Ayudantía 3

Ejercicio 1. Pruebe que G/H es grupo tal que la proyeccion natural $\pi : G \to G/H$ es morfismo si y solo si H es un subgrupo normal.

Ejercicio 2. Sea G un grupo, H, K subgrupos normales tal que K es un subgrupo de H. Pruebe que H/K es normal en G/K y que

$$(G/K)/(H/K) \cong G/H$$

Ejercicio 3. Pruebe que si G es un grupo finito, entonces, para todo $g \in G$,

$$\langle g \rangle = \{g^n \mid n = 0, ..., \mathrm{ord}(g) - 1\}$$

Ejercicio 4. Sea V_n el conjunto de vértices de un polígono regular de n lados con $(1, 0)$ uno de los vértices:

$$V_n := \left\{ \mathrm{Rot}\left(\frac{2\pi}{n}k\right)(1,0) \mid k \in \mathbb{N} \right\}$$

Pruebe que $\cdot : D_n \times V_n \to V_n$ definido por

$$M \cdot x = Mx$$

es una acción $D_n \curvearrowright V_n$. Discuta sobre las orbitas, estabilizadores, si es transitiva, fiel y/o libre.

Ejercicio 5.

Teorema (Teoremas de Sylow)**.** *Sea G un grupo finito, p un primo que divide a G. Sea m, α tal que $|G| = p^\alpha m$ y $p \not| m$. Entonces,*

1. *Existe algún p-subgrupo de Sylow para G.*
2. *Todo p-subgrupo esta contenido en algún p-subgrupo de Sylow.*
3. *Todos los p-subgrupos de Sylow son conjugados.*
4. *Sea n_p la cantidad de p-subgrupos de Sylow. $n_p \mid m$ y $n_p \equiv 1 \pmod p$.*

Encuentre todos los grupos de orden 6 (salvo isomorfismos):

(a) Muestre que existen $x, y \in G$ tales que $\mathrm{ord}(x) = 2$, $\mathrm{ord}(y) = 3$.
(b) Muestre que $G = \{e, x, y, y^2, xy, xy^2\} = \langle x, y \rangle$.
(c) Muestre que $\mathrm{ord}(xy) \neq 3$.
(d) Si $\mathrm{ord}(xy) = 6$, es un grupo cíclico. De un ejemplo, de tal grupo.
(e) Si $\mathrm{ord}(xy) = 2$, muestre que todos esos grupos son isomorfos. De un ejemplo de tal grupo.
(f) Concluya que un grupo de orden 6 es isomorfo al grupo que dio de ejemplo en (d) o al grupo que dio de ejemplo en (g).