Conjuntos equipotentes

Problemas para examen

Definición de conjuntos equipotentes

1 Ejercicio. ¿Cuándo dos conjuntos se llaman *equipotentes*? Escriba la definición.

Usamos la notación $A \sim B$, si A y B son equipotentes.

2 Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{N} \sim \{k \in \mathbb{Z}\colon k \geq 5\}$.

3 Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{R} \sim (-1, 1)$.

4 Ejercicio. Sea $a \in \mathbb{R}$. Mostrar que $\mathbb{R} \sim (a, +\infty)$.

5 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Mostrar que $(a, b) \sim (0, 1)$.

6 Ejercicio. Sea A un conjunto. Demostrar que $A \sim A$.

7 Ejercicio. Sean A y B conjuntos tales que $A \sim B$. Demostrar que $B \sim A$.

8 Ejercicio. Sean A, B, C conjuntos tales que $A \sim B$ y $B \sim C$. Demostrar que $A \sim C$.

9 Ejercicio (sobre la imagen de una inyección)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una función inyectiva. Definimos $g\colon X \to f[X]$ mediante la regla $g(x) \coloneqq f(x)$. En otras palabras, g se obtiene de f al restringir el codominio al conjunto $f[X]$. Mostrar que g es una biyección. En particular, esto implica que $X \sim f[X]$.

10 Ejercicio (sobre la compresión de una inyección)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una inyección y sea $A \subseteq X$. Pongamos $B \coloneqq f[A]$ y definimos $g\colon A \to B$ mediante la regla $g(x) \coloneqq f(x)$. Mostrar que g es una biyección del conjunto A sobre el conjunto B.

11 Ejercicio (sobre la compresión de una biyección por medio de una eliminación unipuntual)**.** Sea $f\colon X \to Y$ una biyección y sea $p \in X$. Pongamos $q = f(p)$. Mostrar que $f[X \setminus \{p\}] = Y \setminus \{q\}$. Usando el resultado del Ejercicio 10, demostrar que la función $g\colon X \setminus \{p\} \to Y \setminus \{q\}$, definida mediante la regla $g(x) \coloneqq f(x)$, es una biyección.

12 Ejercicio (sobre la equipotencia de productos cartesianos)**.** Sean A, B, C, D algunos conjuntos tales que $A \sim C$ y $B \sim D$. Mostrar que $A \times B \sim C \times D$.

13 Ejercicio (sobre la unión disjunta de dos biyecciones)**.** Sean A, B, C, D algunos conjuntos tales que $A \cap B = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$. Supongamos que $f\colon A \to C$ y $g\colon B \to D$ son biyecciones. Definimos $h\colon A \cup B \to C \cup D$ mediante la siguiente regla:

$$h(x) \coloneqq \begin{cases} f(x), & x \in A; \\ g(x), & x \in B. \end{cases}$$

Demostrar que h es una biyección. Se recomienda construir una función $\varphi\colon C \cup D \to A \cup B$ tal que $h \circ \varphi = \mathrm{id}_{C \cup D}$ y $\varphi \circ h = \mathrm{id}_{A \cup B}$.

14 Ejercicio. Usando el resultado del ejercicio anterior, mostrar que si $A \cap B = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$, $A \sim C$ y $B \sim D$, entonces $A \cup B \sim C \cup D$.

15 Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Sugerencia: dividir el conjunto $\mathbb{N}$ en los pares e impares, dividir el conjunto $\mathbb{Z}$ en los positivos y negativos, construir f y g como en el Ejercicio 13.

16 Ejercicio. Construir una biyección $h\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Sugerencia. Poner $A \coloneqq \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N}_0$, $B \coloneqq [0, +\infty) \setminus A$, $C \coloneqq \mathbb{N}$, $D \coloneqq (0, +\infty) \setminus C$. Mostrar que $A \sim C$, $B = D$, y aplicar el resultado del Ejercicio 13 sobre la unión disjunta de dos biyecciones.

17 Ejercicio. Mostrar que $[0, 1] \sim [0, 1)$.

18 Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{R} \sim [0, 1]$.

Conjuntos finitos

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotamos $\{1, \ldots, n\}$ por J_n. Además, pongamos $J_0 = \varnothing$.

19 Ejercicio. ¿Cuándo un conjunto se llama *finito*? Escribir la definición.

20 Ejercicio. Sean A un conjunto, $n \in \mathbb{N}_0$, $A \sim J_n$, $b \notin A$. Demostrar que $A \cup \{b\} \sim J_{n+1}$.

21 Ejercicio. Sean $m, n \in \mathbb{N}_0$. Demostrar que $J_m \sim J_{m+n} \setminus J_n$.

22 Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos disjuntos, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $A \sim J_m$, $B \sim J_n$. Demostrar que $A \cup B \sim J_{m+n}$. Se recomienda no aplicar la inducción matemática, sino construir directamente una biyección $J_{m+n} \to A \cup B$ y/o su inversa $A \cup B \to J_{m+n}$.

23 Ejercicio (sobre J_{n+1} sin un elemento)**.** Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}_0$ y cada b en J_{n+1},

$$J_n \sim J_{n+1} \setminus \{b\}.$$

24 Ejercicio (sobre los subconjuntos de J_n)**.** Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}_0$ y cada $A \subseteq J_n$, existe m en $\mathbb{N}_0$ tal que $m \le n$ y $A \sim J_m$.

25 Ejercicio. Sea A un conjunto finito y sea $B \subseteq A$. Demostrar que B es finito.

26 Ejercicio. Sean A y B conjuntos finitos. Demostrar que su unión $A \cup B$ también es un conjunto finito.

27 Ejercicio (sobre la equipotencia de J_n y J_m)**.** Demostrar que para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$, si $m < n$, entonces $J_m \nsim J_n$.

28 Ejercicio. Demostrar que para cada m, n en $\mathbb{N}_0$, $J_m \times J_n \sim J_{mn}$.

29 Ejercicio. Demostrar que cualquier subconjunto acotado de $\mathbb{N}$ es finito.

30 Ejercicio. Demostrar que cualquier subconjunto finito de $\mathbb{N}$ es acotado.

Demostración. Se puede demostrar por inducción sobre n la siguiente afirmación: si $A \sim J_n$, entonces A es acotado. □

31 Ejercicio. Demostrar que para cada n en $\mathbb{N}_0$, $J_n \nsim \mathbb{N}$.

Teorema de Cantor, Schröder y Bernstein

32 Ejercicio (teorema de Cantor, Schröder y Bernstein para el caso de un subconjunto)**.** Sean A y C conjuntos, $C \subseteq A$, $\varphi\colon A \to C$ una función inyectiva. Construya una función biyectiva $\psi\colon A \to C$. Hay que construir ψ y mostrar que ψ es biyectiva. Sugerencia: definir los conjuntos M_k como

$$M_0 \coloneqq A \setminus C, \qquad M_k \coloneqq \varphi[M_{k-1}] \quad (k \in \mathbb{N}),$$

poner $M \coloneqq \bigcup_{k=0}^{\infty}$. Mostrar que la función $\eta\colon M \to M \cap C$, definida como $\eta(x) \coloneqq \varphi(x)$, es biyectiva. Luego definir η como la unión disjunta de η con $\mathrm{id}_{C\setminus M}$.

33 Ejercicio. Construya los conjuntos M_k para $A = [0, +\infty)$, $C = (0, +\infty)$, $\varphi(x) = x+1$.

34 Ejercicio. Construya los conjuntos M_k para $A = [0, 1]$, $C = [0, 1)$, $\varphi(x) = x/2$.

35 Ejercicio. Sean A, C, φ, M_k como en el Ejercicio 32. Muestre que los conjuntos M_k, correspondientes a diferentes valores de k, son disjuntos a pares.

36 Ejercicio (teorema de Cantor, Schröder y Bernstein)**.** Sean A y B conjuntos, $f\colon A \to B$ y $g\colon B \to A$ funciones inyectivas. Construya una función biyectiva $h\colon A \to B$. Sugerencia: usar el resultado del Ejercicio 32.

37 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Usando el teorema de Cantor, Schröder y Bernstein, demuestre que $[a, b] \sim [a, b)$.

38 Ejercicio. Usando el teorema de Cantor, Schröder y Bernstein, demuestre que $\mathbb{R} \sim [0, +\infty)$.

Comparación de conjuntos por el tamaño

Sean A y B conjuntos. Escribimos $A \prec B$, si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$.

39 Ejercicio. Sean A, B, C conjuntos tales que $A \prec B$ y $B \prec C$. Mostrar que $A \prec C$.

40 Ejercicio. Sea A un conjunto. Mostrar que $A \prec A$.

41 Ejercicio. Enunciar el teorema de Cantor, Schröder y Bernstein usando la notación $\prec$ y $\sim$.

42 Ejercicio. Sean A y B conjuntos. Demostrar que $A \prec B$ si y solo si existe un C de B tal que $A \sim C$.

43 Ejercicio. Sean A y B conjuntos, $A \neq \varnothing$. Demostrar que $A \prec B$ si y solo si existe una función suprayectiva $g\colon B \to A$.

44 Ejercicio. Sea A un conjunto no vacío. Mostrar que A es a lo sumo numerable si y solo si existe una función suprayectiva $g\colon \mathbb{N} \to A$.

Conjuntos numerables

Decimos que A es *numerable* si $A \sim \mathbb{N}$.

45 Ejercicio. Mostrar que los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ son numerables.

46 Ejercicio. Demostrar que cualquier subconjunto no acotado de $\mathbb{N}$ es numerable.

47 Ejercicio. Demostrar que un conjunto es a lo sumo numerable si y solo si es equipotente a algún subconjunto de $\mathbb{N}$.

48 Ejercicio. Demostrar que todo subconjunto de un conjunto numerable es a lo sumo numerable.

49 Ejercicio. Sean A numerable, B finito y $A \cap B = \varnothing$. Demostrar que $A \cup B$ es numerable.

50 Ejercicio. Demostrar que si $A \sim \mathbb{N}$, $B \sim \mathbb{N}$ y $A \cap B = \varnothing$, entonces $A \cup B \sim \mathbb{N}$.

51 Ejercicio. Demostrar que si $A \sim \mathbb{N}$ y B es a lo más numerable, entonces $A \cup B \sim \mathbb{N}$.

52 Ejercicio. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$ y $A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos a lo más numerables, entonces $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ es a lo más numerable.

53 Ejercicio. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos finitos no vacíos, disjuntos a pares. Demostrar que la unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es un conjunto numerable.

54 Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

55 Ejercicio. Para cada m en $\mathbb{N}$ pongamos

$$\alpha_m := \frac{m(m+1)}{2}.$$

Mostrar que $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ toma valores en $\mathbb{N}$, es estrictamente creciente, no acotada, y

$$\alpha_{m+1} - \alpha_m = m + 1 \qquad (m \in \mathbb{N}).$$

56 Ejercicio. Demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$. Sugerencia: definir $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mediante la regla

$$f(j, k) := \alpha_{j+k-2} + j.$$

57 Ejercicio. Demostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ usando el siguiente camino. Sea $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que contiene a todos los números primos, sin repeticiones, en el orden creciente. Por ejemplo, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$. Definimos $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ como

$$f(m, n) := p_n^m.$$

Mostrar que f es inyectiva. Construir una función inyectiva $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y aplicar el teorema de Cantor–Schröder–Bernstein.

58 Ejercicio. Mostrar que la unión de toda familia finita o numerable de conjuntos numerables es un conjunto numerable.

Hay varias maneras de demostrar que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$. Se recomienda realizar cada uno de los siguientes dos caminos.

59 Ejercicio (numeración de los racionales usando el resultado $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$)**.** Sean $\mathbb{Q}_+ := \{q \in \mathbb{Q}\colon\ q > 0\}$ y $\mathbb{Q}_- := \{q \in \mathbb{Q}\colon\ q < 0\}$. Construir una inyección $\mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y una inyección $\mathbb{Q}_- \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Usando el resultado del Ejercicio 56 y otras herramientas, demostrar que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

60 Ejercicio (numeración de los racionales partiéndolos en números de la misma “altura”)**.** Dado un número racional p/q con $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$, se define su “altura” como $|p| + q$. Por ejemplo, la “altura” de $-10/3$ es 13. Para cada h en $\mathbb{N}$, denotemos por A_h al conjunto de los números racionales que tienen “altura” h:

$$A_h \coloneqq \left\{ \frac{p}{q} \colon\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N},\ \operatorname{mcd}(p, q) = 1,\ |p| + q = h \right\}.$$

Mostrar que para cada h en $\mathbb{N}$ el conjunto A_h es finito y no vacío. Explicar por qué los conjuntos A_h son disjuntos a pares, y por qué $\mathbb{Q} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} A_h$. Aplicar el resultado del Ejercicio 53 y concluir que $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

61 Ejercicio (el conjunto de los saltos de una función creciente, definida en un intervalo acotado cerrado, es a lo sumo numerable)**.** Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente (en el sentido no estricto). Como se sabe, para cada c en (a, b) la función f tiene límites laterales en c:

$$f(c^-) \coloneqq \lim_{x \to c^-} f(x) = \sup_{x \in (a,c)} f(x), \qquad f(c^+) \coloneqq \lim_{x \to c^+} f(x) = \inf_{x \in (c,b)} f(x).$$

Denotemos por S al conjunto de los puntos donde f tiene saltos:

$$S \coloneqq \{c \in (a, b)\colon\ f(c^-) < f(c^+)\}.$$

Demostrar que S es a lo sumo numerable. Indicación. Para cada m en $\mathbb{N}$ denotemos por T_m al conjunto

$$T_m \coloneqq \left\{ c \in (a, b)\colon\ f(c^+) - f(c^-) \geq \frac{1}{m} \right\}.$$

Demostrar que para cada m en $\mathbb{N}$ el conjunto T_m es finito, y que $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} T_m$.

62 Ejercicio (el conjunto de los saltos de una función creciente, definida en un intervalo abierto, es a lo sumo numerable)**.** Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, $a < b$, y sea $f \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función creciente (en el sentido no estricto). Denotemos por S al conjunto de los puntos donde f tiene saltos:

$$S \coloneqq \{c \in (a, b)\colon\ f(c^-) < f(c^+)\}.$$

Demostrar que S es a lo sumo numerable. Sugerencia: cubrir el intervalo (a, b) por una sucesión de intervalos acotados cerrados, luego aplicar el resultado del ejercicio anterior.

El conjunto potencia de un conjunto

63 Ejercicio. Sea A un conjunto. Mostrar que $A \prec \mathcal{P}(A)$.

64 Ejercicio (teorema de Cantor sobre el conjunto potencia)**.** Sea A un conjunto. Mostrar que $A \nsim \mathcal{P}(A)$. Idea. Dada una función $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$, definir

$$B \coloneqq \{x \in A\colon\ x \notin f(x)\} \tag{1}$$

y mostrar que no existe x en A tal que $f(x) = B$.

65 Ejercicio. Calcular el conjunto (1), donde $A = \{1, 2, 3\}$, $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$,

$$f(1) = \{2, 3\}, \qquad f(2) = \{1, 2, 3\}, \qquad f(3) = \{1\}.$$

66 Ejercicio. Sean A, B tales que $A \sim B$. Muestre que $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(B)$.

67 Ejercicio. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}_0$, $\mathcal{P}(J_n) \sim J_{2^n}$.

68 Ejercicio. Sean $n \in \mathbb{N}_0$ y sea A un conjunto tal que $A \sim J_n$. Demuestre que $\mathcal{P}(A) \sim J_{2^n}$.

69 Ejercicio. Demuestre que para cada n en $\mathbb{N}_0$, $n < 2^n$.

El conjunto de funciones de un conjunto al otro

70 Ejercicio. Sean A, B, C, D conjuntos tales que $A \sim C$, $B \sim D$. Mostrar que $A^B \sim C^D$.

71 Ejercicio. Sean A, B, C conjuntos tales que $A \cap B = \varnothing$. Mostrar que

$$C^{A \cup B} \sim (C^A) \times (C^B).$$

72 Ejercicio (currificación)**.** Sean A, B, C conjuntos. Mostrar que

$$(A^B)^C \sim A^{B \times C}.$$

73 Ejercicio (el conjunto potencia como el conjunto de funciones con valores 0 y 1)**.** Sea A un conjunto. Mostrar que
$$\mathcal{P}(A) \sim \{0,1\}^A.$$

74 Ejercicio. Demostrar que Para cada m en $\mathbb{N}_0$ y cada n en $\mathbb{N}_0$,
$$J_m^{J_n} \sim J_{m^n}.$$

75 Ejercicio. Sean A y B conjuntos, $A \sim J_m$, $B \sim J_n$. Mostrar que $A^B \sim J_{m^n}$.

Propiedades de conjuntos infinitos

76 Ejercicio. Mostrar que el conjunto $\mathbb{R}$ es no numerable.

77 Ejercicio. Mostrar que todo conjunto infinito contiene un subconjunto numerable.

78 Ejercicio. Sean A un conjunto infinito, B un conjunto a lo sumo numerable. Mostrar que $A \cup B \sim A$.

79 Ejercicio. Mostrar que el conjunto de los números irracionales es infinito no numerable.

80 Ejercicio. Sea X un conjunto infinito. Mostrar que existe $Y \subsetneq X$ tal que $Y \sim X$.

81 Ejercicio. Demostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim [0,1)$.

82 Ejemplo. Definimos el conjunto de Cantor C como el conjunto de todos los puntos x en $[0,1]$ que se pueden representar en la forma
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$
donde $a_k \in \{0,2\}$ para cada k en $\mathbb{N}$. Demostrar que $C \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

83 Ejercicio. Mostrar que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.