Matriz adjunta

Objetivos. Repasar la noción de la *matriz adjunta* (transpuesta conjugada) de una matriz. Demostrar sus propiedades básicas.

Requisitos. Matriz transpuesta, números complejos, operaciones con matrices.

Definición de la matriz adjunta

1. Ejemplo.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. La matriz *adjunta* de A denotada por A^* se define como la matriz transpuesta conjugada de A. Por ejemplo, si

$$A = \begin{bmatrix} 7-3\,\mathrm{i} & -4 & 5\,\mathrm{i} \\ 2 & -2\,\mathrm{i} & 3+4\,\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

entonces

$$A^* = \begin{bmatrix} 7+3\,\mathrm{i} & 2 \\ -4 & 2\,\mathrm{i} \\ -5\,\mathrm{i} & 3-4\,\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Definición (la matriz adjunta de una matriz).
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. La matriz *adjunta* de A denotada por A^* se define como la matriz transpuesta conjugada de A:

$$A^* = \left[\,\overline{A}_{k,j}\,\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

En otras palabras, $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ y para todos los índices $j \in \{1,\ldots,n\}$, $k \in \{1,\ldots,m\}$

$$\big(A^*\big)_{j,k} = \overline{A}_{k,j}.$$

2. Matriz adjunta y operaciones lineales.
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ y sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$(A+B)^* = A^* + B^*, \qquad (\lambda A)^* = \overline{\lambda}\, A^*.$$

3. Matriz adjunta de la adjunta.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Demuestre que $(A^*)^* = A$.

4. Matriz adjunta del producto de matrices.
Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Demuestre que

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Indicación: primero calcule los tamaños de las matrices $(AB)^*$ y B^*A^*. Luego calcule la (j,k)-ésima entrada de $(AB)^*$ y la (j,k)-ésima entrada de B^*A^*.

Matriz adjunta y el producto interno canónico

Definición (el producto interno canónico en $\mathbb{C}^n$.
El *producto interno canónico* en $\mathbb{C}^n$ se define de la siguiente manera:

$$\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_j} b_j.$$

(A veces se usa otra definición, con $\overline{b_j}$, pero la definición escrita arriba resulta ser más cómoda para nosotros.)

Identificación de vectores con matrices-columnas.
Identificamos $\mathbb{C}^n$ con $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, así que un vector $a \in \mathbb{C}^n$ se identifica con la matriz que consiste en una sola columna a.

5. El adjunto de un vector.
Sea $a \in \mathbb{C}^n$. ¿Qué forma tiene a^*?.

6. Expresión del producto interno canónico en términos de la matriz adjunta.
Sean $a, b \in \mathbb{C}^n$. Calcule el producto $a^* b$ y compárelo con $\langle a, b \rangle$.

7. Propiedad principal de la matriz adjunta.
Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, sean $u \in \mathbb{C}^n$ y $v \in \mathbb{C}^m$. Demuestre que

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^* v \rangle.$$