

# ベーテ仮説入門

佐藤純

## 1 はじめに

ベーテ仮説とは、一次元量子多体系のハミルトニアンを対角化し、エネルギー固有値および固有状態を厳密に構成する手法である。本テキストでは、これについての入門的解説を行う。

ベーテ仮説は元々、ベーテが1931年に、ハイゼンベルク模型の固有値、固有ベクトルを厳密に求める手法として創始したもので、現在では座標ベーテ仮説と呼ばれる [1]。本テキストの前半では、ハイゼンベルク模型を少し拡張した XXZ 模型を用いて、座標ベーテ仮説を解説する。座標ベーテ仮説は、ベーテ型波動関数の物理的描像を描きやすいという利点があり、ベーテ仮説を初めて学ぶのに適したルートであるが、模型の可解性の背景は明らかでない。座標ベーテ仮説においては、多体の散乱が2体散乱の積にかけることが本質的であり、これは散乱の前後で運動量の組が不変であることの帰結である。運動量に対するこの強い制約は、エネルギーと運動量の保存則だけからは導かれず、より高い対称性の存在が示唆される。

これを明確にしてくれるのが代数的ベーテ仮説であり、本テキストの後半で解説する。一般に  $d$  次元量子系は  $d+1$  次元古典系に対応することが知られており、本テキストでは XXZ 模型に対応する2次元古典統計力学模型である6頂点模型を取り扱う。6頂点模型の転送行列が、対応する量子系である XXZ 模型の無限個の保存量の母関数となっており (式 (3.19) 参照)、そのための条件として Yang-Baxter 関係式が可解性の根拠であることを見る。

## 2 ハイゼンベルク XXZ 模型と座標ベーテ仮説

### 2.1 模型の定義

1次元スピン1/2ハイゼンベルク XXZ 模型は、異方性パラメータ  $\Delta$  を使って、ハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\text{XXZ}} = \sum_{n=1}^L \left[ \frac{1}{2} (S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+) + \Delta \left( S_n^z S_{n+1}^z - \frac{1}{4} \right) \right] \quad (2.1)$$

で与えられる。ただし、後の計算の都合上、真空状態  $|0\rangle := |\uparrow\uparrow\cdots\uparrow\rangle$  のエネルギーがゼロになるように定数  $-1/4$  を加えてある。ここでは、周期境界条件  $\mathbf{S}_{L+1} = \mathbf{S}_1$  を考える。スピン1/2演算子はパウリ行列を使って  $S^\alpha = \frac{1}{2}\sigma^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) と書け、昇降演算子は  $S^\pm = S^x \pm iS^y$  で定義される。これらの基底への作用は

$$S^z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle, \quad S^z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}|\downarrow\rangle, \quad S^+|\uparrow\rangle = 0, \quad S^+|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle, \quad S^-|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle, \quad S^-|\downarrow\rangle = 0 \quad (2.2)$$

で与えられる。ここで、アップスピン  $|\uparrow\rangle$  を真空、ダウンスピン  $|\downarrow\rangle$  を粒子とみなすと、 $\frac{1}{2}(S_n^+ S_{n+1}^- + S_n^- S_{n+1}^+)$  の項は粒子を左右へホッピングさせることが分かる。ただし、排除体積効果があって、既に隣に粒子がいる場合にはホッピングは起こらない。次に、 $\Delta(S_n^z S_{n+1}^z - \frac{1}{4})$  の項は、粒子の塊(クラスター)があった場合、その両端のみ数えるので、粒子のクラスターの数一数えることが分かる。簡単な計算により、クラスターが  $m$  個の場合には固有値  $-m\Delta$  を与えることが確かめられる。すなわち、ハミルトニアンは粒子をホッピングさせるだけであり、粒子数を変えない。つまり、ハミルトニアンを行列表示すれば  $2^L \times 2^L$  の行列となるが、粒子数  $N$  の部分空間ごとに次元  $\binom{L}{N}$  でブロック対角化されている。以下、粒子数  $N$  を固定し、次元  $\binom{L}{N}$  の部分空間ごとに対角化することを試みる。

### 2.2 座標ベーテ仮説による XXZ 模型の対角化

#### 2.2.1 $N=0$ のとき

粒子数  $N=0$  の状態は、真空状態のみであり、これは、固有値0の固有ベクトルとなっている ( $\mathcal{H}_{\text{XXZ}}|0\rangle = 0$ )。

### 2.2.2 $N = 1$ のとき

粒子数  $N = 1$  の部分空間の次元は  $\binom{L}{1} = L$  であり,  $L$  個の固有ベクトルが構成できればよい. 粒子が  $n$  サイト目にいる状態を  $|n\rangle := S_n^-|0\rangle$  と書く. この部分空間の一般のベクトルは,  $L$  個の基底  $|1\rangle, \dots, |L\rangle$  を重ね合わせることによって

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^L \psi(n)|n\rangle \quad (2.3)$$

と構成される. ここで, 重ね合わせの係数  $\psi(n)$  は状態  $|n\rangle$  の確率振幅を表し, 波動関数と呼ばれる. 1 粒子の場合には, 波動関数として平面波

$$\psi(n) = e^{ikn} \quad (2.4)$$

をとれば固有ベクトルになることは容易にわかるであろう. これを, 1 粒子の場合のベーテ波動関数と呼び,  $|\psi\rangle$  をベーテベクトルと呼ぶ. ベーテベクトルへのハミルトニアン<sup>(1)</sup>の作用を計算してみると,  $\mathcal{H}_{\text{XXZ}}|\psi\rangle = (\cos k - \Delta)|\psi\rangle$  となり, 固有ベクトルとなっていることが分かる. ここで, 周期境界条件により系が並進対称であることを使った. また, 波動関数  $\psi(n)$  に対する周期境界条件から,  $\psi(L) = \psi(1)$ , すなわち

$$e^{ikL} = 1 \quad (2.5)$$

が要請される. これを, 1 粒子の場合のベーテ方程式という. これは容易に解くことができ,

$$k = \frac{2\pi}{L}I, \quad I \in \mathbb{Z} \quad (2.6)$$

となる. ここで, 波数  $k$  を決める整数  $I$  をベーテ量子数という. この場合は  $I = 0, 1, 2, \dots, L-1$  ととることにし,  $L$  個の独立な固有ベクトルが構成され, 目的が達成できた.

また, 右への並進演算子  $T_R$  は, 全運動量演算子  $K$  を用いて  $T_R = e^{-iK}$  と書ける.

$$T_R|\psi\rangle = \sum_{n=1}^L \psi(n)T_R|n\rangle = \sum_{n=1}^L \psi(n)|n+1\rangle = e^{-ik}|\psi\rangle \quad (2.7)$$

より, 全運動量は  $K = k$  となる.

### 2.2.3 $N = 2$ のとき

粒子数  $N = 2$  の部分空間の次元は  $\binom{L}{2} = L(L-1)/2$  であり,  $L(L-1)/2$  個の基底  $|n_1, n_2\rangle$  ( $1 \leq n_1 < n_2 \leq L$ ) で張られる. ただし, 粒子 (下向きスピン) が  $n_1, n_2$  サイト目にいる状態を  $|n_1, n_2\rangle := S_{n_1}^- S_{n_2}^-|0\rangle$  と書いた. これにハミルトニアンを作用させてみると, 2 粒子が離れている場合とくっついている場合で異なる作用をすることが分かる. これが 2 粒子間の相互作用となる. このことに注意して, 固有方程式  $\mathcal{H}_{\text{XXZ}}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  の成分  $\langle n_1, n_2|\mathcal{H}_{\text{XXZ}}|\psi\rangle = E\langle n_1, n_2|\psi\rangle$  を計算してみよう.

$N = 2$  の部分空間の任意のベクトル  $|\psi\rangle$  は,  $L(L-1)/2$  個の基底  $|n_1, n_2\rangle$  を重ね合わせることによって

$$|\psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < n_2 \leq L} \psi(n_1, n_2)|n_1, n_2\rangle \quad (2.8)$$

と構成される. 2 粒子の場合には, 波動関数として 1 粒子の場合の平面波を自然に拡張すれば

$$\psi(n_1, n_2) = e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)} \quad (2.9)$$

と書けるであろう. 2 粒子が離れている場合にはこれで問題ないが, これだけだと 2 粒子の衝突の効果を表せない. そこで, ベーテは衝突により波数  $k_1, k_2$  が入れ替わった項も付け加えて, 以下のベーテ波動関数

$$\psi(n_1, n_2) = A_{12}e^{i(k_1 n_1 + k_2 n_2)} + A_{21}e^{i(k_2 n_1 + k_1 n_2)} \quad (2.10)$$

を提案した. 以下, この波動関数を使って, これを具体的に見てみよう.

(‡) 衝突による接続条件～散乱行列と散乱位相因子

- $n_2 - n_1 > 1$  ( $2 \leq n_1, n_2 \leq L-1$ ) のとき

$$\langle n_1, n_2 | H_{XXZ} | \psi \rangle = E \psi(n_1, n_2), \quad E = \sum_{\ell=1}^2 (\cos k_\ell - \Delta) \quad (2.11)$$

となり、固有方程式はベーテ波動関数 (2.10) によって自動的に満たされることが分かる。ここまでの議論では、 $A_{21} = 0$  としてしまっても問題ないことが分かるであろう。

- $n_2 - n_1 = 1$  ( $2 \leq n_1, n_2 \leq L-1$ ) のとき  
 $n_1 = n, n_2 = n+1$  ( $2 \leq n \leq L-2$ ) として、

$$\langle n, n+1 | H_{XXZ} | \psi \rangle = \frac{1}{2} [\psi(n-1, n+1) + \psi(n, n+2)] - \Delta \psi(n, n+1) = E \psi(n, n+1) \quad (2.12)$$

を得る。ここで、先程計算した2粒子が離れている場合に出てくる式

$$\frac{1}{2} [\psi(n_1-1, n_2) + \psi(n_1+1, n_2) + \psi(n_1, n_2-1) + \psi(n_1, n_2+1)] - 2\Delta \psi(n_1, n_2) = E \psi(n_1, n_2) \quad (2.13)$$

に  $n_1 = n, n_2 = n+1$  を代入してみると

$$\frac{1}{2} [\psi(n-1, n+1) + \psi(n+1, n+1) + \psi(n, n) + \psi(n, n+2)] - 2\Delta \psi(n, n+1) = E \psi(n, n+1) \quad (2.14)$$

となる。しかし、もともと波動関数  $\psi(n_1, n_2)$  の定義域は  $1 \leq n_1 < n_2 \leq L$  だったので、 $\psi(n+1, n+1), \psi(n, n)$  は出てこないはずである。そこで、その他の領域にもベーテ波動関数の定義式 (2.10) によって定義域を拡張するを考えよう。式 (2.14) から式 (2.12) を引くと、

$$\psi(n+1, n+1) + \psi(n, n) = 2\Delta \psi(n, n+1) \quad (2.15)$$

を得る。これが、衝突の効果による波動関数の接続条件となる。この式にベーテ波動関数の具体形 (2.10) を代入して、

$$A_{21}/A_{12} = \boxed{-\frac{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_2}}{1 + e^{i(k_1+k_2)} - 2\Delta e^{ik_1}} =: S(k_1, k_2)} \quad (2.16)$$

を得る。ここで、2粒子の散乱による散乱行列  $S(k_1, k_2)$  を導入した。すなわち、粒子1と粒子2がすれ違って  $A_{12} \rightarrow A_{21}$  となる際に、散乱行列  $S(k_1, k_2)$  による散乱を受けて  $A_{21} = S(k_1, k_2)A_{12}$  となると解釈する。さて、ここで散乱位相因子  $\phi(k_1, k_2)$  を

$$S(k_1, k_2) = -\exp[-i\phi(k_1, k_2)] \quad (2.17)$$

で定めると、

$$\phi(k_1, k_2) = 2 \arctan \left[ \frac{\Delta \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)}{\Delta \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right) - \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)} \right] \quad (2.18)$$

となる。

#### (#) 周期境界条件～ベーテ方程式の導出

さて、次に周期境界条件について考えよう。すなわち、今までは境界の影響を避けるために  $2 \leq n_1, n_2 \leq L-1$  の範囲で考えてきたが、 $n_1 = 1$  の場合、および  $n_2 = L$  の場合を考え、ホッピングによってリングを一周するプロセスを考えよう。ここでは例として  $n_1 = 1$  かつ  $3 \leq n_2 \leq L-2$  の場合を考える。その他の場合も同様の結果が得られる。前のやりかたと同様にして  $\langle 1, n_2 | H_{XXZ} | \psi \rangle$  を計算すると、

$$\langle 1, n_2 | H_{XXZ} | \psi \rangle = \frac{1}{2} [\psi(n_2, L) + \psi(2, n_2) + \psi(1, n_2-1) + \psi(1, n_2+1)] - 2\Delta \psi(1, n_2) \quad (2.19)$$

となるが、これが前にやった  $n_2 - n_1 > 1$  ( $2 \leq n_1, n_2 \leq L-1$ ) の場合の計算と整合するためには、

$$\psi(n_2, L) = \psi(n_1-1, n_2) = \psi(0, n_2) \quad (2.20)$$

を満たさねばならない. この式にベーテ波動関数の具体形 (2.10) を代入すると  $e^{ik_1 n_2}(A_{12}e^{ik_2 L} - A_{21}) + e^{ik_2 n_2}(A_{21}e^{ik_1 L} - A_{12}) = 0$  となるので, ベーテ方程式

$$e^{ik_1 L} = A_{12}/A_{21} = S(k_2, k_1), \quad e^{ik_2 L} = A_{21}/A_{12} = S(k_1, k_2), \quad (2.21)$$

が得られる.

#### (‡) 運動量固有値

最後に, 全運動量  $K$  の固有値を調べる. ベーテベクトルを並進させてみると  $T_R|\psi\rangle = e^{-i(k_1+k_2)}|\psi\rangle$  となるので,  $K = k_1 + k_2$  を得る. ここで, 波動関数の周期性 (2.20) を用いた.

#### 2.2.4 一般の $N$ のとき

ここでは紙数の関係で計算の細部は省略するが,  $N \geq 3$  の場合も同様に議論が進む.  $N$  粒子の場合の固有ベクトルを  $|\psi\rangle$  とし, 基底で展開して

$$|\psi\rangle = \sum_{1 \leq n_1 < \dots < n_N \leq L} \psi(n_1, \dots, n_N) |n_1, \dots, n_N\rangle. \quad (2.22)$$

と書こう. ここで,  $n_1, \dots, n_N$  は粒子 (ダウンスピン) の位置を表す  $|n_1, \dots, n_N\rangle := \prod_{j=1}^N S_{n_j}^- |0\rangle$ . 2 粒子の場合の自然な拡張として,  $N$  粒子の場合のベーテ波動関数  $\psi(n_1, \dots, n_N)$  を平面波の重ね合わせで

$$\psi(n_1, \dots, n_N) = \sum_{\sigma \in S_N} A(\sigma) \exp \left[ i \sum_{j=1}^N k_{\sigma_j} n_j \right] \quad (2.23)$$

としよう. ここで, 和は対称群  $S_N$  の全ての  $N!$  個の元  $\sigma$  に関して取るとする.

#### (‡) 衝突による接続条件

2 粒子のときと同様に, 固有方程式  $\mathcal{H}_{XXZ}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  の  $|n_1, \dots, n_N\rangle$  成分を考えよう.

まず, 全ての粒子が境界の影響を受けず, かつ互いに離れている場合

$$2 \leq n_1, n_N \leq L-1, \quad n_2 - n_1 > 1, \dots, n_N - n_{N-1} > 1 \quad (2.24)$$

を考えると, 固有方程式はベーテ波動関数 (2.23) によって自動的に満たされ, エネルギー固有値は

$$E = \sum_{\ell=1}^N (\cos k_\ell - \Delta) \quad (2.25)$$

与えられることが分かる.

次に,  $t$  個のペアが  $(\beta_1, \beta_1+1), (\beta_2, \beta_2+1), \dots, (\beta_t, \beta_t+1)$  と隣り合っており, その他の粒子  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{N-2t}$  は全て互いに離れているとしよう. また, 境界の影響を受けないように  $2 \leq n_1, n_N \leq L-1$  としておく. この場合, 2 粒子の場合と同様に, 波動関数の定義域を拡張すれば

$$2t\Delta\psi(n_1, \dots, n_N) = \sum_{\ell=1}^t [\psi(\dots, \beta_\ell, \beta_\ell, \dots) + \psi(\dots, \beta_\ell+1, \beta_\ell+1, \dots)] \quad (2.26)$$

となる. これが成り立つための十分条件として

$$2\Delta\psi(\dots, n, n+1, \dots) = \psi(\dots, n, n, \dots) + \psi(\dots, n+1, n+1, \dots) \quad (2.27)$$

を得る. 今, 2 つの粒子がペアを組んでいる場合を考えたが, 粒子のクラスターサイズが 3 以上の場合でも (2.27) が十分条件となることを示せる. 例えば,  $(n, n+1, n+2)$  に 3 粒子があり, その他の粒子は全て離れているとすると, 同様の手続きから条件式

$$4\Delta\psi(\dots, n, n+1, n+2, \dots) = \psi(\dots, n+1, n+1, n+2, \dots) + \psi(\dots, n, n, n+2, \dots) \\ + \psi(\dots, n, n+2, n+2, \dots) + \psi(\dots, n, n+1, n+1, \dots) \quad (2.28)$$

が導かれるが, 容易に分かるようにこれは (2.27) が成り立っていれば自動的に満たされる.

次に, 条件式 (2.27) にベーテ波動関数 (2.23) を代入すると, 接続条件式は

$$A(\sigma')/A(\sigma) = -\frac{1 + e^{i(k+k')} - 2\Delta e^{ik'}}{1 + e^{i(k+k')} - 2\Delta e^{ik}} = S(k, k') = -\exp[-i\phi(k, k')], \quad k := k_{\sigma_j}, \quad k' := k_{\sigma_{j+1}}, \quad (2.29)$$

と書けることが分かる. ここで,  $\sigma$  と  $\sigma'$  は

$$\sigma'_j = \sigma_{j+1}, \quad \sigma'_{j+1} = \sigma_j, \quad \sigma'_\ell = \sigma_\ell \quad \text{for } \ell \neq j, j+1. \quad (2.30)$$

を満たす任意の  $S_N$  の元の組である.  $N = 3$  の場合を例にして具体的に書き下してみると,

$$\frac{A_{132}}{A_{123}} = S_{23}, \quad \frac{A_{213}}{A_{231}} = S_{31}, \quad \frac{A_{321}}{A_{312}} = S_{12}, \quad \frac{A_{213}}{A_{123}} = S_{12}, \quad \frac{A_{321}}{A_{231}} = S_{23}, \quad \frac{A_{132}}{A_{312}} = S_{31} \quad (2.31)$$

となる. ここで,  $S_{j\ell} := S(k_j, k_\ell)$  と略記した. さて, ここで, 2 体散乱を繰り返すことによって  $A_{123}$  から  $A_{321}$  を作る時, 2 通りのやり方があるが, それらが同じ結果を与える必要がある. すなわち,

$$\begin{aligned} A_{321} &= S_{12}A_{312} = S_{12}S_{13}A_{132} = S_{12}S_{13}S_{23}A_{123}, \\ A_{321} &= S_{23}A_{231} = S_{23}S_{13}A_{213} = S_{23}S_{13}S_{12}A_{123} \end{aligned} \quad (2.32)$$

より, 散乱行列は関係式

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{13}S_{12} \quad (2.33)$$

を満たす必要がある. XXZ 模型の場合, 散乱行列  $S_{jk}$  はスカラーであるのでこの関係式は自明に成り立つが, 内部自由度のある系では重要な意味を持つ. 実際, スピン自由度を持つフェルミオン系において, Yang によって最初に導入された [2]. 一方, 本テキスト後半の 6 頂点模型の節で述べるように, 可解な古典統計力学模型のボルツマン重率が同様の関係式 ((3.5) 式参照) を満たすことが Baxter により見出され [3], 現在では Yang-Baxter 関係式と呼ばれている [4, 5].

#### (#) 周期境界条件～ベーテ方程式の導出

2 粒子の場合と同様に, 周期境界条件からベーテ方程式

$$e^{ik_j L} = \prod_{\ell \neq j}^N S(k_\ell, k_j), \quad \text{for } j = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

を導くことが出来る. この式は,  $j$  番目の粒子が長さ  $L$  のリングを一周する間に他の全ての粒子  $\ell \neq j$  から散乱  $S(k_\ell, k_j)$  を受けている, と読むことが出来る.

## 2.3 擬運動量からラピディティへの変数変換

擬運動量  $k$  からラピディティ  $z$  への変数変換を

$$e^{ik} = \frac{\varphi(z - \eta/2)}{\varphi(z + \eta/2)}, \quad k = -i \log \left( \frac{\varphi(z - \eta/2)}{\varphi(z + \eta/2)} \right) \quad (2.35)$$

で定義する. ここで, 関数  $\varphi(z)$  とパラメータ  $\eta (= i\zeta)$  は,  $\Delta$  の値の範囲によって以下のように定義される:

$\varphi(z) = z,$	$\eta = i (\zeta = 1)$	for	$\Delta = 1$	XXX
$\varphi(z) = \sinh(z),$	$\Delta = \cosh \eta = \cos \zeta (0 < \zeta < \pi)$	for	$-1 < \Delta < 1$	massless XXZ
$\varphi(z) = \sin(z),$	$\Delta = \cos \eta = \cosh \zeta (\zeta > 0)$	for	$\Delta > 1$	massive XXZ

ここでは詳しく議論できないが, 励起エネルギーにギャップがある (ない) 系を massive (massless) と呼ぶ. ここで, どの場合にも  $\Delta = \varphi'(\eta)$  が成り立つことに注意せよ. これを使うと, 散乱行列はラピディティを使って

$$S(k, k') = -\frac{1 + e^{i(k+k')} - 2\Delta e^{ik'}}{1 + e^{i(k+k')} - 2\Delta e^{ik}} = \frac{\varphi(z - z' + \eta)}{\varphi(z - z' - \eta)}. \quad (2.37)$$

のように書ける。これを使えば、ベータ方程式は

$$\left( \frac{\varphi(z_j + \eta/2)}{\varphi(z_j - \eta/2)} \right)^L = \prod_{\ell \neq j}^N \frac{\varphi(z_j - z_\ell + \eta)}{\varphi(z_j - z_\ell - \eta)} \quad (2.38)$$

となる。ここで、 $T_{j\ell} := \varphi(z_j - z_\ell - \eta)$  という量を導入すると、 $S_{j\ell} = -T_{\ell j}/T_{j\ell}$  と書けるので、波動関数の係数を

$$A(\sigma) = (-1)^\sigma \prod_{1 \leq j < \ell \leq L} T_{\sigma_j \sigma_\ell} = (-1)^\sigma \prod_{1 \leq j < \ell \leq L} \varphi(z_{\sigma_j} - z_{\sigma_\ell} - \eta) \quad (2.39)$$

と表すことができる。さて、ここで、関数  $\theta_n(z)$  を

$$\theta_n(z) = i \log \left[ -\frac{\varphi(z + n\eta/2)}{\varphi(z - n\eta/2)} \right] \quad \left( -e^{-i\theta_n(z)} = \frac{\varphi(z + n\eta/2)}{\varphi(z - n\eta/2)} \right) \quad (2.40)$$

で導入しよう。これを使うと、擬運動量と散乱位相因子は

$$k = \theta_1(z) - \pi, \quad \phi(k, k') = \theta_2(z - z'). \quad (2.41)$$

と書ける。この関数  $\theta_n(z)$  を陽に書くと

$$\begin{cases} \theta_n(z) = 2 \tan^{-1}[2z/n] & \text{XXX} & (\Delta = 1) \\ \theta_n(z) = 2 \tan^{-1}[\cot(n\zeta/2) \tanh z] & \text{massless XXZ} & (-1 < \Delta < 1) \\ \theta_n(z) = 2 \tan^{-1}[\coth(n\zeta/2) \tan z] + 2\pi\nu \left( \frac{\text{Re}z}{\pi} + \frac{1}{2} \right) & \text{massive XXZ} & (\Delta > 1) \end{cases} \quad (2.42)$$

となる。ラピディティ  $z$  の領域としては、massless の場合は  $-\pi/2 < \text{Im}z \leq \pi/2$ 、massive の場合は  $-\pi/2 < \text{Re}z \leq \pi/2$  の領域だけ考えれば十分である。ここでは  $z$  は実数であると仮定して、 $-\pi/2 < \tan^{-1} z < \pi/2$  とする。 $z$  が複素数のときに  $\tan^{-1}$  の分岐をどうとるかはいり込んだ問題になるが、ここでは議論しない。また、massive の場合、 $\theta_n$  が連続になるように  $\nu(x)$  を導入してあることに注意。実数  $x$  に対して  $n \leq x < n+1$  ( $n$  は整数) のとき、 $\nu(x) = n$  とする。また、 $z = (\ell + 1/2)\pi$  ( $\ell$  は整数) のとき、 $\theta_n(z) = 2z$  とする。

これを用いて、ベータ方程式の対数を取れば

$$\theta_1(z_j) = \frac{2\pi}{L} I_j + \frac{1}{L} \sum_{\ell \neq j}^N \theta_2(z_j - z_\ell), \quad \text{for } j = 1, \dots, N, \quad (2.43)$$

となる。ここで、ベータ量子数  $\{I_1, \dots, I_N\}$  は  $L - N$  が奇数のとき整数で、 $L - N$  が偶数のとき半奇整数となる。エネルギー固有値は

$$E = \frac{i\varphi(\eta)}{2} \sum_{j=1}^N a_1(z_j) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^N \frac{2}{4z_j^2 + 1} & \text{XXX} & (\Delta = 1) \\ -\sum_{j=1}^N \frac{\sin^2 \zeta}{\cosh 2z_j - \cos \zeta} & \text{massless XXZ} & (-1 < \Delta < 1) \\ -\sum_{j=1}^N \frac{\sinh^2 \zeta}{\cosh \zeta - \cos 2z_j} & \text{massive XXZ} & (\Delta > 1) \end{cases} \quad (2.44)$$

と書ける。ただし、 $a_n(z) := \theta'_n(z)$  である。運動量固有値は

$$K = \sum_{j=1}^N k_j = \sum_{j=1}^N \theta_1(z_j) - N\pi = \frac{2\pi}{L} \sum_{j=1}^N I_j - N\pi \pmod{2\pi} \quad (2.45)$$

となる。ここで、ベータ方程式 (2.43) を使った。

#### (#) まとめ

- 異方性パラメータ  $\Delta (> -1)$  の値に応じて、 $\zeta, \eta = i\zeta, \varphi(z)$  を式 (2.36) で定める。
- ベータ量子数  $I_1, \dots, I_N$  を定める。ただし、 $L - N$  が偶数 (奇数) のとき、 $I_j$  は半奇整数 (整数) である。

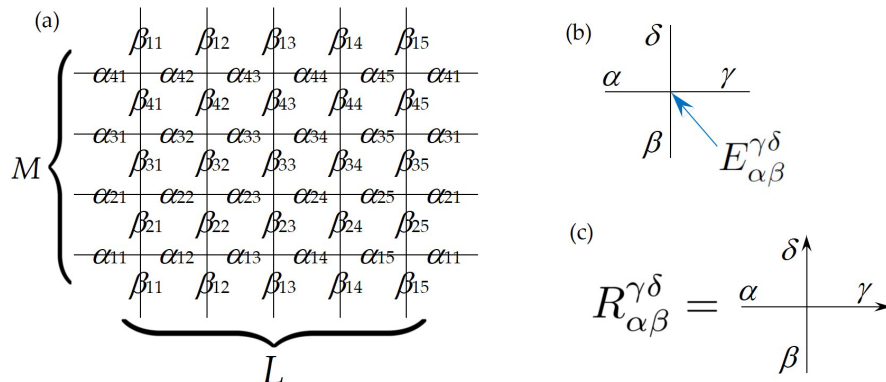


図 3.1: (a) 2次元頂点模型のスピ配置  $\{\alpha_{m,\ell}\}, \{\beta_{m,\ell}\}$  ( $1 \leq m \leq M, 1 \leq \ell \leq L$ ). ここでは  $L = 5, M = 4$  とし、周期境界条件としている。(b) 頂点周りのスピ配置と、頂点のエネルギー。(c) 局所ボルツマン重率

3. ラピディティ  $z_1, \dots, z_N$  に対するベーテ方程式 (2.43) を解く。
4. ベーテ方程式の解  $z_1, \dots, z_N$  を用いて、ベーテベクトル  $|\psi\rangle$  を (2.22), (2.23), (2.39) で構成する。
5. ベーテベクトル  $|\psi\rangle$  は固有方程式  $\mathcal{H}_{\text{XXZ}}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$  及び  $T_{\text{R}}|\psi\rangle = e^{-iK}|\psi\rangle$  を満たし、固有値は (2.44), (2.45) 式で与えられる。

この対角化の手法を座標ベーテ仮説と呼ぶ。

## 3 6頂点模型と代数的ベーテ仮説

### 3.1 6頂点模型

#### 3.1.1 2次元正方格子上の頂点模型

縦線が  $L$  本、横線が  $M$  あるような二次元正方格子を考え、辺上に  $\pm 1$  の2通りの値をとりうる変数  $\{\alpha_{m,\ell}\}, \{\beta_{m,\ell}\}$  ( $1 \leq m \leq M, 1 \leq \ell \leq L$ ) を配置する (図 3.1(a))。この変数のことをここでは「スピン」と呼ぶことにする (分極等と呼ぶ文献もある)。また、簡単のため周期境界条件を考える ( $\alpha_{m,L+1} = \alpha_{m,1}, \beta_{M+1,\ell} = \beta_{1,\ell}$ )。

辺 (edge) と辺の交点を頂点 (vertex) と呼ぶ。各頂点の周囲には4本の辺があり、それらのスピ配置に依存して頂点のエネルギーが定まる。それを  $E_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  と書こう (図 3.1(b))。ここで、スピンの配置が同じでも、頂点によってエネルギーは異なるとしよう。下から  $m$  番目、左から  $\ell$  番目の頂点のまわりのスピ配置が図 3.1(b) であるときにその頂点を持つエネルギーを  $(E_{m\ell})_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}$  とし、局所ボルツマン重率を  $(R_{m\ell})_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \exp[-\beta (E_{m\ell})_{\alpha\beta}^{\gamma\delta}]$  と書く。系の全エネルギーは各頂点のエネルギーの和で与えられるとすれば、全体のボルツマン重率は局所ボルツマン重率の積となる。分配関数  $Z$  は、それを  $2^{2ML}$  通りの全スピ配置に関して和をとったもの

$$Z = \sum_{\{\alpha_{m,\ell}\}, \{\beta_{m,\ell}\}} \prod_{m=1}^M \prod_{\ell=1}^L (R_{m\ell})_{\alpha_{m,\ell}\beta_{m,\ell}}^{\alpha_{m,\ell+1}\beta_{m+1,\ell}} \quad (3.1)$$

となる。以下これを、転送行列法を用いて計算することを試みる。

#### 3.1.2 転送行列による分配関数の計算

さて、分配関数とは全ての辺上のスピ配置に関する和のことであるが、まずは正方格子の一番下の一行だけに注目し、横の辺上のスピン  $\{\alpha_{1,\ell}\}$  に関する和を実行したものを

$$(T_1)_{\{\beta_{1,\ell}\}}^{\{\beta_{2,\ell}\}} := \sum_{\{\alpha_{1,\ell}\}} \prod_{\ell=1}^L (R_{1,\ell})_{\alpha_{1,\ell}\beta_{1,\ell}}^{\alpha_{1,\ell+1}\beta_{2,\ell}} \quad (3.2)$$

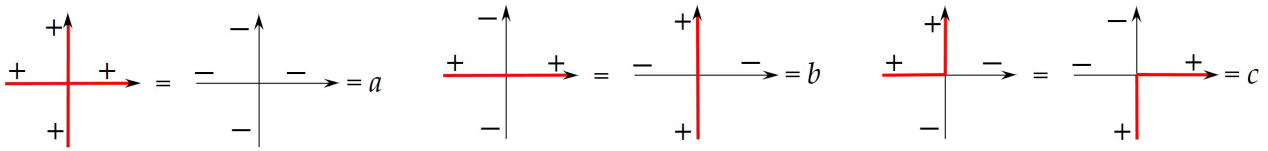


図 3.2: 6 頂点模型のボルツマン重率. + のスピン配置を太線で示してある.

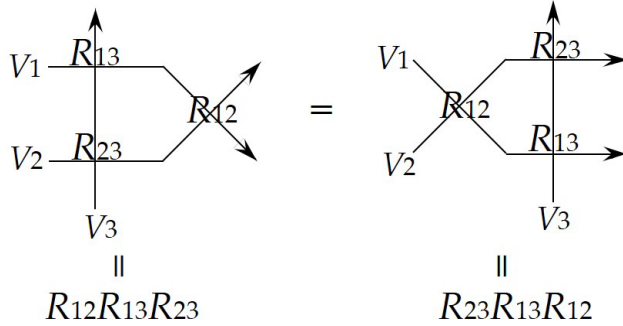


図 3.3: Yang-Baxter 関係式

と書こう. そしてこれを  $T_1$  という行列の  $\{\beta_{2,\ell}\}$  行  $\{\beta_{1,\ell}\}$  列成分を表していると考え.  $\{\beta_{1,\ell}\} = (\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{1,L})$  と  $\{\beta_{2,\ell}\} = (\beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{2,L})$  はそれぞれ, 全部で  $2^L$  の配置の仕方があるので,  $T_1$  は  $2^L \times 2^L$  行列となる.

正方格子の下から 2 行目に関しても同様にして,  $\beta_{2,\ell}$  に関して和を取ると

$$\sum_{\{\beta_{2,\ell}\}} (T_2)_{\{\beta_{2,\ell}\}}^{\{\beta_{3,\ell}\}} (T_1)_{\{\beta_{1,\ell}\}}^{\{\beta_{2,\ell}\}} = (T_2 T_1)_{\{\beta_{1,\ell}\}}^{\{\beta_{3,\ell}\}} \quad (3.3)$$

と, 行列の積になることが分かる. これを  $m = M$  まで繰り返して trace をとると,

$$Z = \sum_{\{\beta_{m,\ell}\}} \prod_{m=1}^M (T_m)_{\{\beta_{m,\ell}\}}^{\{\beta_{m+1,\ell}\}} = \sum_{\{\beta_{1,\ell}\}} (T_M T_{M-1} \dots T_2 T_1)_{\{\beta_{1,\ell}\}}^{\{\beta_{1,\ell}\}} = \text{tr}(T_M T_{M-1} \dots T_2 T_1) \quad (3.4)$$

となり, 状態和の計算を行列の積で表すことができた. つまり, 分配関数の計算が, 転送行列  $T_1, \dots, T_M$  の “同時” 対角化の問題に帰着したことになる. そのためには, 異なる転送行列が全て可換になって欲しい. その条件を与えるのが Yang-Baxter 関係式となるのである. 6 頂点模型は Yang-Baxter 関係式を満たす一つの例になっている.

### 3.1.3 6 頂点模型

具体的に頂点のエネルギーおよび局所ボルツマン重率を与えて, 計算を進めよう. 今, 頂点  $(m, \ell)$  を一つ選んで固定したと考えて,  $R_{m\ell}$  を単に  $R$  と略記する. ここで, 局所ボルツマン重率を矢印付きのグラフで表そう (図 3.1(c)). すなわち, 図 3.1(c) は,  $(\alpha, \beta)$  のスピンを入力して, 頂点にある  $R$ -行列の作用を受け,  $(\gamma, \delta)$  のスピンが出てきた, と読む. ただしここで  $(\alpha, \beta)$  の順と,  $(\gamma, \delta)$  の順番に注意すること. 6 頂点模型とは, スピンの和が保存するようなボルツマン重率だけがゼロでない値をとる模型のことである. スピンの和が保存するとは, 入力スピンの和  $\alpha + \beta$  と出力スピンの和  $\gamma + \delta$  が等しいということである. すると, 全部で  $2^4 = 16$  通りの配置のうち, ゼロでないのは図 3.2 に示す 6 通りだけとなる. 全スピンをいっせいに反転させる対称性を模型に加味すると, ボルツマン重率の値は 3 通りに絞られ, それらを  $a, b, c$  と名付ける.

## 3.2 Yang-Baxter 関係式と転送行列の対角化

### 3.2.1 Yang-Baxter 関係式

図 3.3 に表されている関係式を Yang-Baxter 関係式と呼ぶ. 散乱の順序に注意して  $R$ -行列の積に表すと

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12} \quad (3.5)$$



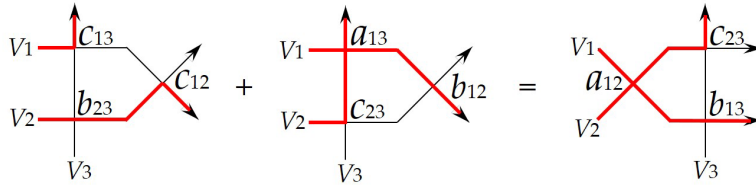


図 3.4: (出力スピン) = (+ - +) の場合の Yang-Baxter 関係式

となる。さて、(3.5) の両辺は  $\text{End}(V_1 \otimes V_2 \otimes V_3)$  の元なので、 $8 \times 8$  行列となり、全部で 64 個の要素に対応する関係式がある。これが成り立つために、ボルツマン重率  $a, b, c$  が満たすべき関係式を求めよう。

ここで、入力スピンの和と出力スピンの和が等しいことに注意しよう。入力スピンの和が全てそろっているときには自明な関係式を与える。さらに、全スピンの反転対称性より、入力スピンとして (-) がひとつの場合のみ、すなわち、(+ - +), (- + +), (+ + -) の 3 通りのみ考えれば十分である。出力も同様に 3 通りあるので、全部で 9 通りとなる。ただし、入力スピンと出力スピンが等しい場合には、自明な関係式を与える。したがって、残りは 6 通りである。このうち、入力と出力を入れ替えたものは同じ関係式を与えるので、結局独立なものは 3 つとなる。これらを図 3.4 のように具体的に計算して

$$\begin{aligned} \langle + - + | R_{12} R_{13} R_{23} | + + - \rangle &= c_{12} c_{13} b_{23} + b_{12} a_{13} c_{23}, & \langle + - + | R_{23} R_{13} R_{12} | + + - \rangle &= a_{12} b_{13} c_{23}, \\ \langle - + + | R_{12} R_{13} R_{23} | + + - \rangle &= b_{12} c_{13} b_{23} + c_{12} a_{13} c_{23}, & \langle - + + | R_{23} R_{13} R_{12} | + + - \rangle &= a_{12} c_{13} a_{23}, \\ \langle + + - | R_{12} R_{13} R_{23} | + - + \rangle &= b_{12} c_{13} c_{23} + c_{12} a_{13} b_{23}, & \langle + + - | R_{23} R_{13} R_{12} | + - + \rangle &= c_{12} b_{13} a_{23} \end{aligned} \quad (3.6)$$

を得る。これを  $a_{23}, b_{23}, c_{23}$  に対する連立方程式と見て、これが自明でない解を持つための条件は

$$\begin{vmatrix} 0 & c_{12} c_{13} & b_{12} a_{13} - a_{12} b_{13} \\ -a_{12} c_{13} & b_{12} c_{13} & c_{12} a_{13} \\ -c_{12} b_{13} & c_{12} a_{13} & b_{12} c_{13} \end{vmatrix} = a_{12} b_{12} c_{12} a_{13} b_{13} c_{13} \left( \frac{a_{12}^2 + b_{12}^2 - c_{12}^2}{2a_{12} b_{12}} - \frac{a_{13}^2 + b_{13}^2 - c_{13}^2}{2a_{13} b_{13}} \right) = 0 \quad (3.7)$$

となる。 $a, b, c$  を正の実数とすると、これは  $\Delta := (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$  が頂点によらない定数となることを意味する。このとき、ボルツマン重率  $a, b, c$  は、(2.36) で定義された関数  $\varphi(\lambda)$  と定数  $\eta$  を使って、

$$a = \varphi(\lambda + \eta), \quad b = \varphi(\lambda), \quad c = \varphi(\eta) \quad (3.8)$$

とパラメータ表示できる。ここで、パラメータ  $\lambda$  の範囲と全体の規格化因子を適当に選べば  $a, b, c$  を正の実数にすることができるが、以降この点は気にせずに話を進める。

さて、次に Yang-Baxter 関係式を満たすような  $\lambda$  を頂点ごとにどう選べばよいかであるが、実は  $V_j \otimes V_k$  に対応する頂点では  $\lambda = \lambda_j - \lambda_k$  とすればよいことが分かる。すなわち、各スピン空間  $V_j$  には“スペクトルパラメータ  $\lambda_j$ ”が住んでいて、 $V_j \otimes V_k$  に対応する頂点のボルツマン重率を

$$a_{jk} = a(\lambda_j, \lambda_k) := \varphi(\lambda_j - \lambda_k + \eta), \quad b_{jk} = b(\lambda_j, \lambda_k) := \varphi(\lambda_j - \lambda_k), \quad c_{jk} = c(\lambda_j, \lambda_k) := \varphi(\eta) \quad (3.9)$$

とする。

### 3.2.2 モノドロミー行列

Yang-Baxter 関係式が成り立つとき、転送行列たちが可換になることを示そう。まず、空間  $V_j, V_k$  にスペクトルパラメータ  $\lambda_j, \lambda_k$  がそれぞれ対応しているとき、 $V_j \otimes V_k$  に対応する頂点の  $R$ -行列を  $R_{jk}(\lambda_j, \lambda_k)$  と書こう。そして、モノドロミー行列  $\tau_{0,12 \dots L}(\lambda | \xi_1, \dots, \xi_L)$  を図 3.5 で定義する。具体的に式で書くと、

$$\tau_{0,12 \dots L}(\lambda | \xi_1, \dots, \xi_L) = R_{0L}(\lambda, \xi_L) \cdots R_{02}(\lambda, \xi_2) R_{01}(\lambda, \xi_1) \quad (3.10)$$

となる。 $\tau_{0,12 \dots L}$  の下の添え字  $0, 12 \dots L$  は、 $\tau_{0,12 \dots L}$  が空間  $V_0 \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_L$  に作用する演算子であることを表している。

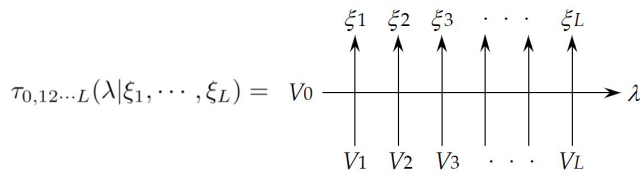


図 3.5: モノドロミー行列

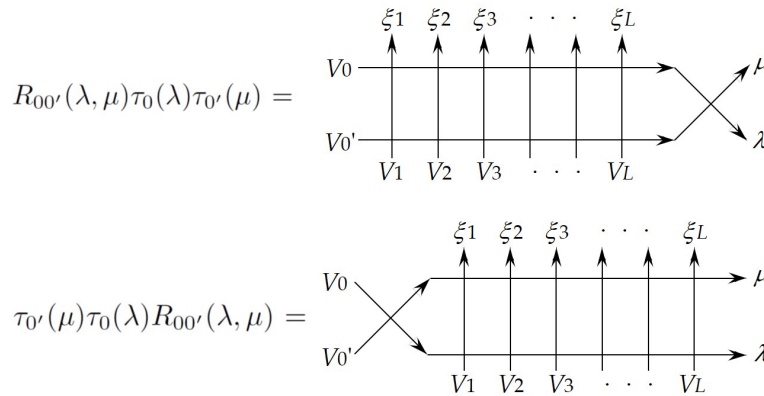


図 3.6: 2つのモノドロミー行列の積に左右から  $R$ -行列をかける。

転送行列  $T$  は式 (3.2) のように、横の辺上のスピン全てに関して和をとったものだったから、周期境界条件では、モノドロミー行列において空間  $V_0$  の入り口と出口のスピンをそろえて和を取ったもの、すなわち空間  $V_0$  でトレースを取ったものになる：

$$T_{12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) := \text{tr}_0 \tau_{0,12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) \tag{3.11}$$

$T_{12\dots L}$  の下の添え字  $12\dots L$  は、 $T_{12\dots L}$  が空間  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_L$  に作用する演算子であることを表している。ここで、空間  $V_0$  を補助空間、空間  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_L$  を量子空間という。後者は量子ハミルトニアン  $\mathcal{H}_{\text{XXZ}}$  が作用する空間であることが名前の由来である。

### 3.2.3 転送行列の可換性

さて、転送行列の可換性を示す準備として、モノドロミー行列の積  $\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu)$  と、積の順序を入れ替えたもの  $\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)$  を考えてみよう。ただし、2つの補助空間  $V_0, V_{0'}$  に付随するスペクトルパラメータをそれぞれ  $\lambda, \mu$  とした。また、 $\tau_0(\lambda) = \tau_{0,12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L)$ 、 $\tau_{0'}(\mu) = \tau_{0',12\dots L}(\mu|\xi_1, \dots, \xi_L)$  と略記した。ここで、図 3.6 のように左右から  $R$ -行列をかけてみよう。それぞれ  $R_{00'}(\lambda, \mu)\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu)$  と  $\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda, \mu)$  となるが、これらは Yang-Baxter 関係式のお陰で等しくなる

$$\boxed{R_{00'}(\lambda, \mu)\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu) = \tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda, \mu)} \tag{3.12}$$

ことが分かる (図 3.7)。これの両辺に  $R$ -行列の逆行列をかけて  $V_0 \otimes V_{0'}$  でトレースをとることにより、

$$T_0(\lambda)T_{0'}(\mu) = \text{tr}_{00'} [R_{00'}(\lambda, \mu)^{-1}\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda, \mu)] = \text{tr}_{00'} [\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)] = T_{0'}(\mu)T_0(\lambda) \tag{3.13}$$

と転送行列が交換することが導かれる。

### 3.2.4 Yang-Baxter 代数

さて、モノドロミー行列  $\tau_{0,12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L)$  を補助空間  $V_0$  で  $2 \times 2$  の行列で表示して、その4つの行列要素を  $A, B, C, D$  と書こう：

$$\tau_{0,12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) = \begin{pmatrix} A_{12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) & B_{12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) \\ C_{12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) & D_{12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L) \end{pmatrix}_0. \tag{3.14}$$

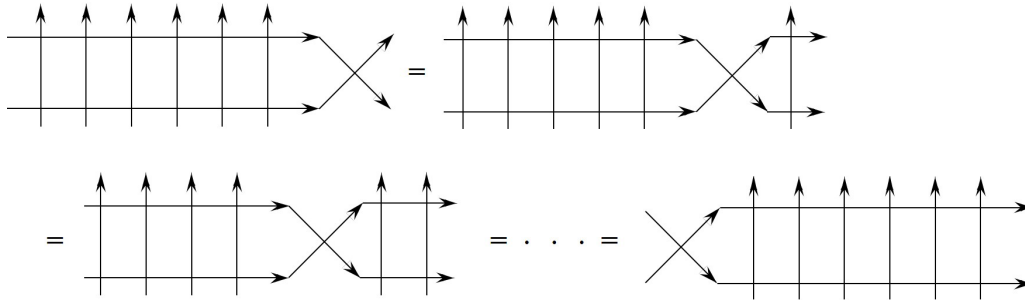


図 3.7: Yang-Baxter 関係式を次々と適用することによって、両者は等しいことが分かる。

これらは量子空間  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_L$  上の演算子となる。また、量子空間の添え字はしばしば省略して  $A(\lambda) = A_{12\dots L}(\lambda|\xi_1, \dots, \xi_L)$  等と書く。ここで、転送行列  $T$  はモノドロミー行列を補助空間でトレースをとったものだったので、 $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$  となる。それでは、 $B(\lambda), C(\lambda)$  は何に対応しているのだろうか？これらは共に、補助空間のスピンの入力と出力で反転している。ここで、入力スピンの和と出力スピンの和が保存することを思い出そう。量子 XXZ 模型の章で述べたように、量子空間において  $-$  スピン (下向きスピン  $\downarrow$ ) を粒子とみなし、 $+$  スピン (上向きスピン  $\uparrow$ ) を真空とみなそう。すると、 $B(\lambda)$  は補助空間で  $-$  で入力したスピンの  $+$  になって出てきている、すなわち、粒子がひとつ「消滅」している。補助空間で粒子がひとつ消滅しているということは、全粒子数の保存により、量子空間で粒子がひとつ生成していなければならない。このようにして、 $B(\lambda)$  が量子空間における「生成演算子」とみなせることが導かれる。同様に、 $C(\lambda)$  は「消滅演算子」とみなすことができる。この生成消滅演算子を使って転送行列を対角化しよう。

まず、真空状態  $|0\rangle = |\uparrow \dots \uparrow\rangle$  への転送行列  $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$  の作用を調べてみよう。そのために、モノドロミー行列  $\tau_0(\lambda)$  に  $|0\rangle$  を作用させると、

$$\tau_0(\lambda)|0\rangle = \begin{pmatrix} A(\lambda)|0\rangle & B(\lambda)|0\rangle \\ C(\lambda)|0\rangle & D(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix}_0 = \begin{pmatrix} a(\lambda)|0\rangle & * \\ 0 & d(\lambda)|0\rangle \end{pmatrix}_0 \quad (3.15)$$

となることが分かる。ただし、 $A(\lambda), D(\lambda)$  の固有値を  $a(\lambda) = \prod_{n=1}^L a(\lambda, \xi_n), d(\lambda) = \prod_{n=1}^L b(\lambda, \xi_n)$  とおいた。したがって、真空状態  $|0\rangle$  は転送行列  $T(\lambda)$  の固有値  $a(\lambda) + d(\lambda)$  の固有状態となっていることが分かった。

前述の議論により、真空状態  $|0\rangle$  に生成演算子  $B(\lambda)$  を  $N$  回作用させることによって、 $N$  粒子状態  $B(\lambda_1)B(\lambda_2)\dots B(\lambda_N)|0\rangle$  を構成できる。この状態への転送行列  $T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$  の作用を調べるためには、 $A, B, C, D$  の間の交換関係の情報が必要である。これらの交換関係は、実は関係式 (3.12) から出てくる。これを具体的にみるために、 $V_0 \otimes V_0'$  空間の  $4 \times 4$  行列として (3.12) の両辺を表示すると、

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & C & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' & 0 & 0 \\ C' & D' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A' & B' \\ 0 & 0 & C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' & 0 & 0 \\ C' & D' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A' & B' \\ 0 & 0 & C' & D' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ C & 0 & D & 0 \\ 0 & C & 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & c & 0 \\ 0 & c & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

となる。ただし、 $a = a(\lambda, \mu), A = A(\lambda), A' = A(\mu)$  等の表記法を用いた。  $4 \times 4$  行列のかけ算を具体的に実行することにより、 $A, B, C, D$  の間の交換関係が分かる。まず、4 隅の行列要素を比較して、 $A, B, C, D$  は異なるスペクトルパラメータを持つ自分自身と交換することが分かる。次に、1 行 2 列要素、1 行 3 列要素を比較すると、 $A(\lambda)$  と  $B(\mu)$  の間の交換関係  $A(\lambda)B(\mu) = f(\mu, \lambda)B(\mu)A(\lambda) + g(\lambda, \mu)B(\lambda)A(\mu)$  を得る。ここで、 $f(\lambda, \mu) = a(\lambda, \mu)/b(\lambda, \mu), g(\lambda, \mu) = c(\lambda, \mu)/b(\lambda, \mu)$  を定義した。

### 3.2.5 転送行列の対角化とベーテ方程式

この交換関係を使うと、

$$\begin{aligned} T(\lambda) \left( \prod_{\ell=1}^N B(z_\ell) \right) |0\rangle &= \left[ a(\lambda) \left( \prod_{\ell=1}^N f(z_\ell, \lambda) \right) + d(\lambda) \left( \prod_{\ell=1}^N f(\lambda, z_\ell) \right) \right] \left( \prod_{\ell=1}^N B(z_\ell) \right) |0\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^N \left[ a(z_j)g(\lambda, z_j) \left( \prod_{\ell \neq j}^N f(z_\ell, z_j) \right) + d(z_j)g(z_j, \lambda) \left( \prod_{\ell \neq j}^N f(z_j, z_\ell) \right) \right] B(\lambda) \left( \prod_{\ell \neq j}^N B(z_\ell) \right) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.16)$$

を示すことができる。ベクトル  $\prod_{\ell=1}^N B(z_\ell)|0\rangle$  が転送行列  $T(\lambda)$  の固有ベクトルとなるためには、望ましくない項の各係数が消えてくれればよい。すなわち、固有ベクトルとなるための十分条件としてベーテ方程式

$$\prod_{n=1}^L \frac{\varphi(z_j - \xi_n + \eta)}{\varphi(z_j - \xi_n)} = \prod_{\ell \neq j}^N \frac{\varphi(z_j - z_\ell + \eta)}{\varphi(z_j - z_\ell - \eta)} \quad \text{for } j = 1, 2, \dots, N \quad (3.17)$$

を得る。ボルツマン重率を等しくする“Homogeneous limit”  $\xi_1 \rightarrow \eta/2, \dots, \xi_N \rightarrow \eta/2$  をとれば、以前に導出した XXZ 模型のベーテ方程式 (2.38) に一致する。ラピディティ  $z_j$  がベーテ方程式を満たすとき、転送行列の固有値は

$$t(\lambda) := a(\lambda) \left( \prod_{\ell=1}^N f(z_\ell, \lambda) \right) + d(\lambda) \left( \prod_{\ell=1}^N f(\lambda, z_\ell) \right) \quad (3.18)$$

で与えられる。

先ほど導いたベーテ方程式 (3.17) は、スペクトルパラメータ  $\lambda$  を含んでいない。すなわち、異なる  $\lambda$  に対する  $T(\lambda)$  を同時対角化したことになる。これを  $\lambda$  で展開することにより、無限個の互いに可換な保存量が生み出される。特に、転送行列  $T(\lambda)$  は XXZ 模型の運動量  $K$  とハミルトニアン  $\mathcal{H}_{\text{XXZ}}$  を以下のように含んでいる：

$$T(\lambda) = \varphi(\eta)^L \exp \left[ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\lambda - \eta/2)^n \right], \quad A_0 = -iK, \quad A_1 = \varphi(\eta)^{-1} (2\mathcal{H}_{\text{XXZ}} + L\Delta) \quad (3.19)$$

$A_2, A_3, \dots$  はさらに高次の保存量を与える。また、転送行列の固有値 (3.18) に  $\xi_1 = \dots = \xi_L = \eta/2$  を代入し、(3.19) 式から XXZ 模型の全運動量とエネルギーの固有値を計算してみると、座標ベーテ仮説から求めた式 (2.44), (2.45) に一致することが確かめられる。

## 4 おわりに

本テキストでは前半で XXZ 模型の座標ベーテ仮説の解説を行い、後半で 6 頂点模型の Yang-Baxter 関係式および転送行列の対角化を議論した。ここでは紙数の都合上詳しく述べられなかった部分もあるので、興味ある読者は例えば文献 [5, 6] および日本語の解説記事 [7, 8] 等を参照してほしい。最新の研究について述べる余裕はなかったが、最近では統計力学の基礎付けの問題として、孤立量子系の緩和ダイナミクスが厳密計算可能な可積分系を用いて盛んに研究されている [9]。最新の動向についてより詳しくはレビュー論文 [10, 11] を参照されたい。

## 参考文献

- [1] H.A. Bethe, “Zur Theorie der Metalle”, Z. Phys. **71** (1931) 205.
- [2] C.N. Yang, “S Matrix for the One-Dimensional N-Body Problem with Repulsive or Attractive  $\delta$ -Function Interaction”, Phys. Rev. **168** (1968) 1920.
- [3] R.J. Baxter, “Eight-Vertex Model in Lattice Statistics”, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 832.
- [4] R.J. Baxter, “Exactly solved models in statistical mechanics” (Academic Press, London, 1982)
- [5] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin, “Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions”, Cambridge University Press, 1993.
- [6] M. Takahashi, “Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models”, Cambridge University Press, 1999.
- [7] 出口哲生, “1次元量子系の厳密解とベーテ仮説の数理物理”, 物性研究 74-3 (2000) 255.
- [8] 堺和光, “可積分系とベーテ仮説”, 数理科学 49(2), pp.19-26, 2011年2月号
- [9] 出口哲生, 佐藤純, 上西慧理子, “可積分量子多体系の非平衡ダイナミクスと統計力学の基礎”, 日本物理学会誌 2015年6月号, 解説.
- [10] F.H.L Essler and M. Fagotti, “Quench dynamics and relaxation in isolated integrable quantum spin chains”, J. Stat. Mech. (2016) 064002.
- [11] J.S. Caux, “The Quench Action”, J. Stat. Mech. (2016) 064006.