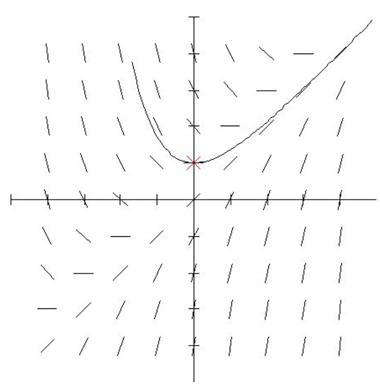
SESIÓN 7

EDO: una mirada gráfica

Índice



7.1 Actividad inicial: Buscando una recta tangente

Considerar el siguiente PVI:

$$\frac{dy}{dx} = x - y + 1; \quad y(0) = 3 \tag{7.1}$$

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva solución $y = y(x)$ que pasa por el punto $(0, 3)$.

7.2 Campo de direcciones

Considerar la EDO

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) = x + y - 1 \tag{7.2}$$

Elijamos una región del plano y formemos en ella una grilla como la mostrada en la figura* 7.1.

Sobre cada punto (x_i, y_i) de esta grilla se construye un pequeño segmento con pendiente justamente $F(x_i, y_i) = x_i + y_i - 1$, que corresponde a una porción de la recta tangente a la curva solución que pasa dicho punto (Fig. 7.2). Tal esquema gráfico recibe el nombre de *campo de direcciones* de la ecuación (8.1).

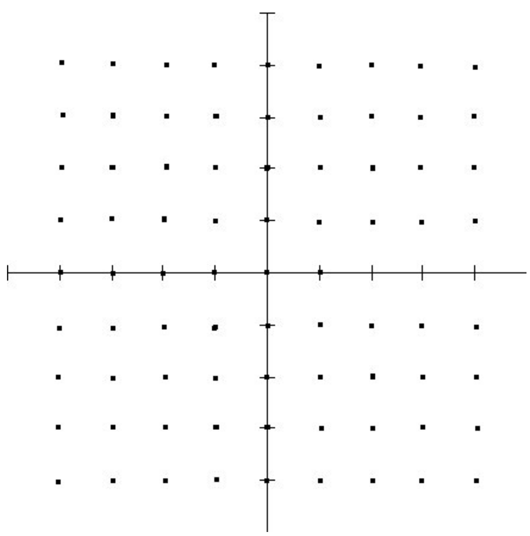


Fig. 7.1: Una grilla

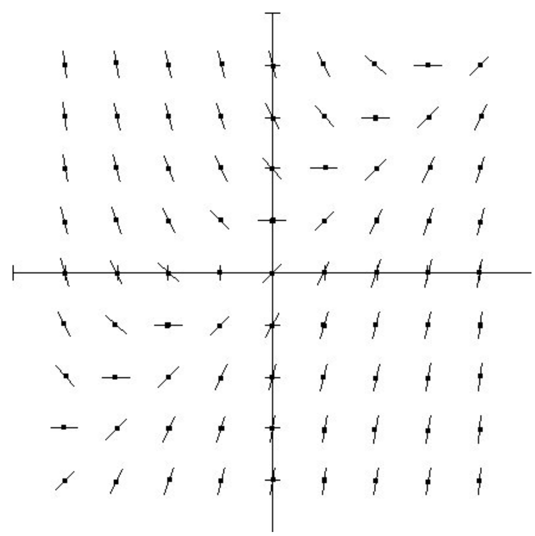


Fig. 7.2: Campo de direcciones

A partir de su campo de direcciones se pueden esbozar soluciones (curvas integrales) de la ecuación (7.2). Por ejemplo, en las figuras (7.3), (7.4), (7.5) y (7.6), se esbozan las soluciones que pasan por los puntos $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-4, 4)$ y $(-1, -4)$, respectivamente.

* Todos los gráficos de esta sesión se realizaron con el software Winplot, de Richards Parris.

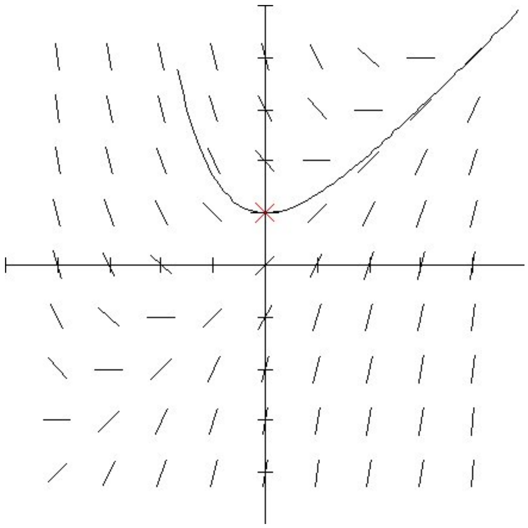


Fig. 7.3: Solución que pasa por $(0, 1)$

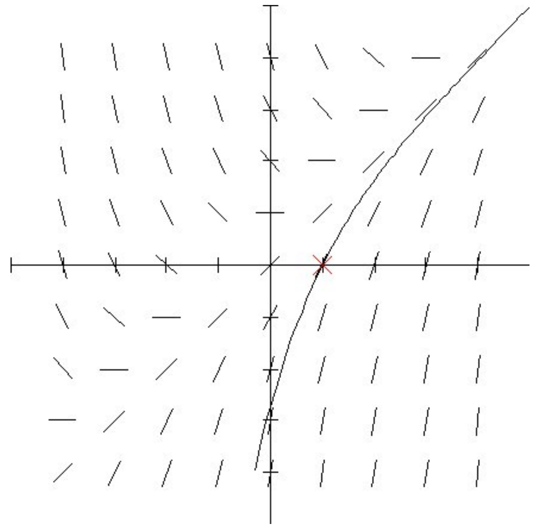


Fig. 7.4: Solución que pasa por $(1, 0)$

Es interesante destacar, que este sencillo método gráfico, entrega una manera de obtener soluciones gráficas de una ecuación de primer orden, para los casos en que fallan los métodos algebraicos que se han estudiado.

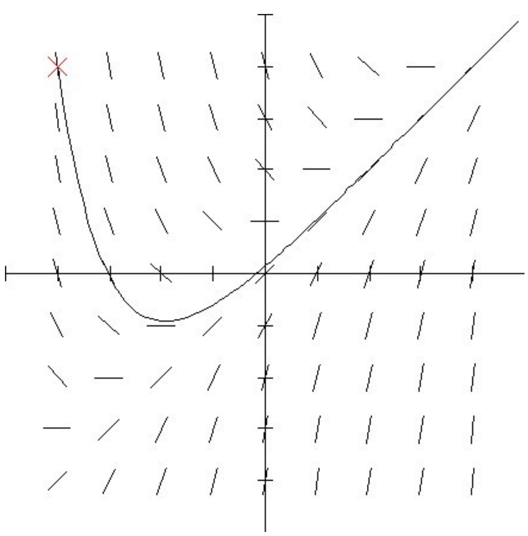


Fig. 7.5: Solución que pasa por $(-4, 4)$

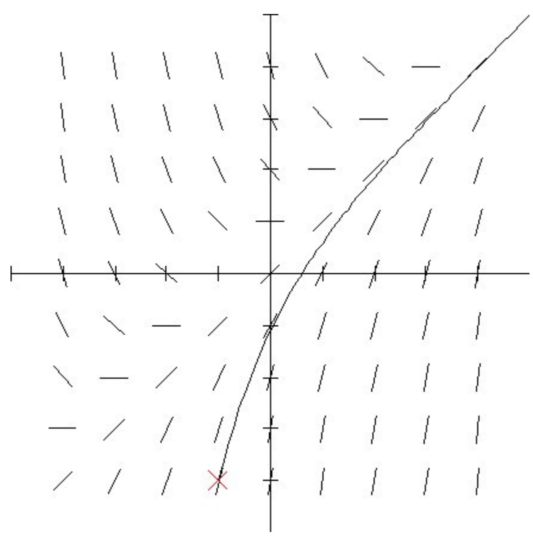


Fig. 7.6: Solución que pasa por $(-1, -4)$

7.3 Método de las isoclinas

Una manera de facilitar el trazado del campo de direcciones de la ecuación $y' = F(x, y)$ consiste el graficar previamente, las curvas

$$F(x, y) = m$$

para diversos valores de m, y observando que en cada una de estas curvas, al tener un mismo valor de y', los elementos del campo de direcciones que pasan por sus puntos, corresponden a segmentos *paralelos*. Las curvas $F(x,y) = m$, por ser curvas de igual pendiente, reciben el nombre de *isoclinas* (iso=igual, clinas=pendientes).

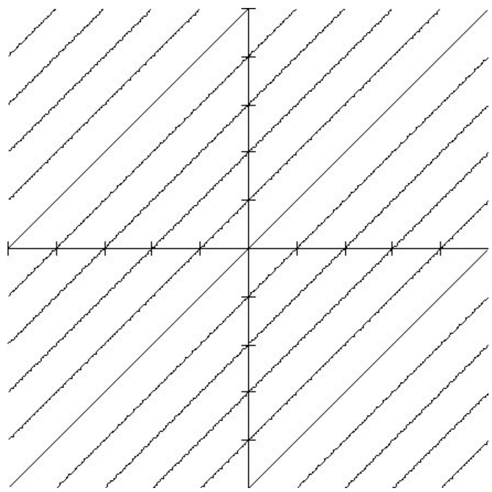


Fig. 7.7: Isoclinas de $y' = x - y + 1$

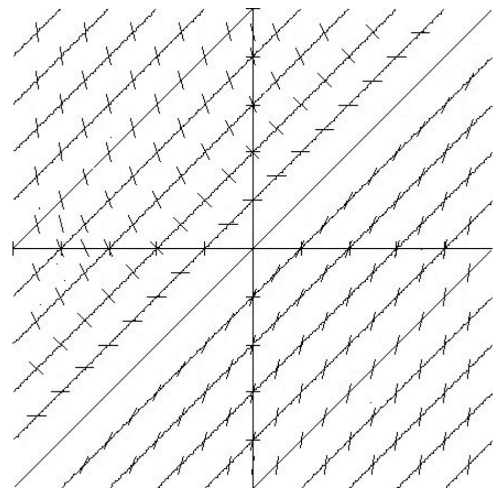


Fig. 7.8: Isoclinas y campo de direcciones

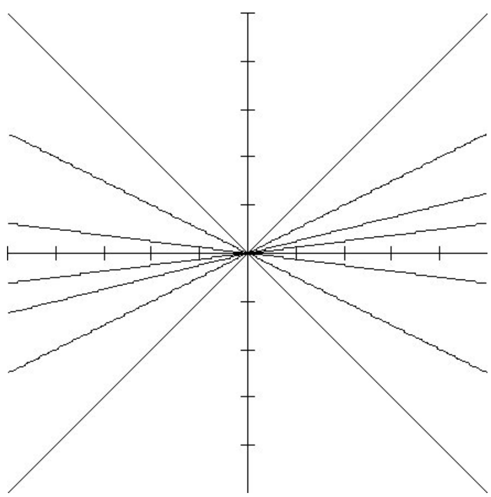


Fig. 7.9: Isoclinas de $y' = -x/y$

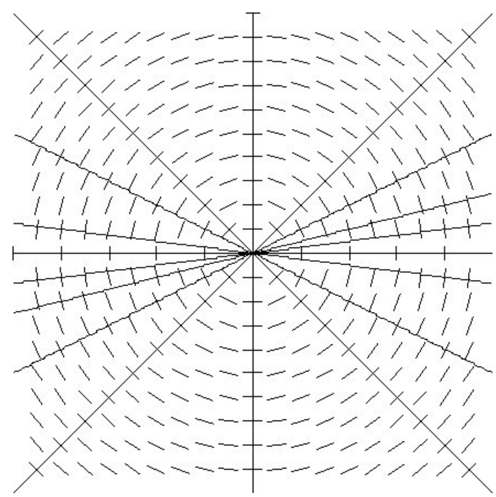


Fig. 7.10: Isoclinas y campo de direcciones

7.4 Campo de direcciones y tecnología

7.4.1 Campo de direcciones en Máxima

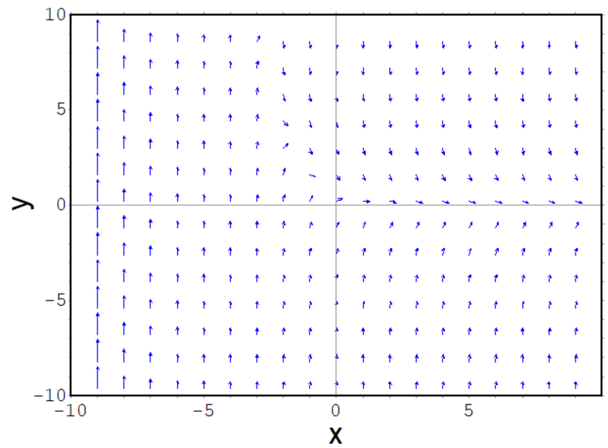
El comando en Máxima que permite graficar campo de direcciones de una EDO es **plotdf**. Así, por ejemplo, para graficar el campo de direcciones de la EDO

$$y' = e^{-x} - 2y \tag{7.3}$$

se ingresa en la barra de entradas, el comando

```
plotdf(exp(-x)-2*y)
```

obteniendo *de vuelta* el gráfico:

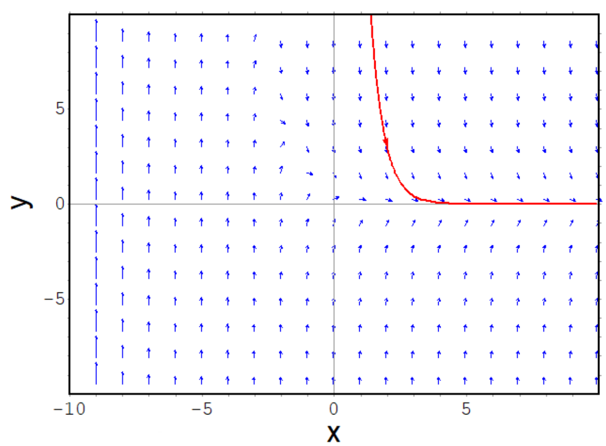


Campo de direcciones en Máxima

Nota 7.1. Para graficar, junto al campo de direcciones, una o más soluciones de la EDO, se puede indicar junto al comando **plotdf**, de la siguiente manera:

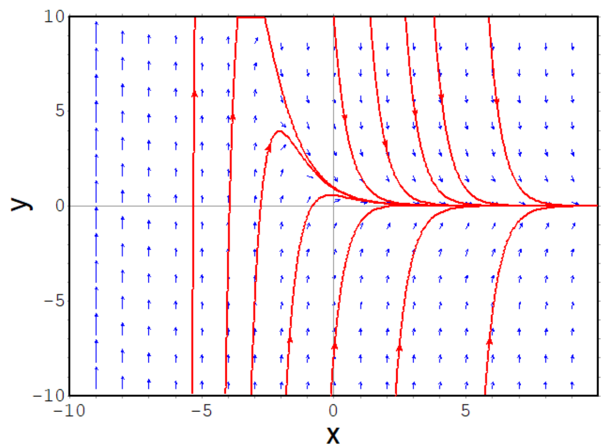
```
plotdf(exp(-x)-2*y),[trajectory_at,2,-3]
```

obteniendo:



Ejemplo 7.1. Graficando varias soluciones de la EDO (7.4), establecer si es posible decidir el comportamiento de ellas cuando $x \to +\infty$.

Desarrollo: Gratificando varias soluciones de esta EDO se obtiene



luego, se puede *conjeturar* que, a medida que x *crece*, todas las soluciones de (7.4) tienden a 0.

7.4.2 Campo de direcciones en Geogebra

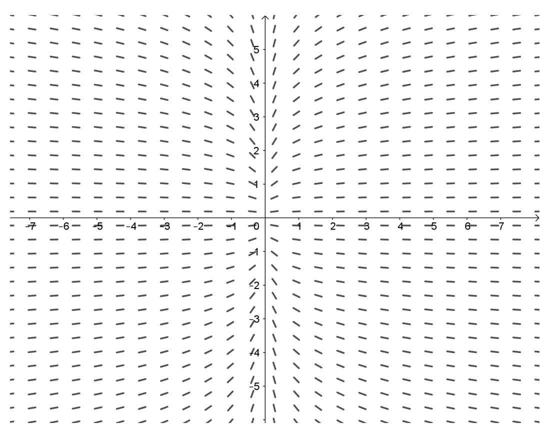
El comando en Geogebra que permite graficar campo de direcciones de una EDO es **CampoDirecciones**. Así, por ejemplo, para graficar el campo de direcciones de la EDO

$$y' = \frac{y}{5x} \tag{7.4}$$

se ingresa en la barra de entradas, el comando

```
CampoDirecciones(y/(5x))
```

obteniendo el gráfico:

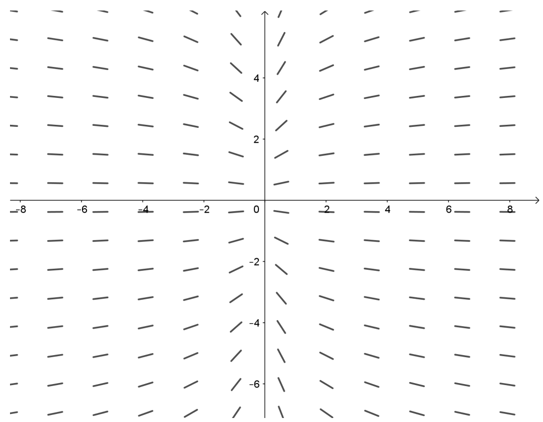


Campo de direcciones en Geogebra

En caso que se quiera controlar la cantidad de *segmentos* del campo de direcciones, se usa el comando

```
CampoDirecciones(y/(5x),20)
```

obteniendo,



Ejemplo 7.2. *A partir del campo de direcciones de la EDO (7.4), realizar un análisis de sus soluciones.*

Desarrollo: Por inspección del gráfico del campo de direcciones se puede observar, por ejemplo, que en el cuarto cuadrante las pendientes son negativas, por lo tanto en esa región las soluciones de la EDO son funciones decrecientes.

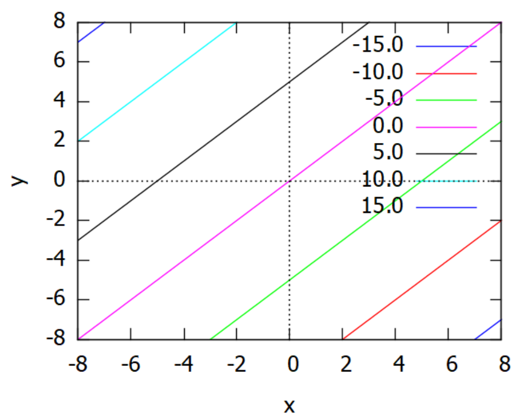
7.5 Tecnología e isoclinas

7.5.1 Isoclinas en Máxima

Para obtener las isoclinas, por ejemplo, de de la EDO $y' = y - x$, se ingresa el comando:

```
plot2d([contour,-x+y],[x,-8,8], [y,-8,8])
```

obteniendo el siguiente gráfico:



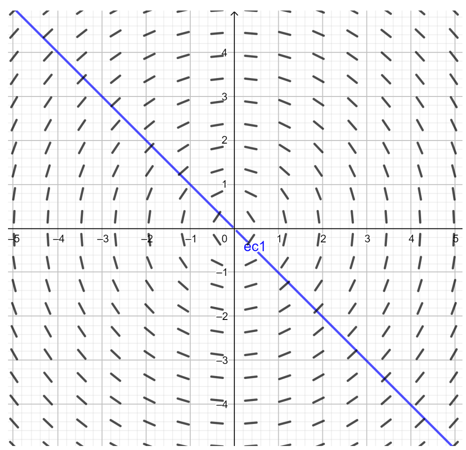
Isoclinas en Máxima

7.5.2 Isoclinas en Geogebra

Para estudiar en Geogebra las isoclinas de una EDO, $y' = f(x, y)$, basta con graficar `f(x,y)=k`, siendo `k` un deslizador que varía en un rango a elegido.

Por ejemplo, en el siguiente gráfico se muestran, de la EDO $y' = -\frac{x}{y}$:

- su campo de direcciones. junto
- a la isoclina correspondiente a $m = 1$.



Isoclina en Geogebra

7.6 Actividades

1) Para la ecuación diferencial $y' = -y$, se pide

   a) Esbozar varias isoclinas. En particular la isoclina nula.
   b) En base a las isoclinas trazar un campo de direcciones.
   c) Trazar algunas curvas integrales.

2) Dada la ecuación $y' = x - 1$, se pide

   a) Hacer un esbozo de su campo de direcciones.
   b) ¿Qué característica especial presenta este campo de direcciones, debido a que $F(x, y)$ solo depende de la variable x.
   c) Trazar su solución que pasa por el punto $(2, 0)$.
   d) A partir del campo de direcciones esbozas algunas isoclinas.

3) Asociar las siguientes ecuaciones diferenciales con su correspondiente campo de direcciones.

   a) $y' = x$ b) $y' = -2$ c) $y' = -x^2/y^2$ d) $y' = xy$

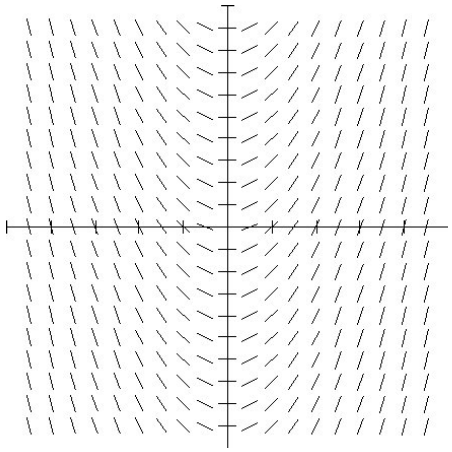


Fig. 7.11

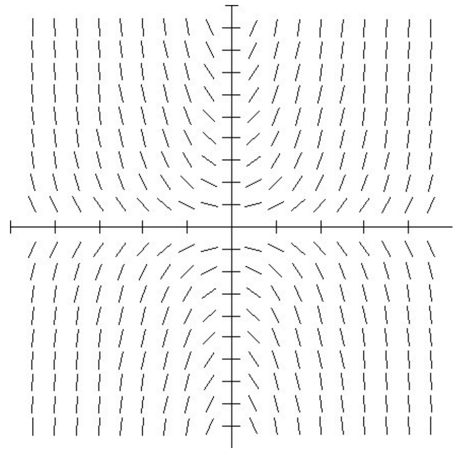


Fig. 7.12

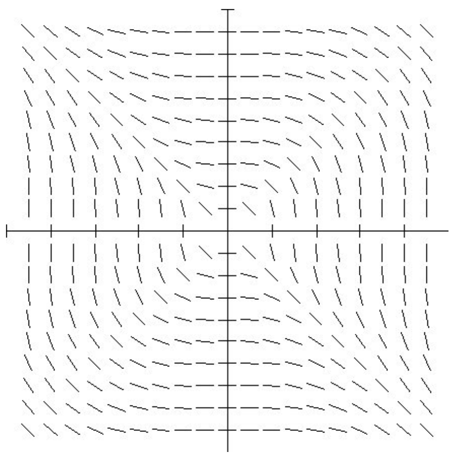


Fig. 7.13

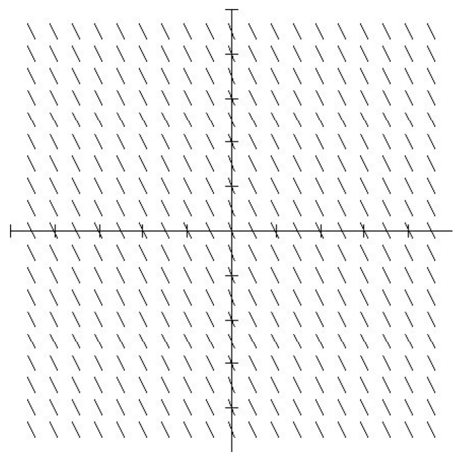


Fig. 7.14

4) a) Proponer una ecuación diferencial *razonable* para cada uno de los siguientes campos de direcciones.

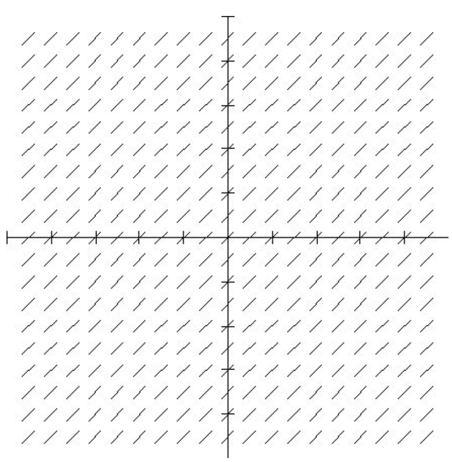


Fig. 7.15

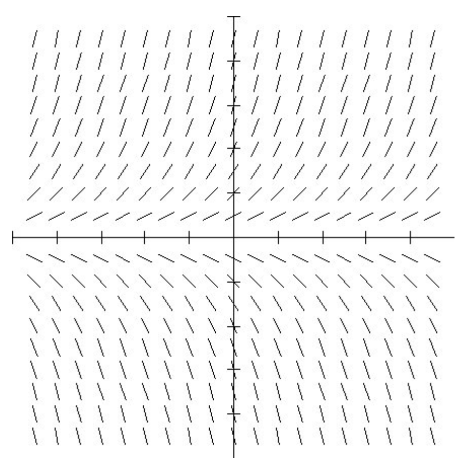


Fig. 7.16

b) Usando un software adecuado (Geogebra o Winplot, por ejemplo), verificar sus respuestas.

5) Dada la EDO $y' = x - 2y$, se pide

a) Esbozar varias isoclinas. En particular la isoclina nula.

b) En base a las isoclinas trazar un campo de direcciones.

c) Trazar algunas curvas integrales.

d) Una de las curvas integrales parece ser una línea recta. De ser así, determinarla.

e) ¿Es posible determinar donde se encuentran los puntos críticos de las soluciones de esta ecuación?

f) ¿Es posible determinar donde se encuentran los puntos de inflexión de las soluciones de esta ecuación?. *Hint*: Obtener y''.

Solución: (d) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ (e) Se encuentran ubicados sobre la isoclina nula. (f) Se encuentran sobre la misma recta de (d).

6) La EDO logística para la población P (en miles) de cierta especie en el instante t está dado por $\dfrac{dP}{dt} = P(2 - P)$.

a) Obtener un gráfico de su campo de direcciones. Observar que P debe ser positivo.

b) Si la población inicial es 3000, es de cir, $p(0) = 3$; ¿qué se puede decir sobre la población límite?. La población límite se refiere a $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$.

c) Usando el campo de direcciones, bosquejar la solución, en el caso que la población se igual a

i) 4000 habitantes.

ii) 1000 habitantes.

d) Si la población inicial son 1000 personas, ¿la población podría

i) bajar a 500 personas?

ii) subir a 3000 personas?

7) Considerar la EDO:

$$\frac{dy}{dx} = x + \sin(y) \tag{7.5}$$

a) Usando Geogebra (u otro software) el campo de direcciones de esta EDO.

b) Usando el campo de direcciones obtenido, bosquejar una solución que pase por el punto $(1, \frac{\pi}{2})$. ¿Qué pendiente tiene esta curva es este punto?.

c) Explicar una razón. por la cual toda solución de (7.5) es creciente para $x > 1$.

d) Comprobar que las segunda derivada te toda solución de (7.5) , satisface la relación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + x\cos(y) + \frac{1}{2}\sin(2y)$$

e) Una curva solución pasa por $(0, 0)$. Comprobar que esta curva tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$.

8) A partir de un bosquejo del campo de direcciones de la EDO

$$\frac{dy}{dx} = -y$$

¿qué se puede decir sobre del comportamiento de sus soluciones cuando $x \to +\infty$?