$\begin{aligned} d(P,Q) &= d(v,u) \\ &= \|v-u\| \\ &= \|(x_1-y_1,...,x_n-y_n)\| \\ &= \sqrt{\langle (x_1-y_1,...,x_n-y_n),(x_1-y_1,...,x_n-y_n)\rangle} \\ &= \sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}. \end{aligned}$$

Seque que,

$$d(P,Q)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+...+(x_n-y_n)^2}. \tag{1.5}$$

Observação 1.5.1. *Utilizando essa fórmula no cálculo da distância entre dois pontos no plano temos:*

Sejam $A=(x_1,x_2)$ e $B=(y_1,y_2)$ pontos do plano, então

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$$

a fórmula usada no Ensino Médio para calcular a distância entre dois pontos no plano.

1.6 Colinearidade de pontos

Sabemos que três pontos no espaço são colineares se eles pertencem a mesma reta. Como funciona isso no $\mathbb{R}^n$? Vamos estudar a colienaridade de pontos no $\mathbb{R}^n$ usando vetores. Para isso, consideremos a seguinte definição.

Definição 1.6.1. *O vetor x é múltiplo do vetor y quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $x=\lambda y$.*

Observação 1.6.1.

(a) Todo vetor é múltiplo de si próprio, basta tomar $\lambda = 1$.

(b) O vetor $\boldsymbol{0}$ é múltiplo de qualquer vetor. De fato, dado um vetor qualquer x, temos $\boldsymbol{0} = 0x$. Em contrapartida nenhum vetor não nulo pode ser múltiplo do vetor $\boldsymbol{0}$.

Pois se $x \neq \boldsymbol{0}$ *e* $x = \lambda y$, *então* $\lambda \neq 0$ *e* $y = \dfrac{1}{\lambda}x$.

Assim, x *é múltiplo de* y *se, e somente se,* y *é múltiplo de* x, *quando* x *e* y *são vetores não nulos.*

(c) *Quando dois vetores são múltiplos dizemos que eles são Linearmente Dependentes. Vejamos, se* $1v = \lambda u$ *onde* $\lambda \neq 0$, *então* $1v - \lambda u = 0$. *Por outro lado se os vetores não são multiplos então eles são Linearmente Independentes.*

O resultado a seguir encontra-se para o caso $n = 3$. Para o caso $n > 3$, salvo engano, não se encontra na literatura.

Proposição 1.6.1. *Sejam* $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ *e* $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *vetores do* $\mathbb{R}^n$, *u e v são múltiplos um do outro se, e somente se,*

$$u_k v_j - u_j v_k = 0, \text{ para } 1 \leq k < j \leq n.$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Suponhamos v e u múltiplos, então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $v = \lambda u$. Logo, $v = (v_1, v_2, ..., v_n) = \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) = (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_n)$, ou seja,

$$v_j = \lambda u_j \text{ para todo } 1 \leq k < j \leq n.$$

Tome agora as seguintes igualdades: $v_k = \lambda u_k$ e $v_j = \lambda u_j$, para $1 \leq k < j \leq n$.

Multiplicando a primeira por u_j e a segunda u_k temos que,

$$v_k u_j = \lambda u_k u_j = v_j u_k \Longrightarrow v_j u_k = v_k u_j \Longrightarrow v_j u_k - v_k u_j = 0$$

para $1 \leq k < j \leq n$.

($\Longleftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que

$$\begin{gathered} v_2 u_1 - v_1 u_2 = \cdots = v_j u_k - v_k u_j = \cdots = v_n u_{n-1} - v_{n-1} u_n = 0 \\ 1 < k < j \leq n \end{gathered}$$

Se $u = 0$ então $u = 0v$, logo u é múltiplo de v.

Tomemos então $u \neq 0$ assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $u_1 \neq 0$. Então,

$$v_2u_1 - v_1u_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1}{u_1}u_2$$
$$\vdots$$
$$v_ku_1 - v_1u_k = 0 \Rightarrow v_k = \frac{v_1}{u_1}u_k$$
$$\vdots$$
$$v_nu_1 - v_1u_n = 0 \Rightarrow v_n = \frac{v_1}{u_1}u_n.$$

Tome $\lambda = \dfrac{v_1}{u_1}$ então $v_k = \lambda u_k$, onde $1 \leq k \leq n$.
Daí,

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, ..., v_n) &= (\lambda u_1, \lambda u_2, ..., \lambda u_n) \\ (v_1, v_2, ..., v_n) &= \lambda(u_1, u_2, ..., u_n) \\ v &= \lambda u. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Portanto v é múltiplo de u. $\square$

Definição 1.6.2. *Dois vetores não nulos u e v do $\mathbb{R}^n$, são colineares quando um deles é múltiplo do outro.*

Dessa forma, dados três pontos $A, B, C \in \mathbb{R}^n$, então eles são colineares quando os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são múltiplos um do outro, isto é

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB} \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}$$

Capítulo 2

A RETA

Nesse capítulo iremos desenvolver a equação paramétrica da reta e a equação simétrica da reta. Em seguida discutiremos a perpendicularidade entre retas no $\mathbb{R}^n$ e como calcular a distância entre um ponto e uma reta no $\mathbb{R}^n$. O caso para $n = 2$ encontra-se na literatura matemática do Ensino Médio, e o caso $n = 3$ no curso de Licenciatura em Matemática.

Proposição 2.0.2. *Um ponto P, pertence a reta r que passa pelos pontos A e B se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}.$$

Demonstração. ($\Longrightarrow$) seja P um ponto pertencente a reta r que passa pelos pontos A e B e seja

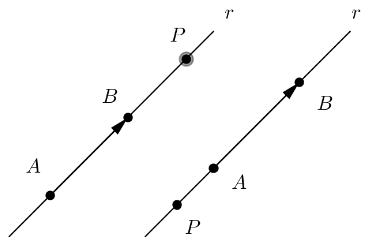
$$\alpha = \frac{d(A,P)}{d(A,B)}$$

.

Se o sentido de percurso de A para P coincidir com o sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = \alpha$, pois o ponto P é o único ponto da semireta de origem em A que passa por B tal que $d(A,P) = \alpha d(A,B)$ (ver figura 2.1).

Se o sentido de percurso ao longo de r, de A para P, for oposto ao sentido de A para B, então $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$, onde $\lambda = -\alpha$, pois o ponto P é o único ponto da semireta de origem em A oposta à semireta de origem A que passa por B tal que $d(A,P) = \alpha \cdot d(A,B)$ (ver figura 2.1).

Figura 2.1:



Fonte: Autor

($\Longleftarrow$) Dados três pontos A, B e P tal que exista um $\lambda \in \mathbb{R}$, onde

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Pela definição 1.6.1 o vetor $\overrightarrow{AP}$ é múltiplo do vetor $\overrightarrow{AB}$ e da definição 1.6.2 os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{AB}$ são colineares. Logo os pontos A, B e P são colineares. Daí temos que P pertence a reta r que passa pelos pontos A e B. $\square$

2.1 Equação paramétrica da reta que passa por dois pontos

Sejam $A = (a_1, a_2, ..., a_n), B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e r uma reta que passa pelos pontos A e B. Considere um ponto $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ qualquer de r. Pela proposição 2.0.2 existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}$, isto é

$$\begin{array}{rcl} (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n) & = & \lambda(b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n) \\ (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n) & = & (\lambda(b_1 - a_1), \lambda(b_2 - a_2), ..., \lambda(b_n - a_n)) \end{array}$$

Pela igualdade de pontos temos:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_n + \lambda(b_n - a_n), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Essa é a equação paramétrica da reta no $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 2.1.1.

i) Equação paramétrica da reta no $\mathbb{R}^2$*:*
Sejam $A = (a_1, a_2), B = (b_1, b_2)$ *pontos do* $\mathbb{R}^2$ *e* r *uma reta que passa pelos pontos* A *e* B*. Considere um ponto* $P = (x_1, x_2)$ *qualquer de* r*, então a equação paramétrica da reta* r *no plano é dada por.*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.2}$$

ii) Equação paramétrica da reta no $\mathbb{R}^3$*: Sejam* $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ *pontos do* $\mathbb{R}^3$ *e* r *uma reta que passa pelos pontos* A *e* B*. Considere um ponto* $P = (x_1, x_2, x_3)$ *qualquer de* r*, então a equação da reta* r *no espaço é dada por*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + \lambda(b_3 - a_3), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.3}$$

iii) Equação paramétrica da reta no $\mathbb{R}^4$*: Sejam* $A = (a_1, a_2, a_3, a_4), B = (b_1, b_2, b_3, a_4)$ *pontos do* $\mathbb{R}^4$ *e* r *uma reta que passa pelos pontos* A *e* B*. Considere um ponto* $P = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *qualquer de* r*, então a equação da reta* r *no espaço é dada por*

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda(b_1 - a_1) \\ x_2 = a_2 + \lambda(b_2 - a_2) \\ x_3 = a_3 + \lambda(b_3 - a_3) \\ x_4 = a_4 + \lambda(b_4 - a_4), \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Definição 2.1.1. *Dizemos que um vetor* $v \neq 0$ *é paralelo a uma reta* r*, quando para qualquer dois pontos* $A, B \in r$*, o vetor* $\overrightarrow{AB}$ *é múltiplo do vetor* v*. Nesse caso, escrevemos* $v//r$*.*

Com base nessa definição construiremos outra forma da equação paramétrica da reta para o espaço euclidiano n-dimensional.

Considere um vetor $v = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, paralelo a reta r que passa pelo ponto $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ do $\mathbb{R}^n$. Seja $P = (x_1, x_2, ..., x_n)$ um ponto qualquer do $\mathbb{R}^n$.

$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ é multiplo de v. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= \lambda v \\ (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n) &= \lambda(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \\ (x_1 - a_1, x_2 - a_2, ..., x_n - a_n) &= (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n) \end{aligned}$$

Pela igualdade de pontos no $\mathbb{R}^n$ temos:

$$r : \begin{cases} x_1 - a_1 = \lambda\alpha_1 \\ x_2 - a_2 = \lambda\alpha_2 \\ \quad\quad \vdots \\ x_n - a_n = \lambda\alpha_n, \text{ para algum } \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.5}$$

Ou seja,

$$r : x_k - a_k = \lambda\alpha_k, \quad 1 \leq k \leq n$$

Portanto a equação paramétrica da reta r paralela ao vetor $v = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ (dizemos nesse caso que v é o vetor diretor de r) que passa pelo ponto $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, pode ser representada pela forma:

$$r : x_k = a_k + \lambda\alpha_k,$$

para todo $1 \leq k \leq n$.

Exemplo 2.1.2.

1. *Sejam $v = (\alpha_1, \alpha_2)$ um vetor do $\mathbb{R}^2$ (plano) e $A = (a_1, ..., a_n)$ um ponto do $\mathbb{R}^2$. A equação da reta r no plano, paralela ao vetor v que passa pelo ponto A é dada por:*

$$r : \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.6}$$

2. *Sejam $v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ (espaço) e $A = (a_1, a_2, a_3)$ um ponto do $\mathbb{R}^3$. A equação da reta r no espaço, paralela ao vetor v que passa pelo ponto A é dada por:*

$$r : \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda\alpha_3, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.2 Equação simétrica da reta

Outra equação da reta pode ser obtida no caso em que $\alpha_i \neq 0$, para todo $1 \leq i \leq n$. Para tanto, basta isolar o parâmetro λ nas equações em (2.5), obtendo-se

$$\frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = ... = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n} = \lambda.$$

Portanto, a equação da reta r é dada por

$$r : \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = ... = \frac{x_n - a_n}{\alpha_n},$$

e é denominada equação simétrica da reta.

Exemplo 2.2.1. *Vejamos como fica a equação simétrica da reta no $\mathbb{R}^2$, no $\mathbb{R}^3$ e no $\mathbb{R}^4$.*

1 Seja $v = (\alpha_1, \alpha_2)$ um vetor do $\mathbb{R}^2$ onde α_1 e α_2 são ambos diferentes de zero e $A = (a_1, a_2)$ um ponto do $\mathbb{R}^2$. A equação simétrica da reta no plano, paralela ao vetor v que passa pelo ponto A é dada por:

$$r : \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2}.$$

2 Sejam $v = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ onde α_1, α_2 e α_3 são ambos diferentes de zero e $A = (a_1, a_2, a_3)$ um ponto do $\mathbb{R}^3$. A equação simétrica da reta no plano, paralela ao vetor v que passa pelo ponto A é dada por:

$$r : \frac{x_1 - a_1}{\alpha_1} = \frac{x_2 - a_2}{\alpha_2} = \frac{x_3 - a_3}{\alpha_3}.$$

3 Uma aplicação disso pode ser obtida estabelecendo um paralelo a teoria relativa de *Eisten* do *espaço tempo*, de modo que as três primeiras coordenadas se refere ao espaço e a quarta coordenada ao tempo. Assim sejam $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ um vetor do $\mathbb{R}^4$ (espaço tempo) onde v_1, v_2, v_3 e v_4 são ambos diferentes de zero e $A = (x_0, y_0, z_0, t_0)$ um ponto do $\mathbb{R}^4$. A equação simétrica da reta, paralela ao vetor v que passa pelo ponto A é dada por:

$$r : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3} = \frac{t - t_0}{v_4}$$

2.3 Retas Perpendiculares

Como um dos elementos da geometria análitica estudado em Iezzi (2005), apresenta a idéia de retas perpendiculares. Faremos esse estudo para retas no $\mathbb{R}^n$, propondo o seguinte.

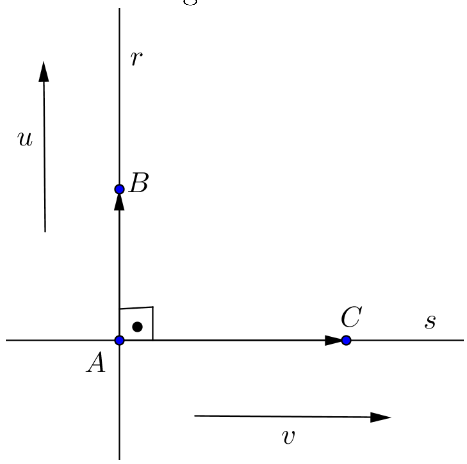
Definição 2.3.1. *Duas retas r e s são perpendiculares quando se intersectam em um único ponto e formam um ângulo reto.*

Proposição 2.3.1. *Sejam r e s retas distintas no $\mathbb{R}^n$ e A um ponto do $\mathbb{R}^n$ tal que $r \cap s = \{A\}$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$ os vetores diretores de r e s respectivamente.*

$$r \perp s \Leftrightarrow \langle u, v \rangle = 0$$

Demonstração. Tome r e s duas retas distintas tais que $r \cap s = A = (a_1, ..., a_n)$. Tome os vetores $u, v \in \mathbb{R}^n$ os vetores diretores de r e s respectivamente.

Figura 2.2:



Fonte: Autor

($\Longrightarrow$) Suponhamos $r \perp s$. Tome um ponto B em r e um ponto C em s, logo temos que:

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}; \;\; \overrightarrow{AC} = \lambda_1 u \text{ e } \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}; \;\; \overrightarrow{AB} = \lambda_2 v.$$

Temos por hipotese que os vetores $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$, logo

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle &= 0 \\ \langle \lambda_1 u, \lambda_2 v \rangle &= 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 \langle u, v \rangle &= 0 \\ \langle u, v \rangle &= 0. \end{aligned}$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\langle u, v \rangle = 0$. Tome novamente B em r e C em s, logo

$$\exists \lambda_1 \in \mathbb{R}; \;\; \overrightarrow{AC} = \lambda_1 u \text{ e } \exists \lambda_2 \in \mathbb{R}; \;\; \overrightarrow{AB} = \lambda_2 v$$

$$u = \frac{1}{\lambda_1} \overrightarrow{AB} \text{ e } v = \frac{1}{\lambda_2} \overrightarrow{AC}, \text{ com } \lambda_1 \neq 0, \;\; \lambda_2 \neq 0.$$

Assim temos,

$$\langle u, v \rangle = \langle \frac{1}{\lambda_1} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{\lambda_2} \overrightarrow{AC} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0, \text{ pois } \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \neq 0.$$

Logo, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Como $\overrightarrow{AB}$ está em r e $\overrightarrow{AC}$ está em s então $r \perp s$. $\square$

Dessa forma, podemos determinar a perpendicularidade de duas retas no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Para isso vamos tomar as equações:

$$r : \begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda\alpha_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda\alpha_2 \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_n + \lambda\alpha_n, \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.8}$$

$$s : \begin{cases} x_1 = a_1 + \gamma\beta_1 \\ x_2 = a_2 + \gamma\beta_2 \\ \qquad \vdots \\ x_n = a_n + \gamma\beta_n, \text{ para algum } \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.9}$$

Se tivermos os vetores $\alpha \neq \beta$ então $r \perp s$ se, e somente se,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = 0.$$

2.4 Distância entre um ponto e a reta

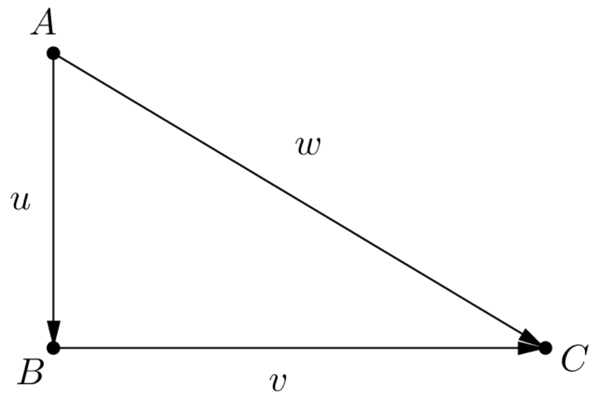
Iniciaremos a seção com a versão do Teorema de Pitágoras para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ segundo (HÖNIG, 1976, p. 191) e proposto como exercício em (SPIVAK, 2003, p. 6). Depois apresentaremos a definição de distância logo após, iremos apresentar uma forma de calcular a distância entre ponto e reta no $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.4.1 (Teorema de Pitágoras no $\mathbb{R}^n$)**.** *Sejam A, B e C pontos do $\mathbb{R}^n$ tais que, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Então,*

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

Demonstração. Sejam A, B e C pontos do $\mathbb{R}^n$ e sejam $\overrightarrow{AB} = u$, $\overrightarrow{BC} = v$ e $\overrightarrow{AC} = w$ tais que $w = u + v$ e $u \perp v$.

Figura 2.3:



Fonte: Autor

Então,

$$\begin{aligned}
\|w\|^2 = \|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
\|w\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\
\|w\|^2 &= \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\
\|w\|^2 &= \langle u, u\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
\|w\|^2 &= \langle u, u\rangle + 2\langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
\|w\|^2 &= \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle v, u\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$u \perp v \Longleftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2.$$

□

Corolário 2.4.1. *Sejam A, B e C, pontos do $\mathbb{R}^n$, tais que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Então*

$$\|\overrightarrow{AB}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\| \text{ e } \|\overrightarrow{BC}\| \leq \|\overrightarrow{AC}\|.$$

Demonstração. Como $\overrightarrow{AB} = 0$ então pelo Teorema 2.4.1,

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BC}\|.$$

Analogamente, se $\overrightarrow{BC} = 0$ então,

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Vejamos agora o caso em que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$ não são nulos.

Se $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ pelo Teorema 2.4.1 temos que

$$\|\overrightarrow{AC}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BC}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\|^2 > \|\overrightarrow{AB}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{AC}\| > \|\overrightarrow{AB}\|.$$

Analogamente, $\|\overrightarrow{AC}\| > \|\overrightarrow{BC}\|$. □

Corolário 2.4.2. *Sejam A, B e C, pontos do $\mathbb{R}^n$ tal que $C \neq B$, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Então $d(A,B) < d(A,C)$.*

Demonstração. Como $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$, $d(A,C) = \|\overrightarrow{AC}\|$, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ e $C \neq B$, então pelo corolário 2.4.1 temos que $d(A,B) < d(A,C)$. □

Definição 2.4.1. *Sejam P um ponto e r uma reta no espaço $\mathbb{R}^n$. A distância $d(P,r)$ do ponto P a reta r é a menor das distâncias de P a pontos de r, isto é,*

$$d(P,r) = min\{d(P,Q) | Q \in r\}$$

No Ensino Médio estuda-se a distância entre ponto e reta. Lá é apresentado uma fórmula caracteristica para o cálculo dessa distância. Porém como queremos apresentar uma forma para o cálculo dessa distância no $\mathbb{R}^n$, apresentaremos a proposição a seguir.

O resultado a seguir encontra-se para os casos $n = 2$ e $n = 3$. Para o caso $n > 3$, salvo engano, não se encontra na literatura.

Proposição 2.4.1. *Dados uma reta r do $\mathbb{R}^n$ e um ponto P do $\mathbb{R}^n$ tal que P não pertencente a r. Então a distância do ponto P a reta r é dada por*

$$d(P,r) = \|PP'\|,$$

onde $\overrightarrow{PP'}$ é um vetor ortogonal a r e $P' \in r$.

Demonstração. Sejam r uma reta do $\mathbb{R}^n$ e P um ponto do $\mathbb{R}^n$ tal que $P \notin r$.

Tomemos dois pontos distintos P' e Q pertencentes a r, tal que $\overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{P'Q}$ e $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'Q}$.

Logo pelo Corolário 2.4.1 temos que $\|\overrightarrow{PP'}\| \leq \|\overrightarrow{PQ}\|$ qualquer que seja Q. Portanto

$$d(P,r) = d(P,P') = \|\overrightarrow{PP'}\|.$$

□

2.5 Uma aplicação da equação paramétrica da reta

Uma boa aplicação do que vimos nesse capítulo é a representação do deslocamento retilíneo uniforme de uma partícula no plano e no espaço, através da equação paramétrica da reta, que nos permite determinar a posição de uma partícula ao longo do seu deslocamento.

Primeiro vejamos como se dá a variação da posição de uma partícula no plano $\mathbb{R}^2$.

A posição de uma partícula no plano é dado pelas coordenadas x e y do ponto P que representa essa posição. Assim considere uma partícula que se encontra na posição $P_0 = (x_0, y_0)$ inicialmente. Quando a partícula se move suas coordenada variam durante um certo tempo. Assim a partícula sai da posição P_0 para uma outra posição $P = (x(t), y(t))$. Dessa forma o deslocamento da partícula é dado por

$$\triangle P = \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x(t) - x_0, y(t) - y_0).$$

De forma análoga a do plano podemos estudar a posição de uma partícula no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Neste caso a posição da partícula é dada pelas coordenadas x, y e z do ponto P que representa sua posição. Quando a partícula se desloca do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para o ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ durante um certo tempo, dessa forma o deslocamento será dado por

$$\triangle P = \overrightarrow{P_0P} = P - P_0 = (x(t) - x_0, y(t) - y_0, z(t) - z_0).$$

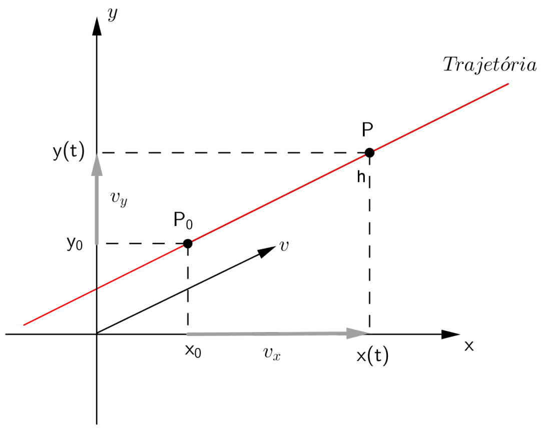
Se uma partícula sofre um deslocamento $\triangle P$ em um intervalo de tempo t, então sua velocidade média v é dada por

$$\begin{aligned} v &= \frac{\triangle P}{t} \\ v \cdot t &= P - P_0 \\ P &= P_0 + v \cdot t \end{aligned} \tag{2.10}$$

1) A representação do deslocamento retilíneo uniforme de uma partícula no plano $\mathbb{R}^2$.

Suponhamos uma partícula que se desloca do ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ para o ponto $P = (x(t), y(t))$ no plano, como mostra a figura 2.4.

Figura 2.4:



Fonte: Autor

√ v_1 é a velocidade do deslocamento de x_0 para $x_{(t)}$ no eixo Ox;

√ v_2 é a velocidade do deslocamento de y_0 para $y_{(t)}$ no eixo Oy.

Logo pela equação (2.10), obtemos uma parametrização da equação da velocidade. Assim

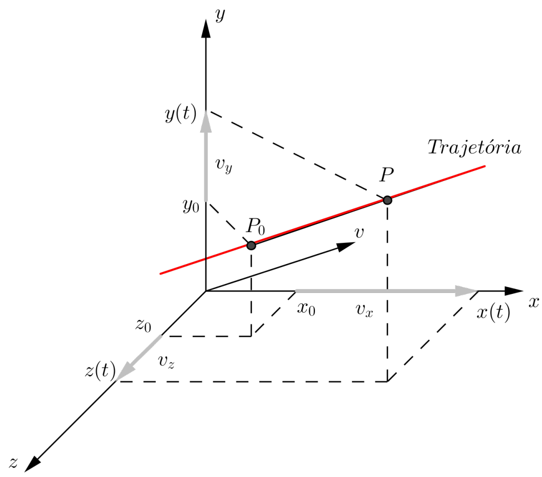
$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_1 \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_2 \cdot t \end{cases} \tag{2.11}$$

Ou seja, para cada intervalo de tempo t teremos uma posição diferente para a partícula. Dessa forma podemos verificar que a trajetória dessa partícula descreve uma reta que é gerada pelo vetor velocidade $v = (v_1, v_2)$ e que passa pelo ponto P_0.

√ A representação do deslocamento retilíneo uniforme de uma partícula no espaço $\mathbb{R}^3$.

Suponhamos uma partícula que se desloca do ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ para o ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ no espaço, como mostra a figura 2.5.

Figura 2.5:



Fonte: Autor

- √ v_1 é a velocidade do deslocamento de x_0 para $x(t)$ no eixo Ox;
- √ v_2 é a velocidade do deslocamento de y_0 para $y(t)$ no eixo Oy;
- √ v_3 é a velocidade do deslocamento de z_0 para $z(t)$ no eixo Oz.

Parametrizando a equação (2.9) para o $\mathbb{R}^3$. Logo

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_1 \cdot t \\ y(t) = y_0 + v_2 \cdot t \\ z(t) = z_0 + v_3 \cdot t. \end{cases} \tag{2.12}$$

Portanto a trajetória da partícula descreve uma reta representada pela equação (2.10) e gerada pelo vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ e que passa pelo ponto P_0.

Capítulo 3

O HIPERPLANO

Tanto Santos (2007) quanto Lang (2003) falam do hiperplano e apresentam a equação do hiperplano que passa por um ponto e é normal a um vetor do $\mathbb{R}^n$. Usaremos a definição de Santos (2007) e mostraremos um teorema que determina a condição para que um ponto pertença a um hiperplano determinado por outros três pontos. Na primeira seção apresentaremos a equação do hiperplano que passa por um ponto e é normal a um vetor do $\mathbb{R}^n$. Na segunda seção estudaremos a distância entre ponto e hiperplano. Na terceira seção estudaremos as posições relativas entre retas no $\mathbb{R}^n$. Na quarta seção estudaremos a distância entre duas retas paralelas. E finalmente na quinta seção estudaremos as posições relativas entre reta e o hiperplano.

Definição 3.0.1. *Dizemos que os vetores* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ *não são múltiplos um do outro se os pontos* A*,* B*,* C *e* D *não são coplanares, isto é, não pertencem a um mesmo plano.*

Ou equivalentemente:

Os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$ *e* $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD}$ *são múltiplos um do outro, então, os pontos* A*,* B*,* C *e* D *são coplanares.*

Definição 3.0.2 (Hiperplano)**.** *Seja* $v \neq \boldsymbol{0}$ *um vetor do* $\mathbb{R}^n$*. O Hiperplano que passa pelo ponto* A *do* $\mathbb{R}^n$ *e é normal ao vetor* v *é, por definição, o conjunto* Γ *dos pontos do* $\mathbb{R}^n$*, tal que*

$$\langle (P - A), v \rangle = \boldsymbol{0}.$$

(SANTOS, 2007)

Teorema 3.0.1. *Sejam A, B e C pontos não colineares no espaço $\mathbb{R}^n$ e seja Γ o hiperplano que eles determinam. O ponto D pertence a Γ se, e somente se, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$*

Demonstração. Dados A, B e C pontos do $\mathbb{R}^n$, não colineares e Γ um hiperplano que passa por A, B e C.

$\Longrightarrow$) Queremos mostrar que se $D \in \Gamma$ então, existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}.$$

Como A, B e C são pontos não colineares e pertencem a Γ então $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ pertencem a Γ.

Suponha $D \in \Gamma$ e tomemos

r_1 uma reta gerada por $\overrightarrow{AC}$ que passa por D;

r_2 uma reta gerada por $\overrightarrow{AB}$ que passa por D;

$\overleftrightarrow{AB}$ uma reta gerada por $\overrightarrow{AB}$ que passa por A;

$\overleftrightarrow{AC}$ uma reta gerada por $\overrightarrow{AC}$ que passa por A. Veja a figura 3.1.

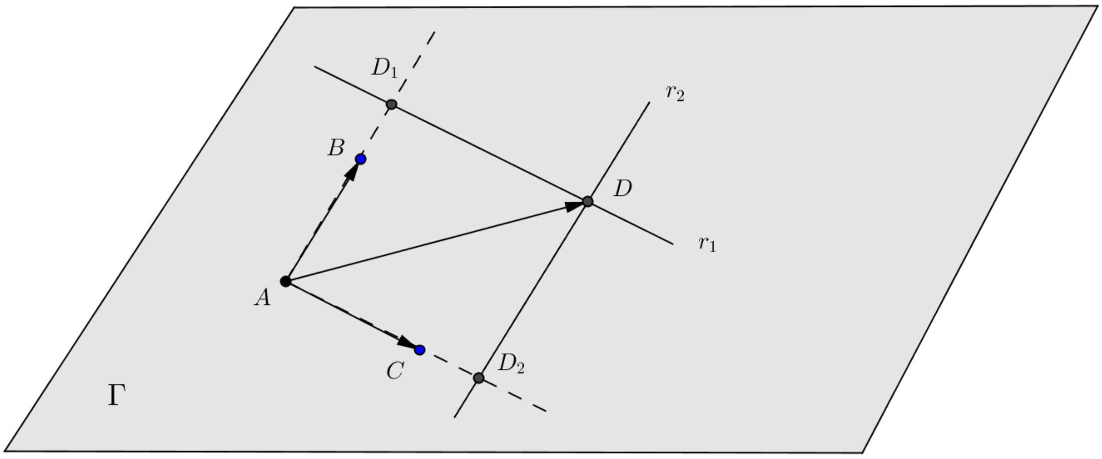
Logo $r_1 // \overleftrightarrow{AC}$ e $r_2 // \overleftrightarrow{AB}$ onde $r_1 \cap \overleftrightarrow{AB} = \{D_1\}$ e $r_2 \cap \overleftrightarrow{AC} = \{D_2\}$.

Assim A, B e D_1 sáo colineares, então $\overrightarrow{AD_1} = x \cdot \overrightarrow{AB}$ tal que $x \in \mathbb{R}$.

De forma análoga A, C e D_2 são colineares, então $\overrightarrow{AD_2} = y \cdot \overrightarrow{AC}$ tal que $y \in \mathbb{R}$.

Como $\overrightarrow{AC} // r_1$ então $\overrightarrow{AD_2} // r_1$ e como $\overrightarrow{AB} // r_2$ então $\overrightarrow{AD_1} // r_2$. Logo temos que $ABCD$ é um paralelogramo, onde $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{D_2D}$. Assim temos

Figura 3.1:



Fonte: Autor

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{AD_2} + \overrightarrow{D_2D} \\
&= \overrightarrow{AD_2} + \overrightarrow{AD_1} \\
&= x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC}
\end{aligned}
$$

$\Longleftarrow$) Queremos mostrar agora que se $\overrightarrow{AD} = x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC};\ \ x, y \in \mathbb{R}$, então $D \in \Gamma$.

Sem perda de generalidade vamos supor o hiperplano $\Gamma = \{(x_1, ..., x_{n-1}, 0) \in \mathbb{R}^n; x_1, ..., x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$ e vamos considerar $A = (0, ..., 0)$.

Logo

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= x \cdot \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{AC} \\
(D - A) &= x \cdot (B - A) + y \cdot (C - A) \\
(d_1, ..., d_{n-1}, d_n) &= x \cdot (b_1, ..., b_{n-1}, 0) + y \cdot (c_1, ..., c_{n-1}, 0) \\
(d_1, ..., d_{n-1}, d_n) &= (x \cdot b_1, ..., x \cdot b_{n-1}, 0) + (y \cdot c_1, ..., y \cdot c_{n-1}, 0) \\
(d_1, ..., d_{n-1}, d_n) &= (x \cdot b_1 + y \cdot c_1, ..., x \cdot b_{n-1} + y \cdot c_{n-1}, 0).
\end{aligned}
$$

Então pela igualdade de pontos temos $d_n = 0$. Portanto $D = (d_1, ..., d_{n-1}, 0) \in \Gamma$.

$\square$

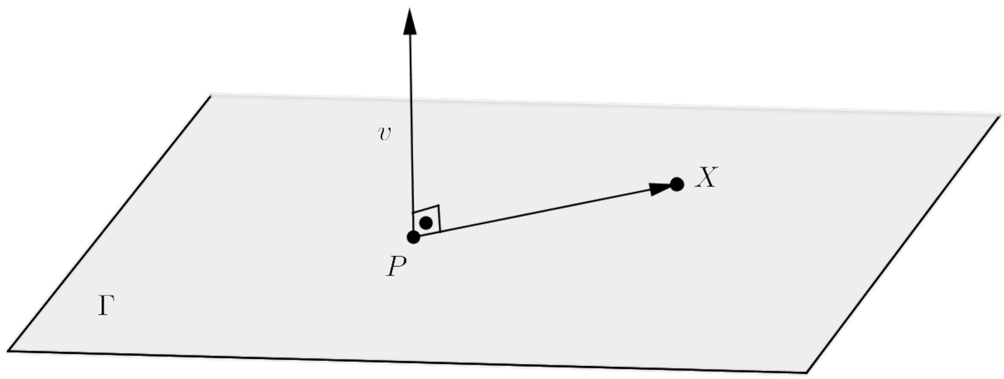
3.1 Equação do Hiperplano

De acordo com a *definição 3. 0. 2* apresentaremos aqui a equação do hiperplano.

Seja $v = (v_1, v_2, ..., v_3) \neq 0$ um vetor do $\mathbb{R}^n$. Lembramos que o hiperplano que passa pelo ponto P do $\mathbb{R}^n$ e é normal ao vetor v é, por definição, o conjunto Γ dos pontos $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ do $\mathbb{R}^n$ que satisfaz a equação

$$\langle (X - P), v \rangle = 0. \tag{3.1}$$

Figura 3.2:



Fonte: Adaptado de SANTOS (2007, p. 99)

Seja Γ o hiperplano que passa pelo ponto $P = (p_1, ..., p_n) \in \mathbb{R}^n$ e é gerado pelo vetor normal $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$. Dado $X = (x_1, ..., x_n) \in \Gamma$. Temos que

$$\langle X - P, v \rangle = 0.$$

Como $X - P = (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n)$ e $v \perp (X - P)$, então

$$\begin{aligned} \langle (x_1 - p_1, ..., x_n - p_n), (v_1, ..., v_n) \rangle &= v_1(x_1 - p_1) + ... + v_n(x_n - p_n) \\ &= v_1x_1 + ... + v_nx_n - p_1v_1 - ... - p_nv_n. \end{aligned}$$

Então,

$$v_1x_1 + ... + v_nx_n - p_1v_1 + d = 0,$$

onde $d = p_1v_1 - ... - p_nv_n$.

Esta é a equação do hiperplano Γ que passa pelo ponto P e é normal ao vetor $v = (v_1, ..., v_n)$.

3.2 Distância entre um ponto e o hiperplano

Definição 3.2.1. *A distância entre um ponto P do $\mathbb{R}^n$ e um hiperplano Γ, onde $P \notin \Gamma$ é dada como a menor das distâncias de P aos pontos de Γ, ou seja,*

$$d(P, \Gamma) = min\{d(P, Q); Q \in \Gamma\}.$$

O resultado abaixo encontra-se para os casos $n = 2$ (plano) e $n = 3$ (espaço). Para o caso $n > 3$, salvo engano, não se encontra na literatura.

Proposição 3.2.1. *Sejam Γ um hiperplano, P um ponto do $\mathbb{R}^n$ tal que $P \notin \Gamma$, e v o vetor normal a Γ. Então $d(P, \Gamma) = d(P, P')$ onde $P' \in \Gamma$ e $\overrightarrow{PP'}//v$.*

Demonstração. Queremos mostrar que dados $P \notin \Gamma$ e $P' \in \Gamma$ se $\overrightarrow{PP'}//v$ então $d(P, P') < d(P', Q)$ qualquer que seja $Q \in \Gamma$. Como $\overrightarrow{PP'}//v$ então $\overrightarrow{PP'}$ é ortogonal a $\overrightarrow{P'Q}$ para todo $Q \neq P'$.

Assim pelo corolário 2.4.2 temos que $d(P, P') < d(P', Q)$.

Portanto de acordo com a definição 3.2.1, $d(P, \Gamma) = d(P, P')$ $\square$

Exemplo 3.2.1.

a) O hiperplano em $\mathbb{R}^2$ é a reta r do plano, dessa forma senndo P um ponto P do plano, então $d(P, r) = d(P, Q)$ tal que $\overrightarrow{PQ} \perp r$ onde $Q \in r$.

b) Sejam o hiperplano em $\mathbb{R}^3$ o plano π e o ponto P do $\mathbb{R}^3$, então $d(P,\pi) = d(P,Q)$ tal que $\overrightarrow{PQ} \perp \pi$, onde $Q \in \pi$.

3.3 Posição relativa entre retas

Analizaremos como identificar, usando a equação paramétrica da reta, quais as posições relativas entre duas retas, se são paralelas, coincidentes ou concorrentes.

Sejam $r_1 = \{A + tv; t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{B + sw; s \in \mathbb{R}\}$ duas retas no espaço $\mathbb{R}^n$. As retas r_1 e r_2 podem ser coplanares ou não. Se r_1 e r_2 não são coplanares, então dizemos que elas são reversas. Neste caso $r_1 \cap r_2 = \varnothing$. Se elas são coplanares, r_1 e r_2 podem ser:

(1) coincidentes: $r_1 = r_2$;

(2) paralelas: $r_1 \cap r_2 = \varnothing$;

(3) concorrentes: $r_1 \cap r_2 = \{P\}$.

Estuda-se no Ensino Médio as posições relativas entre retas no plano. Onde suas posições são determinadas resolvendo o sistema composto pelas duas equações das retas comparadas. Aqui porém devido a complexidade apresentaremos a proposição abaixo para a determinação das posições relativas entre duas retas no $\mathbb{R}^n$, que encontra-se ja para os casos $n = 2$ como é estudado no Ensino Médio e $n = 3$. Para o caso $n > 3$, salvo engano, não encontra-se na literatura.

Proposição 3.3.1. *As retas r_1 e r_2 são:*

(a) coincidentes se, e só se, v e w são múltiplos e $B \in r_1$ (ou $A \in r_2$);

(b) paralelas se, e só se, v e w são múltiplos e $B \notin r_1$ (ou $A \notin r_2$);

(c) concorrentes se, e só se, v e w não são múltiplos e $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$;

(d) reversas se, e só se, v e w não são múltiplos e $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

Demonstração. Suponhamos que os vetores v e w, não nulos, são múltiplos, isto é, existe $\lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ tal que $w = \lambda v$.

Vamos mostrar que se v e w são múltiplos, então $r_1 = r_2$ quando $B \notin r_1$ e $r_1 \cap r_2 = \varnothing$.

Consideremos os pontos $A' \in r_1$ e $B' \in r_2$ tais que $\overrightarrow{AA'} = v$ e $\overrightarrow{BB'} = w$. Então, $\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{AA'}$.

Suponhamos também que $B \in r_1$. Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = t_0\overrightarrow{AA'}$. Se P é um ponto da reta r_2, então $\overrightarrow{BP} = t\overrightarrow{BB'}$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $P \in r_1$ pois

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = t_0\overrightarrow{AA'} + t\overrightarrow{BB'} = t_0\overrightarrow{AA'} + \lambda t\overrightarrow{AA'} = (t_0 + \lambda t)\overrightarrow{AA'}$$

Assim $r_1 \subset r_2$. Logo, $r_1 = r_2$.

Se $B \notin r_1$, então A, A' e B são pontos não colineares. Seja Γ o plano que os contém e seja C o ponto tal que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BB'}$. Como $\overrightarrow{BB'} = \lambda\overrightarrow{AA'}$, segue que $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AA'}$. Portanto, o ponto C pertence à reta r_1 e é diferente de A, pois $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BB'} \neq \mathbf{0}$. Assim

$$r_1 = \{A + t\overrightarrow{AC}; t \in \mathbb{R}\} \quad e \quad r_2 = \{B + s\overrightarrow{AC}; s \in \mathbb{R}\}.$$

As retas r_1 e r_2 não se intersectam. De fato, se existisse P tal que $\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BP} = s\overrightarrow{AC}$, teríamos

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = (t - s)\overrightarrow{AC} \Longrightarrow B \in r_1,$$

o que é uma contradição.

As retas r_1 e r_2 são coplanares. Com efeito, um ponto P pertence ao plano Γ se, e só se, existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

Se $P \in r_1$, então $\overrightarrow{AP} = t_0\overrightarrow{AC} = 0.\overrightarrow{AB} + t_0\overrightarrow{AC}$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$. Logo $P \in \Gamma$.

Se $P \in r_2$, existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{BP} = t_1\overrightarrow{AC}$. Assim, $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = 1.\overrightarrow{AB} + t_1\overrightarrow{AC}$, e, portanto, $P \in \Gamma$. Como r_1 e r_2 são coplanares e não se intersectam, obtemos que r_1 e r_2 são paralelas.

Provaremos agora que se r_1 e r_2 são coincidentes ou paralelas, então v e w são multiplos.

Se $r_1 = r_2$, então $B, B' \in r_1$ e, portanto, existem $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{AB} = t_0 v$ e $\overrightarrow{AB'} = t_1 v$. logo, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB'} = -t_0 v + t_1 v = (t_1 - t_0)v$, isto é, $w = BB'$ e v são multiplos.

Se r_1 e r_2 são paralelas, existe um único plano Γ que as contém.

Seja C o único ponto do plano Γ tal que $\overrightarrow{CB} = v = \overrightarrow{AA'}$.

Suponhamos que os vetores $v = \overrightarrow{CB}$ e $w = \overrightarrow{BB'}$ não são múltiplos. Então, os pontos B, B' e C não são colineares e Γ é o único plano que os contém. Como $A \in \Gamma$, existem $t_0, s_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\overrightarrow{BA} = t_0\overrightarrow{BC} + s_0\overrightarrow{BB'}$.

Sejam o ponto $P = A + t_0\overrightarrow{BC} = A + t_0\overrightarrow{AA'}$ pertencente a r_1 e o ponto $Q = B + s_0\overrightarrow{BB'}$ pertencente a r_2. Sendo $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB} + s_0\overrightarrow{BB'} + t_0\overrightarrow{BC} = \mathbf{0}$, obtemos que $P = Q$. Logo, $r_1 \cap r_2 \neq \varnothing$, uma contradição. Provamos assim, que se r_1 e r_2 são paralelas, então v e w são múltiplos.

Se r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas, então v e w não são múltiplos.

De fato, se v e w fossem múltiplos, teriamos, pelo provado anteriormente, que r_1 e r_2 seriam coincidentes ou paralelas.

E reciprocamente, se v e w não são múltiplos, então r_1 e r_2 são concorrentes ou reversas, pois caso contrário, r_1 e r_2 seriam coincidentes ou paralelas e pelo, provado acima, v e w seriam múltiplos.

$\square$

3.4 Distância entre retas paralelas no $\mathbb{R}^n$

Estudaremos nessa seção como calcular a distância entre duas retas paralelas no $\mathbb{R}^n$. Apresentaremos logo a seguir a definição de distância entre retas no $\mathbb{R}^n$.

Definição 3.4.1. *A distância $d(r_1, r_2)$ entre duas retas r_1 e r_2 é dada por:*

$$d(r_1, r_2) \; = min \; \{d(P, Q) | P \in r_1 \; e \; Q \in r_2\}.$$

Se pensarmos em retas coincidentes ou concorrentes chegaremos as seguintes conclusões:

i) Sejam r_1 e r_2 retas coincidentes, logo pela proposição 4.2, se tomarmos um ponto P qualquer em r_1 esse ponto também está em r_2, pelo fato de os vetores que determinam r_1 e r_2 serem múltiplos. portanto a menor distância entre r_1 e r_2 é $d(P, P) = 0$, qualquer que seja P;

ii) Sejam r_1 e r_2 retas concorrentes, logo pela proposição 3.3.1, existe um ponto P tal que $r_1 \cap r_2 = \{P\}$. Por esse fato vamos ter que a distância entre r_1 e r_2 nesse ponto é zero. Portanto a menor distância entre r_1 e r_2 é zero.

Os casos mais interessantes ocorre de duas retas serem paralelas ou reversas.

Apresentaremos a seguir uma proposição para calcular a distância entre duas retas paralelas no $\mathbb{R}^n$. Esse resultado encontra-se para os casos $n = 2$ estdado no Ensino Médio como por exemplo em (IEZZI, 2005) e $n = 3$. Porém para o caso $n > 3$, salvo engano, não encontra-se na literatura.

Proposição 3.4.1. *Dadas duas retas paralelas r_1 e r_2 no $\mathbb{R}^n$. A distância entre essas retas é dada por*

$$d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{PP'}\|,$$

onde $P \in r_1$ e $P' \in r_2$, tal que $\overrightarrow{PP'} \perp r_1$ e $\overrightarrow{PP'} \perp r_2$.

Demonstração. Sejam $r_1 = \{A_1 + tv_1, t \in \mathbb{R}\}$ e $r_2 = \{A_2 + sv_2, s \in \mathbb{R}\}$ duas retas paralelas do $\mathbb{R}^n$, daí temos que $v_1 = \lambda v_2; \lambda \in \mathbb{R}$.

Mostraremos inicialmente que existe uma reta perpendicular as retas r_1 e r_2 e que as intersectam nos pontos P e P' respectivamente. Depois mostraremos que P é o ponto de r_1 mais próximo do ponto P', reciprocamente P' é o ponto de r_2 mais próximo de P.

Depois mostraremos que qualquer ponto Q que você pegar em uma das retas paralelas o ponto mais proximo de Q é um ponto Q' na outra reta que é projeção ortogonal de Q e que $d(Q, Q') = d(P, P')$.

Tome $r_3 = \{A_3 + kv_3; k \in \mathbb{R}\}$ de modo que $r_3 \cap r_1 = \{P\}$ e $r_3 \cap r_2 = \{P'\}$.

Suponha $r_3 \perp r_1$ logo $\langle v_3, v_1 \rangle = 0$, como $v_1 = \lambda v_2; \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}$ temos,

$$\begin{aligned} \langle v_3, \lambda v_2 \rangle &= \lambda \langle v_3, v_2 \rangle = 0 \Rightarrow \\ \langle v_3, v_2 \rangle &= 0 \Rightarrow v_3 \perp v_2. \end{aligned}$$

Como $r_1 \perp r_3$, então $\overrightarrow{PP'} \perp r_1$ logo P' é o ponto de r_2 mais próximo de P assim,

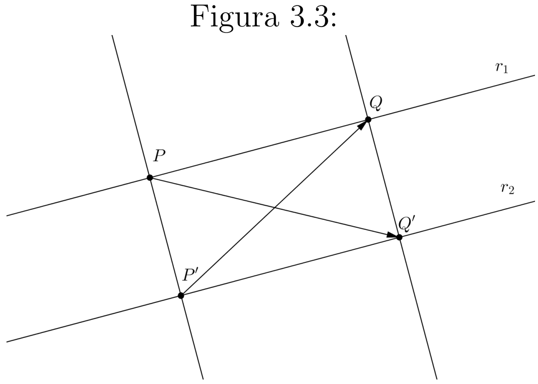
$$d(P', r_1) = d(P, P'). \tag{3.2}$$

Como $r_2 \perp r_3$, então $\overrightarrow{PP'} \perp r_2$ logo P é o ponto de r_1 mais próximo de P assim,

$$d(P, r_2) = d(P, P') \tag{3.3}$$

Sejam Q um ponto quaquer de r_1, tal que $\overrightarrow{QQ'}$ é perpendicular as retas r_1 e r_2 onde $Q' \in r_2$. Vejamos o que ocorre quando passeamos o ponto Q por toda a reta r_1, analogamente Q' passeia por toda a reta r_2.

Figura 3.3:



Fonte: Autor

Vejamos, $Q = P$ teremos $Q' = P'$ e $\|\overrightarrow{PP'}\| = \|\overrightarrow{QQ'}\| \Rightarrow d(P, P') = d(Q, Q')$.

Observamos agora que qualquer $Q \neq P$ neste caso teriamos:

$$\|\overrightarrow{P'Q}\|^2 = \|\overrightarrow{P'P}\|^2 + \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{P'Q}\|^2 - \|\overrightarrow{P'P}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 \tag{3.4}$$

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ'}\|^2 - \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2. \tag{3.5}$$

Por outro lado temos,

$$\|\overrightarrow{P'Q}\|^2 = \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 \tag{3.6}$$

$$\|\overrightarrow{PQ'}\|^2 = \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2. \tag{3.7}$$

Comparando (3.4) com (3.5) temos,

$$\|\overrightarrow{P'Q}\|^2 - \|\overrightarrow{P'P}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ'}\|^2 - \|\overrightarrow{QQ'}\|^2. \tag{3.8}$$

Substituindo (3.6) e (3.7) em (3.8) temos,

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 + \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 - \|\overrightarrow{P'P}\|^2 &= \|\overrightarrow{PP'}\|^2 + \|\overrightarrow{P'Q'}\|^2 - \|\overrightarrow{QQ'}\|^2 \\ 2\|\overrightarrow{QQ'}\|^2 &= 2\|\overrightarrow{PP'}\|^2 \\ \|\overrightarrow{QQ'}\| &= \|\overrightarrow{PP'}\| \Rightarrow d(QQ') = d(PP'). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Logo quando Q e Q' percorrem respectivamente as retas r_1 e r_2 temos sempre que a menor distância entre Q e a reta r_2 é sempre igual a distância entre Q' e r_1. Portanto de (3.8) concluimos que

$$d(r_1, r_2) = d(Q, Q') = d(PP') = \|\overrightarrow{PP'}\|.$$

$\square$

3.5 Posições relativas entre reta e o hiperplano

Definição 3.5.1. *Sejam $r = \{A + tu; t \in \mathbb{R}\}$ uma reta que passa pelo ponto $A = (a_1, ..., a_n)$ e é paralela ao vetor $u = (u_1, ..., u_n)$ e $\Gamma : v_1x_1 + ... + v_nx_n = d$ um plano normal ao vetor $v = (v_1, ..., v_n)$. Vamos considerar três possibilidades:*

i) $r \cap \Gamma = \varnothing$ ou seja a reta r é paralela ao hiperplano Γ;

ii) $r \cap \Gamma \neq \varnothing$ *neste caso a reta pode ser coincidente se todos os pontos da reta pertencer ao hiperplano;*

iii) $r \cap \Gamma = \{P\}$ *é um único ponto, neste caso dizemos que a reta intersecta o hiperplano em um ponto.*

O resultado a seguir encontra-se para o caso $n = 3$. Para o caso $n > 3$, salvo engano, não encontra-se na literatura.

Proposição 3.5.1. *Sejam* $r = \{A + tu; t \in \mathbb{R}\}$ *uma reta que passa pelo ponto* $A = (a_1, ..., a_n)$ *e é paralela ao vetor* $u = (u_1, ..., u_n)$ *e* $\Gamma : v_1x_1 + ... + v_nx_n = d$ *um hiperplano e* $v = (v_1, ..., v_n)$ *o vetor normal a* Γ.

a. r *é coincidente ao hiperplano* Γ *se, e só se,* $u \perp v$ *e* $A \in \Gamma$.

b. r *é paralela ao hiperplano* Γ *se, só se,* $u \perp v$ *e* $A \notin \Gamma$.

c. $r \cap \Gamma$ *consiste de um único ponto se, só se,* u *não é ortogonal ao vetor* v.

Demonstração. Suponhamos que o vetor u é ortogonal ao vetor v. Seja $P = (p_1, ..., p_n) = A + tu$ um ponto de r. Então, $\overrightarrow{AP} = tu$ logo

$$\langle (p_1 - a_1, ..., p_n - a_n), (v_1, ..., v_n)\rangle = \langle \overrightarrow{AP}, v\rangle = \langle tu, v\rangle = 0$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} p_i v_i = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \tag{3.10}$$

Se além disso $A \in \Gamma$, temos $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = d$. Logo por (3.10) $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i = d$, ou seja, para todo $P \in r$, $P \in \Gamma$ portanto $r \subset \Gamma$.

Mas, se $A \notin \Gamma$, $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \neq d$. Portanto $\sum_{i=1}^{n} p_i v_i \neq d$ para todo $P \in r$. Neste caso, $r \cap \Gamma = \varnothing$, ou seja, r é uma reta paralela ao hiperplano Γ.

Suponhamos agora que u não é ortogonal a v, ou seja, $\langle u, v\rangle \neq 0$.

Seja $P = A + tu = (a_1 + tu_1, ..., a_n + tu_n) \in r$. Então, $P \in \Gamma$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} v_1(a_1+tu_1),...,v_n(a_n+tu_n) &= d \\ \Longleftrightarrow t(v_1u_1,...,v_nu_n) &= d-(v_1a_1),...,(v_na_n). \end{aligned}$$

Como $\langle u,v\rangle = v_1u_1,...,v_nu_n \neq 0$, obtemos que

$$t_0 = \frac{d-(v_1a_1+...+v_na_n)}{(v_1u_1+...+v_nu_n)}.$$

É o único parâmetro $t \in \mathbb{R}$ para o qual o ponto $P = A+tu$ pertença ao hiperplano Γ. Assim, $r \cap \Gamma = \{P_0\}$, onde $P_0 = A + t_0u$.

Reciprocamente, suponha que $r \subseteq \Gamma$. Então, $u \perp v$ e $A \in \Gamma$, pois, caso contrário, teríamos $u \perp v$ e $A \notin \Gamma$ ou u não ortogonal a v. No primeiro caso teríamos pelo provado acima, que $r \cap \Gamma = \varnothing$ e, no segundo caso, $\Gamma \cap r$ consistiria de um único ponto, uma contradição.

Análogamente, podemos verificar que se $r \cap \Gamma = \varnothing$, então $u \perp v$ e $A \notin \Gamma$ e que se $r \cap \Gamma$ consiste de um único ponto, então u e v não são ortogonais.

$\square$

Observamos que no caso do plano, as posições relativas serão entre retas, pois como citado, no caso do plano o hiperplano é uma reta, isto é, $r: ax+by+d=0$, onde $v=(a,b)$ é o vetor normal a (r).

Capítulo 4

A HIPERESFERA

Em (STEWART, 2007, p. 1030) é sugerido um projeto para se calcular o hipervolume de uma hiperesfera de raio r no espaço n-dimensional $\mathbb{R}^n$ usando uma integral de n-upla. Tranquilos em relação a essa nomeclatura, apresentaremos nesse capítulo a definição de hiperesfera e a equação da hiperesfera no $\mathbb{R}^n$, particularizando para $n = 1, 2$ e 3. Na primeira seção estudaremos as posições relativas entre o hiperplano e a hiperesfera e veremos os casos particulares no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$.

Definição 4.0.2. *Uma hiperesfera no $\mathbb{R}^n$ de raio $r > 0$ e centro $C \in \mathbb{R}^n$ é o conjunto $\mathbb{S}_r^{n-1}(C) = \{X \in \mathbb{R}^n; d(C, X) = r\}$. (ANDRADE, 2010)*

Como na equação $d(C, X) = r$, a distância e o raio são não negativos, esta equação, em termos de coordenadas dos pontos $X = (x_1, ..., x_n)$ e $C = (c_1, ..., cn)$, é equivalente à

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 + ... + (x_n - c_n)^2 = r^2$$

é a equação da esfera de centro C e raio r, no $\mathbb{R}^n$.

Lima (2005) define bola aberta de centro num ponto $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ como o conjunto dos pontos $\in \mathbb{R}^n$ tal que $d(a, x) < r$, isto é,

$$B(a; r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - a\| < r\}.$$

E analogamente define bola fechada $B[a; x]$ e a esfera $S[a; r]$, ambas com centro em a e raio r como,

$$B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| \leq r\} \textbf{ e } S[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x-a\| = r.$$

Podemos redefinir esses conceitos tomando $\|x-a\| = d(x,a)$, daí temos:

i) $B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) < r\}$ bola aberta de centro em $a \in \mathbb{R}^n$ e raio r;

ii) $B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) \leq r\}$ bola aberta de centro em $a \in \mathbb{R}^n$ e raio r;

iii) $\mathbb{S}^0_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x,a) = r\}$, a hiperesfera de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio r.

Exemplo 4.0.1. *Para $n = 1$ temos:*

6.1.1 A bola aberta $B(a;r) = \{x \in \mathbb{R}^1; \|x-a\| < r\}$ na reta $\mathbb{R}$ é o intervalo aberto $(a-r, a+r)$;

6.1.2 A bola fechada $B[a;r] = \{x \in \mathbb{R}^1; \|x-a\| \leq r\}$ na reta $\mathbb{R}$ é o intervalo fechado $[a-r, a+r]$;

6.1.3 A hiperesfera $\mathbb{S}^0_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^1; \|x-a\| = r\}$ na reta $\mathbb{R}$ é dada pelo conjunto dos pontos $\{a-r, a+r\}$;

Exemplo 4.0.2. *Para $n = 2$, obtemos os elementos da Geometria Analítica do Ensino Médio.*

6.2.1 A bola aberta $B(a;r) = \{p = (x,y) \in \mathbb{R}^2; \|p-a\| < r\}$ no plano $\mathbb{R}^2$ é o disco de centro $a = (a_1, a_2)$ dado pela inequação $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 < r$;

6.2.2 A bola fechada $B[a;r] = \{p = (x,y) \in \mathbb{R}^2; \|p-a\| \leq r\}$ no plano $\mathbb{R}^2$ é o disco de centro $a = (a_1, a_2)$ dado pela inequação $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 \leq r$;

6.2.3 A hiperesfera $\mathbb{S}^1_r(a) = \{(x,a) \in \mathbb{R}^2; \|x-a\| = r\}$ no plano $\mathbb{R}^2$ é o círculo centro $a = (a_1, a_2)$ e raio $r > 0$ dado pela equação $(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2 = r$;

4.1 Posições relativas entre hiperplano e hiperesfera

No Ensino Médio estudamos as posições relativas entre reta e circunferência, no caso a reta como vimos anteriormente é um hiperplano no $\mathbb{R}$ e a circunferência é uma hiperesfera no $\mathbb{R}$. Dessa forma estudamos essas posições relativas para o $\mathbb{R}^n$.

O próximo resultado encontra-se para os casos $n = 2$ (plano) e $n = 3$ (espaço). Porém o caso $n > 3$, salvo engano, não encontra-se na literatura.

Proposição 4.1.1. *Seja Γ um hiperplano que passa pelo ponto $P = (p_1, ..., p_n)$ do $\mathbb{R}^n$ e $v = (v_1, ..., v_n)$ um vetor normal a Γ, e seja $\mathbb{S}_r^{n-1}(C)$ uma hiperesfera de centro $C = (c_1, ..., c_n)$ e raio $r > 0$.*

a) $d(C, \Gamma) > r$ se, e somente se, $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(C) = \varnothing$;

b) $d(C, \Gamma) = r$ se, e somente se, $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(C) = \{P_0\}$. Neste caso dizemos que o hiperplano é tangente a hiperesfera;

c) $d(C, \Gamma) < r$ se, e somente se, $\mathbb{S}_r^{n-1}(C) \cap \Gamma^{n-1} = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(Q)$. Onde $\mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(Q)$ é a hiperesfera contida no plano Γ^{n-1} que tem raio $\sqrt{r^2 - k^2}$ e centro no ponto de intersecção do plano Γ^{n-1} com a reta l normal a Γ^{n-1} que passa pelo centro C da hiperesfera $\mathbb{S}_r^{n-1}(C)$ e $k = d(C, \Gamma^{n-1})$.

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos considerar

i) A hiperesfera $\mathbb{S}_r^{n-1} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + ... + x_n^2 = r^2\}$, com centro $C = (0, 0, ..., 0)$;

ii) O hiperplano $\Gamma = \{(x_1, ..., x_{n-1}, k) \in \mathbb{R}^n; x_1, ..., x_{n-1}, k \in \mathbb{R}$, com k constante $\}$.

a) $\Longrightarrow$) Como $d(C, \Gamma) > r$, então pela proposição (3.2.1), existe $P' \in \Gamma$ tal que $\overrightarrow{CP'} \perp \Gamma$ e $d(C, \Gamma) = d(C, P') > r$, onde $C = (0, ..., 0)$.

Logo $d(C, Q) > d(C, P') > r$ para todo $Q \in \Gamma$.

Daí $Q \notin S_r^{n-1}(C)$ para todo $Q \in \Gamma$. Portanto, $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma = \varnothing$.

b) $\Longrightarrow$) Como $d(C,\Gamma) = r$, então pela proposição (3.2.1), existe $Q_0 \in \Gamma$ tal que $\overrightarrow{CQ^0} \perp \Gamma$ e $d(C,\Gamma) = d(C,Q_0)$, logo $Q_0 \in \mathbb{S}_r^{n-1}(C)$.

Dado $B \in \Gamma$ então $d(C,B) > d(C,Q_0)$. Logo para todo $B \in \Gamma - \{Q_0\}$, temos que $B \notin \mathbb{S}_r^{n-1}(C)$. Portanto $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1}(C) = \{Q_0\}$.

c) $\Longrightarrow$) Como $d(C,\Gamma) < r$, então pela proposição (3.2.1) existe um ponto $P_0 \in \Gamma$ tal que $d(C,\Gamma) = d(P_0,C)$ onde $\overrightarrow{CP_0} \perp \Gamma$ e $P_0 \in l$, onde l uma reta gerada por $\overrightarrow{e_n} = (0,...,0,1)$ logo $P_0 = (0,...,0,k)$.

Como $d(\Gamma,C) < r$ então $d(P_0,C) = k < r$, logo $r^2 - k^2 > 0$.

Podemos considerar $S^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0) = \{P \in \Gamma; d(P,P_0) = \sqrt{r^2-k^2}\}$.

Dado $(x_1,...,x_{n-1},k) \in S^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0)$ então,

$$
\begin{aligned}
d(P,P_0) = \sqrt{r^2-k^2} & \\
\sqrt{(x_1-0)^2 + ... + (x_{n-1}-0)^2 + (k-k)^2} &= \sqrt{r^2-k^2} \\
x_1^2 + ... + x_{n-1} &= r^2 - k^2 \\
x_1^2 + ... + x_{n-1} + k^2 &= r^2
\end{aligned}
$$

Concluímos que $(x_1,...,x_{n-1},k) \in \mathbb{S}_r^{n-1}$.

Portanto, o ponto $(x_1,...,x_{n-1},k) \in \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0) \subset \mathbb{S}_r^{n-1}$ e como $S^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}} \subset \Gamma$ então

$$\mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0) \subset \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma. \tag{4.1}$$

Concluímos assim que $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma \neq \varnothing$. Sendo $\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma \neq \varnothing$, então dado $P \in \mathbb{S}_r^{n-1} \cap \Gamma$ isto é, $P \in \Gamma$ e $P \in \mathbb{S}_r^{n-1}$ ou seja,

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 + k^2 &= r^2 \\
x_1^2 + ... + x_{n-1}^2 &= r^2 - k^2
\end{aligned}
$$

Logo, $P \in \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0)$, e portanto

$$\Gamma \cap S^{n-1}_r \subset \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0) \tag{4.2}$$

De (4.1) e (4.2) concluimos que $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_0)$.

a) $\Longleftarrow$) Vamos provar que se $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \varnothing$, então $d(C,\Gamma) > r$, ou equivalentemente, que se $d(C,\Gamma) \leq r$, então $\Gamma \cap \mathbb{R}^{n-1}_r \neq \varnothing$. Mas isto segue de ($b \Longrightarrow$) e ($c \Longrightarrow$).

Se $d(C,\Gamma) = r$ de ($b \Longrightarrow$) temos que $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \{P\} \neq \varnothing$.

Se $d(C,\Gamma) < r$ de ($c \Longrightarrow$) temos que $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_o) \neq \varnothing$, onde $k = d(C,\Gamma)$.

Portanto se $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \varnothing$, então $d(O,\Gamma) > r, onde\ O = (0,0,...,0)$.

b) $\Longleftarrow$) Vamos provar agora que se $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \{P\}$, então $d(C,\Gamma) = r$, ou equivalentemente se $d(C,\Gamma) \neq r$ então $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r$ não é um único ponto.

Para $d(C,\Gamma) \neq r$ temos dois casos: $d(C,\Gamma) > r$ ou $d(C,\Gamma) < r$.

No caso em que $d(C,\Gamma) > r$, de ($a \Longrightarrow$) temos $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \varnothing$;

No caso em que $d(C,\Gamma) < r$, de ($c \Longrightarrow$) temos $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_o)$;

Portanto se $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \{P\}$, então $d(C,\Gamma) = r$.

c) $\Longleftarrow$) Queremos mostrar agora que se $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_o)$ então $d(C,\Gamma) < r$, ou equivalentemente que se $d(C,\Gamma) \geq r$, então $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r \neq \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_o)$.

Se $d(C,\Gamma) = r$ pelo provado em ($b \Longrightarrow$) temos que $\Gamma \cap \mathbb{S}^{n-1}_r = \{P_0\}$.

Se $d(C,\Gamma) > r$ pelo provado em $(a \Longrightarrow)$ temos que $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \varnothing$.

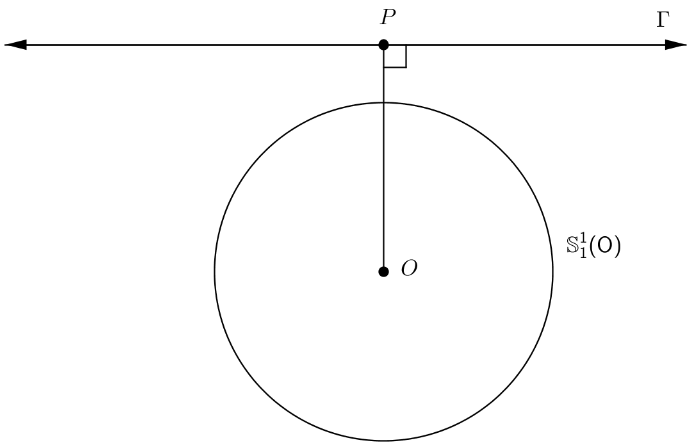
Portanto se $\Gamma \cap \mathbb{S}_r^{n-1} = \mathbb{S}^{n-2}_{\sqrt{r^2-k^2}}(P_o)$, então $d(C,\Gamma) < r$.

$\square$

Exemplo 4.1.1. *Vejamos as posições relativas entre hiperplano e hiperesfera para o caso $n = 2$ a qual é estudada no Ensino Médio e apresentada aqui dentro da visão da proposição anterior. Sejam Γ^1 uma reta e $\mathbb{S}^1$ uma circunferência unitária com centro na origem. Logo:*

a) $d(O,\Gamma) > 1 \Longleftrightarrow \Gamma \cap \mathbb{S}^1 = \varnothing$, *isto é,* Γ *não toca na circunferência* $\mathbb{S}^1$. *Veja a figura 5.1:*

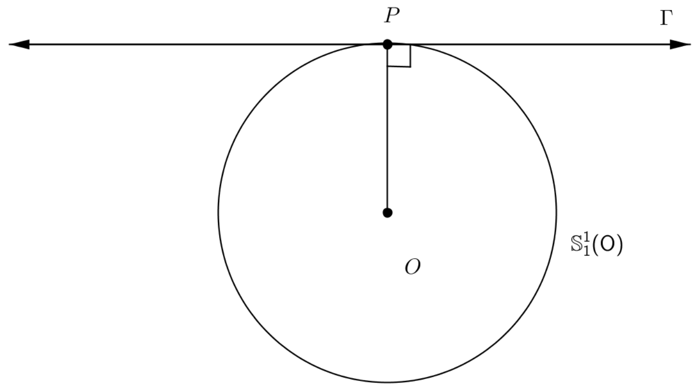
Figura 4.1:



Fonte: Autor

b) $d(O,\Gamma) = 1 \Longleftrightarrow \Gamma \cap \mathbb{S}^1 = \{P\}$, *isto é,* Γ *é tangente a circunferência* $\mathbb{S}^1$. *Veja a figura 5.2:*

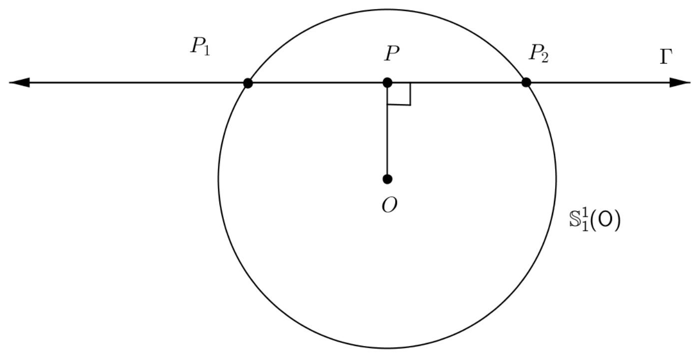
Figura 4.2:



Fonte: Autor

c) $d(O,\Gamma) < 1 \Longleftrightarrow \Gamma \cap \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^0_k$, *isto é,* $\mathbb{S}^0 = \{P_1, P_2\}$, *onde* $P_1 = (-k, P)$ *e* $P_2 = (k, P)$ *tal que* $k = \sqrt{1 - (d(O,P))^2}$. *Veja a figura 5.3:*

Figura 4.3:



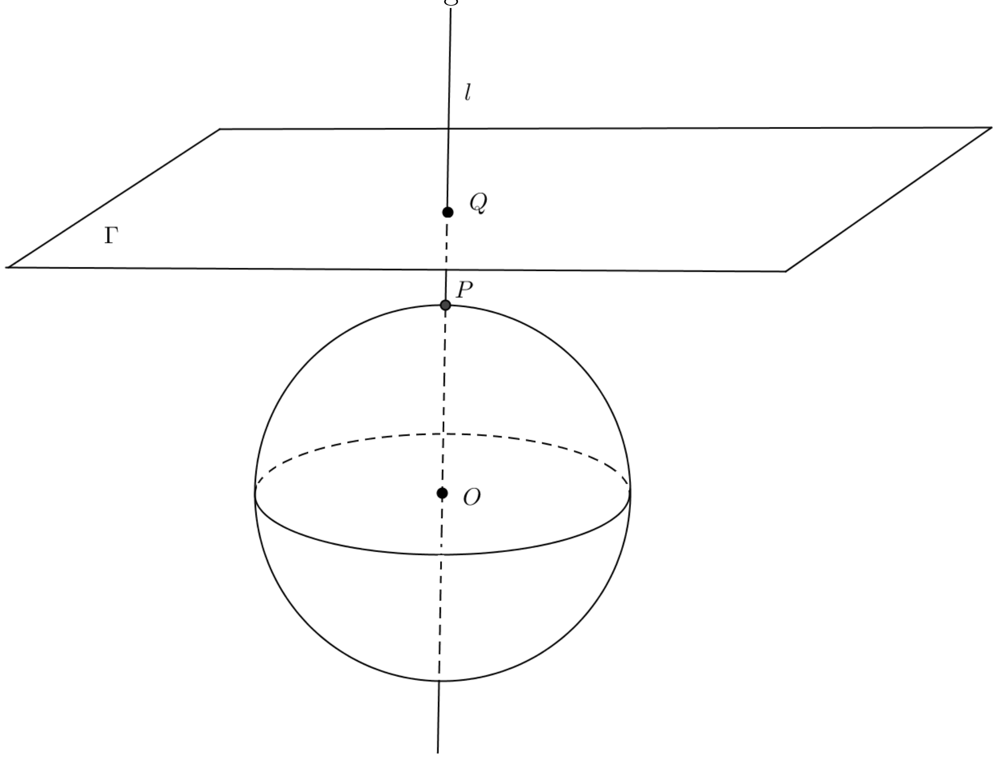
Fonte: Autor

Exemplo 4.1.2. *Vejamos as posições relativas entre hiperplano e hiperesfera para o caso* $n = 3$.

Sejam Γ^2 *um plano no espaço e* $\mathbb{S}^2$ *uma esfera unitária com centro na origem. Logo:*

a) *Sejam* $d(O,Q) > 1$ *então o hiperplano* Γ^2 *não toca a hiperesfera* $\mathbb{S}^2$*, como mostra a figura 5.4:*

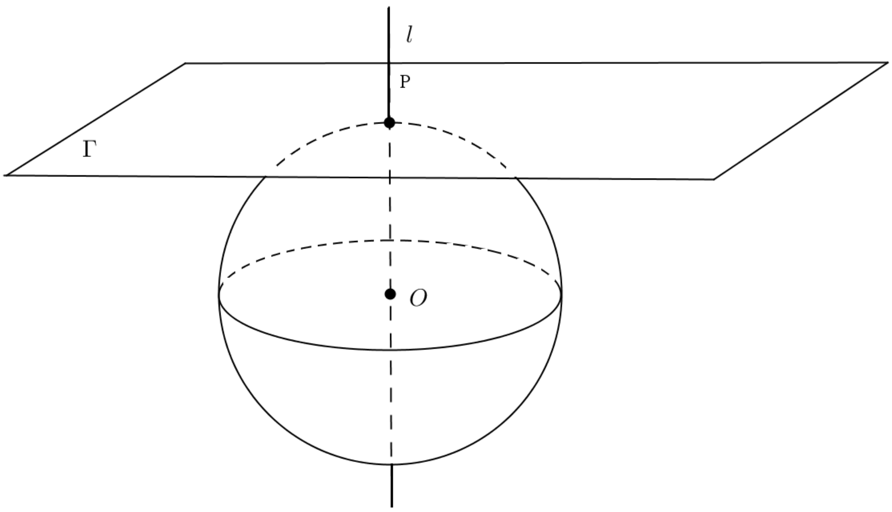
Figura 4.4:



Fonte: Autor

b) Sejam $d(O, Q) = 1$ *então o hiperplano* Γ^2 *é tangente a hiperesfera* $\mathbb{S}^2$*, no ponto* P*, como mostra a figura 5.5:*

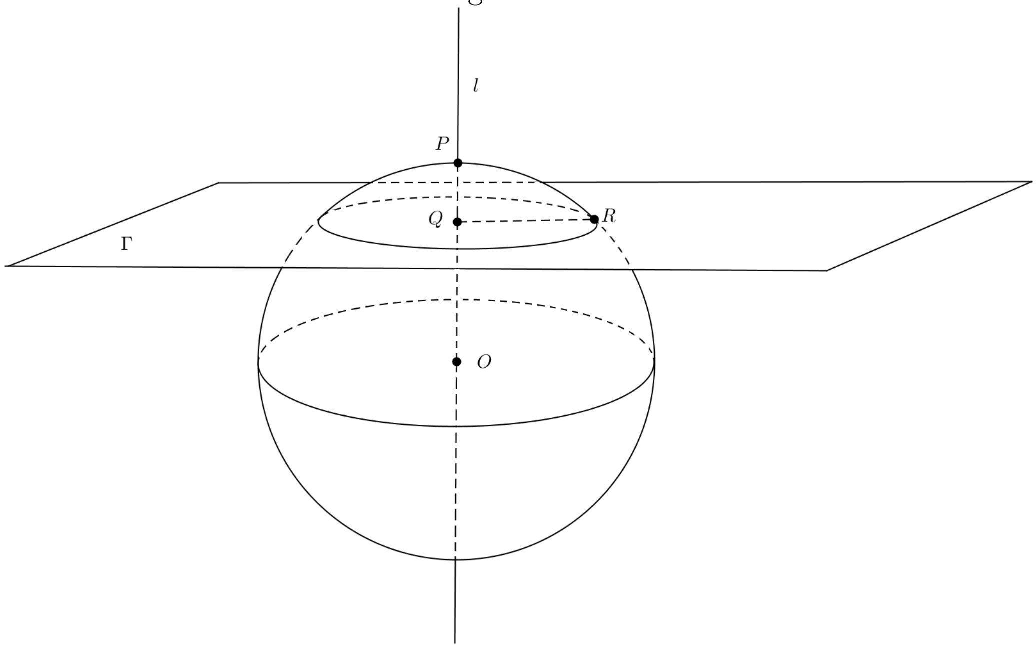
Figura 4.5:



Fonte: Autor

c) Sejam $d(O,Q) < 1$ então o hiperplano Γ^2 secciona a hiperesfera $\mathbb{S}^2$ formando uma circunferência $\mathbb{S}^1$ de raio $\sqrt{1-(d(O,Q))^2}$, como mostra a figura 5.6:

Figura 4.6:



Fonte: Autor

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho foi desenvolvido tomando-se como eixo central a Geometria Analítica do Ensino Médio, estudando os seus principais elementos e generalizando-os para o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, dese modo reunimos alguns elementos da Geometria Analítica no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ que se encontram distribuidos de modo fraguimentados na literatura. Alguns resultados que não se encontram na literatura, salvo engano, foram apresentados. Conseguimos apresentar: a fórmula para o cálculo da distância entre dois pontos e a colinearidade de pontos; as equações paramétrica e simétrica da reta; perpendicularidade entre retas; Teorema de Pitágoras para vetores no $\mathbb{R}^n$, um método de calcular a distância de um ponto a reta. Apresentou-se também: a definição de Hiperplano; a equação do hiperplano; as posições relativas entre retas e as posições relativas entre reta e hiperplano no $\mathbb{R}^n$, bem como a distância entre ponto e hiperplano e a distância entre retas paralelas. A hiperesfera e suas posições relativas ao hiperplano foram apresentadas. Em cada capítulo buscou-se fazer uma relação através de exemplos e particularidades com a Geometria Analítica do Ensino Médio. Outros elementos podem ser estudados usando como base esta dissertação, como por exemplo: métodos pra calcular a distância entre retas reversas no $\mathbb{R}^n$, distância entre hiperplanos, posições relativas entre hiperplanos, ângulos formado por retas no $\mathbb{R}^n$ e ângulos formado por hiperplanos. Esperamos que este trabalho venha contribuir como fonte de pesquisa, relacionando esses resultados de forma particular com a Geometria Analítica do Ensino Médio, proporcionando ao professor desse nível, fazer uma reflexão em relação a esse conteúdo ampliando seu conhecimento e compreensão. E aos alunos do PICEM e da Licenciatura em Matemática uma referência no estudo da Matemática e mais particularmente da Geometria Analítica, construindo o saber e fazer matemático, mostrando que a matemática não é estática, mas sim uma construção dinâmica.

REFERÊNCIAS

[1] ANDRADE, Plácido; BARROS, Abdênago. **Introdução à geometria projetiva**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 110 p.

[2] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. **Fundamentos de física**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[3] HEFEZ, Abramo; FERNANDEZ, Cecília de Sousa **Introdução à álgebra linear**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 328 p.

[4] HONIG, Chaim Samud. **Aplicações da topologia à análise**. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

[5] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: geometria análitica**. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005. 282 p. v 7.

[6] LANG, Serge. **Álgebra linear: traduzido da terceira edição em inglês**. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2003. 388 p.

[7] LIMA, Elon Lages. **Álgebra linear**. 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. 357 p.

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 547 p. 2 v.

[9] LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1977 299 p.

[10] LIMA, Elon Lages. **Geometria análitica e álgebra linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. 324 p.

[11] SANTOS, Nathan Moreira dos. **Vetores e matrizes: uma introdução a álgebra linear**. 4. ed. São Paulo: Thomson, 2007. 287 p.

[12] SILVA, Angela M. M. (Coordenação); SOUTO, Clivea de F. et al **Manual de normas para apresentação dos trabalhos técnico-científicos da UFRR**. Boa Vista - RR: UFRR, 2012.

[13] SPIVAK, Michael. **O cálculo em variedades**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2003. 168 p.

[14] SYMON, Keith R.; tradução de Gilson Brand Batista **Mecânica**. 5 ed. Rio de Janeiro - RJ: Campus, 1982.

[15] STEWART, Jemes; tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins **Cálculo, vol. 2 Mecânica**. 5 ed. São Paulo: Thomson Learning, 2007.