SESIÓN 3

Curvas

3.1 Introducción

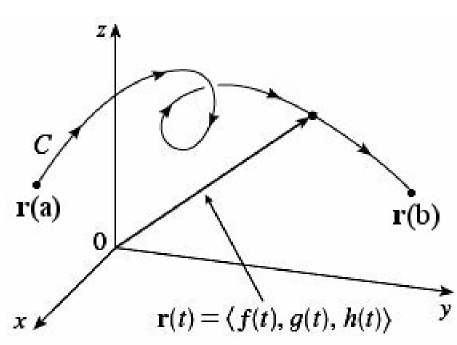
En esta sesión se revisa el concepto de *curva*, el cual resulta ser clave en el resto de esta unidad.

3.2 Curvas en el plano y el espacio

Informalmente se denomina *curva* a la traza de una partícula que se mueve en el plano o el espacio. Formalmente, se llama *curva en el espacio* al gráfico de una función

$$\overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\,\widehat{\imath} + f_2(t)\,\widehat{\jmath} + f_3(t)\,\widehat{k} = (f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t)) \tag{3.1}$$

donde f_1, f_2 y f_3 son funciones reales definidas en un intervalo $I = [a, b]$.



Curva en el espacio

Nota 3.1.

- Una función del tipo recién definido ($\overrightarrow{r}$) recibe el nombre de *función vectorial*.
- Las funciones f_1, f_2 y f_3 se llaman *funciones componentes* de $\overrightarrow{r}$.
- En el caso que $f_3 = 0$, la función f queda:
$$\overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\hat{\imath} + f_2(t)\hat{\jmath} = (f_1(t),\, f_2(t)) \tag{3.2}$$
y en tal caso la curva asociada (su gráfico) es una curva en el plano.
- Es frecuente presentar las funciones componentes de una función vectorial mediante las ecuaciones
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$
llamadas *ecuaciones paramétricas* de la curva asociada. Además, a la ecuación (3.1) se le llama *una parametrización* de la curva correspondiente y la variable t *parámetro*.
- Una parametrización es continua, cuando sus funciones componentes lo son.
- En lugar de *curva*, a veces se habla de *camino* o *trayectoria*.

3.3 Ejemplos claves

3.3.1 Segmento de recta

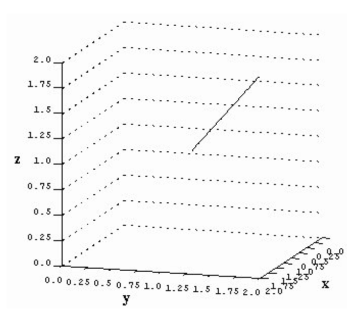
La curva en el espacio, correspondiente al segmento de recta que une los puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$ y $B = (b_1, b_2, b_3)$ viene dada por la función vectorial:

$$\overrightarrow{s}(t) = (a_1 + (b_1 - a_1)t, a_2 + (b_2 - a_2)t, a_3 + (b_3 - a_3)t); \quad \text{con t} \in [0, 1]$$

Así, por ejemplo, el segmento de recta, S, que une los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$ tiene ecuaciones paramétricas:

$$x = 1 + t, \quad x = 1 + t, \quad y = 1 + t; \qquad t \in [0, 1]$$

y su gráfico es:



Segmento de recta

Observar que cuando t varía entre 0 y 1, los puntos del segmento varían desde el punto $(1, 1, 1)$ al punto $(2, 2, 2)$.

Ejercicio 3.1. Determinar y esbozar las ecuaciones paramétricas del segmento

1) en el espacio, que une los puntos $(1, 2, 3)$ y $(3, 2, 1)$.

2) en el plano, que une los puntos (a, b) y (c, d).

3.3.2 Circunferencia en el plano

Las ecuaciones paramétricas de la circunferencia con centro $(0, 0)$ y radio r son:

$$x = r\cos(t), \quad y = r\sin(t); \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Ejercicio 3.2. Determinar las ecuaciones paramétricas de la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio 3. En general, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio r y centrada en el punto (x_0, y_0)?

3.3.3 Hélice

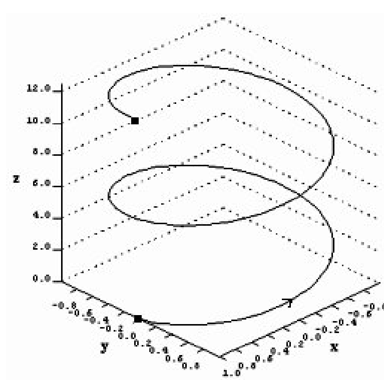
Considerando la curva en el espacio con ecuación vectorial

$$\overrightarrow{h}(t) = \cos(t)\,\widehat{\imath} + \sin(t)\,\widehat{\jmath} + t\,\overrightarrow{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$$

o sus equivalentes ecuaciones paramétricas

$$x = \cos(t), \quad y = \sin(t), \quad z = t; \qquad t \in [0, 4\pi]$$

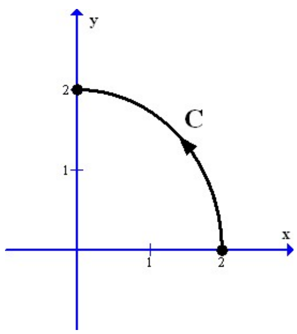
corresponde a una curva que *parte del punto* $(1, 0, 0)$ (cuando $t = 0$), y que a medida que t crece, los puntos correspondientes de la curva van *subiendo*, pero siempre sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.



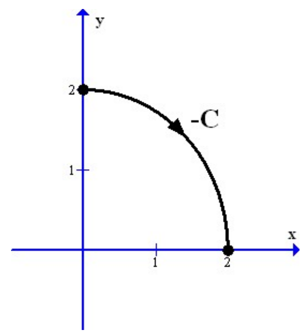
Hélice circular

3.4 Curvas orientadas

Asociado a una curva, se considera su orientación, la cual hace referencia a la dirección en la cual son descritos sus puntos. Así, por ejemplo para la hélice circular del ejemplo anterior, ella parte desde el punto $\overrightarrow{h}(0)$ y termina en el punto $\overrightarrow{h}(4\pi)$. Este sentido se define como el *positivo*, y *negativo* el contrario. El sentido de la curva se anota, tal como allí se señala, incorporando una *flecha* sobre ella.



$\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq \pi/2$



$\overrightarrow{r}(t) = (\cos(\pi/2 - t), \sin(\pi/2 - t)),\ 0 \leq t \leq \pi/2$

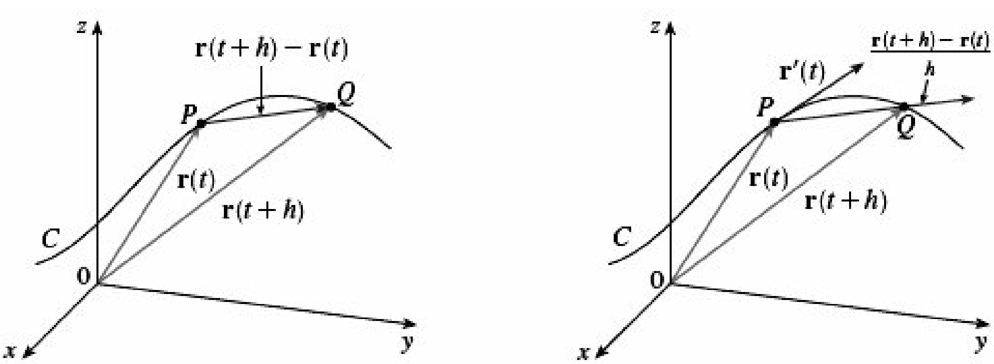
Nota 3.2. En general, si C es una curva con ecuación $\overrightarrow{r}(t)$ con $t \in [a, b]$, la curva $-C$ tiene por ecuación $\overrightarrow{r}(a + b - t)$, con t también en $[a, b]$.

3.5 Derivada de una función vectorial

La derivada $\overrightarrow{r}'$ de una función vectorial del tipo (3.1) se define análogamente al caso de funciones reales:

$$\overrightarrow{r}'(t) = \frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{r}(t + h) - \overrightarrow{r(t)}}{h} \tag{3.3}$$

siempre que este límite exista.
Geométricamente, $\overrightarrow{r}'(t)$ representa un vector tangente a la curva C en su punto $P = \overrightarrow{r}(t)$ que sigue la dirección del sentido de la curva.



Vectores secante y tangente a una curva

Nota*: El cálculo de (3.3) se facilita, luego del siguiente teorema:*

3.5.1 Teorema

Si

$$\overrightarrow{r}(t) = f_1(t)\,\widehat{\imath} + f_2(t)\,\widehat{\jmath} + f_3(t)\overrightarrow{k} = (f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t))$$

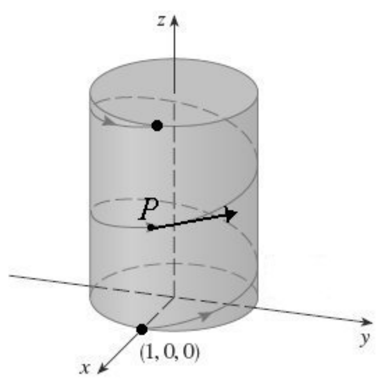
es una función vectorial con sus funciones componentes diferenciables, entonces

$$\overrightarrow{r}'(t) = f_1'(t)\,\widehat{\imath} + f_2'(t)\,\widehat{\jmath} + f_3'(t)\overrightarrow{k} = (f_1'(t),\ f_2'(t),\ f_3'(t))$$

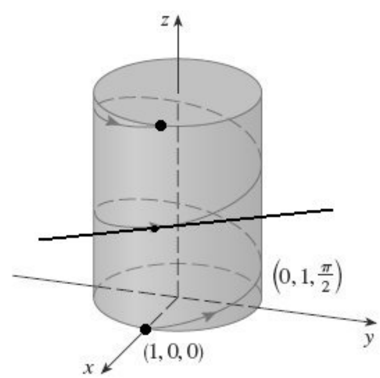
Nota 3.3. *Cuando la curva $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(t)$ representa la trayectoria del movimiento de una partícula:*

- $\overrightarrow{v}(t) = \overrightarrow{r}'(t)$, *representa la velocidad del móvil, y* $||\overrightarrow{r}'(t)||$ *su rápidez.*
- $\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{v}'(t) = \overrightarrow{r}''(t)$, *corresponde a la aceleración del móvil.*

Ejercicio 3.3. Dada la curva $\overrightarrow{r}(t) = \cos(t)\overrightarrow{i} + \sin(t)\overrightarrow{j} + t\overrightarrow{k}$ con $0 \leq t \leq 4\pi$, encontrar su vector tangente y recta tangente en su punto $P = \overrightarrow{r}(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$.



Vector tangente



Recta tangente

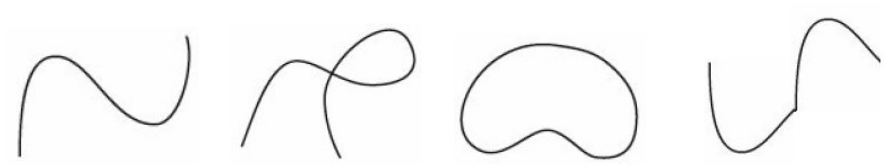
3.6 Tipos especiales de curvas

Una curva del tipo (3.1) se dice:

1) *suave*, cuando su derivada es continua y no se anula en ningún punto interior al intervalo I.

2) *simple*, cuando la función $\overrightarrow{r}(t)$ es inyectiva.

3) *cerrada*, cuando $\overrightarrow{r}(a) = \overrightarrow{r}(b)$, con $t \in [a, b]$.



suave y simple *no simple* *simple cerrada* *simple y no suave*

3.7 Movimiento de partículas

Si la posición de una partícula viene dada por la curva

$$\overrightarrow{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$$

donde las funciones componentes son C^2, entonces la velocidad, rapidez y aceleración de la partícula se definen por:

- Velocidad: $\overrightarrow{v}(t) = (x'(t),\, y'(t),\, z'(t))$
- Rapidez: $||\overrightarrow{v}(t)|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$
- Aceleración: $\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{v}'(t) = (x''(t),\, y''(t),\, z''(t))$

Nota 3.4. Observar que la velocidad de la partícula coincide con el vector tangente a la curva.

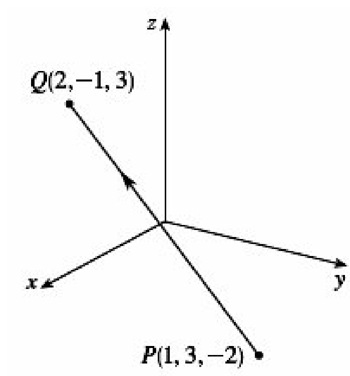
3.8 Actividades

1) Determinar las ecuaciones cartesianas de las siguientes curvas. Hacer un esbozo de cada una de ellas e indicar la dirección en que la curva es descrita cuando el parámetro crece en su correspondiente intervalo.

   a) $x = 1 + t,\ y = 4 - 2t, \quad t \in [-2, 4]$
   b) $x = 1 + t^2,\ y = 4 - 2t, \quad t \in [0, 2]$
   c) $x = \sqrt{1+t},\ y = t - 1, \quad t \in [3, 6]$
   d) $x = \sec t,\ y = 2\tan t, \quad t \in [0, 2\pi]$
   e) $x = 2 + t,\ y = t - 2,\ z = 2 - t, \quad t \in [-2, 2]$
   f) $x = t,\ y = t^2,\ z = 2, \quad t \in [-1, 1]$
   g) $x = 2\cos(t),\ y = -1,\ z = 3\sin(t), \quad t \in [0,\ 2\pi]$
   h) $x = 2 + \cos(t),\ y = -1 + 2\sin(t),\ z = 3, \quad t \in [0,\ \pi]$

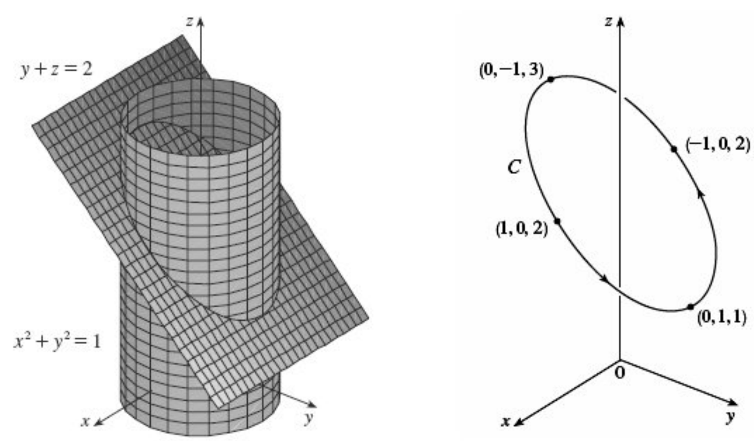
2) Encontrar las ecuaciones cartesianas de las curvas (a), (b), (c) y (d) del ítem precedente.

a) Determinar las ecuaciones correspondiente al siguiente segmento de recta en el espacio. Poner atención a la dirección indicada.



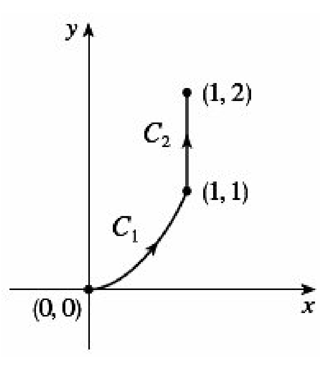
Segmento de recta

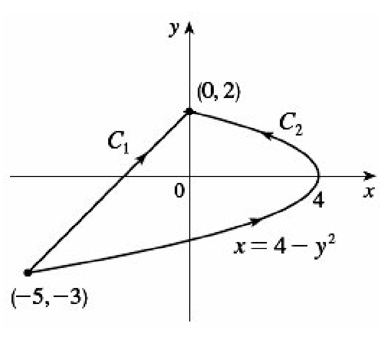
b) Encontrar unas ecuaciones paramétricas para la curva C correspondiente a la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$.

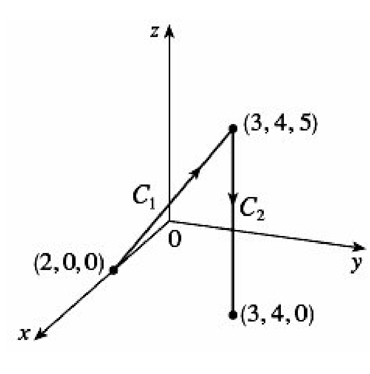


C: intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 2$

3) Es frecuente que una curva C no sea suave, pero que corresponda a la *concatenación* de ciertas curvas suaves, digamos C_1 y C_2. En este caso se anota $C = C_1 + C_2$. Para las siguientes curvas encontrar sus ecuaciones paramétricas.







4) Para las siguientes curvas, hacer un esbozo de ellas y encontrar y graficar $\overrightarrow{r}(t)$ y $\overrightarrow{r}'(t)$ para el valor indicado del parámetro:

   a) $x = 1 + t, \quad y = \sqrt{t}$; en $t = 1$
   b) $\overrightarrow{r}(t) = (e^t, e^{-t})$ en $t = 0$

5) Determinar el vector tangente unitario y una ecuación de la recta tangente a la curva $\overrightarrow{r}(t) = (\cos(t), 2t, 2\sin(2t))$ en $t = 0$.

6) Considerar las curvas

$$C_1 : \quad \overrightarrow{r_1}(t) = t\,\overrightarrow{i} + (1-t)\,\overrightarrow{j} + (3+t^2)\,\overrightarrow{k}$$

$$C_2 : \quad \overrightarrow{r_2}(s) = (3-s)\,\overrightarrow{i} + (s-2)\,\overrightarrow{j} + s^2\,\overrightarrow{k}$$

Determinar

   a) El (o los) punto(s) en los cuales se intersectan C_1 y C_2.
   b) Calcular el ángulo de intersección en uno de sus puntos de intersección*.

7) *Longitud de una curva.* La longitud de una curva en el plano de ecuaciones paramétricas $x = f_1(t), \; y = f_2(x)$ con $t \in [a, b]$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2}dt$$

Análogamente, para una curva en el espacio (3.1), su longitud es

$$L = \int_a^b \sqrt{f_1'(t)^2 + f_2'(t)^2 + f_3(t)^2}dt$$

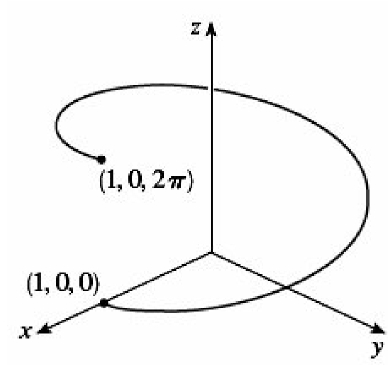
Observar que la longitud de una curva, *en ambos casos*, se puede expresar por

$$L = \int_a^b ||\overrightarrow{r}'(t)||dt.$$

Hallar las longitudes de las siguientes curvas:

   a) $\overrightarrow{r}(t) = (\sin(t), 1, \cos(2t))$ con $-1 \leq t \leq 1$.
   b) $\overrightarrow{r}(t) = (t^2, \sin(t) - t\cos(t), \cos(t) + t\sin(t))$ con $0 \leq t \leq \pi$.
   c) la hélice circular con el siguiente gráfico:

* Este ángulo se define como el ángulo que forman sus vectores tangentes en el punto de intersección.



8) Verificar que la curva

$$x = x(t) = t\cos t, \quad y = y(t) = t\sin t, \quad z = z(t) = t$$

se ecuentra sobre un cono, y usando este hecho, hacer un esbozo de su gráfico.

9) Encontrar la ecuación paramétrica de la curva correspondiente a la intersección del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1 + y$.

10) Una partícula de masa m_0 se mueve siguiendo una trayectoria circular de radio r_0:

$$\overrightarrow{r}(t) = \left(r_0 \cos\frac{ts}{r_0},\, r_0 \sin\frac{ts}{r_0}\right)$$

a) Verificar que su rápidez es constante e igual a s.

b) Comprobar que $\overrightarrow{a}(t) = -\frac{s^2}{r_0^2}\overrightarrow{r}(t)$

11) Una partícula se mueve sobre la curva

$$\overrightarrow{r}(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$$

a) Calcular su velocidad, rapidez y aceleración en el instante $t = 2$

b) Encontrar una ecuación de la recta tangente en su punto $\overrightarrow{r}(2)$

c) Suponer que la partícula sale por su tangente en el instante $t = 2$. Encontrar la posición de la partícula en $t = 4$

12) Una particula se mueve sobre la curva plana C, llamada cicloide,

$$\overrightarrow{r}(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)$$

a) Hacer un esbozo del gráfico de C

b) Calcular su velocidad y rápidez en el punto $\overrightarrow{r}(t)$. ¿En qué instante su rapidez es 0?

c) Verificar que su longitud entre $t = 0$ y $t = 2\pi$ es igual a 8 (unidades de long.)

13) Una partícula sigue la trayectoria $\overrightarrow{r}(t) = (t^2, 5t, t^2 - 16t)$. ¿Dónde es mínima su rapidez?.

3.9 Desafío

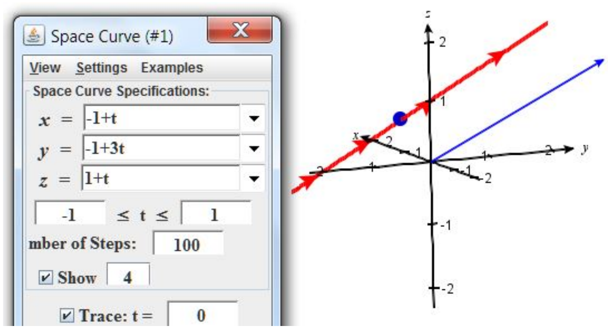
Decidir si la curva

$$\overrightarrow{r}(t) = (1+t)\,\widehat{\imath} + (1+t^2)\,\widehat{\jmath} + (1+2t-t^2)\,\widehat{k}$$

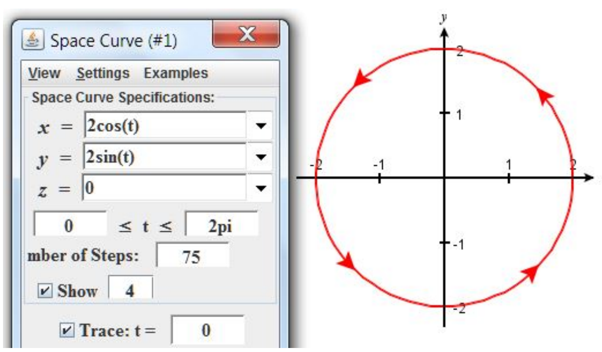
es plana, es decir si esta completamente contenida en un plano, y en caso afirmativo, encontrar el plano que la contiene.

3.10 APENDICE: Ecuaciones parámetricas de algunas curvas

1) Recta*

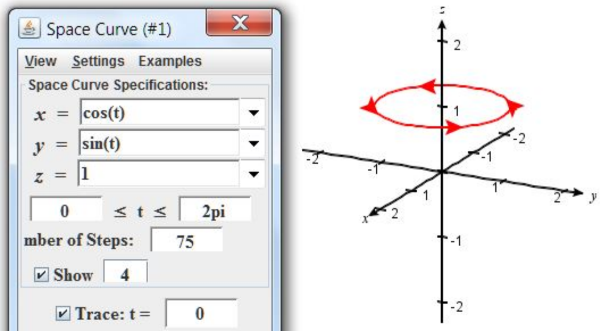


2) Circunferencia

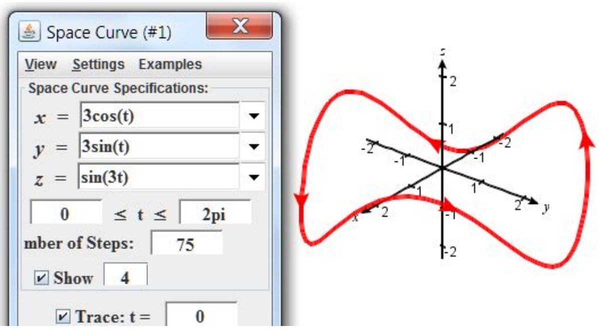


* Los siguientes gráficos se realizaron con el applet CalcPlot3D, disponible (on line) en http://web.monroecc.edu/manila/webfiles/calcNSF/JavaCode/CalcPlot3D.htm

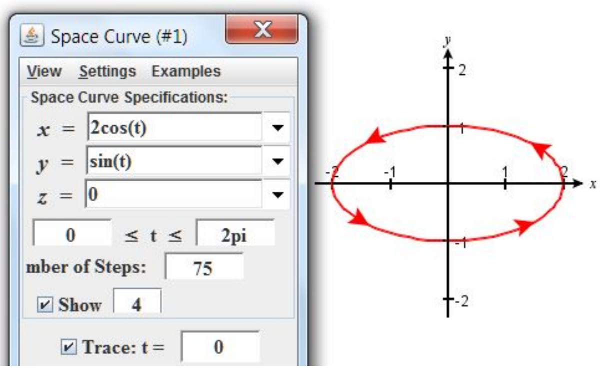
3) Una circunferencia en el espacio



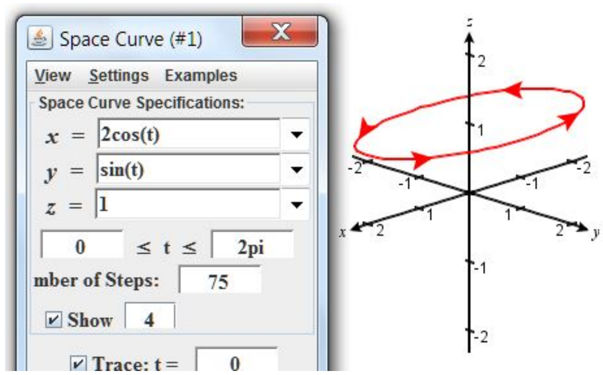
4) Una circunferencia *ondulada*



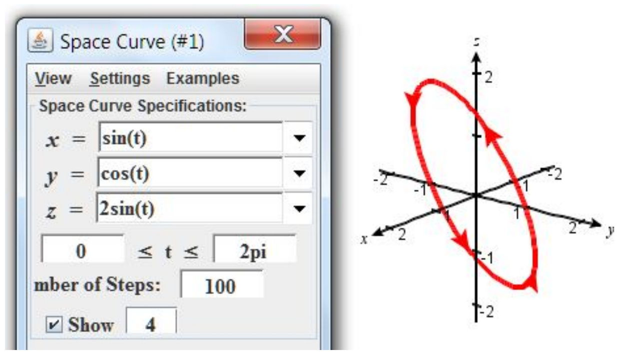
5) Elipse



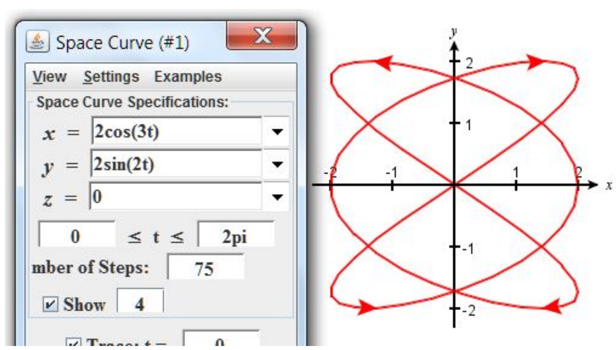
6) Una elipse en el espacio



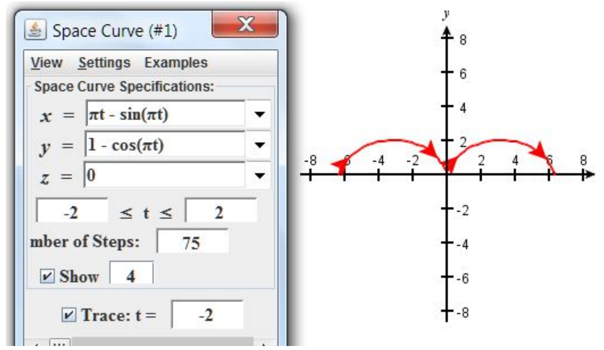
7) Una elipse *inclinada*



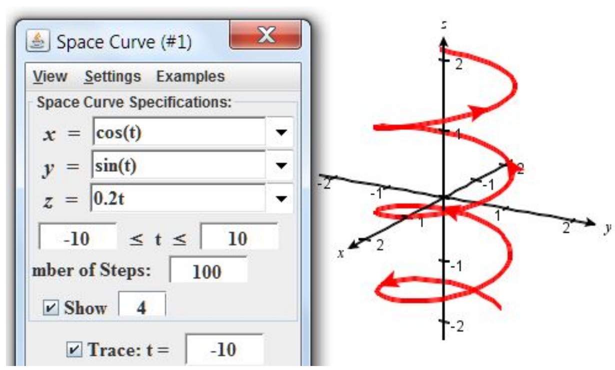
8) Lissajous



9) Cicloide



10) Hélice



11) Mariposa