Álgebra II
Segundo Cuatrimestre — 2009
Práctica 2: Grupos: homomorfismos, cocientes y productos

1. Homomorfismos

1.1. Sea G un grupo y X un conjunto. Sea $x_0 \in X$ y sea

$$\mathsf{ev}_{x_0} : f \in G^X \mapsto f(x_0) \in G.$$

Mostrar que se trata de un homomorfismo de grupos. Determinar su núcleo e imagen.

1.2. Mostrar que cualquiera sea el grupo G, existe un isomorfismo $G \cong G^{\mathrm{op}}$ entre G y su grupo opuesto.

1.3. Sean G y H grupos, y sea $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(G, H)$ el conjunto de todos los homomorfismos $f : G \to H$. ¿Se trata en general de un subgrupo de H^G? Encuentre condiciones sobre H que garanticen que lo sea.

1.4. Muestre que el grupo $\mathbb{H}$ del ejercicio 1.2 y el grupo $\mathbb{H}_2$ del ejercicio 2.6, de la páctica 1, son isomorfos.

1.5. Sea G un grupo.

(a) Sea $g \in G$ e $\mathsf{inn}_g : h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$. Mostrar que $\mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$.

(b) Mostrar que la aplicación $\mathsf{inn} : g \in G \mapsto \mathsf{inn}_g \in \mathsf{Aut}(G)$ es un homomorfismo de grupos.

(c) Describir el núcleo de inn. Los automorfismos que están en la imagen de G se llaman *automorfismos interiores* y la imagen misma se denota $\mathsf{Inn}(G)$.

(d) Mostrar que $\mathsf{Inn}(G)$ es un subgrupo normal de $\mathsf{Aut}(G)$.

Definición. *Un subgrupo H de G se dice* característico *si cualquiera sea $f \in \mathsf{Aut}(G)$, $f(H) \subset H$.*

1.6. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos.

(a) Si H es abeliano, entonces $[G, G] \subset \ker f$.

(b) Mostrar que $f([G, G]) \subset [H, H]$. En particular, concluya que $[G, G]$ es un subgrupo característico de G.

1.7. Sea $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos. ¿Es cierto en general que $f(\mathsf{Z}(G)) \subset \mathsf{Z}(H)$? En caso negativo, de condiciones suficientes que garanticen esta inclusión. Bajo esas condiciones, ¿es $f(\mathsf{Z}(G)) = \mathsf{Z}(H)$?

1.8. Sea G un grupo.

(a) Mostrar que la función $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}, G) \mapsto f(1) \in G$ es una biyección.

(b) Describir $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}^2, G)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_n, G)$.

1.9. *(a)* Determinar $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ y $\mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G)$ para un grupo finito G.

(b) Describir la imagen $D(G)$ de $\mathsf{ev}_1 : f \in \mathsf{hom}_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Q}, G) \mapsto f(1) \in G$.

(c) Mostrar que cuando G es abeliano, $D(G)$ es un subgrupo característico de G

1.10. Sea G un grupo.

(a) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $(g, h) \in G \times G \mapsto gh \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

(b) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

(c) Encontrar una condición necesaria y suficiente sobre G para que la aplicación $g \in G \mapsto g^2 \in G$ resulte un homomorfismo de grupos.

1.11. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Si $(m, n) = 1$, entonces $\hom_{\mathsf{Grp}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$ es trivial. ¿Qué sucede en general?

1.12. Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G.

(a) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\phi^m(G) = \phi^n(G)$. Sea $\alpha = \phi^n$.

(b) Mostrar que $\operatorname{im} \alpha$ es normal o dar un contraejemplo.

1.13. Usando el hecho que $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ permuta los elementos no nulos de $\mathbb{F}_2^2$, encuentre un isomorfismo $\mathsf{GL}_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$.

1.14. *(a)* Sea G un grupo y sea $X \subset G$ un subconjunto tal que $\langle X \rangle = G$. Sea $f \in \mathsf{End}(G)$ tal que $f(x) = x$ para todo elemento $x \in X$. Entonces $f = \mathrm{id}_G$.

(b) Sea X el conjunto de los elementos de orden 2 de S_3. Muestre que cada automorfismo de S_3 induce una permutación de X y deduzca que $\mathsf{Aut}(S_3) \cong S_3$.

1.15. Sea $n \geq 2$. Consideramos el polinomio *discriminante*

$$\Delta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$$

Si $\pi \in S_n$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}$, definimos

$$\varepsilon(\pi) = \frac{\Delta(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})}{\Delta(x_1, \dots, x_n)}.$$

(a) Mostrar que cualquiera sea $\pi \in S_n$, es $\varepsilon(\pi) \in \{\pm 1\}$.

(b) Mostrar que $\varepsilon : S_n \to \{\pm 1\}$ es un homomorfismo de grupo si dotamos a $\{\pm 1\}$ del producto usual.

El subgrupo $A_n = \ker \varepsilon$ es el *n-ésimo grupo alternante*.

(c) Describir A_2 y A_3.

(d) Sea $\tau = (i\, j) \in S_n$ una transposición. Determinar el valor de $\varepsilon(\tau)$.

(e) Recordemos que todo elemento $\pi \in S_n$ puede ser escrito—de muchas maneras—como producto de transposiciones. Muestre que la paridad del número de transposiciones empleadas depende solamente de π.

Una permutación que puede escribirse de alguna forma como un producto de un número par de transposiciones se dice *par*.

1.16. *Automorfismos de $\mathbb{H}$.*

(a) Determine todos los automorfismos interiores de $\mathbb{H}$.

(b) De ejemplos de automorfismos de $\mathbb{H}$ no interiores.

(c) Muestre que $\mathsf{Aut}(\mathbb{H}) \cong S_4$.

2. Cocientes

2.1. Mostrar que

(a) $\mathbb{C}^\times / \mathbb{R}^+ \cong S^1$;

(b) $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_m$ cualquiera sea $m \in \mathbb{N}$;

(c) $\mathsf{GL}_n(k) / \mathsf{SL}_n(k) \cong k^\times$ si k es un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$;

(d) $S^1/\mathbb{G}_n \cong S^1$ si $n \in \mathbb{N}$;

(e) si $m|n$, $\mathbb{G}_n/\mathbb{G}_m \cong \mathbb{G}_{n/m}$.

2.2. Si G es un grupo no abeliano, entonces $G/\mathsf{Z}(G)$ no es cíclico.

Sugerencia. Use el ejercicio 2.14 de la práctica 1.

2.3. Muestre que $G/\mathsf{Z}(G) \cong \mathsf{Inn}(G)$.

2.4. Si G es un grupo y H y K son subgrupos normales de G, muestre que $G/(H \cap K)$ es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/K$.

2.5. Dado un grupo G, el *grupo* $\mathsf{Out}(G)$ *de automorfismos exteriores de* G es el cociente $\mathsf{Aut}(G)/\mathsf{Inn}(G)$; recordemos que en el ejercicio **1.5***(d)* vimos que $\mathsf{Inn}(G)$ es normal en $\mathsf{Aut}(G)$. Es importante observar que los elementos de $\mathsf{Out}(G)$ *no* son automorfismos de G.

Determinar $\mathsf{Out}(G)$ cuando $G \in \{S_3, S_4, \mathbb{H}\}$.

2.6. Sea G un grupo y sea H un subgrupo no normal. Mostrar que el conjunto de coclases izquierdas de H en G no forma un grupo bajo la multiplicación usual.

3. Productos

3.1. Sean U y V dos grupos. Sean además $f : U \to W$ y $g : V \to W$ dos homomorfismos de grupos. Entonces la aplicación $h : (u,v) \in U \times V \mapsto f(u)g(v) \in W$ es un homomorfismo de grupos sii todo elemento de $f(U)$ conmuta con todo elemento de $g(V)$.

3.2. Si G y H son grupos, determine $\mathsf{Z}(G \times H)$.

3.3. *Producto directo interno.* Sea G un grupo.

(a) Sean N y M dos subgrupos normales de G y supongamos que $N \cap M = 1$ y $G = NM$. Mostrar que entonces es $G \cong N \times M$.

(b) Supongamos que G es grupo finito de orden mn con $(m,n) = 1$. Si G posee exactamente un subgrupo N de orden n y exactamente un subgrupo M de orden m, entonces G es isomorfo al producto directo de N y M.

†*(c)* Sean $k \in \mathbb{N}$ y $(N_i)_{i=1}^k$ una familia de subgrupos normales de G tales que $G = \left\langle \bigcup_{i=1}^k N_i \right\rangle$ y para cada $j \in \{1,\dots,k\}$ se tiene que

$$N_j \cap \left\langle \bigcup_{\substack{1 \le i \le k \\ i \ne j}} N_i \right\rangle = 1.$$

Mostrar que entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

†*(d)* Otra vez, supongamos que G es finito y sean $N_1,\dots,N_k$ subgrupos normales de G de órdenes $r_1,\dots,r_k$ tales que $(r_i,r_j) = 1$ si $1 \le i,j \le k$ y $|G| = r_1 \cdots r_k$. Entonces $G \cong N_1 \times \cdots \times N_k$.

3.4. *Producto semi-directo.*

(a) Sean G y N grupos y sea $\theta : G \to \mathsf{Aut}(N)$ un homomorfismo de grupos. Sea $K = N \times G$ y consideremos el producto en K dado por

$$(n,g) \cdot (n',g') = (n\theta(g)(n'), gg'), \qquad \forall (n,g),(n',g') \in K.$$

Mostrar que, con respecto a este producto, K es un grupo.

Llamamos al grupo K construido el *producto semi-directo (o cruzado) de N por G con respecto a θ* y lo notamos $N \rtimes_\theta G$.

(b) Encontrar homomorfismos 'naturales' de grupo $\iota : N \to N \rtimes_\theta G$ y $\pi : N \rtimes_\theta G \to G$ tales que ι sea inyectivo, π sea sobreyectivo e $\operatorname{im} \iota = \ker \pi$.

(c) Mostrar que si $\theta = 1$ es el homomorfismo trivial, $N \rtimes_\theta G \cong N \times G$ es simplemente el producto directo.

3.5. *Producto semi-directo interno.* Sea K un grupo y sean G y N subgrupos de K con N normal en K. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $K = NG$ y $N \cap G = \{1\}$;

(b) $K = GN$ y $N \cap G = \{1\}$;

(c) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de N por uno de G.

(d) Todo elemento de K puede escribirse de forma única como un producto de un elemento de G por uno de N.

(e) La composición de la inclusión $\text{incl} : : G \hookrightarrow K$ con la proyección canónica $\text{can} : K \twoheadrightarrow K/N$ es un isomorfismo $\tau : G \cong K/N$.

(f) Existe un homomorfismo $\sigma : K \to G$ que se restringe a la identidad de G y cuyo núcleo es N.

Además, cuando estas afirmaciones valen, existe un homomorfismo de grupos $\theta : G \to \operatorname{Aut}(N)$ y un isomorfismo de grupos $\xi : N \rtimes_\theta G \to K$ tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & N \rtimes_\theta G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\xi"] & G \arrow[d, "\tau"] \\
N \arrow[r, hook, "\text{incl}"] & K \arrow[r, two heads, "\text{can}"] & K/N
\end{tikzcd}$$

Los homomorfismos ι y π del diagrama fueron construidos en el ejercicio **3.4**.

3.6. Mostrar que $S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$ para un homomorfismo $\theta : \mathbb{Z}_2 \to \operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_3)$ apropiado.

3.7. Mostrar que S_n es el producto semi-directo de A_n y $\langle (1\,2) \rangle$.

†**3.8.** Mostrar que $\mathbb{H}$ no puede ser escrito como un producto semi-directo de forma no trivial.

†**3.9.** Sea G un grupo finito y $\phi : G \to G$ un endomorfismo de G y α el endomorfismo de G construido en el ejercicio **1.12**. Mostrar que G es el producto semi-directo de $\ker \alpha$ e $\operatorname{im} \alpha$.