ANALISIS Y CARACTERISTICAS DEL POTENCIAL COGNITIVO DE PRODUCCIONES ESCOLARES MATEMATICAS CON ALUMNOS DE 11 A 14 AÑOS

Autor:
Antonio José Lopes

Directores de tesis:

Josep Maria Fortuny Aymemí
Joaquin Giménez Rodriguez

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

Facultat d'Educació

Universitat Autònoma de Barcelona

Tesis presentada para obtener el título de Doctor
por la Universitat Autònoma de Barcelona

Enero 2016

Agradecimientos

Esta tesis se presenta al antiguo Programa de Doctorado del Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals de la Universitat Autònoma de Barcelona. Una parte del periodo de formación investigadora se ha realizado con la ayuda de CAPES del Gobierno e Brasil. Junto con las estancias en diversos eventos internacionales, la participación en diversos Seminarios y Congresos ha contribuido a construir y revisar sistemáticamente el proceso de investigación para incorporar comentarios y revisiones.

Espero haber conseguido, como mínimo, la adquisición de las competencias básicas que en el caso del Doctorado, son fundamentales para mostrar capacidad investigadora. Entre estas competencias: comprender un campo de estudio y dominar las habilidades y métodos de investigación relacionados con dicho campo; concebir, diseñar, poner en práctica y adoptar un proceso sustancial de investigación con seriedad académica; realizar una contribución a través de una investigación original que amplíe las fronteras del conocimiento, desarrollando un corpus sustancial, del que parte merezca la publicación referenciada, a nivel nacional o internacional; realizar un análisis crítico, evaluación y síntesis de ideas nuevas y complejas; comunicarse con sus colegas, con la comunidad académica en su conjunto, y con la sociedad en general, acerca de sus áreas de conocimiento.

Mis más sinceros agradecimientos a mis directores Josep Maria Fortuny y Joaquin Gimenez, que siempre han estado ahí y me han dado los ánimos, consejos, ayudas, recursos, contactos y recomendaciones necesarios para seguir. Presencialmente y virtualmente, en países remotos siempre aprovechando para definir mejor el ambiente de la comunidad de inspiración lakatosiana. He recibido oportunidades de aprender en muchos ámbitos y espero haberlas aprovechado. Gracias a las personas del Departamento por todos sus apoyos.

Otros investigadores me han dedicado tiempo y esfuerzos en tutorías que se han traducido en mejoras de mi investigación. Arthur Powell la primera interlocución que merece nota especial, responsable directo por mis primeras experiencias e investigaciones con la escrita en matemáticas. Las charlas con Janete Bolite me han hecho reflexionar y modificar aspectos importantes del trabajo en varios aspectos, Romulo Lins, Luciano Meira, Jorge Falcão y Carlos Vianna han sido de gran ayuda en el intercambio de ideas. Tais Bressane por su contribución con la Análisis Crítica del Discurso. Yuly Vanegas importante interlocutora en la etapa final. Cristina Bonomi Baruffi y Cátia Nehring que con su cariño y palabras de aliento contribuyeran para cerrar esta etapa de mi vida profesional. A los colegas del Centro de Educação Matemática, a Claude Gaulin y a Seiji Hariki por me despertaren para lo bueno de la Educación Matemática.

A Ubiratan D´Ambrósio, qué siempre me apoyó y es el responsable directo e indirecto por todo lo que conquisté en mi trayectoria profesional.

Gracias en fin a Gabriela y Joana, alumnos, profesores y el los colegas de la escuela da Vila donde se han recogido los datos de este trabajo.

A Claudia, que me ha comprendido y aceptado en esta última fase del trabajo. Y a mis hijos Otávio y Alice los compañeros de la vida toda, que sepan que los miré para concluir esta jornada.

SUMARIO

pag

PRESENTACIÓN 9

CAP 1. INTRODUCCION
Resumen del capítulo 11
1.1. Precedentes. Interés del estudio. Intencionalidad 12
1.2. Existencia de una problemática de investigación 12
1.3. Justificación 14
1.4. La interacción en el aula y la construcción compartida de conocimiento 16
1.5. Problema de investigación, objetivos, preguntas e hipótesis 16
1.6. Estructura de la memoria 19

CAP 2 MARCO REFERENCIAL
Resumen del capítulo 23
2.1. El aula de matemáticas, un espacio con cultura específica 24
2.1.1. Clase como cultura de significados compartidos 24
2.1.2. Comunidad de práctica discursiva y argumentativa 26
2.1.3. La noción de práctica matemática 27
2.2. Identidad. Regulación y negociación matemática 28
2.2.1. Identidad en una comunidad de práctica. 29
2.2.2. Comunidad de práctica en desarrollo 30
2.3. Comunidad de investigación e indagación 31
2.3.1. Negociación en la interacción 35
2.3.2. Devolución y regulación en una comunidad de práctica 36
2.3.3. Cognición y negociación de significados. 37
2.3.4. Espacios de negociación 38
2.4. Comunidad de práctica colaborativa y dialógica. 40
2.4.1. Lo dialógico 41
2.4.2. Sobre el papel de las normas y la legitimidad 44
2.5. El escrito como reflejo de la acción personal e interactiva 49
2.6. Las producciones escritas en la matemática escolar 53

CAP 3. METODOLOGIA
Resumen 57
3.1. Bases y fundamentos metodológicos. 58
3.2. Principios generales para el análisis 61
3.2.1. Análisis conceptual y semántico 63
3.2.2. Análisis de la práctica matemática en la primera fase 66
3.2.3. Análisis de interaciones y producción de significados. 66
3.2.4. Análisis de la negociación 67
3.3. Herramientas para el análisis en la segunda fase 68
3.3.1. Herramientas para el análisis matemático en los textos 68

3.3.2. Instrumentos para recoger la significación conceptual 70
3.3.3. Análisis semántico. Patrones de interacción. 73
3.4. Análisis sistémico normativo 74
3.4.1. Lo que los textos permiten reconocer. Función personal 74
3.4.2. Análisis interpersonal normativo 78
3.4.3. Relaciones colaborativas en los textos 84
3.4.4. Lo metacognitivo a partir de los análisis realizados 86
3.5 Síntesis de metodología 87
.

CAP. 4 UN PRIMER ANALISIS SOBRE LAS PRACTICAS. CARACTERÍSTICAS DE CPEIL. 89
Resumen

4.1. Análisis epistémico-cognitivo de prácticas. 90
4.1.1. Análisis de una práctica con polígonos 90
4.1.2. Análisis de una práctica sobre GNC 100
4.1.3. Análisis de una práctica Ángulos sobre el reloj. 107
4.2. Análisis interaccional. 121
4.3. Lo emocional en el AIL 123
4.4 A modo de conclusiones sobre el AIL 128

CAP. 5 RESULTADOS DEL ANAISIS EPISTEMICO COGNITIVO 131
Resumen

5.1. Los textos y la experiencia escolar 132
5.1.1. El problema del Tangram. 132
5.1.2. Los Pentominos 133
5.1.3. Sobre la ecuación de segundo grado 133
5.1.4. Relato sobre conjuntos numéricos. 134
5.1.5. Una actividad final de resumen. Cuatro años de estudios. 135
5.2. Análisis conceptual y textual de la actividad pentominos 136
5.2.1. Análisis del texto de Gabriela 136
5.2.2. Análisis del texto de Joana 137
5.2.3. Análisis comparativo de la actividad pentominós 138
5.3. Análisis conceptual y textual de la actividad tangram 138
5.3.1. Análisis del texto de Gabriela 140
5.3.2. Análisis del texto de Joana 140
5.3.3. Análisis comparativo de la actividad tangram 141
5.4. Análisis conceptual y textual la actividad ecuaciones 143
5.4.1. Análisis del texto de Gabriela 143
5.4.2. Análisis del texto de Joana 145
5.4.3. Análisis comparativo de la actividad ecuaciones 146
5.5. Análisis conceptual y textual de actividad conjuntos numéricos 148
5.5.1. Análisis del texto de Gabriela 148
5.5.2. Análisis del texto de Joana 152
5.5.3. Análisis comparativo de la actividad conjuntos numéricos 155
5.6. Análisis conceptual y textual de la actividad resumen 156

5.6.1. Análisis del texto de Gabriela 156
5.6.2. Análisis del texto de Joana 164
5.6.3. Análisis comparativo de la actividad resumen 169
5.6 Análisis evolutivo del desarrollo epistémico-cognitivo 173
5.8. Conclusiones. 174
5.8.1. Habilidades conseguidas. 174
5.8.2. Metacognición y trazos de cultura colectiva de clase 175

CAP 6 CONCLUSIONES. LIMITACIONES. PERSPECTIVAS.
Resumen 179
6.1. Presentación Interpretación e la práctica 180
6.2. Sobre los resultados Autonomía y legitimidad 182
Sobre el poder de la comunidad de práctica
Cultura matemática en la CPEIL.
6.3 Implicaciones didácticas 183
6.4. Limitaciones 183
6.7. Propuestas de futuro 185
6.8. Publicaciones desarrolladas 186

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS 189

ANEXOS
Anexo 1. Texto de cap. 4. Mosaicos. 205
Anexo 2. Texto de cap. 4. GNC 207
Anexo 3. Texto de ángulos en el reloj 209
Anexo 4. Texto de números hexagonales (en parte) 215
Anexo 5. Texto 1 de Gabriela sobre pentominós 219
Anexo 6. Texto 1 de Joana sobre pentominós 221
Anexo 7. Texto 2 de Gabriela sobre tangram 223
Anexo 8. Texto 2 de Joana sobre tangram 225
227
Anexo 9. Texto 3 de Gabriela sobre ecuaciones 229
Anexo 10. Texto 3 de Joana sobre ecuaciones 233
Anexo 11. Texto 4 de Gabriela sobre conjuntos numéricos 237
Anexo 12. Texto 4 de Joana sobre conjuntos numéricos 247
Anexo 13. Texto 5 de Gabriela resumen 4 años 259
Anexo 14. Texto 5 de Joana resumen 4 años 267
Anexo 15. Análisis de texto Gabriela sobre pentominós 283
Anexo 16. Análisis de texto Joana sobre pentominós 285
Anexo 17. Análisis de texto Gabriela sobre tangram 287
Anexo 18. Análisis de texto Joana sobre tangram 291
Anexo 19. Análisis de texto Joana sobre ecuaciones 295
Anexo 20. Análisis de texto Gabriela sobre ecuaciones 301
Anexo 21. Análisis de texto Gabriela sobre conjunto numéricos 307
Anexo 22. Análisis de texto Joana sobre conjuntos numéricos 317

PRESENTACIÓN

El presente trabajo es resultado de una historia profesional del autor, como profesor militante en escuelas, dando clases para el segmento 12-16 y aun como investigador y formador de maestros, desde los años 80. Mi vivencia en escuelas públicas y privadas de la ciudad de São Paulo (Brasil) posibilitó que estuviéramos adelante de proyectos pedagógicos socialmente relevantes para el contexto pedagógico y social en que ocurrieron. En paralelo tuve la oportunidad de participar del "Centro de Educação Matemática (CEM)", grupo de investigación-acción dedicado al estudio, investigación y formación de maestros, que tenía la colaboración de Z. P. Dienes y Claude Gaulin entre otros, lo que posibilitó tomar contacto y convivir con la comunidad internacional dedicada a diversos aspectos de la investigación sobre cuestiones de la educación matemática como los aspectos psicocognitivos, epistemológicos y didácticos (PME, CIEAEM, ICME, CIAEM, ENEM, etc.). Esta vivencia llévanos a una participación como miembro activo de la comunidad que construyo el movimiento de la Educación Matemática brasileña, desde sus momentos iniciales de construcción de identidad en el final de los años 80. Todo este contexto ha provocado internamente una necesidad de toma de posición y profundización para producir eficacia en las intervenciones micro, meso y macro institucionales que se hicieren necesarias en lo que respeta a la educación matemática y sus relaciones en la sociedad.

Mirando simultáneamente el vivido y producido en lo nivel profesional y por otra parte lo que la comunidad viene ya produciendo en términos de investigación y los nuevos aportes teóricos, nos sentimos animados a mirar desde de dentro de nuestra práctica y tomamos un episodio vivencial didáctico rico de elementos observables y que dice respeto a una de las cuestiones puestas en la comunidad de investigación de educación matemática aún en fase de estudios. Tratase de las cuestiones relativas a la comunicación matemática conectada con los aspectos matemáticos cognitivos y metacognitivos y aun de las condiciones y variables que posibilitan que los alumnos sean capaces de producir matemáticas. Decidimos hacer una investigación acerca de la producción de escritos de matemáticas realizados por los alumnos para conocer su potencial cognitivo, y demostrar un ambiente de aprendizaje especial. De nuestra visión consideramos que el tema es por demás oportuno en los días actuales, pero se conoce más de su importancia a través de ponencias curriculares que de los resultados de las investigaciones recientes. Los textos que vamos analizar tienen características especiales, por tener una alta dosis de intención didáctica (se dirigen al otro, muchas veces una audiencia genérica), procesos de comunicación y de argumentación. La comunicación y la argumentación están presente en todos contextos de la cotidianidad, en los debates públicos, en los debates de los estudiantes, en espacios laborales, en los libros de texto, la prensa y en los artículos de revista, incluso en el mundo académico.

Entendemos que la argumentación y la producción de actividades constructivas en la escuela. deben ser vistos como un mecanismo importante para conseguir debates provechosos. Por lo tanto, en el contexto escolar, esta habilidad requiere ser potenciada mediante aprendizajes que involucren elementos inherentes a dicho acto comunicativo. Por lo tanto, el desarrollo de las habilidades argumentativas, involucra el dominio de estrategias discursivas, que permitan a los estudiantes asumir posiciones críticas respecto a un discurso, interiorizar el conocimiento, traducirlo en elementos conceptuales y prácticos para la resolución argumentada y dialogada de situaciones problema. Por los elementos distintivos que serán vistos en este trabajo, creemos en la posibilidad de poner más cuestiones y abrir otros caminos para la investigación en los aspectos que el estudio intentará poner.

Cuando los estudiantes argumentan y contra-argumentan, entre sí, para el maestro o una audiencia genérica, debido a su intención didáctica, se convierten en coautores y corresponsables por el desarrollo del su propio proceso de construcción del conocimiento. La argumentación en un proceso de comunicación, permite activar procesos metacognitivos, por cuanto exige comprender los problemas y tener claridad sobre las relaciones entre diferentes situaciones y los conocimientos previos del estudiante, como también, razonar del punto de vista del otro y reflexionar en torno a sus propios actos.

Es importante delimitar el alcance de este trabajo, cuyo objeto de estudio e interés es, aún que no exclusivamente, del campo de la Educación Matemática que es la fuente de nuestra formación y el campo preferencial de nuestros intereses de investigación. Mientras, la Lingüística – de que utilizamos aquí sus teoría y herramientas -, y en especial la análisis del discurso, es un campo teórico importante para los estudios que escogemos, y por no ser este nuestro campo de origen tomamos partido, haciendo elecciones que nos parecieron adecuadas a los propósitos de parte de la investigación, usando una dirección entre las diversas concepciones y teorías disponibles acerca de la análisis del discurso.

Para dar consecución a un análisis actual, se tratan elementos de diversas perspectivas teóricas, asumiendo que nuestro cuadro teórico es una amalgama de propuestas y modelos teóricos en el campo de la epistemología, lo didáctico y lo cognitivo.

Es oportuno remarcar que el presente trabajo es consecuencia de una de las limitaciones apuntadas en el estudio que se realizó anteriormente (Lopes, 2000), qué estudió los registros de cuatro alumnos de una misma clase y se mostró los elementos comunes, las diferencias de apropiación, los elementos interaccionales, el estilo cognitivo y otros elementos que influyeran en la aprendizaje. En el rol de las limitaciones del trabajo, se apuntó la importancia de realizar un estudio de producciones diferentes de los mismos alumnos en momentos diferentes para analizar permanencias, distinciones, etc. Y también de reconocer de forma más amplia el valor de los distintos textos para mostrar procesos de legitimación, autonomía, etc. Para con ello, analizar la propia evolución de los escritos, adaptación a contextos distintos, análisis de posibles subgéneros, etc.

Otro punto que intentamos hacer con las herramientas teóricas hoy disponibles es conocer y comprender los elementos que caracterizan un ambiente especial de producción de conocimientos matemáticos por un grupo que constituye una comunidad (de practica y de investigación) con dinámicas propias que llevan los alumnos a resolver problemas, investigar y hacer matemáticas no convencionales, a este ambiente que será llamado de ambiente de inspiración lakatosiana vamos dedicar parte de nuestro análisis.

CAPITULO 1

INTRODUCCION

En este capítulo de introducción presentamos los antecedentes del estudio a que nos proponemos, (1.1.) que motivó esta tesis. En los antecedentes y caracterización de objeto de estudio, situamos la trayectoria del autor como maestro e investigador en Brasil, que desarrolló prácticas de clase y instrumentos de evaluación que aquí son analizadas. El punto clave es la discusión de la importancia de la comunicación matemática y la escrita en especial, sobre los textos e interacciones.

En seguimiento presentamos y caracterizamos el problema de investigación (1.2), cuyo objetivo es analizar trayectorias de aprendizaje de un grupo para caracterizar lo que es una Comunidad de Practica Escolar de Inspiración Lakatosiana. Y en particular de una muestra de dos estudiantes en una dirección vertical -, esto es al largo de un período grande de tiempo, una vez que ya existe un estudio hecho en una dirección horizontal, en que se analizó la producción de cuatro estudiantes en un mismo período corto – y de fragmentos puntuales que ejemplifican la producción CPEIL, para mostrar el éxito y la forma de desarrollo obtenida. En (1.3.) presentamos los primeros elementos de los bastidores del estudio con foco en los textos y su valor en el aula de matemática. Las interacciones en el aula y la construcción compartida de conocimiento son insertadas en (1.4.), lo que va a justificar las preguntas que hacemos (.5.) y las hipótesis de estudio que sostenemos. En (1.6.) presentamos la estructura de la memoria del trabajo.

1. 1. Precedentes. Interés del estudio. Intencionalidad

Las reformas educativas de muchos países (Estados Unidos, España, Portugal, Australia, Singapur entre otros) no siempre han conseguido cambiar las prácticas de clase y pocas veces han significado un cambio de la cultura didáctica de un parte mayoritario del profesorado. Es lo que ocurre en el Brasil, qué tiene unos Parámetros Curriculares Nacionales (a partir de ahora, PCN) que ponen especial énfasis en la enseñanza de los procesos de resolución de problemas, en las estrategias de razonamiento y en las situaciones interacción y comunicación en la aula. Pero los propósitos de mayoría de los docentes sigue siendo el fomento de exposición en la pizarra, con discurso unilateral dirigido a los alumnos y con poca participación y legitimación de las ideas del alumnado qué poco tienen de oportunidad para expresar sus ideas, dudas, descubiertas o argumentaciones.

Con el propósito de tener el máximo de información posible de la aplicación del conjunto de tareas matemáticas realizadas en el aula, diversos autores han hablado de formas de negociación que permiten regular (De Landshere 1996) el proceso, al mismo tiempo que obtener las informaciones de los alumnos y aún poder evaluarlos formativamente. Citan técnicas o modalidades diferentes de tipo escrito para obtener este resultado: cuadernos, diarios, resúmenes, registros de autocontrol, murales, paneles, libros (sobre la clase, del grupo, etc.), portfolios, etc. Todos ellos son considerados como *contextos de producción* en donde se dan consignas determinadas, desdoblamientos, etc. Todos ellos están contaminados por los eventos que ocurren en la clase. Lo qué vamos a estudiar aquí son registros de producción qué se pueden leer e inferir a partir, de cualquier texto de cualquier muestra, elementos significativos del debate oral y público que carga y conquista las atenciones de los alumnos, y, en general, siempre se podrá descubrir algo nuevo, tener la sensación del placer y la seguridad que los alumnos manifiestan en sus escritos.

1.2. Existencia de una problemática de investigación.

Ha habido diversas tentativas para describir los eventos que ocurren en clase, como se relacionan con el aprendizaje de conceptos y procedimientos; y como se refleja la construcción de significados matemáticos a partir de producciones del alumnado. En algunos se ha analizado la producción como acción comunicativa en el momento de la acción (Barnes y Todd 1995) o por medio de videograbación observando discurso oral y gestual de los alumnos en situación de resolución de problemas, individual, por pareja, en grupo pequeños, etc., para reconocer procesos interactivos (Bartolina Bussi 1991, Cobo 1998). En otros, con foco en la evaluación de elementos afectivos o metacognitivos, las consignas han sido deliberadamente dirigidas a fines específicos (Powell 1989), o para observar escritos de procesos investigativos (Borasi 1989, Morgan 1998), o aún focalizadas en un elemento de contenido que se convertía en objeto de análisis (Boero 1997).

Nuestro trabajo, a diferencia de los citados, mira los **textos** producidos por los alumnos como parte de su quehacer matemático. Analizamos como permiten reconocer diversas formas del discurso en clase. Consideramos los textos como actividades discursivas (Leontiev 1969) en contextos de determinación restringida (Valsiner 1997), aceptando negociaciones (Cobb 1996) que activan la construcción social del conocimiento como proceso compartido que envuelve a participantes heterogéneos en la acción (Lemke 1998). Así, nuestro trabajo se enmarca en el estudio del discurso a partir de la clase de matemáticas, sin olvidar de mirar el contenido específico (Coll & Solé 1987). Consideramos que nuestro estudio es importante y relevante porque: (a) permitirá analizar escritos no dirigidos, con valor de regulación colectiva, para reconocer (metafóricamente como el arqueólogo) lo que los textos pueden decirnos del contexto y (b) pensamos que será una herramienta útil para la formación del profesorado. Queremos caracterizar el aula como comunidad que construye significados, hace valoraciones legitimadas y construye identidades individuales y colectivas mediante sus interacciones visibilizadas en los textos que esta comunidad produce.

Otro corte de nuestro estudio se relaciona con el hacer matemático por los estudiantes. Un hacer matemático que lo podría ser uno de los objetivos focales de la enseñanza, sin embargo no hay muchas evidencias de esta práctica en la mayoría de las aulas de la escuela básica de 12-16, e incluso en los cursos de matemáticas superiores, en que son comunes informes y anécdotas sobre como estudiantes universitarios resuelven problemas de cálculo mecánicamente basados en guiones prescritos sin pensar matemáticamente, incidiendo en errores.

También se puede hablar del gran número de aulas donde la agrupación de los participantes entre cuatro paredes, de ninguna manera puede ser descrita como una comunidad matemática (incluso en los cursos universitarios de matemáticas). Por ejemplo, las aulas, donde hay poco respeto por las percepciones o ideas individuales; donde la matemática es la rutina, con poco espacio para la investigación y la creatividad; donde los estudiantes están obligados a trabajar en silencio o con poca comunicación matemática. En términos de una filosofía constructivista, en esas aulas, se da poca atención a la construcción personal del conocimiento por los estudiantes, y la importancia de compartir ideas con los demás con el fin de construir conceptos matemáticos consistentes y coherentes. Muchos se hacen suposiciones sobre el conocimiento matemático y significados comunes sin dar oportunidad de probar su validez. Los estudios dirigidos a identificar las variables que intervienen en el éxito o fracaso de la enseñanza de las matemáticas apuntan a una percepción general de que la matemática es difícil y accesible para pocos, aunque esto no es necesariamente cierto. Sin embargo, muchos profesores creen que la enseñanza de las matemáticas queda más difícil, sobre todo si se basa en una perspectiva constructivista. Pues es difícil gestionar la clase y planear, considerando que hay que oír los estudiantes, leer su mente y saber lo que está haciendo y sintiendo de lo que se le ofreció, consideran "difícil", porqué hay que dedicar tiempo y estar atento para comprehender lo que pasa y en algunos casos incorporar sus concepciones para re planificar e intervenir. El hecho es que los maestros no tienen muchas herramientas en su formación para saber oír, leer e interpretar lo que hacen los alumnos. Por lo tanto, encontrar oportunidades para acceder a su pensamiento, y considerar que tenemos que vigilar con mucho cuidado, nuestros juicios acerca de los estudiantes. ¿Qué evidencia existe sobre la que basar un juicio hecho? ¿Cómo podemos evaluar la eficacia de nuestras interacciones con los estudiantes? ¿ Cómo ser mejores maestros?

Para que tal empresa sea posible creemos que es importante discutir algunos referenciales teóricos que, o son o bien cerca del ambiente de inspiración lakatosiana que intento describir en este estudio, o contribuyeran para que fuese gestado, por influencia a lo largo del tiempo sobre el autor de este estudio, testigo y protagonista de los episodios analizados.

1.3. Justificación

"*Me permito a saborear el fruto del árbol que he plantado*"

Al inicio de mis estudios, me puse un elemento situacional en discusión, acerca de la legitimidad científica de hacer este estudio y su clasificación en el marco de las investigaciones en educación matemática. Lo que ha provocado la cuestión es el hecho de que lo investigador que firma este trabajo actuó como participante de los eventos donde se producirán los objetos de análisis. En principio se podría entender tratarse de un caso especial de investigación-acción. Esto término fue utilizado por primera vez por el psicólogo alemán Kurt Lewin en los años 40 (siglo XX) para referirse a los estudios de la vida social y a las intervenciones con la intención de transfórmalas. Desde entonces muchos investigadores se apropiaran del término, transformándolo en algunos aspectos. Thiollent (1992), por ejemplo, considera la investigación-acción un tipo de investigación participante y sugiere que la diferencia entre una y otra, en el contexto de la América Latina, es que ni siempre en la investigación participante existe una "voluntad planeadora", una "voluntad de acción conjunta programada". En el Brasil en los años 70-80, la investigación-acción o investigación participante marcó gran parte de los estudios sociales, en especial los de educación popular (Freire 1978), que alimentaban los movimientos que luchaban por la democracia contra el estado de excepción que marcó los 23 años de dictadura militar en instituiciones educativas, sindicales y otras.

Pero, para nosotros hay unas variables distintas que tiene que ser consideradas y que pueden contribuir para la caracterización de este estudio, marcando alguna diferencia de la investigación-acción de los estudios de las ciencias sociales que se practica en Brasil. La principal que quiero destacar es la variable de distancia temporal del fenómeno analizado, que es diferencial que debe ser considerado. En los estudios de investigación-acción, la distancia temporal entre las acciones de intervención y la investigación son cercanas. Lo mismo no pasa en este estudio, aunque, que uno de los participantes de las acciones objeto de estudio (como observador, recolector de datos, gestor y ejecutor de las acciones didácticas que llevaran a la producción de los textos analizados) es el mismo que la mira como investigador desde una nueva posición. A esto hay que añadir que más allá dela variable tiempo hay también variables objetivo y grado de intervención en los hechos. Queda la variable grado de intervención en la análisis, pero esto ha de ser controlado por el uso adecuado de los cuadros teóricos disponibles y además de los utilizados en esto trabajo. Lo mismo pasa con otros investigadores como sociólogos o historiadores que se dedican a mirar hechos pasados de los que muchas veces pueden tener participado como observadores o militantes. Creemos que la posición de investigador privilegiado, por detener más informaciones y memoria acerca de los eventos, de nuestra mirada, no contaminará el estudio. El (micro) análisis afinada posibilitará una relectura y posible a partir de una posición de madurez con vista a formular conclusiones (por confirmación o refutación), nuevas conjeturas, cuadros teóricos, etc.

Por eso, y más, creemos en la pertinencia de esta investigación y su objeto. Hay que no olvidar que vivimos en una comunidad de educación matemática, en pleno y fuerte desarrollo, donde se ha producido el eslogan profesor-investigador, que orienta muchos programas de formación y el hecho de que muchos profesores de hoy serán investigadores en el futuro próximo. No se escapa de tener situaciones similares en el presente y el futuro. Hay que asumir estas investigaciones, refinarlas y tornarlas cada vez más fiables.

La documentación principal que vamos utilizar para hacer nuestras análisis son texto, producidos por los estudiantes y relatos en forma de artículos (publicados en revistas especializadas) sobre eventos didácticos. En estos textos un de los focos de las análisis son las argumentaciones producidas por los estudiantes, las interacciones y como se articulan.

Hablar de argumentación y negociación es pertinente, e interdisciplinar. En efecto, la argumentación es un tema que ha sido abordado por áreas del conocimiento como la filosofía, la retórica y la lingüística. Perelman y Olbrechts-Tyteca (2001) consideran que la argumentación consiste en lograr la adhesión y el convencimiento de un auditorio, es decir, que la audiencia sea convencida de la tesis que se defiende. Y por otra parte este tipo de investigación es actual y original en Educación Matemática porque implica usar herramientas que ahora se usan para interpretar discursos multimodales, y aplicar algunas de ellas a hacer "arqueología" de situaciones de aula.

En lo uso de textos narrativos para analizar es clave de avaluar y regular el desarrollo profesional del profesor, pensamos que puede trasladarse al estudiante. Los procesos guiados o autorregulados de documentación narrativa de experiencias, prácticas y saberes escolares, que tienen como productos privilegiados a los relatos pedagógicos escritos con las palabras y sentidos de los docentes, constituyen una redefinición radical de los modos de conocer e investigar. Al tiempo que proponen una alternativa para la formación inicial, continua y el desarrollo profesional entre docentes a través de la autoevaluación de la práctica educativo e incluso de sus conocimientos (F.M.Connelly & D.J.Clandinin, 1995; Climent y Carrillo, 2008). A través de los textos narrativos de los estudiantes, los procesos de documentación narrativa llevados a cabo de forma colaborativa, se presentan como vías válidas para la reformulación, la ampliación y la transformación de la una cierta "visión pedagógica" del propio alumnado. Lo cual permite incursionar en lo inédito, en lo silenciado, en lo aún no descrito ni dicho (Suárez, 2005).

1.4. Interacción en el aula y construcción compartida de conocimiento.

El interés por profundizar teóricamente los fenómenos didácticos en un ambiente específico que fue nombrado *Ambiente de Inspiración Lakatosiana* (AIL), se debe a la existencia de una producción matemática, registrada en textos, de estudiantes de 11 a 15 años, que pretendemos mostrar que tiene originalidad y es de alta calidad. Los textos fueran hecho por los alumnos en clase en un proceso de producción individual y/o colectiva, en una dinámica que se caracteriza por una intensa interacción y trabajo colaborativo. Este tipo de producción, se diferencia de otras producciones de alumnos, por la autenticidad e invención, en que los alumnos crean matemáticas "nuevas", es decir, no oficiales, y sin preocupaciones si lo que enuncian, problematizan, crean y desarrollan necesita ser validado o no por una "autoridad", en el caso el profesor, lo que instaura un clima investigativo específico, en el que los alumnos institucionalizan el conocimiento de forma propia diferente al estilo matemático clásico y tradicional.

Nuestro propósito es caracterizar tantos elementos del ambiente cuantos posibles, para que puedan ser documentados y analizados, con la finalidad de ofrecer a los profesores o investigadores, elementos didáctico-epistémicos que permita algún grado de replicabilidad, se no de los resultados específicos, al menos del estilo especifico con una visión epistemológica que puede generar nuevas producciones en otros espacios educativos y con otros sujetos.

1.5. Problema de investigación,

Este estudio se propone la caracterización de un contexto de producción social de conocimiento matemático que aquí será llamado de **AIL** (Ambiente de Inspiración Lakatosiana) así como tratar de caracterizar los elementos que lo constituye, sea en relación a los participantes que denominamos **CPEIL** (Comunidad de Practica Escolar de Inspiración Lakatosiana), en relación a diversos tipos de actividades didácticas. Con ello, queremos *reafirmar la importancia de la producción escrita del alumnado, así como el valor comunicativo y metacognitivo asociado.* Asumimos en este estudio que se puede extraer elementos consistentes acerca de los conocimientos de los estudiantes, así como de las interacciones ocurridas en la clase cuando este conocimiento es objeto de reflexión colectiva, través de textos producidos por los propios alumnos en un evento didáctico específico. A partir de esos textos, nos planteamos los siguientes objetivos para este estudio:

Objetivos:

OB1: *Identificar a partir de textos escritos, elementos constitutivos de una cultura matemática distintiva de un grupo de alumnos sobre el "que-hacer" matemático en clase en donde se construye matemáticas socialmente, en un periodo largo de tiempo en la vivencia escolar.*

OB2: *Desvelar algunas variables o elementos que otorgan legitimidad al "que-hacer" matemático de los alumnos en vías a negociar significados matemáticos*.

Y como consecuencia, reconocer *el papel de las tareas y las interacciones que se dan en dicha cultura en cuanto a su potencial cognitivo, analizando en un ambiente el conocimiento que construyen los alumnos. Y reafirmar la importancia de diversos tipos de textos matemáticos producidos por el alumnado reconociendo el valor comunicativo y metacognitivo asociado a actividades investigativas de redacción-evaluación, de construcción de definiciones, de resolución de problemas y actividad de síntesis.*

Las preguntas

Para empezar esta etapa del trabajo de investigación intentaremos responder un conjunto de preguntas sin tener la pretensión de agotar todas las perspectivas.

Asociado al objetivo OB1:

P11: ▪ ¿Qué se puede saber de una práctica matemática específica llamada AIL a partir de producciones textuales de los alumnos? ¿Qué tipos de actividades matemáticas se identifican en los textos?

P12: ▪ ¿En qué sentido los textos evocan unas intenciones y una implementación desarrollada que pone de manifiesto una forma de comunidad de práctica matemática? Es decir, explicar cómo, en este ambiente, los alumnos se apropian de ideas matemáticas y de hábitos de pensamiento matemático.

P13: ▪ ¿Podemos decir que se construyó una comunidad de investigación? ¿Qué características tiene? ¿Qué nivel de razonamiento hay en esa comunidad de investigación? ¿Se estableció una cultura de dialogo entre diversas culturas que permiten un escenario de interacción social en donde se asume una legitimación consensuada?

P14: ▪ ¿Cuáles son los invariantes de contenido y procesos regulados en ese tipo de experiencia? ¿Qué tipo de objetos y procesos de construcción del conocimiento matemático se observa de parte del alumnado? ¿Qué nivel de significado y convencimiento?

P15: ▪ ¿Qué procesos interpersonales se manifiestan y que competencias matemáticas se ven desarrolladas? ¿Qué relaciones comunicativas es posible percibir en ese ambiente? ¿Qué características de una cultura de clase, se pueden inferir?

Asociado al objetivo OB2:

P21: ▪ ¿Qué tipo de normas se reconocen en dicho escenario? Cómo se distribuyen los papeles, las responsabilidades y como se hace legitimo el conocimiento? ¿Qué características reguladoras de la construcción de significado se desprenden? ¿Cuál es el tipo de negociación de significados que se trasluce en el AIL?

En base a lo que se quiere razonar, pretendemos dar respuestas a las preguntas más profundas de la educación matemática ¿Qué sentido dar a la legitimidad del alumnado para definir un currículo intencional del docente? ¿En qué sentido se puede seguir hablando de devolución?

Las hipótesis del estudio.

Estas, entre otras son algunas de las cuestiones visibles que nos ponemos al hacer este estudio. En el curso de lo trabajo hemos elaborado algunas hipótesis que intentamos rediscutirlas al final del trabajo, que son las siguientes:

Hipótesis 1: Los textos de redacción-evaluación y los registros de los procesos y ocurrencias de clase, pueden considerarse un subgénero didáctico (distinto de otros ya tradicionales) de donde podemos encontrar las características:

(a) Los textos pueden dar informaciones del contexto de producción y gestión indicando diversos elementos que lo pueden caracterizar (interpersonales, matemáticos, cognitivos y metacognitivos);

(b) Los textos pueden evocar relaciones experienciales manifiestas por "niveles" de generalización del discurso;

(c) Las textos y su estructura permiten reconocer elementos constructivos del conocimiento matemático; (d) permiten capturar las representaciones de los alumnos acerca del conocimiento matemático y como se procesa su aprendizaje.

Hipótesis 2: Podemos encontrar textos del alumnado que rompen con las restricciones de contextos tradicionales de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de tipo no autoritario dialógico.

1.6. Estructura de la memoria

Presentamos a continuación la estructura de nuestro estudio.

En el **primer capítulo**, estamos presentando los precedentes de nuestro trabajo que justifican su interés, originalidad y pertinencia. Añadimos las preguntas clave de nuestra tesis, las hipótesis asociadas, y estructura del trabajo.

En el **segundo capítulo**, mostramos el cuadro teórico utilizado para definir los constructos que consideramos necesarios para explicar nuestra investigación. Empezamos por caracterizar el aula de matemáticas, discutimos aun los aportes teóricos acerca de distintos tipos de comunidad con acento en las comunidades de prácticas, de aprendizaje y de investigación, para poder caracterizar la comunidad de práctica escolar de inspiración lakatosiana, que es el objeto de este estudio. Tratamos aún de los estudios acerca de normas y contratos. Por fin discutimos el papel de la escrita para reconocer la construcción de significados matemáticos y los tipos de escritos, entre los que se llaman de redacción evaluación, que se analizarán en particular.

En el **tercer capítulo** se muestra la base metodológica que posibilitan contestar las preguntas de investigación y sostener las hipótesis del estudio. Empezamos con las herramientas del análisis del discurso en contextos científicos. En lo que se refiere a los elementos matemáticos observados, presentamos algunos aspectos a respecto de competencias y habilidades matemáticas que servirán para mirar como (y qué) los alumnos articulan sus conocimientos matemáticos con acento especial a algunos elementos metacognitivos. Utilizamos especialmente los referenciales e principios del enfoco ontosemiótico, para identificar los significados matemáticos manifiestos en los textos de los alumnos y modelos de análisis de interacciones para analizar episodios de producción de conocimiento matemático y las marcas de interacción que se puede observar en los textos de redacción-evaluación de dos individuos en un intervalo de tiempo largo. Al final se presentan ejemplos de análisis.

En capítulo 4 se presentan los resultados de la primera fase de estudio empírico que nos va a permitir dar características generales observadas de la Comunidad de Práctica Escolar de Inspiración Lakatosiana. Se inicia con un análisis epistémico de tres prácticas diferentes. A seguir discutimos los aspectos referentes al emocional y los afectos que aglutinan intereses y cómo cambian patrones en el ambiente que es el objeto del estudio y hacemos un ensayo de análisis sobre las interacciones En un capítulo 5 se analizan las actividades realizadas en la clase, y los textos denominados redacción-evaluación producidos por dos estudiantes en un periodo de 4 años.. En final hacemos una mirada global de las tareas de forma comparativa según las dos estudiantes analizadas Para finalizar el capítulo se sintetizan los resultados más importantes que ayudan a responder a los objetivos de identificar el potencial cognitivo matemático ligado al ambiente y lo que se liga a las tareas].

Por final en el capítulo 6 de **conclusiones y consideraciones finales** defendimos la oportunidad del tema enfocado, las contribuciones que estudios de este tipo pueden ofrecer a la educación matemática contemporánea, apuntamos las limitaciones de lo que se ha hecho, y aún las perspectivas para el futuro de las cuestiones subrayadas en esto estudio.

En los **anexos** presentamos los textos escritos por los alumnos; y muestras de las hojas de análisis que nos han servido para sacar resultados y conclusiones. Y por fin las **referencias bibliográficas** utilizadas en este trabajo.

CAPITULO 2
MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se reconocen los marcos de referencia que sirven para definir los constructos que consideramos necesarios para explicar nuestra investigación.
Así, comenzamos por caracterizar el aula de matemáticas como un espacio que tiene una cultura propia (2.1.) con significados compartidos (2.1.1.) y un estilo argumentativo-discursivo específico (2.1.2.), que se integra en la noción de práctica operativa y discursiva matemática según el enfoque ontosemiótico (2.1.3.) y se explica el papel de las interacciones y la participación (2.1.4) en este espacio.

Se muestran características de una comunidad de práctica (2.2.). Se explican sus dimensiones (2.2.1.); Se razona lo que denominamos identidad en una comunidad de práctica (2.2.2.), y desarrollo (2.2.3.).

Se habla de comunidad de aprendizaje e investigación (2.3.), así como de indagación (2.3.1.). Se considera la noción de comunidad de práctica colaborativa (2.4). Y en ella, el papel de lo dialógico (2.4.1.) la legitimación (2.4.2.) y contrato (2.4.3.). Se razona sobre el papel de lo normativo en ese contrato (2.4.4.).

Por último, se analiza el papel del escrito para reconocer la construcción de significados matemáticos (2.5.) y los tipos de escritos, entre los que se llaman de redacción evaluación, que se analizarán en particular.

2.1. El aula de matemáticas. Un espacio con cultura específica.

Diversos autores han hablado de la clase de matemáticas como un lugar en donde se generan ambientes de aprendizaje que se ocultan tras prácticas sociales que requieran para su comprensión algunos contenidos matemáticos. Posibilitando a los estudiantes tomar conciencia del uso que hacen de las matemáticas para modelar fenómenos sociales y culturales con sus correspondientes consecuencias éticas y sociales. Los ambientes de aprendizaje en estos escenarios encarnan aspectos democráticos propios de la microsociedad del salón de clase de matemáticas (Camelo, García, Mancera y Romero, 2008). Pensamos que para responder a nuestras primeras preguntas de investigación, debemos caracterizar cómo se ha interpretado la idea de la clase como un espacio con una cultura específica. Posteriormente diremos que se puede constituir en comunidad de aprendizaje matemático. Y luego discutiremos que esa comunidad puede también construir una identidad como comunidad de investigación colaborativa. Para ello, definiremos, explicaremos y argumentaremos en qué sentido estamos interpretando estos términos, para que luego, podamos ver en ciertas experiencias textuales, rasgos que nos permitan conjeturar que se dan dichas características.

Entre estos ambientes pensamos que se encontrarán los textos, La cultura consiste en un conjunto de las comprensiones compartidas que sirven de medio a través de cual la mente humana interacciona (Stenhouse, 1967, p. 16). Tomando como referencia la concepción de cultura dada por Nieto (2002), cada escuela tiene una cultura, más o menos arrugada y compartida por los diversos agentes educativos. El aula de matemáticas es una micro cultura que genera algunos de los elementos propios de toda cultura, entre ellos las normas de actuación. Los detalles del sistema local de normas sociales y normas específicas de la práctica matemática que rigen el comportamiento de profesor y alumnos condicionan la adopción de unos significados u otros en los distintos momentos de la práctica matemática (Wood, 1999).

2.1.1. La clase en una cultura discursiva de significados compartidos.

> *Cuando los significados no son compartidos, podemos hablar de una diversidad de interpretaciones de una misma norma que puede originar falta de comprensión y acabar derivando en un conflicto cultural de consecuencias importantes para el sujeto que aprende.*

En una conferencia en el auditorio de la PUC/SP (Noviembre de 1996), Edgar Morin se dedicó a trazar una interesante distinción entre "dialógico" y "dialéctico". Para el autor, las dialécticas Hegeliana y Marxista suponen la síntesis de los antagonismos, mientras que el concepto de "dialógico", más próximo al entendimiento de M. Bahktin, no supone consenso en ninguna instancia, ni necesita de una síntesis; en este proceso, las diferencias colocadas en diálogo siempre son enriquecidas por la contaminación recíproca. Para la etnomatemática (ETM), la cultura es una memoria no-genética, es aquel conjunto de informaciones que los grupos sociales acumulan y transmiten por medio de diferentes manifestaciones do proceso de la vida, como la religión, a arte, el derecho (leyes), formando un tejido, un "*continuum* semiótico" sobre el cual se estructura el mecanismo de las relaciones cotidianas. Una cultura es, en la visión ETM, inteligencia colectiva un sistema de "prohibiciones y prescripciones" que moldea la dinámica de la vida social, más lleva en consideración no son los aspectos del *socius* sino todos los fenómenos que inciden sobre la consciencia colectiva. Son programas de comportamiento que permiten convertir acontecimientos en conocimiento.

Las informaciones de la naturaleza y de los fenómenos históricos y ambientales van infiriendo consciencia en el grupo social y se transforman de no-cultura (información no procesada) en cultura (sistemas con organización) pasan a hacer parte de la memoria colectiva: tal signo gana un solo significado para un dado grupo.

La cultura se compone de textos, unidades semióticas formadas por combinaciones de signos y que tienen bien definidas las fronteras, la estructura y expresiones peculiares que caracterizan y distinguen de otros textos. El texto es considerado por ellos como el primer elemento de cultura, algo así como" un mensaje generado por los sistemas de códigos culturales "(Nöth 1995:331). La relación del texto con la realidad, con los fenómenos y la totalidad de la cultura "se manifiesta en el hecho de que, en diversos grados, un mensaje puede aparecer como un texto, como parte de un texto o la totalidad del texto". (Lotmann et al, tesis 3.0.0.in multa). Esto significa que los recortes operados en la cultura con el objeto de estudio, ambos son susceptibles de ser considerados como un solo texto o textos como una reunión de los niños que, aun a título individual, pueden ser tomadas como "texto completo".

La estrecha asociación entre estos textos y el concepto de cultura de trabajo de los eslavos es esencial para que podamos comprender sus otras aplicaciones, especialmente dentro de la organización. Y esa relación se vuelve más importante cuando una asociada de otro concepto de la intervención - la propia cultura, los préstamos a la vez un estado muy cerca o incluso se superponen. La cultura, que nace de un texto, puede entenderse como una unidad de sentido, aunque la propia prensa una serie de ambigüedades, contradicciones y paradojas.

La forma en que cada cultura produce y tiende a proliferar es el objeto que hace de la excelencia, la investigación en el ámbito de la comunicación organizacional: La cultura es la totalidad de los sistemas de significado a través del cual el ser humano o un determinado grupo humano mantiene su cohesión (sus valores y su identidad y su interacción con el mundo). Estos sistemas de significado, normalmente se conoce como sistemas modelizantes secundarios (o el idioma de la cultura), incluyen no sólo todas las artes (literatura, cine, pintura, música, etc.), Las diversas actividades sociales y patrones de comportamiento, sino también los métodos establecidos por la comunidad que conserva su memoria y su sentido de identidad (mitos, historia, sistema de leyes, creencias religiosas, etc.). Cada trabajo particular de la actividad cultural es visto como un texto generado por uno o más sistemas (A. Scheffcyzyk 1986:166). El texto es, pues, estrechamente vinculada al concepto de cultura. El sistema genera texto, cualquiera que sea su naturaleza (el sistema de empresa, políticos, filosóficos, sociales, antropológicas) no trabaja sola, él se comunica con un número de otros sistemas que directa o indirectamente vinculadas a los indicios de que sus textos articular. De este modo, podemos aceptar la hipótesis de que la organización de comunicación de los resultados de una determinada cultura en una organización que reúne a los diferentes sistemas de significado (actividades sociales, las pautas de comportamiento, métodos de preservación de la memoria) en un conjunto armonioso y individualizante. El texto completo generado por una determinada cultura y que va a través de a través de sus discursos es más evidente la cara de la cultura: su efecto comunicativo. Todavía es A. Scheffcyzyk que presume de ser el carácter comunicativo en el centro de la cultura, al igual que la semiótica eslava.

2.1.2. Comunidad de práctica discursiva y argumentativa.

Siguiendo a Bourdieu, nos referimos a la esfera de la práctica (argumentativa o no) al designar esos dominios que son mutuamente excluyentes en el sujeto de la historia en cambia acciones y toma decisiones de forma coherente. Las esferas de la práctica son el dominio de validez de una práctica bien identificada. Desde un punto de vista del análisis del papel que juega el lenguaje en el aprendizaje matemático, reconocemos el carácter discursivo del lenguaje humano y, en él, su dimensión comunicativa y su dimensión cognitiva (Calderón, 2005)[1] y, en segundo lugar, el reconocimiento de que el aula como espacio privilegiado para la elaboración de conocimiento escolar es, en esencia, una esfera de la comunicación sociocultural (Bakhtín, 1982). Lo anterior exige considerar, tanto las formas de producción y de comunicación del conocimiento matemático y los procesos lingüístico-discursivos relacionados con tales formas, como los aspectos relacionados con el desarrollo de la interacción en el aula (socioculturales).
Convenimos con los teóricos de la argumentación, en que la argumentación se convierte en una forma de organización de los procesos cognitivos de los estudiantes. La caracterización del razonamiento, está dada por procesos que realiza el sujeto en los que, a partir de informaciones previas se intenta pasar a nuevas formas de información. (Rabello y Bolite, 2012) En esa perspectiva, "el uso de la argumentación implica que se ha renunciado a recurrir únicamente a la fuerza, que se atribuye un valor a la adhesión del interlocutor, conseguida con la ayuda de una persuasión razonada" (Perelman & Olbrechts, 1989: 106). Orador y auditorio son roles asignados en una argumentación. El auditorio se define como el conjunto de aquellos en quienes el orador quiere influir con su argumentación. El desarrollo de la argumentación construye una relación entre orador y auditorio que Perelman & Olbrechts denominan "el contacto intelectual".

[1] CALDERÓN, Dora Inés. (2005). Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas. Tesis Doctoral. Cali: Universidad del Valle

Orador y educador pretenden que la intensidad de la adhesión no se limite a la producción de resultados puramente intencionales, sino a desencadenar una acción.

2.1.3. La noción de práctica matemática

De los sistemas de prácticas realizadas para resolver los problemas emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado. Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos. Para hacer operativos estos principios sumimos el enfoque ontosemiótico que propone como herramientas analíticas el par de nociones, "sistema de prácticas operativas y discursivas" y "configuración ontosemiótica", ambas en la doble versión personal e institucional. Estas nociones se propusieron con la finalidad de precisar y hacer operativas las nociones de "relación personal e institucional al objeto" introducidas por Chevallard (1992).

La noción de "sistema de prácticas" en esta perspectiva, es útil para ciertos análisis de tipo macro didáctico, particularmente cuando se trata de comparar la forma particular que adoptan los conocimientos matemáticos en distintos marcos institucionales, contextos de uso o juegos de lenguaje. Y será usada en nuestro estudio para caracterizar nuestras prácticas en el capítulo 4 de este estudio. Para un análisis más fino de la actividad matemática es necesario introducir los seis tipos de entidades primarias: situaciones, acciones, lenguaje, conceptos, propiedades y argumentos. En cada caso, estos objetos estarán relacionados entre sí formando "configuraciones", definidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.

Consideramos los elementos matemáticos a través de las proposiciones y argumentaciones y, sobre todo, no se explicita el papel clave de las situaciones – problemas, como origen y razón de ser de tales entidades, cuya construcción está, además, mediada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles.

La faceta interaccional normativa tiene importancia en todo proceso de estudio matemático. Hay la necesidad de elegir una única solución del problema para todo el grupo, obliga a los alumnos a permanecer muy atentos. Existe una necesidad de comprender los procedimientos, para poder participar en la elección del más adecuado. Aunque la disposición de los niños en la puesta en común es muy parecida a la de una reunión tipo asamblea, los dos tipos de interacciones parecen gobernadas por reglas distintas. Surge una nueva regla implícita que parece decir: "En la conversación, se debe poner mucha atención a las intervenciones de los demás y preguntar si se tienen dudas."

El faceta interaccional fija las normas de interacción y, en muchos casos, de la interacción desarrollada según dichas normas emergen nuevas normas matemáticas y socio matemáticas. Por ejemplo, en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005) se muestra cómo las normas que regulan el uso de elementos genéricos en el aula de matemáticas. Emergen de la interacción entre profesor y alumnos.

En nuestro trabajo, nos preocupamos por tal que las interacciones sean de calidad, de manera que se puedan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción mediante la negociación de significados

2.2. Regulación y negociación matemática.

Al hablar de una comunidad de práctica, se suele pensar en las siguientes características básicas: (a) un envolvimiento **mútuo negociado** (*mutual engagement*); (b) una empresa común *(joint enterprise)*; (c) un **repertorio compartido** (*shared repertoire*).

Las tres dimensiones se interelacionan y al pensar cada una el es necesario tener presente la interacción con las otras. El esquema presentado por Wenger (1998) ayuda a pensar en la referida interacción y resume diversos aspectos que se identifica como pertinentes para a discusión de cada una de esas dimensiones.

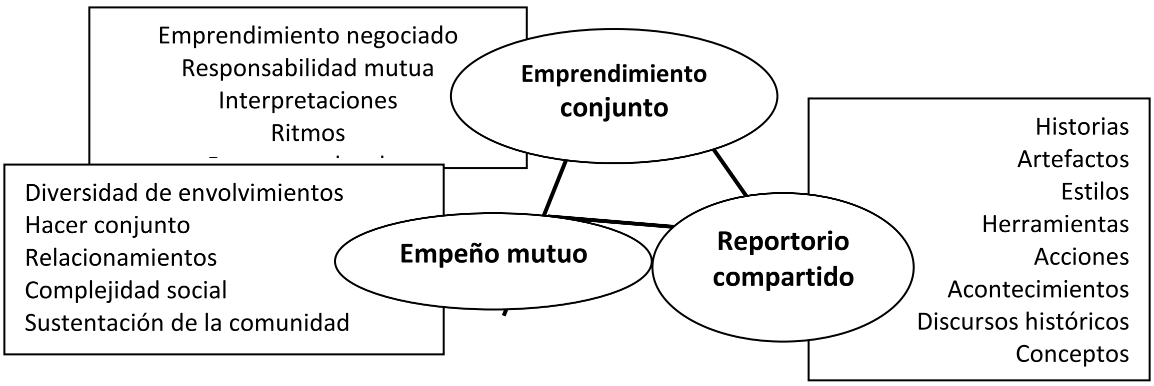


Figura 2.1. Dimensiones de la práctica de una comunidad (Tomado de Wenger, 1998, pg. 73)

En el caso de resolver problemas matemáticos emergen dos categorías primarias de entidades: institucionales (sociales, relativamente objetivas) y personales (individuales o mentales); de esta manera se asume que la matemática es, además de una actividad, un complejo de objetos culturales (institucionales), axiomática y deductivamente organizado.
Se atribuye un papel esencial al lenguaje (en sus diversas modalidades), que tiene una función no sólo representacional sino también instrumental o constitutiva de los objetos matemáticos.

2.2.1. Identidad en una comunidad de práctica.

Una identidad es una superposición de capas de eventos de participación y de cosificación por las que nuestra experiencia y su interpretación social se conforman mutuamente. La identidad del individuo en una práctica matemática se define socialmente, pero no solo porque es cosificada en un discurso social del yo y de categorías sociales, sino también porque se produce como una experiencia viva de participación en unas comunidades concretas. Identificamos la noción de identidad dialógica de Hermans (2001) – *dialogical self* – en la que cada persona no tiene sólo una identidad, sino múltiples identidades que coexisten, interactúan y dialogan entre sí. Según este autor el yo dialógico se basa en el supuesto de que existen muchas posiciones para el yo que pueden ser ocupadas por una misma persona. Y además de ello, el yo de una determinada posición puede estar de acuerdo, o en desacuerdo, comprender, o no comprender, oponerse, contradecir, cuestionar, desafiar e, incluso hasta ridiculizar el yo de otra posición" (Hermans, 2001: 249).

La coexistencia de esta diversidad de identidades puede dar origen a conflictos, en particular los que resultan de las incompatibilidades entre algunos hábitos propios de la cultura adolescente. Se considera que "el yo y la cultura son concebidos en términos de una multiplicidad de posiciones entre las que se pueden desarrollar relaciones dialógicas" (Hermans, 2001: 243) observándose, por eso mismo, una relación de interdependencia entre los dos.

Valsiner (1997) ya hacia una distinción entre culturas personales y cultura colectiva. Las primeras constituyen "sistemas de significados únicos, internalizados constructivamente (sentidos personales) que guían las reflexiones subjetivas de esa persona acerca del mundo" (Valsiner 1997: 47). La cultura colectiva es la cultura personal en un escenario social, extra-personal. En esta perspectiva podremos considerar la cultura de la EDCN como una cultura colectiva, compartida y construida por todos aquellos que hacen parte de esta escuela. Esta cultura colectiva configura y es configurada por las culturas personales de cada uno de sus elementos.

Para otros autores la a *identidad para sí* y la *identidad para el otro* no coinciden (Dubar, 1997). Para este y otros autores, la identidad que queremos que asuma un alumno ante los otros, es la de un alumno interesado, que participa por iniciativa propia o cuando ése le solicita. Es también un alumno que consigue hacerlo con éxito, respondiendo correctamente a lo que se le pide. Con todo, esta identidad no corresponde a la que asume uno para sí, persistiendo en la posición de un alumno que no le gusta la disciplina, con un pasado marcado por el fracaso y que continuará irremediablemente a no conseguir comprender los contenidos propuestos. En nuestra propuesta pretendemos que muchos alumnos desarrollen identidades (dialógicas) que pudieran ser desconocidas hasta el momento.

La experiencia de la identidad en la práctica es una manera de ser en el mundo. No es equivalente a una imagen de uno mismo; en esencia, no es discursiva ni reflexiva. Solemos pensar en nuestras identidades como si fueran imágenes de nosotros mismo porque hablamos de nosotros mismos y de los demás – e incluso pensamos en nosotros mismos y en los demás – empleando palabras. Es indudable que estas palabras son importantes, pero no son la experiencia plena y vivida de la participación en la práctica. No pretendo infravalorar la importancia de las categorías, las imágenes de uno mismo y las narraciones del yo como constitutivos de la identidad, pero tampoco deseo equiparar la identidad con estas cosificaciones. Quiénes somos reside en nuestra manera de vivir día a día, no sólo en lo que pensamos o decimos sobre nosotros mismos, aunque, naturalmente, esto forma parte (pero sólo) parte de nuestra manera de vivir. La identidad tampoco consiste únicamente en lo que los demás piensan o dicen de nosotros, aunque ello también forma parte de nuestra manera de vivir. La identidad en la práctica se define socialmente, pero no solo porque es cosificada en un discurso social del yo y de categorías sociales, sino también porque se produce como una experiencia viva de participación en unas comunidades concretas. Así pues, una identidad es una superposición de capas de eventos de participación y de cosificación por las que nuestra experiencia y su interpretación social se conforman mutuamente.

2.2.2. Una comunidad de práctica en desarrollo.

La participación educativa es mucho más que implicarse en determinadas actividades, a implicarse en un proceso más amplio en cuanto implicarse en un proceso de ser participante activo en comunidades sociales y construir identidades en dichas comunidades (Wenger, 1999: 4). Cada participante de una comunidad de práctica encuentra un lugar único y adquiere una identidad propia que se van integrando y definiendo cada vez más por medio del compromiso en la práctica. Estas identidades se entrelazan y se articulan mutuamente por medio del compromiso mutuo, pero no se funden entre sí. Las relaciones mutuas de compromiso pueden producir por igual diferenciación y homogeneización. En consecuencia, lo esencial es que la homogeneidad no es un requisito ni un resultado de desarrollo de una comunidad de práctica. El tipo de cohesión que transforma el compromiso mutuo en una comunidad de práctica requiere trabajo. En consecuencia, la tarea de "mantener la comunidad" es una parte esencial de cualquier práctica". Sin embargo, puede ser mucho menos visible que otros aspectos más instrumentales de esa práctica." (Wenger, 1999: 102). Por ello, transformar el aula en una comunidad de práctica y estimular la participación de todos los alumnos como participantes activos constructores de su propia identidad.

En ese contexto interpretamos la necesaria intersubjetividad en el sentido de Valsiner (1997) que la define como "un metaproceso de reflexividad que opera en un tiempo irreversible, que lleva constantemente a la creación, manutención y cambio de lo que es personal en aquella persona" (Valsiner, 1997: 47). Se trata también de un "meta proceso de crear los bancos de significado de una (futura) actividad dialógica" (ibíd. p. 48). De este modo, la búsqueda de intersubjetividad es fundamental en la promoción del diálogo entre as diversas culturas de la clase, e incluso entre las varias identidades de una determinada persona. Además de eso, la intersubjetividad puede revelarse extremamente útil en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los alumnos, sobre todo en escenarios de aprendizaje formal escolar, que privilegia las interacciones sociales entre los diversos participantes.

La perspectiva de Lave y Wenger (1991) que adoptamos aquí, entiende el aprendizaje como algo emergente e intencional que no puede ser prescrito ni legislado; y, sin embargo, posible pensar en modos de enriquecer la atmosfera de la comunidad en donde se pretende promover determinadas formas de participación. Pero es importante subrayar que no se puede entender el aprendizaje escolar como el resultado de la enseñanza realizada por el profesor. El aprendizaje ocurre en la medida en que los alumnos participan en prácticas, que sean significativas. Ahora, contextualizamos (en el ámbito de la educación matemática) los tres modos de pertenencia avanzados por Wenger (1998), que ayudarán a pensar las comunidades de práctica en que los participantes se comportan como matemáticamente educados. El proceso de motivación, que no es sólo una cuestión de una buena tarea.

Para el desarrollo de una comunidad con determinadas características (con el objetivo de ayudar a crear un ambiente con una perspectiva específica acerca de lo que es ser educado matemáticamente) no basta con proporcionar los recursos físicos entendidos como adecuados. De acuerdo con Wenger (1998), la construcción de una comunidad incluye ayudar a los participantes de esa comunidad a crear infraestructuras de ánimo que deben incluir a) mutualidad, b) competencia y c) continuidad. En ese sentido compartir valores propios de una comunidad como la de los docentes, en el sentido de que se entienda lo que se propone, se den explicaciones adecuadas, se reconozcan las ideas matemáticas, se les dé nombre de los miembros del grupo, etc.

Decir que las comunidades de práctica producen su propia práctica no equivale a decir que no puedan ser influenciadas, manipuladas, engañadas, intimidadas, explotadas, debilitadas u obligadas a someterse y tampoco quiere decir que no se puedan inspirar, ayudar, apoyar, instruir, liberar o capacitar, pero si quiere decir que el poder – benévolo o malévolo – que las instituciones, las reglas o los individuos puedan tener sobre la práctica de una comunidad siempre está mediado por la producción de la práctica por parte de la comunidad. Las fuerzas externas no tienen un poder directo sobre esta producción porque, a fin de cuentas (es decir, en la actividad mediante el compromiso mutuo en la práctica), es la comunidad la que negocia su empresa".

2.3. Comunidad de investigación e indagación.

Parece consistente con una filosofía constructivista y el enfoque ontosemiótico planteado, en que las matematizaciones individuales de una situación, como los modelos argumentativos de tipo anécdota, es probable que difieran. Sin embargo, en el crecimiento de las ideas matemáticas a lo largo del tiempo ha habido gran consenso en matematizaciones realizadas. Tal grupo que promueve crecimiento y comparte ideas matemáticas se ha venido llamando una **comunidad matemática** (ver, por ejemplo, Davis et al, 1990, eds.). Esta comunidad matemática, se identifica como un grupo de personas comprometidas con compartir y comunicar su pensamiento matemático. Este término tiene connotaciones positivas de un lugar al que alguien pertenece. Puede ser visto como una comunidad global o local o incluso como el grupo de personas descritas en la anécdota. En especial, puede tratarse de un grupo de alumnos en una clase de matemáticas, con la intención de ser un grupo de matemáticos como grupo–clase. Una tal comunidad asume muchos roles, que incluyen dar apoyo a los individuos en la construcción de sus pensamientos, actuando como un fórum para compartir, intercambiar y hacer una evaluación crítica de las ideas de los otros individuos del grupo (Wenger, 1991).

Consideramos la comunidad matemática como una comunidad tan matemática cuanto incentiva a sus miembros la construcción individual de ideas matemáticas, y promueve la negociación y mediación social que lleva al desarrollo de significados compartidos. A partir de esta perspectiva constructivista, el aprendizaje de la matemática envuelve una construcción individual del conocimiento matemático. Dentro del ambiente social de una construcción de grupo, aparece una construcción individual mediada por una negociación de ideas y construcción de significados comunes.

La comunidad matemática que se consigue en cada caso, sitúa unas condiciones de un ambiente en el cual las ideas matemáticas individuales pueden ser expresadas, y enfrentadas a las de los otros. Al expresar ideas en dicha comunidad, se pueden modificar o reforzar los significados comunes desarrollados. Esto permite que los alumnos consideren sus ideas más claras y así los estudiantes se sientan más confiados sobre lo que conocieron y comprendieron (Jorba, 1996).

Enseñar de acuerdo con una filosofía constructivista puede ser visto como una creación de una comunidad matemática en la que se anima a los alumnos a ser matemáticos. Resumiendo, significa:

- reconocer que las construcciones matemáticas varían de un alumno a otro;
- proporcionar oportunidades para que las personas expresen sus propios significados, y aprendan a partir de sus percepciones confrontando con las de los otros;
- ganando conocimiento de las construcciones de los alumnos, a fin de preparar las tareas de clase que sean adecuadas para permitir la generación de nuevos conceptos, y aplicar procesos.

La comunidad matemática, una vez establecida tiene muchas ventajas tanto para los profesores como para los alumnos. Los alumnos pueden encontrar oyentes que les apoyan a expresar ideas, conectarlas y controlar su nivel de validez; conseguir reconocer nuevas perspectivas y evitar un pensamiento acotado y limitado; y encontrar herramientas y argumentos para sustentar la actividad misma. David Wheeler (1982) hablaba del " proceso por el cual la matemática ha venido a existir", llamándolo matematización, Y consideramos que nuestra comunidad más fuerte es aquella que comparte esta perspectiva.

La **noción de indagación se** refiere particularmente a las perspectivas en educación matemática que tienen a ver con la construcción y cognición del conocimiento matemático. Pero la idea actual de indagación va más allá de eso. A través de la investigación, los alumnos consiguen ir más lejos que el simple uso y aplicación de algoritmos y reglas para desarrollar comprensión de relaciones generales en matemática y para enfrentarse con aspectos problemáticos de la abstracción y formalismo que es central para la matemática (Nardi, 1996). Tanto los investigadores como los teóricos, han unido la idea social enfatizando la importancia de la argumentación, el razonamiento, el lenguaje y el discurso en ambientes comunicativos. La discusión, la negociación y la argumentación en prácticas investigativas sustentan el crecimiento del conocimiento en la enseñanza y en la formación de docentes (por ejemplo, Lampert, 1998; Cobb e Bowers, 1999; Wood, 1999).

En los diccionarios se sugiere que *indagación* significa formular preguntas para hacer una investigación, adquirir una información para adquirir conocimiento. Y la ***indagación dialógica*** la entendemos como una actitud de abrirse a aprender a formular preguntas y tratar de comprender por medio de la colaboración con otros en la búsqueda para darles respuestas (Wells, 1999:122). La idea es que por medio de ese proceso se desarrollen estructuras cognitivas que favorezcan tanto a los individuos como a las comunidades. La indagación se considera una herramienta a través de la cual se desarrolla intersubjetividad, que se explicará más adelante. Como individuos se da sentido a los conceptos y relaciones, ya sea en matemáticas, en la enseñanza de las matemáticas o en cualquier proceso de investigación, producción de conocimiento y crecimiento en la comprensión tanto para los individuos como para las comunidades a las que se participa. En dicho proceso, la reflexión sobre el proceso de indagación es una actividad metacognitiva en la que los alumnos aprendices se vuelven más reconocedores de su propio aprendizaje (Cobb, 1996; Glasersfeld, 1995; Jaworski, 1994; Mason, 2001; Wells, 1999).

Se habla de **comunidad de indagación**, al proceso social en el que el grupo considera la actitud de reflexión crítica como una de las normas del grupo (Jaworski, 2005). La indagación eficaz se define como más que solo hacer preguntas simples. Se considera la complejidad, porque los individuos tratan de traducir la información construida en conocimiento útil para ellos. La interacción y la comunicación en comunidades de aprendizaje e indagación se ven como compartiendo comprensiones comunes y apoyando el crecimiento individual. En ese contexto, la enseñanza se observa como una práctica con algunos miembros con experiencia que apoya a los nuevos miembros (participantes periféricos) que se integrarán en las prácticas de aprendizaje y contribuyen a ella. La reflexión que se produce en un proceso de indagación desarrolla actividad metacognitiva en la que los aprendices se vuelven más conocedores sobre su propio aprendizaje (Cobb, 1996; Jaworski, 1994; Mason, 2001; Wells, 1999). En dicha comunidad, un proyecto que se desarrolle basado en la indagación, se diseña dese la perspectiva de que el aprendizaje es un proceso fundamentalmente social en el que el aprendizaje del colectivo llevaa un aprendizaje de los individuos del grupo (Vygotsky, 1978).

Hemos argumentado que el aprendizaje matemático puede entenderse como una iniciación en una comunidad de significados y prácticas sociales, o como una forma de participación en una comunidad de práctica. La cuestión es en qué tipo de prácticas queremos que nuestros alumnos participen. Y, además, cuáles son las acciones específicas que el profesor debe desarrollar para que haya una participación efectiva de los alumnos en estas prácticas. La primera cuestión tiene que ver con la naturaleza de la actividad matemática y con la visión que el profesor tiene de esta naturaleza. Una visión de la actividad matemática basada en la interrogación, la crítica y el descubrimiento lleva a plantear la conveniencia de acciones específicas del profesor donde la interacción, el diálogo y la negociación tengan un papel preponderante.

La interacción, sin embargo, es un recurso maleable en manos del profesor y su uso en el aula dependerá de los objetivos que éste se proponga. No todas las interacciones, por ejemplo, promueven el aprendizaje matemático. Hay interacciones cuya finalidad es conseguir que intervenciones de ciertos alumnos queden sistemáticamente relegadas a un segundo plano, mientras que otras tienden a simplificar y homogeneizar el conocimiento matemático. La interacción es positiva, en el sentido de facilitadora del aprendizaje, si viene acompañada de diálogo.

El término diálogo sugiere la implicación de al menos dos partes en una situación de comunicación con intereses no necesariamente compartidos. Un diálogo no es exactamente lo mismo que una conversación. En el diálogo, las dos o más partes toman la iniciativa y construyen significados, mientras que en la conversación puede haber interlocutores que escuchen pero que no tengan voz reconocida a pesar de hablar y opinar.

Por otra parte, la construcción de conocimiento matemático es un proceso de (re)negociación de significados personales y de comparación de estos significados con las interpretaciones establecidas en la comunidad matemática. Junto a la dimensión individual, en la construcción del conocimiento matemático también hay una importante dimensión negociadora colectiva. En particular, durante los procesos de diálogo en el aula es necesario negociar. El diálogo puede entenderse como la fase intermedia entre interacción y negociación, o la negociación como una forma de completar el diálogo.

2.3.1. Negociación en la interacción.

La matemática se concibe como una actividad humana, intencionalmente orientada a la solución de cierta clase de situaciones-problemas, realizada en el seno de instituciones o comunidades de prácticas; dicha actividad está mediatizada y apoyada por los recursos lingüísticos y tecnológicos disponibles. Veamos lo que caracteriza una comunidad de práctica inclusiva.

- El profesor facilita que los alumnos expresen sus emociones
- El profesor promueve la argumentación entre alumnos sin actuar de mediador
- El profesor usa ideas de los alumnos como punto de partida de la discusión matemática

La comunidad de práctica inclusiva es un lugar cuyas normas de actuación pueden ser cambiadas o modificadas parcialmente. Profesor y alumnos deben ser quienes promuevan en colaboración cualquier posibilidad de cambio. A menudo el cambio es difícil porque ni profesores ni alumnos tienen un claro referente de un aula de matemáticas "ideal". El aula tradicional es la experiencia mayoritaria y, además, el concepto de "ideal" es excesivamente amplio y confuso para muchos. Sin embargo, lo "ideal" puede mostrarse como un concepto asequible si concretamos "aproximaciones a lo ideal". Las categorías de actuación del profesor que hemos presentado son una concreción de acciones que han de contribuir al cambio.

Para comprender cómo se construye una determinada comunidad de práctica, es necesario examinar tanto las acciones del profesor (promover la argumentación, establecer convenciones matemáticas, etc.) como las acciones del alumno (promover la contra-argumentación, cuestionar convenciones matemáticas, etc.), junto con las acciones de unos y otros en interacción y a lo largo de un cierto período de tiempo. Cada acción del profesor y cada acción del alumno contribuirán al cambio en la cultura del aula en la medida en que no sean acciones puntuales ni aisladas. En este artículo breve, tan sólo hemos mostrado unos pocos ejemplos de acciones del profesor que, además, pertenecen a aulas y profesores distintos.

No vamos a insistir en la idea de situación didáctica (Brousseau, 1999) como modelo de interacción eficaz construida intencionalmente con el fin de hacer adquirir a los alumnos un saber determinado. En cambio, si explicaremos nuestra posición ante la idea de un contrato didáctico como conjunto de relaciones o normas establecidas explícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución. En ese sentido, interpretamos el desarrollo de prácticas en las que se acepta responsabilidad de construir una institucionalización.

2.3.2. Devolución y regulación en una comunidad de práctica.

El concepto de devolución asociado al contrato, (aún en la idea de Brousseau), está cercano al de interacción de tutela de Bruner (Astolfi, J.-P., Darot, É, Ginsburger-Vogel, Y. et Toussaint, J. (1997) pp. 61-65.). La devolución no solo significaba que cada estudiante hace su propio problema, sino que la clase como un todo reconoce un problema (de probar una conjetura) y así, adopta una responsabilidad colectiva. Esta socialización es una condición necesaria para la existencia de un debate (sobre prueba) como una característica de un tipo de situación didáctica en la que toda la comunidad de la clase está implicada (Balacheff 1988).

Desarrollos posteriores han ampliado la noción de contrato didáctico (Perrin-Glorian y Hersant, 2003) distinguiendo entre contratos fuerte o débilmente didácticos, tomando como criterio principal para hacer esta distinción la división de la responsabilidad en la construcción del saber matemático entre el profesor y los estudiantes. Perrin-Glorian y Hersant (2003) consideran otras dimensiones sobre las que el profesor y los alumnos pueden eventualmente actuar. Distinguen cuatro dimensiones interdependientes: el dominio matemático, el estatus didáctico del saber, la naturaleza y características de la situación didáctica en curso, la distribución entre profesor y alumnos de las responsabilidades relativas al saber.

En nuestro trabajo, consideramos junto la idea de negociación, la noción de regulación (usada mucho al hablar de evaluación reflexiva) y la caracterización de los contratos en términos de responsabilidades asumidas. Los cambios de reglas o de niveles de actividad que se observan responden a modelos "locales" ligados a eventos contingentes y tienen por objetivo principal mantener la relación didáctica [...] los medios de regulación pueden ser la negociación de un nuevo contrato que caracterizamos como contrato "local"" (Comiti y Grenier; 1997; 85).

Y aceptamos que cuando se habla de construir significados propios de una institución (Godino y Batanero 1994), se distinguen diversos niveles de estructuración del contrato que corresponde a diferentes escalas de duración de los compromisos didácticos: el *macrocontrato* (a escala de un objetivo de enseñanza), el *mesocontrato* (a escala de la realización de una actividad, por ejemplo, la resolución de un ejercicio, y el *microcontrato* (a escala de un episodio que corresponde a la unidad de contenido matemático, por ejemplo, una cuestión precisa de un ejercicio, y a una unidad de actividad del profesor y los alumnos, por ejemplo, trabajo individual o colectivo) (p. 240).

Y aparece la idea de *metacontrato* (Chevallard, 1988) así como la noción de *costumbre* (Balacheff, 1988) tratando de ampliar el foco de atención local del contrato formulado en la TSD.

Cognición y negociación de significados.

La mayoría de interpretaciones dadas a las nociones de interacción, diálogo y negociación hacen referencia a cualquier aula y no reflexionan sobre la especificidad del aula de matemáticas. Negociar significa cuestionar significados surgidos del diálogo y acordar nuevos significados desde la pluralidad. Para ello, es necesario que se produzcan discusiones en el aula previas a la mediación del profesor; o bien, que la mediación de éste no suponga la exclusión sin justificación de ideas alternativas más o menos válidas. A lo largo de estos últimos años hemos observado varias aulas de matemáticas de secundaria con el objetivo de recoger datos sobre maneras de concretar las posibilidades de interacción, diálogo y negociación en un contexto concreto de práctica matemática. Recientemente, hemos organizado la información obtenida en categorías que describen situaciones con elementos de comunidad de práctica inclusiva. Algunas de estas categorías en acciones del alumno, mientras que otras se centran en acciones del profesor. Todas ellas pueden entenderse como situaciones de aula donde se facilitan la interacción, el diálogo y la negociación por medio de tareas matemáticas concretas y acciones específicas.

El significado matemático se negocia en el proceso de la práctica mediante la participación en una dinámica caracterizada por la interacción social en el contexto de la comunidad por parte de los participantes, quienes mediante sus aportaciones de competencia y experiencia individuales están legitimados para influir en los demás y, a la vez, ser influidos por ellos en un proceso continuo e incompleto de construcción y reconstrucción de nuevos significados. La capacidad de los participantes para negociar significados.

N*egociabilidad* es un aspecto fundamental de la identidad, puesto que supone tanto la producción de significado como su adopción, lo que permite a los participantes apropiarse de significados que les permiten desarrollar su identidad. El análisis de las pautas de negociación en la estructura de los temas se realiza a partir de cinco indicadores descriptivos: la forma en la que se establecen y continúan los debates; la profundidad en función de sus niveles de conversación; su densidad o carga de información; y la interconectividad entre ellos. La capacidad de los participantes para participar en diversos debates se considera otro indicador respecto al nivel de propiedad de los significados negociados. El aprendizaje social en la práctica tiene que ver con el desarrollo de la capacidad de los participantes para negociar significados y desarrollar, así, una identidad de participación legítima en la comunidad. El análisis de los contenidos del discurso desde la orientación de las comunidades de práctica muestra que la *empresa conjunta* se establece en la negociación de significados mediante la interacción entre participantes que plantean preguntas que son respondidas por las declaraciones de otros participantes con competencia sobre ese tema en particular.

El papel del estudiante en una construcción negociada, se puede ver mediante indicadores como los siguientes: a) Identificación del patrón temático específico. Esto significa que las respuestas y preguntas estén enmarcadas en el tema de Ciencias Naturales pertinente para la ocasión. b) Identificación de un patrón estructural que, a juicio del docente, se adecue a la construcción científicamente esperada. Por ejemplo, el docente puede privilegiar en una instancia construir argumentaciones mientras que en otras puede aspirar a caracterizaciones o descripciones. c) Identificación de rasgos de coherencia textual en la comunicación producida.

Espacios de negociación en una comunidad de práctica matemática.

La discusión que se presenta a continuación surge del análisis cognitivo en entornos informáticos como los trabajos de Soury-Lauvergne y Nicolás Balacheff. No obstante, creemos que se aplica a la clase regular. El espacio de interacción entendido como el sitio en el que “conviven” los procesos de negociación de significados, de argumentación, de enseñanza y de aprendizaje. En él se han incluido los actores participantes. Los espacios comunes entre dos o más actores pueden ser entendidos como las instancias de intercambio, mientras que los espacios no comunes pueden ser vistos como las instancias de vinculación con uno mismo.

(a) Comunalidad en espacios de negociación. A partir de las investigaciones con recursos computacionales, sabemos que los humanos no negocian una única representación compartida de un problema, sino que desarrolla diversas representaciones compartida. Esto es, se mueven a través de un mosaico de espacios de negociación (Baker 1988). Estos espacios de negociación, difieren según la naturaleza de la información siendo negociados (o sea. Algunos aspectos requieren acuerdos explícitos más que otros) y mediante los mecanismos de la negociación (usando recursos). Creemos que el aprendizaje colaborativo, es una idea demasiado amplia, y pide que describamos el espacio de negociación de forma más precise. Por ahora hay un conjunto de dimensiones relevantes. Los Modos. Dos agentes hablan sobre un tema (modo de discusión o reflexión) o hacen cosas en el tema (modo de acción). La negociación ocurre en los dos modos. En cada uno pueden diferir los sistemas de representación usados.

(b) Los objetos de negociación. Así dos agentes pueden negociar lo que se va a negociar o hacer. Pueden negociar que se va a hacer en el paso siguiente (negociar una acción), el tópico que subyace a la negociación (negociación del conocimiento), como representarlo (negociación de representaciones), negociar la forma de interacción, tipos de palabra, etc. ((negociación de interacciones)**.** Esa dimensión cruza la anterior (en efecto, negociar la acción siguiente puede hacerse a través de la discusión, haciéndolo). Lo que puede ser considerado como un objeto de negociación en un sistema específico depende de un número de factores principalmente: *la naturaleza del dominio de la tarea y* los respectivos grados de conocimiento de los agentes *con el conocimiento de cada* *uno*. Así, para dominios en los que existe un único método de solución, y solo uno de los agentes lo sabe, entonces no puede (sinceramente) existir un objeto de negociación. Aun así, el punto de vista conceptual al que se aproxima el dominio (funcional, procedural,…) puede aún ser negociable. En dominios más abiertos en los que hay diversos métodos de solución posibles o donde se necesita un razonamiento 'plausible' o 'incierto', en el espacio de negociación puede ser más amplio y más simétrico.

(c) Aunque nos interesamos principalmente en sistemas altamente simétricos en lo colaborativo el grado de simetría es una variable continua. Por ejemplo en una interacción 'tradicional' entre profesor y estudiante, el profesor podría convencionalmente tener el derecho a hacer el diálogo hacia una evaluación negativa, con respecto a un movimiento previo del estudiante mientras que el Estudiante podría ser que no tuviera el derecho social para hacer tal movimiento. En la práctica de todos modos, el grado de simetría es también influenciado por restricciones técnicas. Por ejemplo, aunque en ciertos casos tanto profesor como alumnos deberían tener el mismo derecho social de hacer un movimiento de explicación, o a menudo excluido para el estudiante simplemente porque el sistema perdería competencia comprensiva del lenguaje natural.

(d) Grado de complejidad en un espacio específico de negociación se refiere a la complejidad de la interacción que la soporta. Esto estará principalmente una función de los tipos de objetos de negociación (dimensión 2) y corresponderá a otro grado de simetría. Podemos aun así, identificar un mínimo grado de complejidad que puede ser mantenida en orden por el Sistema para ser descrita como negociación. Hay tres tipos de diálogo que combina con esa idea: ofrecimiento, aceptación y rechazo.

(e) Grado de flexibilidad. Tiene a ver con el grado de libertad acordado con cada agente para conseguir o no el diferente dialogo se mueve con lo que estuvo dado en un dado estadio de la interacción.

(f) Grado de sistematicidad. Un agente es sistemático si todas las actitudes relevantes y la información se comunican en todas ocasiones cuando son tan relevantes. Por ejemplo, un agente es sistemático si comunica (directamente o indirectamente) desacuerdo con la propuesta.

(g) Grado de franqueza, que tiene a ver con la interacción funcional (usuario-sistema) e intencional (usuario-autor). En una interacción funcional, cuando un agente dice por ejemplo al otro: *"El retraso debe ser de 30 segundos*", esta declaración podría clasificarse como una oferta. De todos modos, también constituye una invitación indirecta (e implícita) a empezar a negociar la duración del retraso. Esa posibilidad es simplemente una función de la interpretación *pragmática* de declaraciones en un contexto dado. En este caso, las posibilidades de interface se usan directamente *e indirectamente* simultáneamente.

Caracterizando los espacios de negociación el corazón del sistema de aprendizaje humano-humano colaborativo es una relación triangular. Ese triángulo teóricamente incluye tres posibilidades (1) entre el agente humano y la tarea, (2) entre el agente recurso u otro humano y la tarea y (3) entre dos tipos de agentes.

2.4. Comunidad de práctica colaborativa y dialógica

> […] *la clave para una colaboración exitosa es una negociación abierta de la repartición de poderes y expectativas respecto al papel de cada uno de los participantes, a medida que un proyecto se desarrolla* (Christiansen, 1997: 285[2]).

El aprendizaje de la colaboración y de la negociación, a ella entrelazada, es, así, una dimensión ineludible en una sociedad caracterizada por el individualismo y la jerarquía, puesto que es, muchas veces, extremadamente difícil realizar un proyecto educativo sin contar con la colaboración de otros participantes. Más aún es cierto para los proyectos de investigación sobre la práctica, cuya concepción, desarrollo y divulgación involucran un conjunto amplio y diversificado de actitudes y competencias, y se encuentran, en la mayoría de los casos, con muchos e inesperados obstáculos. Interpretamos colaboración" cuando los diversos participantes trabajan de manera conjunta, no en una relación jerárquica, sino sobre una base de igualdad, de modo que haya una ayuda mutua para alcanzar los objetivos que beneficien a todos. (Ponte, 2011). Se distingue de cooperación, en donde los actores pueden tener estatus y roles diferenciados, La colaboración implica una cuidadosa negociación, la toma conjunta de decisiones, la comunicación efectiva y el aprendizaje mutuo en un emprendimiento que se centra en la promoción del diálogo profesional (Day, 1999).[3]

Las características del proceso colaborativo que se suelen considerar son:

(a) emergencia, marcada por la imprevisibilidad,
(b) lleno de negociaciones de costos y beneficios (Castle, 1997) y decisiones (Grey, citado por Stewart, 1997).
(c) mutualidad en los objetivos específicos individuales, en donde los participantes tienen un papel reconocido en el proyecto y se benefician, de manera inequívoca,

---

[2] Christiansen, H. et ál., 1997, “Making the connections”, en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform, New York, NY, State University of New York Press, pp. 283-292.

[3] Day, C., 1999, Developing Teachers: The Challenges of Lifelong Learning, London, Falmer.

con su contribución, aunque los papeles de los diversos actores intensidades y características muy diferentes (Ponte, Segurado y Oliveira, 2003);

(d) tiene que haber un objetivo general, o al menos, un interés común, compartido por todos, aunque haya objetivos específicos para cada uno de los componentes.

(e) para la colaboración es necesaria la confianza (Hargreaves, 1998) así como para muchos autores

(f) no hay colaboración sin diálogo (Olsson, 1997), siendo mejor aquel diálogo que lleva a está ligado a los valores de los participantes, los objetivos compartidos y al trabajo común. Por último, la auténtica colaboración es la que

(g) persigue superar el conformismo para conseguir algún fin.

En el caso de que los protagonistas sean los alumnos, la construcción colaborativa de conocimiento persigue aumentar el conocimiento colectivo, independientemente de que todos los miembros del equipo aprendan o no todos los contenidos. Desde hace tiempo, Dewey puso el acento en el aprendizaje a través de la experiencia active personal y como proceso social. Vygotsky constató que el desarrollo de los individuos y el aprendizaje se ven influenciados por la comunicación con otros en contextos sociales. Interaccionar con pares de forma cooperativa da oportunidades de observar, imitar, iniciar y desarrollar funciones de alto nivel. Bauersfeld (1979) explicó que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas se realizan a través de relaciones humanas.

Es en este marco que reconocemos la necesidad de establecer procesos colaborativos en los que se den relaciones entre iguales. En ellas se comparan experiencias, se comparten ideas, y se expande el pensamiento. Se consigue articular matemáticas, poner buenas preguntas, sentirse motivados y ganar confianza. Por ello, se gana autonomía.

2.4.1. Lo dialógico.

Nuestra investigación asume las ideas del constructivismo social arriba indicadas, sin perder de vista el pragmatismo sobre la construcción de las ideas matemáticas del enfoque ontosemiótico. Reconocemos que mediante prácticas matemáticas, los entornos de aprendizaje que animan a la participación activa, a la interacción y al diálogo proporcionan oportunidades de implicarse en un proceso de construcción del conocimiento (Moll, 2001), lo que es una manera de construir significado a partir de nuevas experiencias (Hodson y Hodson, 1998). Este proceso puede llegar a ser incluso más potente cuando la comunicación entre compañeros se lleva a cabo de manera escrita, ya que escribir sin la inmediata respuesta de otra persona requiere reflexionar, explicar, clarificar, elaborar y defender las propias ideas, lo que supone una completa elaboración para llegar a un acuerdo (Pena-Shaff y Nicholls, 2003). En la misma línea se manifiesta Mitchell (2003) al considerar que escribir es una parte clave de la construcción del conocimiento sobre todo si se usa la escritura no para relatar algo que ya se sabe sino para llegar a conocerlo y comprenderlo mejor. El intercambio de ideas afecta no sólo a la cognición individual sino a la cognición distribuida del grupo, según los participantes transmiten, negocian y transforman sus ideas.

Para Morin (1990), interacción significa un conjunto de acciones y reacciones recíprocas que se enlazan en un sistema y modifican el comportamiento de los elementos que interaccionan. Kerbrat-Orecchioni (1990), citado en R. Rodríguez, (2003), define la interacción como el espacio en que se desarrolla la tarea colectiva de producir significado lo que lleva consigo la negociación. Vion (1992) asigna tres funciones a las interacciones:

1. La construcción del significado,
2. La construcción de la relación social y
3. La construcción de imágenes identificativas a través del lenguaje, que se utiliza como medio de convertir el pensamiento individual en pensamientos y acciones colectivas.

Derry et al. (2000) consideran que a través de la interacción con un grupo de trabajo, que es diverso en términos de conocimiento previo de los miembros, los individuos encuentran desavenencias entre sus conceptos y los expresados por otros. El conflicto conceptual tiene como objetivo la armonización de la nueva experiencia con el conocimiento previo activo.

Argumentamos como hacía Koschmann (2003), que uno de los objetivos de la interacción colaborativa es hacer patente el desacuerdo, ya que la interacción constructiva es diálogo que promueve el conflicto. Veerman (2003) considera que el aprendizaje colaborativo se logra cuando los aprendices conjuntamente se enfrentan a conflictos, pueden discutir críticamente la información recibida de los propios compañeros o de expertos y exploran diferentes perspectivas llegando a lo que en esta investigación se entiende como negociación de significados y que implica la interpretación compartida de dicha información, la comprensión de conceptos específicos, la elaboración de conclusiones y la reconstrucción y construcción conjunta del conocimiento.

Para que de las interacciones se derive diálogo capaz de crear conflictos que conduzcan a una posible negociación de significados y a un aprendizaje colaborativo es pieza fundamental la argumentación. Se entiende por argumentación cualquier forma de actividad individual colaborativa, basada esencialmente en el lenguaje, que implique confrontar cogniciones y sus fundamentos (Andriessen, Baker y Suthers, 2003). Ello supone una forma de negociación de significados, de resolver problemas, de justificación y explicación de las respuestas individuales a una pregunta, de convencer, de expresar y discutir relaciones entre datos e hipótesis y de intercambio constructivo.
Para Veerman (2003) implicarse en procesos argumentativos supone dar relevancia al conflicto, a los procesos de negociación, a la información críticamente discutida y a la

exploración de múltiples perspectivas. Finalmente, digamos que la argumentación (Andriessen, J., Erkens, G., van de Laak, C., Peters, N. y Coirier, N., 2003) debe pretender alcanzar uno o más de los tres objetivos conceptuales siguientes:

- Compartir conocimiento: La argumentación lleva a los participantes a comprenderse mejor el uno al otro.
- Constitución del conocimiento: La argumentación conduce a una comprensión más profunda de un concepto.
- Transformación del conocimiento: La argumentación conduce a una creencia o idea diferente.

Discurso dialógico y construcción social.

En los últimos tiempos, por lo que respecta a las relaciones sociales, se ha producido un giro hacia la formación que aprende a través del diálogo. Ámbitos de la vida como el trabajo, el ocio, la vida doméstica, entre otros muchos espacios, son cada vez más colonizados por el diálogo. En el ámbito laboral, por ejemplo, aparecen los denominados "equipos de trabajo" interpretados como grupos de personas que trabajan con un objetivo común, donde las decisiones muchas veces son resultado de acuerdos alcanzados por todos los miembros del grupo. Y en el ámbito del ocio nos encontramos con situaciones de diálogo, como por ejemplo, los grupos de amigos/as que deciden dónde ir a pasar el tiempo libre.

En casa el reparto de las tareas es algo de lo que cada vez se habla más. Sin embargo, esto no significa que en todas partes ocurra esto, ni que el diálogo sea generalizado. Como advierten Flecha, Gómez y Puigvert (2001), el diálogo es una tendencia hacia la que cada vez nos aproximamos más, pero todavía no es una situación generalizada.

La constatación de la inclusión del diálogo en ámbitos cada vez más numerosos de la vida cotidiana implica que cualquier investigación con pretensiones de comprender lo que ocurre y hacer propuestas tenga que considerar este elemento.

El paradigma comunicativo como formato interaccional.

La metodología comunicativa retoma elementos tanto de la tradición objetivista, como de la perspectiva constructivista, que han sido dos de las grandes corrientes ontológicas que han hegemonizado el ámbito de la metodología hasta el momento. Las características principales del paradigma comunicativo se concretan de la siguiente manera:

1) Supera el dilema sujeto/objeto de las ciencias sociales, partiendo de la base de que no existe un desnivel metodológico relevante entre científicos expertos y legos, considerando como fuentes de información las diferentes aportaciones de todos los participantes, sin predominio de una sobre otra.

2) Se diseñan las acciones que contribuyen a superar las desigualdades en base a las consideraciones de practicidad y transformación. Todo el proceso de investigación se encuentra estrechamente vinculado con las prácticas que ya están realizando estas transformaciones y se estudia la manera de generalizarlas. En este sentido una tesis en didáctica de las matemáticas no puede renunciar a la aplicabilidad de sus resultados.

3) Los datos vinculados con las prácticas más concretas se complementan con un exhaustivo contraste con los diferentes avances en ciencias sociales y educativas, la combinación rigurosa de técnicas cuantitativas y cualitativas. De todas maneras, en el caso de esta tesis doctoral utilizaremos técnicas cualitativas debido a que nos van a resultar más útiles para responder al objetivo que nos hemos marcado.

4) En el análisis de los datos respecto a la realidad social (es decir, todo aquello que entra dentro del ámbito de los hechos sociales, sea política, cultura, educación, etc.), se estudia el resultado de acuerdos intersubjetivos realizados entre personas. Por eso la mejor manera de aproximarse de forma científica y rigurosa a este tipo de fenómenos es dejar participar de manera igualitaria a las personas que intervienen en la investigación, para que aporten sus puntos de vista y ayuden a enriquecer el cuadro de lo que realmente está sucediendo en ese marco de estudio.

2.4.2. Sobre el papel de las normas y la legitimidad.

La ***norma social*** es el conjunto de explícitos o implícitos que documentan la estructura de participación y dinámica entre profesor y alumnos, y entre alumno y alumnos, en el transcurso de las acciones e interacciones que ocurren en el aula. Por ejemplo, la organización del trabajo entre los miembros de una clase es una norma social que admite diferentes interpretaciones. Entre ellas: trabajo individual, en pareja, autónomo, en grupo cooperativo o trabajo según las actividades que se lleven a cabo. La ***norma matemática*** es el conjunto de prácticas matemáticas en el aula y las diferentes trayectorias posibles en el comportamiento matemático de alumnos y profesor ante una actividad propuesta. Por ejemplo, los criterios de legitimación de una solución matemática son una norma matemática que admite diferentes interpretaciones: creatividad, rigor y formalización, sofisticación, eficiencia, simplicidad, verosimilitud, rapidez, comprensibilidad para el profesor o para los alumnos…

La ***norma sociomatemática*** es el conjunto de explícitos o implícitos en el aula de matemáticas que influencian o regulan el desarrollo y la interpretación de la práctica ***matemática***. Por ejemplo, el rol del alumno en relación con el conocimiento matemático ante una determinada tarea es una norma sociomatemática que admite diferentes interpretaciones: todo alumno posee conocimiento matemático no aprendido en la escuela, todo alumno es un comunicador matemático en potencia, algunos alumnos son comunicadores matemáticos en potencia, ningún alumno es un interlocutor lo suficientemente válido, la capacidad de comunicación matemática de los alumnos se reconoce según el grado de competencia en otras áreas de conocimiento.

Por supuesto, los tres tipos de normas introducidas tienen intersecciones e influencias mutuas entre ellas (Cobb et al., 1996). Por ejemplo, cuando a los alumnos de una clase de matemáticas, que están sentados por separado y trabajan de forma individual (una determinada interpretación de la norma social «dinámica de trabajo») se les propone resolver un problema con los recursos que se han explicado en el inicio de la sesión (una determinada interpretación de la norma matemática «criterios de legitimación de los procedimientos matemáticos de resolución»), es muy probable que estemos condicionando una determinada interpretación de la norma socio matemática «pautas de comportamiento ante la actividad».

En cierto modo, las normas pueden considerarse como obligaciones establecidas en el aula por parte del profesor en tanto que ostenta la autoridad y la capacidad de legitimar (Voigt, 1995). No obstante, más allá de las reconocidas como tales, cada uno de los participantes del aula tiene un sistema normativo de referencia independientemente de las obligaciones marcadas por el contexto. El alumno, como alguien con una vida social que le aporta creencias, valores y emociones, genera su propia concepción de lo que es o debe ser una clase de matemáticas, de cómo se comporta o debe comportarse el profesor en el aula, de qué papel tienen o deben tener sus compañeros en su propio proceso de aprendizaje…Por tanto, aun reconociendo ciertos significados compartidos, siempre podemos hablar de una distancia entre las normas establecidas en el aula y las normas interpretadas por el alumno (Gorgorió et al., 2011). Asimismo, y tal como señala Voigt (1992), esta distancia es de naturaleza dinámica, puesto que los alumnos desarrollan en una reconstrucción permanente el proceso de comprensión y dotación de sentido y significado cuando participan en la negociación, explícita o no, de las normas del aula.

Sobre autonomía y legitimidad.

Nuestro análisis del conocimiento legítimo, se apoya en dos consideraciones ideológicas fundamentales. Por un lado, creemos que "la educación actúa como un lugar clave para construir lo que cuenta como conocimiento. Como un conocimiento que se despliega y que puede definir y desplegar conocimiento, así como para evaluar formas de conocimiento, su despliegue y sus cambios (Heller, Martin-Jones, 2001: 3). Por otro lado, entendemos que la participación en actividades educativas se co-construye y se relaciona estrechamente a los aspectos de identidad, acción y diferencia" (Duff, 2002: 291).

Legitimar conocimiento es tener criterios de validación para las afirmaciones o acciones no basadas en la imposición sino en la persuasión. No es frecuente que la gente se resista a propuestas que los satisfacen. Sin embargo a la hora de proponer, discutir y de elegir entre varias ideas, es importante utilizar criterios de legitimidad, para sustentarlas. Por ello, llamamos **criterios de legitimidad** a aquellos elementos ajenos a la voluntad de las partes que ayuden a dirimir diferencias asertivamente, haciendo que al final, nadie se sienta estafado. Eso implica la prueba de la reciprocidad: busque que en sus negociaciones se use la misma vara para medir concesiones o reclamos de ambas partes. Este planteamiento está concordante con lo que Lins (1992) formula que Conocimiento es entendido como una creencia - algo que el sujeto cree y expresa, y que caracteriza-se, por lo tanto, como una afirmación – junto con el que el sujeto considera ser una justificación para su creencia afirmación. (Lins, 1993b, p.86, grifos del autor). Así, los tres aspectos-clave para conocimiento son: la creencia, la afirmación y la justificación. El sujeto cree en aquello que está afirmando, el que implica que ello cree estar autorizado a ter aquella creencia. Pero no es suficiente que la persona lo acredite y afirme; es necesario también que ella justifique sus creencias-afirmaciones para que la producción del conocimiento ocurra. Pero, el rol de la justificación no es explicar la creencia-afirmación, i sí tornar su enunciación legítima, lo que hace con que las justificaciones tengan un rol central en lo establecimiento del conocimiento del sujeto. Como observa Lins (1995), las justificaciones desempeñan un doble rol en la constitución del conocimiento pues, al mismo tiempo que ellas son parte del proceso de legitimarlo, ellas también son parte del proceso de constituir objetos.

Legitimar implica reconocer un cierto tipo de persuasión para un consenso, en situaciones de validación. La legitimidad no puede sustentarse sólo en sentimientos, sino también en unas reglas de juego por todos decididas y a todos aplicable, representadas por un corpus jurídico constitucional cuyo escrupuloso respeto resulta del todo imprescindible.

Legitimidad no implica consenso sobre las afirmaciones sino constatación de posibilidad de refuerzo o refutación de las propias afirmaciones. De acuerdo con Lins las personas hacen afirmaciones porque creen que ellas pueden hacerlas, esto es, que ellas (las afirmaciones) son legítimas lo que quiere decir que la persona cree que "alguien en alguno sitio" también diría lo mismo y con la misma justificación. Este "alguien en algún lugar" [en alguno tempo] es una dirección, y no una otra persona, quiere decir, la gente habla una dirección y no en la dirección de una o más personas. Pero estas legitimidades, estas direcciones, no viene de dentro, y si de fuera, de la cultura donde el sujeto existe.

El proceso de internalización pode ser explicado tomando como referencia la idea de Zona de Desarrollo Proximal, o sea, en una dada actividad (Leontiev) el niño (o joven por ejemplo) junto con el adulto, faz cosas que no haría sola. El que quiere decir que el niño toma emprestada del adulto a legitimidad de decir ciertas cosas que ello (el niño) ya podría decir "solo" más no sabía que podría decir. En este proceso el niño internaliza la legitimidad y es ahí que ocurre la aprendizaje y el desarrollo. Para Lins el que se aprende son legitimidades Para Lins el que se aprende son legitimidades antes de cualquiera cosa, son modos de producción de significado, porque es a partir de esta legitimidad que son constituidos objetos.

El término legitimación tiene su origen en el contexto del derecho y la ética. Siguiendo el clásico trabajo de Joseph Bensman se pueden señalar hasta cinco diferentes acepciones del concepto de legitimidad en la obra de Weber: (1) como la creencia en la bondad de un orden social o político (*legitimacy as belief*); (2) como una reclamación desde el poder político, militar o religioso (*legitimacy as claim* sobre la base de elementos legales racionales, carismáticos o tradicionales); (3) como sinónimo de justificación de un régimen (se obedece cuando existen justificaciones, esto es, "legitimaciones de la dominación"); (4) como promesa de un futuro mejor (muy vinculado a la dominación carismática); (5) como autojustificación que hacen los gobernantes de su buena fortuna en aras de asegurar o monopolizar una distribución desigual de los beneficios sociales en su favor; (Bensman, 1979). Los conceptos weberianos de *validez* y *legitimidad* pecan de inconsistencia pues mezclan aspectos tanto objetivos como subjetivos, aspectos libres de valores con aspectos normativos, y manejan indistintamente nociones de "validez" referidas a normas orientadas hacia valores creídos subjetivamente o sustentadas sobre el derecho o las convenciones existentes.

Max Weber denominó el principio de la legitimidad legal racional. De acuerdo con el mismo, para que el poder político sea legítimo es preciso que se obtenga y ejerza conforme a unas reglas generales racionalmente creadas, y a cuya observancia y cumplimiento se encuentran obligados tanto gobernados como gobernantes. El principio de la legitimidad legal-racional, gráficamente expresado en el concepto del Estado de derecho, supuso un gran avance con respecto a épocas anteriores, pues, al desligar la legitimidad de la sustancia de la autoridad ostentada, permitió independizar el fundamento del poder, situándolo más allá de la voluntad y los deseos de quienes lo ejercen en cada momento concreto. Con el transcurso del tiempo se: consideró que el principio de legitimidad resultaba en sí mismo insuficiente. Igual pasó en educación.

La democracia - se decía - no puede quedar reducida a simple método, a pura legitimidad formal, sino que implica también valores, fines y objetivos. Un sistema democrático funciona no porque esté organizado mediante una serie de normas reconocidas y aceptadas, sino porque sus fines básicos y sus normas procedimentales van dirigidos a la satisfacción de las aspiraciones de los ciudadanos. Por ello, junto al principio de la legitimidad legal-racional, surgió un segundo principio, el de la eficacia, entendido como la capacidad del sistema para la satisfacción de los objetivos marcados. Su expresión práctica la constituye el concepto de Estado social de derecho. De acuerdo con el mismo, el sistema democrático no se agota en la existencia de una sociedad bien ordenada, sino que implica también, necesariamente, una administración eficaz de los recursos sociales con el objeto de maximizar la satisfacción de los ciudadanos.

La conclusión que se obtiene de la combinación de ambos principios es que la legitimidad supone condición necesaria, pero no suficiente, para la visión democrática de un sistema político. Actualmente, la práctica totalidad de los países democráticos desarrollados aceptan tal conclusión. Sin embargo, bien sea por su mayor tradición, o bien por las dificultades que entraña la aplicación práctica del principio de eficacia, lo cierto es que el principio de legitimidad siempre ha gozado teóricamente de un mayor predicamento que el de la eficacia. Actualmente puede observarse en la práctica totalidad de los países democráticos desarrollados no tanto una tendencia a una sustitución lisa y llana del principio de la legitimidad por el de la eficacia - lo cual resulta extraordinariamente burdo -, sino una tendencia dirigida a confundir el concepto de legitimidad con los de creencia, opinión o consenso.

Llamamos **conocimiento legítimo a aquél que se encuentra aprobado por lo dialógico,** en el que no hay imposición, existen unas reglas compartidas por una institución que se aceptan como forma de autoridad o poder conquistada y no impuestas. En un planteamiento legitimado por lo dialógico, el docente (u otros actores) son ante todo facilitadores. Y facilita un contexto de búsqueda en el cual los estudiantes puedan *explorar*, participando en experiencias significativas vividas, utilizando de modo complejo todas sus capacidades, incluyendo las emociones, la curiosidad, la comunicación, la expresión creativa, el diálogo crítico, la capacidad de escucha. Los verbos que ilustran este tipo de proceso pedagógico son: inventar, investigar, curiosear, escuchar, dialogar, iniciar, responsabilizarse, liderar, consensuar, experimentar, explorar, etc. El proceso de aprendizaje es básicamente heurístico. Ni la formulación de los problemas concretos, ni las soluciones elegidas para resolverlos preexisten totalmente al proceso de investigación exploratoria: "El camino se hace al andar". Si no fuera así, el Aprendizaje Basado en Proyectos Sociales no podría pretender, en el marco de una Comunidad de práctica, ser un proceso participativo poniendo en pie de igualdad todos los actores, universitarios o no, en la definición y ejecución de las actividades sociales. El docente facilita, acompaña, pero difícilmente puede anticipar lo que va a suceder. El proceso de aprendizaje en una comunidad de práctica no es sólo un asunto personal del estudiante, sino que es un asunto colectivo.

Como tal, los conocimientos adquiridos no preexisten a la iniciativa de los sujetos para crearlos y descubrirlos. Si hubiesen emprendido otro camino, los conocimientos producidos serían otros. Los conocimientos son, en ese sentido, subjetivos, y el proceso de aprendizaje es personal, interpersonal e irrepetible. Todos los actores van creando los conocimientos que integran, y se dan a sí mismos las lecciones que se quieren dar: se trata de un proceso de **autoenseñanza** en el cual si no quiero ser generoso conmigo mismo, pues voy a aprender poco. La reflexión crítica en el aula es uno de los modos de enseñanza-aprendizaje heurística que promueve legitimación. La participación en proyectos y acciones colectivas es otro. La investigación exploratoria es un tercero. El Aprendizaje Basado en Proyectos Sociales, aunque no sea un provocador específico de legitimación si favorece esta pedagogía de la transformación.

Legitimar conocimiento es tener criterios de validación para las afirmaciones o acciones no basadas en la imposición sino en la persuasión. No es frecuente que la gente se resista a propuestas que los satisfacen. Sin embargo a la hora de proponer, discutir y de elegir entre varias ideas, es importante utilizar criterios de legitimidad, para sustentarlas. Por ello, llamamos criterios de legitimidad a aquellos elementos ajenos a la voluntad de las partes que ayuden a dirimir diferencias asertivamente, haciendo que al final, nadie se sienta estafado. Eso implica la prueba de la reciprocidad: busque que en sus negociaciones se use la misma vara para medir concesiones o reclamos de ambas partes.

El contrato como control de legitimidades en una comunidad.

Aunque no llegamos a formular una teoría educativa sobre la legitimación, asumimos que algunos autores suscriben un modelo en que la educación debe ser concebida como "siendo por un lado, el lugar de encuentro/confrontación de diferencias y de su negociación, y por otro lado, el lugar de la diferencia en sí misma" (Stoer y Magalhães 2005: 140). De este modo, se considera esencial que el profesor asuma un papel de orientador y mediador del aprendizaje (Vygotsky, 1978), facilitando las relaciones entre culturas y sabiendo explorar, en cada una de ellas, sus potencialidades, en particular para la educación matemática. Tales alteraciones implican un cambio en el propio contrato didáctico (César, 2003; Schubauer-Leoni & Perret-Clermont, 1997). Proponemos una noción de contrato didáctico más negociado, dinámico e interactivo, en el que los alumnos son los principales responsables por su proceso de aprendizaje y donde se le da un peso al trabajo colaborativo entre pares y en todo el grupo, incluso en momentos de institucionalización.

2.5 El escrito como reflejo de la acción personal e interactiva.

Escribir en matemáticas se incluye en los estándares de formación en matemáticas porque es una forma de comunicación que se privilegia frente la comunicación oral, apoyando la idea de escribir para aprender que fue clave en los cambios curriculares de los años 80. Escribir es importante en todas las disciplinas, y realmente se ve poco en las matemáticas tradicionales, donde el énfasis sobre los procedimientos relegó al escrito y la reflexión a un segundo lugar. Vygotsky ya habló del gran valor del escrito en el proceso de aprendizaje, en cuanto el discurso escrito es más complejo que el discurso oral, deliberado y basado sobre un sistema de signos arbitrarios (Sierpinska, 1998). Vygotsky (1962, p. 99) dijo que escribir requería de una acción analítica deliberada en la que debe haber un análisis del pensamiento más consciente, para hacer del escrito algo comprensible y entendible por los otros mientras que el paso al lenguaje hablado es un proceso más subconsciente. Pero además, el escrito reflexivo narrativo, no sólo fuerza a los interlocutores a reflexionar, sino también a uno mismo, ganando en construcción y reconstrucción en la adquisición de significados.

Escribir en matemáticas se suele hacer en dos tipos de actividad: diarios, resolución de problemas propuestos y exposiciones. En todos ellos, el objetivo es mostrar a otros las producciones realizadas. En ellas se solidifica el pensamiento, se reflexiona sobre los propios pensamientos y se comunica a otros lo que se reconoce. En el caso de resolución de problemas los estudios revelan cuatro actividades: orientación, organización, ejecución y verificación (Pugalee, 2004). En los resultados de dicha investigación, se dice que escribir soporta un marco metacognitivo que sobrepasa la simple verbalización del proceso de pensamiento.

El escrito como forma de expresar el quehacer matemático.

Saber argumentar, dialogar y comunicar por vía oral, escrita e videográfica[4] son competencias que vienen adquiriendo cada vez más importancia en la formación profesional docente. Esas diferentes formas de comunicación se complementan, siendo hoy imprescindible el uso articulado de las mismas. Para Powell (2001), la reflexión sobre las experiencias matemáticas puede llevar a los alumnos a pensar críticamente sus ideas. Para este investigador, desencadenar un ambiente de aprendizaje significativo es hacer como que la reflexión sobre la experiencia sea una reflexión crítica y atenta del proprio conocimiento para que el individuo pueda desarrollar su proceso metacognitivo. Powell evidencia que el escrito junto la acción de reflexionar sobre la experiencia, como posibilidad de influenciar significativamente la cognición y la metacognición del sujeto que aprende.

La comprensión de ese proceso de aprendizaje exige el entendimiento de que la metacognición es una categoría de aptitud que considera, por un lado, el conocimiento en lo que respecta al funcionamiento cognitivo de uno mismo. Por otro lado, las habilidades relacionadas con la auto-regulación/auto-monitoreo de la consciencia del proceso cognitivo de cada uno (Corte ,1996:115).

En esa misma perspectiva, consideramos que el escrito consiste en un soporte material de la lengua que favorece la consciencia metalingüística. Por medio del escrito, el *sujeto puede reflexionar y construir conocimiento explícito, y la consciencia metacognitiva, por la posibilidad de verificación del discurso escrito en cuanto producto de pensamiento, de objetivación de la experiencia personal* (Oliveira, 1995: 154). El control de la producción cognitiva se relaciona con los procedimientos metacognitivos, que son

> *Operaciones deliberadas del sujeto sobre sus propias acciones intelectuales. Son procedimientos que indican consciencia del sujeto con respecto a sus procesos de pensamiento, que le permite describir y explicar dichos procesos a otras personas; incluyen, también, una*

[4] Por "videográfica" esse entende uma comunicación mediada preponderantemente por la imagen (figuras, vídeo, construcciones dinámicas presentadas em el ordenador).

búsqueda intencional de estrategias adecuadas a cada tarea específica a partir de la consciencia de que hay diversas reglas y principios posibles que pueden usarse en la solución de problemas (Oliveira, 1995: 152).

Reconocemos que l*as palabras determinan nuestro pensamiento porque no pensamos con pensamientos, sino con palabras* (Larrosa, 2001: 102). Pensar, para este autor es, sobretodo dar sentido a lo que somos y a lo que nos sucede. Uno de los componentes fundamentales de la experiencia, es su potencialidad formativa. En esa misma perspectiva, autores como Kramer resalta que l*a lectura y el escrito pueden, en la medida en que se configuran como experiencia,* [...] *desempeñar un papel importante en la formación* (Kramer, 2001: 110).

Se observa que *de alguna forma la investigación en Educación matemática que usa narrativas presupone un proceso colectivo de mutua explicación en que la vivencia del investigador se enlaza en la del investigado* (Cunha, 1997:192). De esta forma, identificamos la investigación sobre escritos como *un proceso dinámico de vivir y contar historias, así como revivir y recontar historias, no sólo de aquellos participantes sino también de los investigadores* (Clandinin e Connelly,2000: xiv). Esos autores observan que cuando el proceso narrativo se inicia, la investigación *pulsa con movimientos hacia atrás y adelante a lo largo del tiempo y a lo largo de un 'contiuum' de consideraciones sociales e personales* (Ibídem, p.66). También consideramos que la educación y los estudios educativos se dan en forma de experiencia y, apoyándose en autores como Dewey, Bateson, Czaniawaska, Geertz e Polkinghorne, se crea el espacio tridimensional de la investigación narrativa. La primera dimensión seria la 'temporalidad', que incluye pasado, presente y futuro. La segunda dimensión correspondería a las interacciones personales y sociales. La tercera dimensión – se refiere al 'lugar' en donde sucede la trama

Recordemos que, según Vygotsky , existe una estrecha relación entre el uso del lenguaje como instrumento cultural (en la interacción social) y su uso como instrumento psicológico (para organizar nuestro propio pensamiento individual). También decía que nuestra participación en actividades conjuntas puede generar una comprensión que después «interiorizamos» en forma de conocimiento y aptitudes individuales. Aunque estas afirmaciones han despertado un gran interés entre los psicólogos evolutivos, sorprende que se hayan aportado tan pocas pruebas para apoyarlas o rechazarlas. (Mercer ,2001: 198).

La escritura, tiene un claro valor epistémico porque sirve para transformar el conocimiento. De la misma manera que a veces decimos lo que no teníamos previsto decir, incluso aquello que ni tan solo sabíamos lo que pensábamos. No escribimos cuando ya lo tenemos todo claro y decidido. Pasar de lo mental a lo escrito afecta a las ideas de tal manera que hay quien sostiene que las ideas que se generan al escribir no son las representaciones mentales trasladadas a otro medio, son ideas diferentes. Unas serían las ideas corporeizadas en el pensamiento y otras las corporeizadas en la escritura (Tolchinsky, 2001:95). El lenguaje permite crear textos escritos que posibilitan la comunicación y el aprendizaje y que también sirve para validar teorías nuevas. La comunidad científica expone sus conocimientos con palabras, y así se posibilita el debate científico, con críticas y aportaciones que regulan la validez de una aportación y la hacen madurar.

De modo similar el alumnado valida el su aprendizaje a través de la expresión oral y escrita de sus ideas que les permiten adecuar sus formas de entender los fenómenos científicos. En un proceso dialógico en el aula de matemática, para la mejora de la productividad de textos matemáticos, se propone habitualmente lo siguiente:

- explicar con detalle los contenidos y criterios de evaluación y hacer consciente al alumnado que la mejora de la competencia lingüística es un elementos clave a trabajar;
- adecuar la terminología de las preguntas realizadas al alumnado al tipo de textos orales y escritos que se le proporcionan: sustituir las demandas de explica o razona por las de describe o define;
- garantizar la comprensión de los enunciados a través de su lectura atenta en voz alta, la redacción individual de un resumen del enunciado al inicio de cada actividad y la interacción con los compañeros para compartir el significado de lo que se pide;
- introducir actividades para promover la conversación exploratoria en grupos cooperativos así como el debate general en el aula al inicio de cada secuencia didáctica como método para partir de los conocimientos previos del alumnado y como recurso eficaz para posibilitar la elaboración de textos descriptivos que sirvan de punto de partida para discusiones grupales;
- incluir modelos y pautas para la construcción de definiciones científicas de dificultad progresiva al final de cada secuencia didáctic;
- proporcionar modelos de creación de resúmenes para aprender a seleccionar la información más relevante de los textos de referencia;
- pautar la elaboración de un texto explicativo para hacer la exposición oral del trabajo final de síntesis de los contenidos trabajados en la unidad de trabajo;
- dar pautas de reflexión y de crítica de los propios textos así como de los textos de los compañeros y promover actividades de autoevaluación y de coevaluación;
- proponer pautas de reflexión y de comprobación compartida sobre la eficacia de los textos orales y escritos producidos para la mejora del aprendizaje de las matemáticas y de las habilidades lingüísticas;
- proporcionar modelos de coevaluación y de autoevaluación para adecuar el proceso de aprendizaje a las diversas necesidades individuales; (I Cerdá; Parlar i escriure de matemàtiques, 2009: 208) .

2.6. Las producciones escritas en la matemática escolar.

Con el propósito de tener el máximo de información posible de la aplicación del conjunto de tareas matemáticas realizadas en el aula, se ha puesto formas de negociación que permiten regular (De Landshere 1996) el proceso al mismo tiempo que obtener las informaciones de los alumnos y poder evaluarlos formativamente. Diversos autores citan técnicas o modalidades diferentes de tipo escrito para obtener este resultado: cuaderno, diarios, resúmenes, autocontroles, mural, libro para una aula, libro del grupo, etc. Todos ellos son considerados habitualmente como *Contextos de producción* en donde se dan consignas determinadas, desdoblamientos, etc. En todos ellos, el objetivo es crear un ambiente de metacognición y reflexión del trabajo realizado. Todos ellos están contaminados por los eventos que ocurren en la clase. En efecto, leyendo a cualquier texto de cualquier muestra, el debate oral y público carga y conquista las atenciones de los alumnos, siempre podrán descubrir algo nuevo, tener la sensación de placer.

Los escritos que consideramos en la propuesta para analizar se propusieron inicialmente con el objetivo de proporcionar datos para la evaluación reguladora tanto de los estudiantes como del profesor. La consigna de los primeros textos fue proveer un profesor de informaciones (conocimientos, proceso, transferencia, etc.) a respeto de eventos didácticos sobre un contenido específico, que no serán asistidos por él. Las primeras REv con las características de las que analizamos en este trabajo, fueran producidas en 1993, y luego se constituyeran como una meta de producción matemática independiente (en el sentido de se desarrollar en paralelo) de sus aspectos relacionados a la evaluación. Discutiremos en otro momento las REv desde la perspectiva del quehacer matemático.

La base para la producción de los textos de REv siempre fue lo vivencial (sensaciones, memorias, discusiones posteriores, etc.) y lo documentado. Aquí hay un elemento fundamental a ser considerado, los apuntes. El cuaderno de clase tiene un rol importante para la producción de las REv. Las REv fueran propuestas y producidas en los siguientes ***contextos*** situacionales: (a) Al final de una secuencia didáctica corta o una clase acerca de un tópico matemático; (b) Después de una actividad de resolución de problemas o investigación; (c) Como documento y materialización de un proyecto hecho; (d) Al final de un mes de trabajo matemático; (e) Como sistematización de un semestre o año lectivo; (f) Como documento de 4 años de estudios de las matemáticas.

El ***tiempo*** de producción era variable, podrían escribir en un tiempo determinado en la aula, en otros momentos las eran producidas en la casa con plazos que iba de 1 a 3 días. En algunas ocasiones las escribían en clase, lo profesor hacia la recogida, y los alumnos las escribían nuevamente en sus casas sin hacer la lectura de lo que habían hecho en clase. En situaciones como esa, las dos REv eran objeto de lectura y análisis como tarea matemática.

La regla general que se consideró fue que todo lo producido en aula tenía que pasar por la etapa de socialización y discusión. Desde las primeras experiencias realizadas la Redacción-Evaluación se consideró una producción de carácter público que asume *el rol de la socialización de los significados matemáticos desde la autonomía de los individuos que no deben solamente responder a un patrón fijado institucionalmente.* Eso las diferencia de otras formas de producción escrita más dirigida, aunque posee características comunes como fomentar la metacognición y pretender un buen nivel de comunicación. En momentos sucesivos, nos preocupamos por adquisición de estilo (estética) y observamos que podríamos conjeturar las siguientes consecuencias:

- Centro, apreciación y valoración de las interacciones por la necesidad de contemplar los eventos didácticos y los procesos en las REv (dominio cognitivo)
- Estilo auto organizacional (dominio estratégico)
- Crítica (preciosismo en la producción del propio texto, actitud en los eventos socializados de discusión sur el cuadro o sur las producciones de los colegas)
- Control cognitivo
- Procesos de argumentación refinados y rigurosos-

Los textos de redacción-evaluación como tareas complejas reguladas.

Este tipo de tareas, son propuestas inicialmente con el objetivo de proporcionar datos para la evaluación no como resultado más sí como reflejo de un proceso con una pauta de objetivos, luego se observó que los textos producidos ofrecían datos más allá de lo esperado, y a partir de la socialización y discusión de sus estilos y contenidos, las REv adquirieran "personalidad propia" y se sofisticaran, protagonizando los momentos de institucionalización de los saberes matemáticos, compartidos y producidos colectivamente. Más que textos descriptivos de hechos, parte de las primeras REv documentaban procesos, procesos conscientes y explícitos. Cargaban la expresión y documentación de: sensaciones, conflictos, bloqueos, ruidos, tanteos, disensiones, deseos, dudas, creencias, concepciones, creaciones, movimientos, ... como los de las estrategias de resolución de problemas, y las interacciones verbales que ocurrirán, más expresaban también procesos no explícitos y no verbalizados por ninguno actor en el aula, pero sentidos e internalizados por los alumnos que los ponían por escrito. Ofreciendo así al profesor una herramienta eficaz para evaluar y hacer revisión de la dinámica de las clases, las concepciones, creencias los filtros de los alumnos y del proprio profesor. Esta metamorfosis sufrida por las REv, independiente de la voluntad de los protagonistas del evento didáctico en que las generaran, luego ha hecho que ocupasen otro sitio, más relevante, en la dinámica de enseñanza – aprendizaje. El acto de escribir una REv se constituye en un momento en un fórum virtual de reflexiones acerca de hechos y eventos de enseñanza, en el otro momento es la expresión de intervención de los alumnos en los actos del aula, junto a sus colegas y profesor.

Nuestra apuesta inicial es que las REv se constituyen como productos, en sí, del conocimiento matemático, y que entre otras cosas igualmente importantes son capaces de reflexionar y dar informaciones sobre el ambiente en que fueran producidas. Más tarde, en un estudio empírico realizado en la maestría (Lopes, 2000) se observó que la acción de producir REv ha propiciado algunos elementos importantes en la educación matemática de los alumnos, como se explican a continuación:

1. La actividad de escribir acerca de las matemáticas ha mejorado la comunicación escrita de los alumnos en general;
2. Escribir acerca de matemáticas y sus procesos, ha hecho con que los alumnos mejorasen sus procedimientos de organización personal;
3. Desarrollaran y perfeccionarán sus procesos personales de reflexión y crítica;
4. Desarrollo sus capacidades comunicativas;
5. Actuó positivamente en aspectos afectivo – emocionales con mejora de autoestima;
6. Se percibió aumento de sus conocimientos acerca de los temas matemáticos estudiados frente a las amplias conexiones y relaciones producidas (agotamiento de tema);
7. Desarrolló atención a los aspectos semióticos específicos, simbología y lenguaje de la matemática;
8. Propició momentos de análisis y síntesis;
9. Desarrollo sus mecanismos de argumentación;
10. Propició que los alumnos se colocasen del punto de mira del otro.
11. Valoración de elementos no directamente matemáticos, utilizados en las REv (historia, literatura, diseño del texto, estética, valoración, etc.).

En cuanto a la comunicación propiamente dicha, las REv se diferencian de las producciones tradicionales no sólo por la estructura del texto más también por la valorización de formas semióticas que van más allá de las fórmulas, definiciones y cuentas. Mitad de la muestra estudiada (la REv hechas por las alumnas) hacen uso de una diversidad de representaciones verbales, simbólicas, geométricas y otras, con el propósito claro de hacer ver a los lectores facetas de los conceptos y procedimientos presentados para convencerlos de su importancia y enseñarlos a hacer uso. Añadiese a esto una preocupación de naturaleza estética en el modo que hacen el diseño (formatación) de sus REv.

Al mirar los elementos lexicales específicos del vocabulario utilizado por los alumnos y los verbos que indican las representaciones y acciones, al analizar los patrones y relaciones temáticas desde distintas miradas (estructural, metacognitiva, etc.) se puede capturar los contenidos estudiados, las relaciones hechas y habilidades conquistadas.

CAPÍTULO 3

METODOLOGIA

En este capítulo se caracteriza cómo se van a enfrentar las preguntas de investigación, el tipo de diseño investigador, así como las grandes fases (3.1.). Se justifican las personas y textos que intervienen en el estudio en cada una de las fases (3.2.). Para el análisis de lo cognitivo se reconocen las prácticas y el tipo de significados matemáticos (3.2.1.). A continuación, el análisis de las interacciones según Scott y Mortimer (3.2.2.). Finalmente el análisis de las negociaciones de significados según Baker y Sophie Lauvergne en el gupo de Nicolas Balacheff (3.2.3..). Junto a ello, las herramientas que se usan para tratar los datos en cada uno de los análisis, usando ejemplos simplificados de su uso posterior (3.3). Así, las que nos permiten analizar el contenido matemático (3.3.1.), el significado (3.3.2.) y las propias del análisis semántico (3.3.3.).

El separa el análisis sistémico, con su valor integrador de nuevo a partir del análisis crítico del discurso (3.4.) desde la vertiente de lo personal (3.4.1.) y lo interpersonal de significados construidos en el grupo de forma colaborativa (3.4.2.), acabando por mostrar que detrás de ello está una reflexión metacognitiva.

Por último, se muestra el esquema general de cómo se hace cada análisis en relación a los objetivos de la tesis. (3.6.).

3.1. Bases y fundamentos metodológicos.

"…enfoques analíticos para examinar mecanismos que comienzan con ideas teóricas que son testadas a lo largo del diseño, implementación y estudio sistemático de herramientas educativas que dan cuerpo al mecanismo conjeturado inicialmente"

Shavelson y Towne (2002, p.120)[5]

El estudio que se presenta comparte algunas características de las siguientes metodologías de investigación: (a) Interpretativa: ya que la investigación tiene en cuenta el sentido de las acciones de los sujetos. (b) Cualitativa: puesto que el objeto de investigación no es algo que se pueda observar y cuantificar. Y presenta las siguientes características generales: (a) Exploratoria: en el sentido que se pretende recoger y analizar información que pueda servir para orientar futuras investigaciones. (b) Descriptiva: puesto que ha generado informes narrativos a partir del ejercicio de aplicación de las herramientas de los modelos para el análisis de las clases.

Esta investigación tiene una inspiración etnográfica, y elementos de la investigación de diseño. La investigación de diseño o investigación basada en diseño es un paradigma metodológico que se justifica por el hecho de tratar de establecer características de un proceso de enseñanza ocurrido, del que se quiere identificar sus posibilidades de futuro. Reviviéndolo como estudio de caso "arqueológico" y antropológico en el sentido que tratamos de recuperar significados, caracterizando situaciones en toda su complejidad, cuando mayoritariamente no es conocida a priori, como suele ocurrir en los procesos de enseñanza. Ello obliga al investigador a distinguir entre aquellos elementos que van a ser objeto de estudio y aquellos otros que se consideran en segundo término que se asumen como condiciones del entorno (Barab y Squire, 2004; Cobb et al., 2003).

En este tipo de diseño investigador, intenta optimizar el diseño tanto como sea posible y observar cuidadosamente cómo funcionan los diferentes elementos (Collins, Joseph y Bielaczyc, 2004). Involucra diferentes tipos de participantes en el diseño para utilizar sus diferentes experiencias en la producción y análisis de éste; estando siempre involucrada, Intervienen en el proceso de investigación diferentes tipos de participantes en el diseño, para utilizar sus experticias en la producción estudios se caracterizan por un refinamiento progresivo, ya que el diseño es constantemente revisado a partir de la experiencia (Collins et al., 2004). El proceso de investigación tiene lugar a través de ciclos continuos de diseño, puesta en práctica, análisis y rediseño.

Kelly (2004) hace observar la necesidad de especificar la "gramática argumentativa" de este tipo de estudios, es decir, la lógica que guía el uso de los métodos y que sustenta el razonamiento sobre los datos, para que sirva de garantía de las argumentaciones que se obtienen. En esta metodología, se realiza un análisis retrospectivo de los datos

[5] Shavelson, R. J. y Towne, L. (2002). Scientific research in education. Washington, DC: National Academy Press

recogidos de la actividad ocurrida en el aula. Mediante el análisis de los textos, grabaciones o notas recogidas, el investigador-docente puede reactivar sus recuerdos de las experiencias vividas en el aula pudiendo así recordar las interpretaciones espontáneas que fueron realizadas, en el momento de la intervención.

Este tipo de etnografía, registra un mayor énfasis en la comprensión de escenarios poco familiares y de lo que los constituye. Según Spradley (1997),

> *"El elemento esencial de la etnografía es esta preocupación con las acciones y los acontecimientos para las personas que pretendemos conocer. Algunos de esos significados se expresiones directamente a través del lenguaje; muchos son tomados como garantizados o implícitos y comunicados apenas indirectamente a través de la palabra y de la acción. Pero, en cualquier sociedad las personas hacen uso constante de esos sistemas complejos de significado para organizar su comportamiento, para que se comprendan a sí mismos y a los otros y para dar sentido al mundo en que viven; estos sistemas de significado constituyen a su cultura; la etnografía implica siempre a na teoría de la cultura."* (Spradley, 1997: 20)

Se opta por la investigación etnográfica porque, aplicada a sistemas sociales basados en tecnologías de la información como las comunidades virtuales, aporta la capacidad de interpretar el contexto de inteligibilidad mediante una *descripción densa* (Geertz, 1992) a partir de las interacciones sociales basadas en el texto con el que los participantes inscriben sus discursos en la negociación de significado, y permite la interpretación de los datos obtenidos a partir de una *observación participante* en un contexto específico, circunscrito y microscópico como el de la comunidad virtual estudiada.

> *"De manera que la descripción etnográfica presenta tres rasgos característicos: es interpretativa, lo que interpreta es el flujo del discurso social y la interpretación consiste en rescatar "lo dicho" en ese discurso de sus ocasiones perecederas y fijarlo en términos susceptibles de consulta [...]. Además, la descripción etnográfica tiene una cuarta característica, por lo menos tal como yo la practico: es microscópica". Geertz (1992:32)*

Como una investigación etnográfica, se basa en una metodología cualitativa fundamentada en el trabajo de campo mediante la observación participante del investigador en el contexto. Tanto las evidencias documentales como las entrevistas han sido complementadas y enfocadas desde la observación participante.

> *"El antropólogo de manera característica aborda esas interpretaciones más amplias y hace esos análisis más abstractos partiendo de los conocimientos extraordinariamente abundantes que tiene de cuestiones extremadamente pequeñas". Geertz (1992:33)*

La metodología empleada pretende aportar un modelo de análisis del contexto de inteligibilidad caracterizado como comunidad. En ese sentido se cuida de conocer las culturas de la clase y aquellas que muestran el medio de trabajo, procurando comprenderlos en la medida que el propio docente/investigador se vuelve gradualmente un participante cada vez más legítimo y menos periférico de dicha comunidad de práctica (Lave & Wenger, 1991).

En el inicio un elemento situacional ha puesto en discusión, la legitimidad de hacer esto estudio y su clasificación en el marco de las investigaciones en educación matemática.

Lo que ha provocado la cuestión es el hecho de que lo investigador que firma este trabajo actuó como participante de los eventos donde se producirán los objetos de análisis (las REv). En principio se podría entender tratarse de un caso especial de investigación-acción. Este término fue utilizado por primera vez por el psicólogo alemán Kurt Lewin en los años 1940 para referirse a los estudios de la vida social y a las intervenciones con la intención de transfórmalas. Desde entonces muchos investigadores se apropiaran del término, transformándolo en algunos aspectos. Thiollent (1992), por ejemplo, considera la investigación-acción un tipo de investigación participante y sugiere que la diferencia entre una y otra, en el contexto de la América Latina, es que ni siempre en la investigación participante existe una "voluntad planeadora", una "voluntad de acción conjunta programada". En el Brasil en los años 70-80, la investigación-acción o investigación participante marcó gran parte de los estudios sociales, en especial los de educación popular (véase Freire y sus seguidores), que alimentaban los movimientos que luchaban por la democracia contra el estado de excepción que marcó los 23 años de dictadura militar.

Pero para nosotros hay unas variables distintas que tiene que ser consideradas y que pueden contribuir para la caracterización de este estudio. La variable (distancia del) tiempo puede ver tomada como un diferencial. En los estudios de investigación-acción, la distancia temporal entre las acciones de intervención y la investigación son cercanas. No sucede lo mismo en este estudio, aunque, uno de los participantes de las acciones objeto de estudio (como observador, colector dos datos, gestor y ejecutor de las acciones didácticas que llevaran a la producción de los textos analizados) es el mismo que la mira como investigador desde una nueva posición.

A esto hay que añadir que más allá de considerar la variable tiempo hay también las variables objetivo y grado de intervención en los hechos. Queda el variable grado de intervención en la análisis, pero esto ha de ser controlado por el uso adecuado de los cuadros teóricos disponibles y además de los utilizados en esto trabajo. Lo mismo pasa con otros investigadores como sociólogos o historiadores que se dedican a mirar hechos pasados de los que muchas veces pueden tener participado como observadores o militantes

La posición de investigador privilegiado, por detener más informaciones y memoria acerca de los eventos, de nuestra mirada, no contaminará lo estudio. El (micro) análisis afinada posibilitará una relectura y posible de posición de madurez con vista a formular conclusiones (por confirmación o refutación), nuevas conjeturas, cuadros teóricos etc.

Para apoyar los resultados obtenidos se analiza la forma de participar los estudiantes en la clase. Se ha pretendido obtener información sobre las intervenciones e interacciones que se producen entre ellos, interesándonos particularmente si, a través del debate y la discusión, llegan a acuerdos que pueden repercutir en la construcción del conocimiento. Se hace con el fin de determinar el tipo de interacciones que se producen y aquellas que forman cadenas conversacionales, entendidas como grupos de interacciones en las que hay debate e intercambio de puntos de vista, pudiéndose llegar a la negociación de significados.

3.2. Principios generales para el análisis.

Ante todo, presentamos los datos que van a ser considerados para responder a nuestras preguntas de investigación, enunciadas en el capítulo 1. Se explica el contexto para acortar la distancia entre la investigación y los datos. Se explican características que subyacen el uso de ciertas formas de análisis, así como las herramientas.

Los Datos. Contexto.

Para mostrar que se desarrolla un ambiente de comunidad de investigación colaborativa y de investigación, que regula el aprendizaje, se describirá la experiencia base que analizamos, realizada entre 1993 y 1996, que tuvo un primer análisis en 2000 y se revive más adelante en los años sucesivos. En la reflexión participan dos investigadores externos además del profesor-investigador, que cuidan de algunos detalles y revisan los resultados. .Se desarrollará el estudio en dos fases. En la primera fase, se trata de identificar características de un ambiente de clase (capítulo 4), y en una segunda fase, se reinterpreta un proceso largo que incluye la situación anterior (capítulo 5). Además de eso, el primer análisis se basa en uno anterior más cercano a la realización de los hechos (Lopes, 2000).

En la investigación precedente, se realizó un estudio sobre 4 textos producidos por 2 alumnos de 5- 7° grado, mediante un análisis del contenido del discurso, desde diversas perspectivas que se explicarán más adelante. Ahora, para responder a la primera parte de nuestros objetivos, en la primera fase, realizamos un análisis sobre tres prácticas matemáticas que se tienen completamente documentadas. SE analizan las configuraciones epistémicas. Ahora bien, se incorporan dos tipos de análisis, para analizar los elementos de interacción así como normativos, y epistémicos matemáticos (usando herramientas del enfoque ontosemiótico). Se desarrolla en el capítulo 4.

Para la segunda fase, realizamos dos estudios etnográficos de casos con dos estudiantes de los cuatro que habían sido analizados en nuestro estudio anterior (Lopes, 2000), llamados entonces como Joana y Gabriela.

En este tipo de investigación, se seleccionan los participantes de forma intencional y estratégico (Merriam, 1988), Así, los participantes se escogieron porque teníamos registros que nos permitían el análisis. En un estudio anterior, habíamos recogido y estudiado una gran cantidad de textos producidos por, entre 60 y 70, alumnos (2 grupos aula) de una escuela de la ciudad de São Paulo, SP – Brasil, en ocasiones de contextos distintos, entre los años de 1993 a 1996, los alumnos de los grupos estudiados fueran acompañados por lo mismo profesor durante cuatro años desde la clase de 5º (5ª serie de la enseñanza fundamental del Brasil (11-12 años), hasta los 14/15 (8º serie).

Para justificar aspectos normativos y de la negociación, ya en este capítulo se reconocen los resultados de un estudio previo (Lopes, 2007) basado en el análisis del discurso, realizado sobre 4 textos producidos por alumnos diferentes. En dicho estudio, habíamos analizado los textos escogidos relacionados con una tarea matemática sobre "ecuaciones del 2º grado" trabajado en dos clases seguidas del año de 1995, cuando los alumnos se encontraban en la parte final del 7°grado (noviembre). Toda vez que uno de los propósitos de aquel estudio fue ejercicio de utilización de herramientas del análisis del discurso basadas de la lingüística para inferir informaciones a respecto de eventos didácticos, escogemos al azar dos textos de mujeres y dos textos de varones de características diferentes, sin exigir ninguna condición especial a otras condiciones o variables intervinientes.

Para nuestra primera parte del estudio, que pretende reconocer características del ambiente en el que se desarrollan las prácticas asociadas a los textos, se encuentra en el capítulo 4 de esta tesis, y usamos dos análisis que llamaremos de prácticas según EOS , así como análisis de interacciones según Scott y Mortimer. Para esta primera parte, se toman tres prácticas diferentes de 6º año (10-11 años) sobre mosaicos y polígonos, construcción y definición de grado de no convexidad (11-12 años), y una tercera investigación sobre ángulos en el reloj (10-11 años).

Para tomar los datos de la segunda parte del estudio (en el capítulo 5) nos basamos en todos los textos recogidos de prácticas realizadas por un mismo grupo de alumnos a lo largo de cuatro años de trabajos, en donde queremos ver que se dan unas características d una comunidad de investigación matemática que llamamos Ambiente de Inspiración Lakatosiano, a partir de la idea de investigación de Rafaela Borasi, y los trabajos del grupo de Nicolás Balacheff. Las herramientas para este tipo de análisis se basan en técnicas del análisis crítico del discurso sobre lo argumentativo, así como herramientas del análisis epistémico y normativo de las prácticas matemáticas según el llamado enfoque ontosemiótico que esperamos que permitan reconocer la evolución cognitiva de los estudiantes, así como el refuerzo de las propiedades del ambiente.

Se toman cinco tareas de distintos tipos, para ver las diferencias. (a) Una tarea sobre tangram (de grado 5, cuando los estudiantes tenían 11 años). (b) Una tarea sobre pentominós (al final de 5 grado, que bien podría haber sido de inicios de grado 6), (c) sobre la ecuación de segundo grado (de grado 7), (d) Una tarea sobre conjuntos numéricos (en grado 8) y (e) una actividad final de síntesis (al fin de grado 8). Estos textos se interpretan como actividades reguladoras, que dan cuenta de las prácticas desarrolladas. Asimismo van a dar muestras de una parte de la trayectoria didáctica total desarrollada en la experiencia. Los textos completos se muestran en los anexos y se describen en los capítulos correspondientes.

La observación participante se acompañó con registros fotográficos y vídeos de algunas aulas de Matemáticas, durante y después de la elaboración de resúmenes desempeñando el profesor/investigador un papel de participante observador en la medida en que hacía parte del grupo investigado, siendo su posición de investigador del conocimiento de los restantes participantes (Merriam, 1988). Consideramos dos características de la observación participante que consideramos de gran relevancia (Stenhouse, 1993): (1) un observador participante se envuelve en el contexto que observa, compartiendo los hábitos y costumbres de la comunidad en que se encuentra inserido; (2) a necesidad de mantener un cierto distanciamiento de la realidad que se observa.

La observación participante implica, simultáneamente, un desarrollo emocional y un distanciamiento objetivo" (Stake, 2000: 465). A pesar de ello, por mucho distanciamiento que el investigador consiga mantener en relación al objeto observado y analizado, la interpretación que se hace de los datos tendrá una tendencia subjetiva, ya que está configurada por sus conocimientos, vivencias, valores y sentimientos. Pero el distanciamiento no debe comprometer su participación en la comunidad de práctica. Por ello, se trata de apaciguar ese problema con un equipo investigador que contribuye a afianzar y discutir los resultados.

Para alcanzar los objetivos propuestos, decidimos escoger cuatro textos de dos estudiantes que llamaremos Gabriela y Joanna, para analizar el potencial cognitivo de las aulas correspondientes en el ambiente AIL, para ver si conseguimos mostrar la consolidación de las características observadas así como los elementos de desarrollo matemático. Para ello se aprovechó que el mismo profesor siguió con la misma forma de trabajo para ver los efectos a largo plazo en el ambiente.

Toda vez que uno de los propósitos de este estudio es el ejercicio de utilización de una herramienta de la lingüística para inferir informaciones a respecto de eventos didácticos, escogemos al azar dos textos de características diferentes, sin exigir ninguna condición especial a otras condiciones o variables intervinientes.

3.2.1. Análisis conceptual y semántico.

En el análisis conceptual, observaremos el desarrollo de los aspectos matemáticos: si el texto es o no amplio, se generaliza hechos, se hace conexiones, se problematiza, como argumentan, se hacen los cálculos correctamente, se y cómo define, se ejemplifica o verifica resultados, cómo concluye, se hay ideas fuertes y/o creativas. Añadiendo a estos elementos los de naturaleza lingüístico-matemáticas: como hace uso de la sintaxis propia de las matemáticas: vocabulario, símbolos y notaciones; se usa representaciones diversas, y se indica que nivel de formalismo se usa.

Lemke nos orienta a hacer un **análisis temático** de las relaciones semánticas. En el análisis temático, una relación semántica describe cómo se relacionan dos significados de dos palabras o frases (ítem temáticos) cuando se usan conjuntamente al hablar sobre un tema particular. Las mismas o muy similares relaciones semánticas pueden ser expresadas por diferentes relaciones gramaticales entre palabras y frases. En ocasiones, los términos gramaticales se usan para nombrar las relaciones semánticas. En la siguiente relación, indico algunas de las relaciones semánticas más comunes junto con sus nombres en varias teorías semánticas y gramaticales. Para más detalles, véanse Halliday (1985) y Lemke (1983a). Para hacer nuestro análisis consideramos el análisis temático y las estrategias de desarrollo temático que son las técnicas específicas usadas por profesores y alumnos para construir una red de relaciones semánticas entre los términos clave de una materia (un patrón temático). A continuación se indican las más comunes y básicas de estas estrategias de discurso que se utilizan en el lenguaje para comunicar sistemas conceptuales de la ciencia (Lemke, 1983b). Inicialmente consideramos relaciones de tipos diversos como se muestran en la figura 3.2.

Relaciones nominales	Relaciones taxonómicas	Relaciones de transitividad	Relaciones circunstanciales	Relaciones lógicas
Atributiva Clasificadora Cuantificadora	Muestra Hipónimo Merónimo Sinónimo Antónimo	Agente; Meta Medio; Beneficiario Rango Identificación Posesión	Localización Tiempo Material Manera Razón	Elaboración Adición Variación Conexión

Figura 3.2. Tipos de relaciones textuales que se analizan (Lopes, 2007).

Y estrategias como las que se muestran en el cuadro de la figura 3.3.

Estrategias de diálogo	Estrategias de monólogo	Estrategias estructurales generales	Estrategias y contraste	Estrategias temáticas globales	Otras Estrategias
Serie de preguntas de profesor	Exposición lógica	Conexión sintáctica	Aposición	Repetición con variación	Metadiscurso
Selección y modificación	Narrativa	Conexión retórica	Concordia	Condensación	Señalar información antigua
Recontextualización retroactiva	Resumen selectivo	Conexión genérica	Glosar	Nexo temático	Señalar información importante
Construcción conjunta	Dar el fundo y el primer plano		Énfasis contrastante	Entretejido de temas (armonía cohesiva)	Rotura de marcos
Diálogo de texto externo	Conexión anafórica y catafórica		Ambientes paralelos Autocorrección	Alusión intertextual	

Figura 3.3. Tipos de estrategias verbales en los textos

La recogida de datos.

A continuación se resumen los textos correspondientes a las dos partes de nuestros análisis que se realizan en relación al objetivo que se pretende.

Tareas que se explican y analizan	Tipo de análisis	Objetivo que se quiere cumplir. Conclusiones esperadas
Polígonos Grado no Convexidad	ACD y EOS y análisis estructurales	Para obtener relaciones cognitivas y metacognitivas así como patrones interactivos Para obtener trayectorias epistémicas así como son las interacciones, legitimación, etc.
Ángulos en reloj	ACD y normativo en EOS y estructurales	para reconocer trayectoria epistémica implementada e interacciones, negociación (y cultura de AIL)
Tangram Pentominos Ecuación de 2º grado Conjuntos numéricos	EOS objetos y procesos (mezclar con análisis de significación conceptual)	Para sacar distinciones individuales y elementos comunes del ambiente mirado por dos personas diferentes, es una análisis matemática (aquí el foco no son las personas y si las tareas)

Figura 3.4. Tipos de análisis que se realizan en el capítulo 4

Como producción escrita las redacciones instauran una interacción con por lo menos dos participantes: quien escribe el texto, el autor, y aquello a quien el texto es destinado, el lector. Esa interacción escrito/lector pude En se manifestar de diversas maneras y ser representada por más de una entidad. En nuestro caso, para el papel del autor identificamos cada uno de los alumnos/escritores de las redacciones. Ya para el papel del lector identificamos más de una entidad: el profesor que ha puesto la consigna, el grupo a que el autor pertenece representado por sus colegas de aula (en algunos momentos, como ha mostrado las análisis, el autor incluido y el profesor) y una audiencia mayor representada por un lector anónimo a quien el texto podría ser destinado.

Los niveles de análisis que se han determinado son varios que se complementarán para responder a nuestras preguntas de investigación. Primero se describen los análisis, y se explican las herramientas propuestas en los modelos empleados de forma ejemplificada.

Reconocemos que hay caminos más recomendados y utilizados por la comunidad de investigación para hacer el análisis de situaciones de aula, apoyadas fundamentalmente en la videografía.

> *“La videografía (estudio de la actividad a través de películas de vídeo) y el análisis microgenética (estudio detallado de la evolución de las relaciones entre agentes y situaciones) se combinan para formar un modelo de recolección y análisis de datos que permite una inter-pretación robusta y consistente de los mecanismos psicológicos subyacentes a la actividad humana. Vygotsky argumenta, entretanto, que la abordaje microgenética debe asociarse al análisis del macrocontexto sociocultural del desarrollo, con el fin de que posáramos identificar el* ***significado*** *de las acciones y procesos mentales humanos.” (Meira, 1995)*

Pero nuestro estudio no dispone de todos los videos, y no mira solamente y directamente las interacciones en aula, sino también como los alumnos representan sus conocimientos matemáticos y aún la producción de ellos, a través de los escritos de los individuos objeto de este análisis. En efecto, para responder a las preguntas propuestas, queremos partir de las potencialidades d los textos producidos por los propios estudiantes. Como ya se dijo, consideramos que el hecho de que los estudiantes construyan narrativas, permite que usemos técnicas de análisis que hasta ahora han sido propias del análisis que se usa en la formación de profesores. Además de ello, porque entre nuestras hipótesis está que se consigue un ambiente con orientación didáctica, como es la formación del docente. El uso de narrativas ha sido usado por muchos autores como Olive Chapman en Canadá, Joao Pedro da Ponte en Portugal, Arthur Powell en Estados Unidos, y Dario Fiorentini en Brasil. La elección de los caminos e instrumentos utilizados en este trabajo está íntimamente asociada a la naturaleza del objeto que se escogió para mirar las producciones escritas de los estudiantes.

3.2.2. Análisis de la práctica matemática en la primera fase.

Para el análisis de la **practica matemática** se recoocen los siguientes elementos: (a) componente epistémica [implica reconocer objetos y procesos] y (b) componente normativa [normas interactivas y normas epistémicas]; (c) análisis comunicativa. Interacciones y conflictos (e) Identificación de normas.Un tercer nivel de Análisis de las **relaciones interactivas** (se complementa con el modelo de Mortimer & Scott), descripción, explicación, generalización (a) Propósitos de enseñanza y formas de intervención, (b) Patrones de interacción. (c) Enfoque comunicativo.

Se propone entonces desde el EOS la configuración didáctica como una herramienta que permite realizar un análisis detallado de los procesos de instrucción matemática. Conviene, sin embargo, partir de configuraciones didácticas teóricas de referencia. Por ello, se describen cuatro tipos teóricos, que se designan como configuraciones adidáctica, magistral, dialógica y personal.

Se considera diferentes tipos de normasepistémicas y lascognitivas para realizar unas prácticas matemáticas de las que se obtendrá una configuración epistémica emergente. Por otra parte, el profesor pretende que sus alumnos personalicen las configuraciones epistémicas en configuraciones personales previas (o configuraciones metacognitivas).

3.2.3. Análisis de interacciones y producción de significados en el modelo de Scott y Mortimer.

La propuesta de Scott y Mortimer, se enmarca en la línea de investigación de la enseñanza de las ciencias que busca cambiar la atención de los estudios centrados en la comprensión individual de los estudiantes a cerca de fenómenos específicos, hacia estudios sobre la forma en que los significados y comprensiones se desarrollan en el contexto social de la clase.

Las raíces de esta propuesta se encuentran en los análisis llamados de semiótica social que buscan reflexionar sobre el papel del docente y la manera como éste dirige y sostiene interacciones en el aula para hacer el conocimiento científico asequible a toda la clase. ELos significados son vistos como polisémicos y polifónicos, generados en la interacción social y después internalizados por los individuos. El proceso de aprendizaje se asume como una negociación de nuevos significados en un espacio comunicativo en el que se encuentran diferentes perspectivas culturales. Las interacciones discursivas son consideradas como constituyentes del proceso de construcción de significados.

Desde este enfoque, se busca desarrollar un lenguaje para describir el *género de discurso* de las clases de ciencias. Estos géneros de discurso son entendidos desde la perspectiva de Bakthin, que plantea que "cada esfera en la que el lenguaje es usado desarrolla sus tipos relativamente estables de enunciados". Los patrones de discurso que prevalecen en las clases de ciencias son muy diferentes y como tal, constituyen un género de discurso estable, que será un foco del análisis

El modelo de Scott y Mortimer se constituye en una herramienta de análisis de los diferentes tipos de interacción discursiva generados en la clase y la producción de significados en las clases de ciencias, concretado en el reconocimiento de propósitos de enseñanza y contenidos, enfoque comunicativo, patrones de interacción y formas de intervención,

3.2.4. Análisis de la negociación.

Seguimos el Modelo de Baker explicado en el capítulo anterior citado por Sophie Soury-Lavergne pp. 86-90. La negociación tiene 4 dimensiones: (a) el objeto y un conjunto de proposiciones que hacen parte de la solución de un problema que esta' siempre puesto; (b) estado inicial que implica fines comunes de los interlocutores y restricciones y al juego (en el dialogo); (c) estado final que corresponde a consensos y acuerdos sobre la solución; (d) proceso que, incluye registros aceptaciones y rechazos y relaciones entre las proposiciones (búsquedas de conjeturas, validación, papel del propio recurso.

3.3. Herramientas para el análisis en la segunda fase.

Se muestran a continuación las herramientas usadas en cada tipo de análisis con ejemplos de cada una de ellas.

3.3.1. Herramientas para el análisis de las matemáticas en los textos en la fase última del estudio.

Para analizar los elementos matemáticos involucrados en los textos, buscamos un modelo cercano a lo que fue utilizado hasta este punto. Nos basamos en los análisis de texto, y conceptual explicados, así como el análisis de interacciones por la sintonía entre su semiótica social y la gramática sistémico-funcional de Halliday (Lopes, 2000). Añadimos a estos cuadros algunos estudios sobre metacognición, habilidades y competencias matemáticas producidas en el seno de la comunidad de Educación Matemática con el propósito de capturar estos elementos en los textos. A continuación se muestra el proceso de lo que ocurrió en las clases en el contexto de los objetivos didáctico institucionales.

- Consigna de profesor. Implementación.
- Recogida de los textos y lectura por el profesor-investigador;
- Devolución de los textos a los alumnos para discusión individual;
- Socialización de los textos en aula, con lectura de algunos textos de otros, y comentarios de algunos alumnos, así como del profesor.
- Elaboración de los textos de redacción-evaluación.

El proceso de investigación con los datos que se siguió en la segunda fase partió de un estudio previo (Lopes, 2000) para los puntos 1 a 4, y fue el siguiente:

1) Lectura global y bruta de los textos por el equipo investigador
2) Elección al azar de dos alumnos de los que se tienen todas sus producciones
3) Transcripción.
4) Generación de hojas de análisis micro textual desde los elementos de nominación y atribución, participantes, sus papeles y acciones. Codificaciones.
5) Producción de cuadro bruto de los elementos semánticos para la mayoría de los textos.

Poseriormente se toman tres textos y notas de clase en tres momentos del curso, en donde se reconoce

6) Análisis de los elementos interaccionales a partir de la ACD , análisis de significados matemáticos construidos y Scott y Mortimer
7) Conclusiones sobre los diversos análisis.

Análisis textual.

Este análisis se efectúa mediante el uso de cuadros que recogen la transcripción de la actividad en bloques así como las características observadas en cada momento. Con él se pretende responder a las preguntas P13, P15, P21

	Análisis	Texto y sus bloques				Nombramiento		Atribución	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	Relato	Intercalación	Explicación Metodológica	Tipos de elementos	Partici-pantes	Papel de los participantes	tipo de atribución...	Acciones
Presentación	Introducción al tarea basada en dados consultados a sus registros o su agenda	Dia 14 de novembre					INST		Situación temporal
	valoración y orgujo por el adelantado del grupo		adiantando o assunto da 8a série		Contrato implícito	Fenomeno P→G	P1 G1		Apreciación de acuerdo de futuro
	informe con nombramiento del tema	tivemos nossa 1a aula sobre equação de 2º grau			Tema matemático	G(A) C	G1 C1	existencia nombramiento 1a pers.plural	Pasado vivencial
Nudo	informe de acción	A primeira coisa que o professor fez foi nos mostrar			Relato existencial	P→G	P1	beneficio	Evocación ilustrativa de una interacción
	informe del objetoto del estudio	algumas equações			Tipos de ecuación	Objetos	C1		identificación
	comentário evaluativo con reforzo positivo	que a gente já sabia resolver			Fenómeno elíptico = (algunas ecuaciones)	G(A)	G2	nombramiento 1a pers.plural	Autoevaluación con refuerzo positivo, sin crítica Implicación colectiva
	Asume dominio sobre casos particulares, reconocimiento implícito que há un universo desconocido de			como por exemplo $x+y=14$ ou $x^2 = 9$ ou $x^2 = 0$ ou $xy = 12$ $x^2 = -1$	Ecuación Rel. con ejemplo Variables (no explícito)	Objetos	C1		Ejemplificación Tipificación ("ou") Multiplicidad de casos
				etc . . .					Indicación de no agotamiento de casos
	ecuaciones y sus métodos de resolución	já sabiamos resolver 4 casos de equação			Fenomeno es sujeto	G(A) C	G2 C1	nombramiento 1a pers.plural	Reconocimiento de dominio sobre conocimientos
	expresión en linguage algebraica de casos generales, hierarquia implícita			A do tipo $x^2 = n$, $x^2 + n = 0$, $(x + n)^2 = m$	Ecuaciones "incompletas"	Objetos	C1		Intento de integración de un proceso de generalización vivido, donde una situación se reduce a la anterior. Tipologia clasificatoria o generalizadora ???? Ejemplificación local mediante formatos
	Identificación de un tipo del os casos especial nombrados e ejemplificado en linguaje aljebraico			e um do tipo quadrado perfeito → $x^2+6x+9 = 0$	Caso especial reducción a ecuación de 1º grado mediante trinomio tipo $(x+a)^2$		C2		Nombramiento de una situación particular Valorización implícita de propiedad algebraica

Figura 3.11. Ejemplo de parte del cuadro de análisis textual

A continuación (figura 3.12) se muestra un ejemplo de instrumento metodológico usado para el análisis conceptual que permite identificar cómo se desarrollan las definiciones, representaciones, objetos, relaciones conceptuales estructurales, contexto, conexiones y sistemas de referencia usados.

Elementos	Lo observado en el esquema teórico		Frase de los estudiantes
Definición	Afirmación para mostrar dominio / saber /		--
	Para dar más precisión y refinamiento del texto		--
	Para mediar e mantener control de la interpretación del lector / audiencia con sentido de dar cohesión al texto		--
Representaciones [Simbología, terminología, notaciones, esquemas, cuadros, gráficos,..]	Uso con indicia de apropiación y reconocimiento del valor		--
	Comunicando saber	Naturalmente	--
		Formalmente	--
Relaciones conceptuales Propiedades , clasificación, generalización , etc.	Explícitas	Para mostrar dominio para una audiencia	Já sabíamos resolver 4 casos
		Con indicios de controle e valoración del rigor	--
	Implícitas con indicios de apropiación		
Sistema (conexiones, discriminaciones)	Uso en conexión de contextos matemáticos	Conceptos conexos	Equações do 2º grau Quadrado perfeito Número negativo Trinômio Quadrado Perfeito Raiz quadrada
		Relaciones conceptuales involucradas	--
		Relaciones procedimentales involucradas	--
	Uso en conexión interdisciplinar		--
	Valor cultural, histórico		--
	Centrado en el razonamiento / aspecto metacognitivo		--
Situaciones referenciales (ejemplos, experiencias, recontextualizaciones ..)	Para comunicar saber		Já sabíamos resolver 4 casos $x^2 = n$, $x^2+n=0$, $(x+n)^2=m$ $x^2+6x+9=0$
	Para explicar		$X^2+6x+8=-1$ $X^2+6x+2=0$
	Para dar más legibilidad al texto		$X^2+6x+2=0$
Contextos (LECKIE-TARRY, 1995)	Situación (local, o concreto, o físico o social y los intercambios)		--
	Cultural (global, ...)		Relação com civilizações antigas
	Texto (información y lo elementos conectados)		--

Figura.3.12 Ejemplo de cuadro intermedio para el análisis de contenido conceptual en el caso de una actividad de ecuación e segundo grado.

3.3.2. Instrumento usado para recoger la significación conceptual

A continuación se muestra un ejemplo de cuadro reducido que se usa para reconocer los elementos textuales que hacen ver como se da la significatividad en cada uno de los textos. Este instrumento se usará para los resultadosdel capítulo 5.

Gran aspecto	Categoría	Aspecto observado	Cómo se hace	Elementos	El ejemplo del texto
Caracterización	Competencia sintáctica	Consciencia de rigor	Explicitando formalmente	Definición nominal y por extensión	O **conjunto N** abrange **os números inteiros positivos**: N = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...}
			Explicitando de forma coloquial	No expresa matemáticamente la correspondencia N ←→ conjunto	A ideia de um conjunto ser **enumerável** , significa que se alguém
		Afirmación para mostrar dominio / saber			--
	Competencia Metalingüística	Consigue gestionar elementos semióticos	Indicios de comprensión del procedimiento de argumentación de la innumerabilidad de Q		[tabela da **enumerabilidade** de Q] com balão
		Consciencia del propósito de los diferentes registros.	Usa cuadros para dar destaque; caracteriza subconjuntos p/ pela inclusión; indicio de apropiación de notación matemática estipulada en contrato		∈ pertence ... ∉ .. ∩ .. ∪ .. ⇒ .. ∀ qualquer ⊂ [box]
		Uso con indicio de apropiación y reconocimiento de valor	Caracteriza subconjuntos p/ complementariedad y por la inclusión		O conjunto **Ir** dos irracionais .. abrange todos os números que **não podem ser representados por**
	###	Hace rol de conceptos conexos (01, 02, 03...)	Proposición universal falsa Explicita relaciones conceptuales		Tem **subconjuntos** .. é **fechado** em relação a adição e ...
Sistemas y Relaciones conceptuales	Uso de conexiones entre conceptos / procedimientos	Explicita relaciones procedimentales (01-0P)	Explicita relaciones procedimentales (01-0P)		--
	Conexión entre contextos y conceptos	Explicita control y valoración del rigor			--
		Explicita relaciones conceptuales (01 – 02)	Proposición universal falsa		Tem **subconjunto**
		Explicita relaciones procedimentales (01-0P)	Indicios de comprensión del procedimiento de argumentación de la numerabilidad de Q		Para contar o conjunto **Q**, é preciso **conta-lo em diagonal** [box 0/0. 0/1, 0/2, ..]
	Conexión entre contextos y conceptos	Explicita control e valoración del rigor			--
		Implícitas con indicios de apropiación			--
		Implícitas sin apropiación			--
		En conexión interdisciplinar			--
		Cultural, histórico			--
		Centrado en el razonamiento			--
Registros	Situaciones referenciales	Uso de ejemplos que muestran relaciones, ideas de lo que agrego sentido al concepto			Ex. √2, √--3,√7, π
		Valor dos ejemplos / contra-ejemplos	Indicio de barajamiento de conceptos e relaciones conceptuales Desarrolla proceso apoyado na determinación de una media aritmética entre los dos números elegidos.		**Q não é** fechado em relação **Entre 1/2 e 3/4** existe infinitos números .. Ex.:
		Recontextualiza reinterpretando	Asociación hiperbólica (¿?)		A idéia de um conjunto ser **enumerável** , significa que se alguém tivesse a capacidade ...
		Tentativa de recontextualización sin suceso (falta de conexiones explícitas entre contenidos y experiencias/ referenciales			--
	Contextos	Local, o concreto o físico o social e os intercambios. (marcas relevantes do texto adoptadas pelo grupo, do que aconteció mirado por el alumno)	Furo como elemento metafórico para apoyar a "visualización de la representación		A reta Q teria menos **furos** porque Q é denso
		Cultural (relaciones explícitas con una comunidad más amplia)			--
		Texto	Refiérase a la falta de tiempo de conclusión de la tarea		Falta os **construtíveis**, seu mal.

Figura 3.13. Cuadro ejemplo de reconocimiento del análisis conceptual

A continuación se muestra un ejemplo del análisis textual explicativo, que permite reconocer cómo se ve en el texto los aspectos matemáticos, en relación con lo interaccional y motivacional. Se muestra uno de los casos que se usan en el análisis de los textos del capítulo siguiente.

	Elementos de lo Vivencial / experiencial	**Tipo de elemento analítico**	**Ejemplo del discurso**
Elementos contextuales	Historia referenciada Situación curricular evocada Denominaciones	relato , cómo pasó, qué cosas han sucedido, informaciones que se pueden perder con la memoria	“en la aula siguiente...”
Descripción narrativa	Ecuaciones	Conocimientos previos	“ya sabíamos resolver”
	Recuerdos	Evocación a la historia	“la eq. de ...ya era conocida...”
	Equivalencias	Alusión a la construcción colectiva de conocimiento	“mucha gente no entendió los pasos ...”
Explicación	Evocación de un proceso de generalización basado en 3,4,5 conservado en x,x+1,x+2	Esclarecimiento lógico	como por ejemplo... ellos la utilizaban para ...
	Idea de cuadrado perfecto relacionado con la historia	Resumen selectivo con idea de convencimiento del lector	[uso de gráfico de Pitágoras]
	Evidencia de las transformaciones de ecuaciones equivalentes	Resalte de tipo dialógico, con sujeto elíptico	“será para transformar el trinomio de segundo grado...”
	Identificación de propiedades generales	Recontextualización	“esto ayuda a la hora de simplificar”
Indicios de generalización	Referencia a 4 casos de ecuación, tipología	Resalte de planos diversos (ejemplo/ tipología) (particular/general)	
	El ejercicio concreto lleva a conducir métodos	Conexión anafórica	“Daí...surge...1 método...2 método... ”
	Conexión con sujeto elíptico (autor) en relación con el contenido de relaciones entre paréntesis y ecuaciones	Conexión anafórica esclarecedora	“quien descubrió ese método...se acordó de las clases sobre ...”
	Conexión con sujeto elíptico explicitando un método matemático	Conexión anafórica con sujeto histórico y colegas	“*teníamos* nombrado el método cascada...”
	Equivalencia que lleva a un cuadrado perfecto	Acompañamiento de explicaciones (nueva relación particular/general)	[ecuaciones que se transforman de forma equivalente]
	Alusión a la balanza como modo de indicar equivalencias, acompañado de representación algebraica	Identificación metafórica	[Dibujo de balanza] “si... entonces...” “acuérdate que ...”
	Reconocimiento del poder del método como transformación a un problema anterior	Conexión catafórica con objetivo conclusivo	“si quieres... pero si quieres...”

Figura 3.14. Ejemplo de cuadro usado para analizar el análisis textual explicativo

3.3.3. Análisis semántico. Patrones de interacción.

Los patrones temáticos se usan para reconocer significados personales y colectivos. Para analizar las relaciones semánticas de los textos tomamos algunos elementos constantes en el cuadro teórico de J. L. Lemke en el campo de la semiología social, mas específicamente en sus trabajos sobre análisis de la comunicación científica en eventos didácticos. Para este autor la semiótica social es principalmente una teoría sobre cómo la personas elaboran significados, cómo los miembros de un grupo social crean sentido del mundo. Esta área del conocimiento se interesa por todo lo que los individuos hacen y lo que es socialmente significativo en una comunidad: hablar, escribir, dibujar, gesticular, danzar, vestir, esculpir, construir, etc. Pero se estudian estas acciones desde una óptica particular.

Los semiólogos sociales intentan responder a cuestiones cómo:¿De qué manera la realización de cualquier acción socialmente significativa crea sentido en los miembros de una comunidad?¿Cómo la interpretan los miembros de esa comunidad?¿De qué partes se compone y cómo se relacionan entre sí?¿Qué otras acciones alternativas pueden hacerse en su lugar, y cómo podrían diferir en los significados que expresan?¿De qué manera la gente elabora un significado particular?¿Cómo se incorpora o utiliza en una acción particular?¿Cómo cambia el significado en diferentes circunstancias o contextos?¿Qué siente la gente acerca de una acción y su significado?¿A qué patrones sociales más amplios pertenecen esas acciones?¿Cómo se recrean o cambian los patrones básicos de una sociedad? Para Lemke, "la suposición básica que la semiótica social sostiene afirma que los significados son *elaborados*. Esto indica un cambio de *significado* en la semántica.

Es erróneo decir, como la gente frecuentemente hace, que algo tiene significado, como si el significado fuera parte de su propia naturaleza. Una palabra, un diagrama o un gesto no *tienen* significado. Un significado tiene que ser elaborado o *construido* por alguien, de acuerdo con una serie de convenciones para crear sentido en esas palabras, diagramas o gestos". Y añade "las personas elaboran significados diversos para la misma palabra, un mismo diagrama o un mismo gesto. Cualquier persona puede elaborar diferentes significados sobre algo, dependiendo de las circunstancias y de su experiencia previa.

Las discrepancias más importantes son las que refieren a las convenciones sobre cómo un significado es elaborado en un contexto particular. La gente de distintas comunidades, incluyendo a los diferentes grupos dentro de una gran comunidad, tienden a tener diferentes maneras de elaborar significados. Sólo podemos crear sentido en tanto que compartamos las mismas maneras de elaborar significados.

Para hacer esto es menester que pertenezcamos a la misma comunidad o a una similar. De hecho, puede afirmarse que el grado en que compartimos significados nos hace ser miembros de un mismo grupo social, o al menos parcialmente".

Por supuesto no sólo creamos sentido de o para las palabras o gestos. Creamos sentido *con* palabras y gestos, esto es, los utilizamos para crear significados socialmente reconocibles, para ejecutar acciones socialmente significativas. Los usamos para comunicar información, para hacer suplicas y promesas, para elogiar y para culpar, para insultar, bromear y orar. Las formas en las cuales usamos los usamos son propias de las comunidades a las que pertenecen. Aquí Lemke se pone cercano (y lo asume) a los sistemicistas en especial a M. Halliday.

Para Lemke "Cuando las palabras se combinan, el significado del todo es mayor que la soma de las partes por separado". Para entender el significado del todo, es necesario conocer algo más que el significado de cada palabra, es decir, las relaciones de significado entre las diferentes palabras. A continuación mostramos un ejemplo de lo que denominamos un esquema que nos permite hablar del patrón temático.

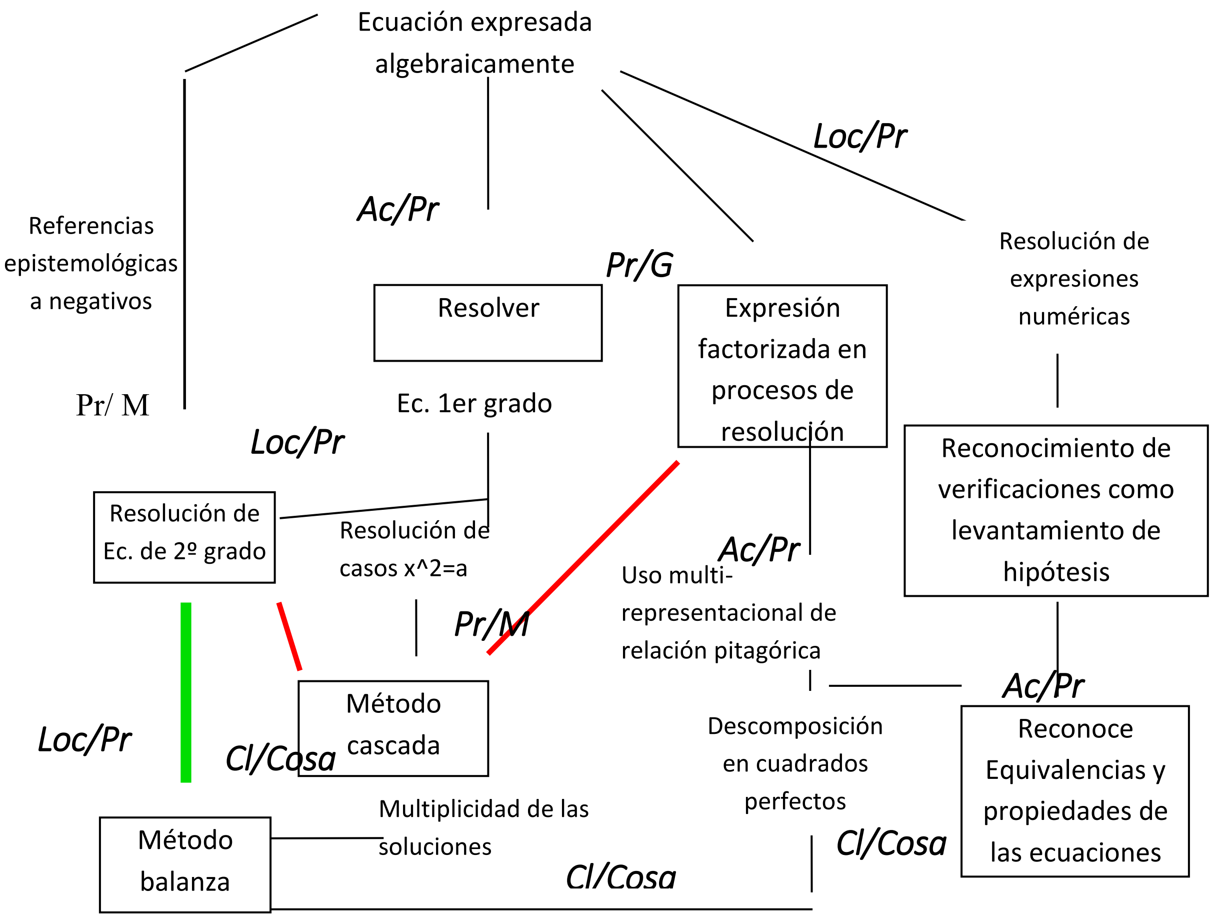


Figura 3.16. Esquema de patrón temático que usamos para reconocer la construcción de significados en el caso de Gabriela para la ecuación de segundo grado

Al observar el resultado, es posible que un alumno conozca las definiciones de las siguientes palabras: "ecuación", "método" y "solución", pero eso no significa que sea capaz de utilizar las tres palabras correctamente dentro de una oración o de explicar cómo sus significados se relacionan. Para hacer esto, se requiere tener el conocimiento adicional de cómo se utilizan estas palabras al hablar científicamente. ese campo.

Con este tipo de diagrama, pretendemos conjeturar lo que los estudiantes rconocen como pensamiento metacognitivo., se refiere al conocimiento proprio relativo a nuestros propios procesos cognitivos o a cualquier cosa relacionada con ellos, esto es, las propiedades de aprendizaje relevantes de información o datos (..)". Y prosiguen " (..) la metacognición se refiere, entre otras cosas, al control activo y regulación, y orquestación consecuentes de estos procesos en relación a los objetos cognitivos sobre lo que ellos se aplican normalmente a servicio de algunos objetivos o fines concretos".

Una mirada estructural en el análisis semántico.

A continuación se presenta un ejemplo de cuadro que se usa para complementar los esquemas anteriores.

Bloques	**Caracterización**	**Técnica de relación semántica**	**Ejemplo**
Evocación (sitúa el tema de ecuaciones)	Presentación del problema Reconocimiento de trabajo realizado Reconocimiento de un modelo incompleto	Conexión sintáctica Conexión retórica	...La primera cosa que el profesor hizo, fue... ...ya sabíamos resolver...
Construcción y desarrollo	Conexión con ejemplo singular y generalización de una metodología	Énfasis de contraste con alusión intertextual	...De ahí el profesor pasó un ejercicio...y surgen dos métodos para resolverlo..." "Método de la balanza..."
	Evocación de conocimientos	Aposición referida a una dinámica vivida en la interacción, con concordancia	"quien descubrió este método... se acordó
método de 1er grado a ec. 2º grado	Integración de dominios de conocimiento	Conexión genérica con nexos temáticos Aposición referida a información recibida	Cambios asociados a la transformación cascada "quien estudiaba esto en civilizaciones antiguas..."
	Reconocimiento de informaciones relevantes	conexiones genéricas recontextualizando	si... absurdo...
	Conexión entre objetos matemáticos de naturaleza distinta ecuación y representación geométrica, equivalencia de áreas y de ecuaciones	Nexos temáticos e intertemáticos con mediadores representacionales, elementos de metadiscurso, repetición con variación Conexión sintáctica y retórica	[ecuaciones entrelazadas correctamente, con representación geométrica] ...no aceptaban los números negativos... ...ya teníamos
Identificación de patrones temáticos con atribución de significado	Caracterización de un método algebraico útil para la resolución de ecuaciones	Ejemplificación con énfasis contrastante	..denominamos también Método cascada "a la hora de resolver ecuaciones, debes hacer..."
	Focalización temática para dar credibilidad a la equivalencia	Énfasis con uso de concordancia	"Isso ajuda a la hora de simplificar"
	Salir de la arbitrariedad de una transformación algebraica	Glosa con uso de la metáfora de balanza	...el método de la 1a hoja, es el mismo método...

Figura 3.17. Ejemplo de análisis de un Texto de una estudiante según el patrón temático.

3.4. Análisis sistémico normativo.

La justificación inicial de los instrumentos propios del análisis del discurso, se basó en los resultados dados sobre el estudio previo realizado a partir de seleccionar entre todas las redacciones (n=65) producidas por los alumnos de dos grupos de 7ª. serie (7º grado) y por cuatro redacciones escogidas aleatoriamente de ese conjunto, garantizando el criterio de dos redacciones de cada sexo. Los textos corresponden a cuatro personas, sobre una misma tarea y se llaman T1 T2, T3, T4 respectivamente (Lopes, 2000).

Nos proponemos analizar cómo a partir de producciones textuales en la clase, podemos entrever elementos de la propia formación. Para ello, se considera bueno analizar características que parten de las contribuciones de la Gramática Sistémico-Funcional a través de los estudios de Halliday (1994); Thompson (1996), Eggins (1994) e Thompson e Thetela (1993); y del Análisis Crítico del Discurso, en la obra de Kress (1993, 1996). Para mostrar los resultados de dicho análisis, veamos cómo se aplica a cinco tareas T1, T2, T3, y T4 explicadas y justificadas anteriormente (Lopes, 2000).

3.4.1. Lo que los textos permiten reconocer. La función personal de lo sistémico.

Veamos como ejemplo, algunos aspectos que surgen del análisis de la tarea T1, en donde encontramos el uso del modo indicativo y del imperativo. En efecto, la forma imperativa aparece en muchos textos de manera alternada con el indicativo o en verbales proyectadas (con la habla del profesor en discurso directo), reiterando la fuerte vinculación al discurso didáctico, lo puede ser observado en oraciones escogidas en diversos textos como "*veja o exemplo/ Veja na forma literal / Veja como é isso visualmente / Veja no exemplo que segue*" El uso de estos imperativos en boca del alumnado, hace ver como los estudiantes, aunque sean pequeños, han asumido el papel de control de la situación.

Además, constatamos también el uso de la modulación con operadores modales "poder" [poder] en *"como você pode perceber..." / "a equação pode ser obtida..." / "você pode fazer esta equação..." / "podemos achar a área"; "dever"* [deber] en oraciones como *"você deve se perguntar";* y "precisar" [precisar] usado como en *"você precisa saber fazer*, dando la idea de obligación y necesidad.

Los calificativos usados por los alumnos para demostrar su opinión y actitud en relación al contenido, al grupo y al profesor pasan en la mayoría de los textos la idea de poder mayor de los alumnos en relación al su lector conseguido por lo que Eggins ha definido de especialización – son los dueños de la información recorrida y lo demuestran a través del ejercicio de poder que el saber los confiere, lo que puede ser percibido cuando observamos expresiones como "*achei **legal e fácil** / eu acho que é **mais fácil** de fazer /*

*fica **fácil** identificar / foi **fácil** compreender / isso é **muito simples**/ **muito simples**! / para mim não era **muito difícil / é claro!** na verdade é **muito fácil”***.

En los textos en los que aparecen las dificultades, esa relación de aparente seguridad, sufre una inversión y lo que miramos es la submisión del alumno al no-saber como en *“o quase **nada** que sei/ não sei resolver **muito bem** / eu não entendi **muito bem** / foi **muito difícil***”. En una posición intermedia encontramos textos en que el alumno se pone como aprendiz, explicitando su proceso de aprendizaje como en *“foi **muito difícil** mas consegui / eu entendi **melhor** a aula / o do Alê eu entendi **melhor** /Não entendia **nada** mas achava o **máximo** /é **bom** aprender*”.

En muchos momentos toman la voz del profesor reiterando la posición de mayor poder y consecuentemente la vinculación al discurso didáctico como en *“vou mostrar um exemplo **bem prático** / **é o melhor** pra se fazer / **o melhor** jeito de transformar/ para entender **melhor...**/ **sempre** poderemos ter.../ você **deve sempre** fazer uma pergunta / **primeiramente é sempre bom** saber / **Certo! Sempre** que resolvermos... / por enquanto **é o melhor para se fazer** /seria **melhor** se você usasse**”***.

En algunos textos del alumnado, el uso de calificativos empleados para el grupo reiteran la intención de los escritores en transportar para la interacción autor/lector la familiaridad e informalidad de la aula, lo que puede ser sentido en las expresiones que cargan un tono de ironía como *“só se encontra alunos **muito inteligentes** / o Alê **muito enciumado** /se vc se acha **bom o suficiente**”*. Al explicar las interacciones vistas por el alumnado, en relación al profesor, los alumnos tienen posicionamientos naturales en todo momento. Podemos dividir los alumnos por el tipo de opinión y actitud que muestran. En los textos más formales, representados en su mayoría por los textos que hacen uso de las características del discurso didáctico o del discurso académico, los calificativos no se refieren directamente al profesor, pero a la clase como en *“A aula foi **muito produtiva e interessante**/ essa aula foi **muito boa e produtiva** / o procedimento da aula foi **bom** / começou com um **simples** problema”*.

En otros textos, la mayoría nuevamente es reforzada la necesidad de los alumnos en transportar para el texto el clima informal y de integración en la aula, que puede ser observado en *“nosso professor **cultíssimo**/ seu professor **mais chato** / para ele **nunca basta***”**.**Mientras, hay textos, que cargan una crítica explícita, como una queja, lo que refuerza la no-inversión de papeles por parte de esos alumnos que aún se ponen sumisos en relación al saber, y por tanto, dependientes de la explicación del profesor como pude ser observado en “**não** nos explicou **muito bem** / não ficou tudo **claro** para todos”. En los textos individuales la investigación ha mostrado diferencias nítidas.

En T2 el escritor se ha utilizado del modo indicativo y del imperativo durante el discurso directo en las hablas del profesor. No hay registro significativo de operadores modales y los calificativos cargan el tono informal que el escrito quiso dar al texto, reflejando en sus elecciones la integración de la aula y la libertad en relación al profesor. Pueden ser observados en construcciones como *“este **estúpido** redação* *avaliação / **estúpida** equação do 2º grau"*, o aún en "***furiosos"*** usado para hacer referencia al grupo que debería resolver la ecuación. Para las hablas del profesor caracterizado en el texto ha reservado calificativos como *"Fácil / mais difícil / muito produtivo / muito simples*" y reiterando el tono de ironía presente en muchos textos, la expresión "cala a boca" aun que componiendo un texto sobre una clase ficticia, dando muestras de las representaciones sociales en relación al poder que supuestamente el profesor genérico tendría en relación a los alumnos.

En T3, como ya fue dicho, la marca es la impersonalidad que se mira también en las elecciones modales (poder), de modo (indicativo y imperativo) y en los calificativos que son atribuidos a la clase o al tema de estudio como "*Muito bom / muito interessante"*.En T4, el texto es construido en función de la interacción lector/audiencia y eso se refleja también por las elecciones de modalidad. Hay el empleo del imperativo alternado indicativo y de operadores de modulación como "ter que" y de modalización como "querer", pero no hay registro de calificativos, lo que muestra y fortalece la interacción "nós/você" que abarca la audiencia mayor y lo recurso a la adopción de una lenguaje más formal.

Consecuencias sobre autonomía y legitimidad

En estas observaciones, se percibe el grado de libertad y desprendimiento que los alumnos muestran al producir los textos. Es claro que había sido solicitado que expresasen (redacción) sus reflexiones y opiniones (evaluación) acerca de una clase, pero dentro del género formal reconocido y acordado en el ámbito de la institución. Lo que se ha visto en general fueran construcciones que espejearan la fuerte integración del grupo con un todo (profesor y alumnos) y la libertad en crear y disponer del conocimiento conferida aquellos que ya tiene el dominio sobre él.

El hecho que constatamos de una fuerte tendencia de los alumnos en tomaren para si el discurso didáctico (intención didáctica explícita) y con el la inversión de sus roles en relación al profesor (en la escrita) es una factor a más que reitera la idea de la integración en la clase y da libertad con relación a la relación con el conocimiento, que puede ser manipulado y explorado libremente. Las construcciones que se diferencian como en T2, también muestran un(os) escritor(es) con dominio del tema y orientado más en dirección a esa intención. En ese texto la interacción mayor es la del alumno/conocimiento y no la del profesor alumno.

3.4.2. Análisis interpersonal normativo.

Para poder ver que en los textos se muestra un proceso compartido de construcción de significados, estaremos investigando las formas de nominación de los participantes. Cuando pensamos en el grupo como un todo (T) todas las formas posibles para el lector encuentran representación, pero con una preferencia acentuada en relación a la interacción nosotros/tu, lo que puede evidenciar la integración del escritor al grupo y de la vinculación del texto a un lector más amplio, con la construcción de un leguaje interactivo. Hay también la referencia fuerte a lo profesor nombrado explícitamente en los textos (15%) o de manera menos explícita (profesor: 7%) y menos directa aún con el uso de la 3ª. personal a través del pronombre "ello" considerado no-persona, aquello que está fuera de la interacción "yo/tu". Ya para los autores individualizados en sus producciones encontramos diferencias entre los textos (T1, T2, T3 y T4) y entre los textos individuales y el texto general (T). En esos momentos la interacción queda centrada entre el escritor (yo) y el lector (tu/grupo o tu/audiencia), dejando al profesor una participación secundaria, como muestra la tabla siguiente:

(T): Participantes (escritor/lector)	**Nominación**
Escritor/aluno	Nombre propio / pronombres (yo: 26%)
Lector/profesor	Pronombres (ello: 12%); de tratamiento (profesor, "psor" (como "profe" en castellano: 7%) / nombre propio (Bigode: 15%; Marco: 2%)
Lector/grupo	Pronombres (nosotros inclusivo e sus formas derivadas como nuestro, nosotros, etc. – 31%; a gente – 3%) /nombre propio (10%)
Lector/audiencia	Pronombre (tu - 51%)

Figura 3.18 Nominaciones en la interacción escritor-lector en total de tareas analizadas

En T1 los lectores que reciben representación son el escritor, el profesor y el grupo, privilegiando con esto la lenguaje informal y a la interacción en la aula. Como se ve en la tabla siguiente:

(T1): Participantes en la interacción (escritor/lector)	**Nominación**
Escritor/aluno	Nombre propio / pronombres
Lector/profesor	Pronombres
Lector/grupo	Nombre propio / pronombres
Lector/audiencia	---

Figura 3.19 Nominaciones en la interacción escritor-lector en la tarea T1

En T2 no hay representación para los participantes, incluyendo el propio autor. El texto es construido con el uso del recurso de impersonalización (tercera persona del singular) y apagamiento del sujeto. Destinada a una audiencia mayor, pero sin adoptar las características del discurso didáctico que presuponen una interacción directa (con el uso de nominación explícita), aproximase del discurso académico/científico.

(T2): Participantes en la interacción (escritor/lector)	**Nominación**
Escritor/aluno	Nombre propio (encabezamiento)/impersonalización
Lector/profesor	Impersonalización
Lector/grupo	---
Lector/audiencia	Impersonalización

Figura 3.20 Nominaciones en la interacción escritor-lector en la tarea T2

En T3 como en T, al contrario de T2, todas las posibilidades son tornadas explícitas por el autor. Así encuentran representación como lectores el profesor, el grupo y a la audiencia, instaurando la interacción dentro del propio texto.

(T3): Participantes en la interacción (escritor/lector)	***Nominación***
Escritor/aluno	Nombre propio / pronombre / elipsis
Lector/profesor	Pronombre de tratamiento
Lector/grupo	Pronombres
Lector/audiencia	Pronombres / elipsis

Figura 3.21 Nominaciones en la interacción escritor-lector en la tarea T3

En T4 la interacción que encuentra representación explícita es la del autor con su lector/audiencia sin referencias al grupo o al profesor. Es en esto texto que la incorporación del discurso didáctico es sentida más fuertemente.

T4: Participantes en la interacción (escritor/lector)	**Nominación**
Escritor/aluno	Nombre propio / pronombres
Lector/profesor	
Lector/grupo	
Lector/audiencia	Pronombres

Figura 3.22. Nominaciones en la interacción escritor-lector en la tarea T4

Cada uno de esos papeles encuentra manifestación lingüística en las formas de nominación escogidas por los autores. Como en T están todas las redacciones pastadas podemos buscar las elecciones representativas que forman el perfil general del grupo. Constatamos para el escrito el uso de nombres propios, lo que no puede ser tomado como dato relevante, una vez que el "encabezamiento" exigido por la institución en todas las REv no fue cortado de los archivos transcritos en formato "archivo.txt". Como lo expuesto arriba, los textos muestran presencia de interactividad en sus construcciones por el empleo de 1ª. persona en singular y plural "eu/nós/a gente" (yo/nosotros/la gente) como en "*O que nós vimos de novo*" o *"aprendemos um tema novo*"; y de "*você"* (tu*)* como en "*você não sabe de nada ainda"* en la mayoría de ellos. Ese "*nós*" (nosotros) que el escritor adopta es lo que Fairclough (1989) define como el fenómeno de personalización sintética enque que el escritor allá de se incluyere como parte del grupo también crea en el lector las sensaciones de interacción y de solidaridad, mismo que su lector sea anónimo, construido un tono informal e interactivo de los textos.

El mismo fenómeno se da en la adopción de la forma "você" (forma informal equivalente en portugués al "tu" castellano) como medio del escrito hablar en dirección al lector directamente. En los textos esa forma aparece para la representación del grupo (todos los suyo colegas de la aula), del lector anónimo ("você" genérico (tu)) y hasta mismo del profesor en momentos en que el escritor establece una ilusión de diálogo con el profesor, usando para eso el empleo del discurso directo en que escritor/alumno pasa la voz para el profesor que sume, en esos momentos, el lugar del "yo" y lo escritor, incluyéndose en el grupo, alocase como "você" (tu) ("Agora João me faça essa aqui"). Hay en algunos textos también el uso alternado de dos formas de referencia como en "*Bom, depois o Bigode (você) deu*", en que el escritor alterna el ejemplo de la 3ª. persona (no-persona) introduciendo la interacción directa profesor/aluno de forma paralela en su texto.

El grupo también es representado por nombres propios de los alumnos de la aula, citados directamente o por lo método que inventaran para resolver las ecuaciones como en "*o método da Gabi*" o *aún "o* (método) *do Alê*", con eso tornan esos textos aún más familiares y próximos de la aula, dirigidos al publico restricto a ella.

Otra forma de nominación escogida por los escritores que merece comentario no solo por la cantidad con que fue usada, más por su inusitada opción, fueran los grupos nominales empleados para nombrar el profesor. Mismo siendo alocado como no-persona ("êle" (ello)) como está en "*para ele nunca basta*", por tanto fuera de la interacción directa yo/tu, los escritores usaran del recurso de nominación por grupos nominales para traer el grado de familiaridad entre alumno/profesor en la aula para dentro del texto, expresa tanto a través de ironía "*Nosso profesor e filósofo... / "seu profesor mais chato")* cuanto por medio de expresiones que muestran envolvimiento afectivo alto *"O nosso querido..".*

Cuando pensamos en el nivel del discurso esas formas de ***nominación es indicio de una fuerte integración que hay entre profesor y el grupo como un todo, una vez que las análisis de los textos del grupo T***, garantizan que no hubo una consigna que implicase una preocupación, por parte de los alumnos, de producir un discurso formal, pero al contrario, la fuerte preocupación de los alumnos en se colocar como persona expresando sus opiniones y tiendo la libertad de muchas veces tomar para si el lugar del profesor.

Como se ha dicho arriba, en los textos individuales las nominaciones tuvieran variaciones significativas que ilustran la diferencias y semejanzas existentes en el grupo. Las formas de nominación adoptadas en T1 se encuadran al patrón del grupo por lo uso alternado de "eu/nós" inclusivo para el escritor como en *eu tive uma excelente idéia*" y "você/nós/a gente" para lo grupo "*Muito bem, disso nós tiramos uma coisa*". La diferencia es marcada por lo empleo del discurso directo para el profesor en una simulación de diálogo ficticio entre profesor/grupo. Con estos recursos, propios del discurso literario el escritor crea una aproximación mayor del lector (audiencia) al traer para el texto una simulación de interacción concreta de la aula.

Otra diferencia entre este texto y el grupo está en la no-utilización del "você" (tu) genérico u de ninguna otra forma de nominación explícita de la audiencia. Los participantes nombrados en el texto son, por tanto, el profesor y el grupo, pero, indirectamente, por medio del recurso del discurso directo, como se pude observar en "*deixa eu dar minha aula*", "*agora todos façam esa*" y "*João, a gente já respondeu tudo?"* colocados como habla del profesor y "*Psor, eu sei fazer*" o "*Sim, profesor*" colocados como hablas (proyectadas) de los alumnos. No es el escritor que se dirige o nombra los lectores, pero los hace participantes activos del texto, nombrados personajes creados por el alumno/escritor.

En T2 la diferencia es más significativa. El texto es construido en la tercera persona del singular para garantizar la impersonalización y el consecuente apagamiento del sujeto. Hace alusión al discurso académico que se construí con esas mismas características. Tratase del texto que quiere producir una sensación de neutralidad, en que el escritor no muestra explicitamente sus opiniones, pero al contrario, tienta tórnalas consecuencia de reflexiones y de la lógica de la argumentación de su texto. El lector es la audiencia mayor que queda presupuesta y no es nombrada.

En T3 el escritor se utiliza del recurso de la personalización sintética haciendo uso del "nós/a gente" para nombrar a si mismo y al grupo, como se puede mirar en "*a gente já sabia resolver*", "*Já sabíamos resolver*", e un "*você genérico*" para se referir explícitamente a la audiencia como en *"Lembre-se que:"* y *"Mas se você tem que resolver..."*, creando una sensación de interacción entre lector/escritor. Tanto el profesor cuanto el grupo son nombrados apenas indirectamente con el uso de la 3ª. persona del singular "ela/o profesor" (ella/el profesor).

Para se referir al grupo el escritor hace uso de expresiones impersonales "muita gente/ a pessoa" (mucha gente/la persona) como en "*muita gente não entendeu a passagem*" o *"quando a pessoa explicou ela não sabia que era o cascata"*. Para referirse al profesor el escritor también emplea pronombre de tratamiento como el *"profesor"* en "*A primeira coisa que o profesor fez*".

Esos recursos tornan el texto más formal y con características propias del discurso didáctico.En T4 la utilización de la interacción escrito/audiencia es aún mayor y elaborada para crear una vinculación fuerte y informal. En este texto no hay mención al grupo o al profesor ni de manera indirecta, ya que no hay uso de plural y ni de formas como "a gente" que podrían incluyere el grupo.

El escritor hace us del "eu" (yo/nombre propio) para nombrar a si mismo en una simulación de diálogo consigo mismo, como recurso retórico que se puede observar en "*Joana, da onde você tirou o 9?"* y de *você* (tu) y de formas de tratamiento como "*minha cara"* para nombrar el lector como en "*Não, minha cara*" y "*Você tem que tomar certos cuidados matemáticos*".

A continuación, en el cuadro resumen (figura 3.21) se encuentran los elementos matemáticos y no matemáticos encontrados. Se percibe que los textos evidencian significados matemáticos, así como trazos de los modos de construcción, así como elementos de legitimación de dichos significados. Pero no establecen relaciones específicas para describir totalmente la práctica.

Así, consideramos que deberemos complementar como hemos explicado con otros análisis para poder sacar conclusiones más contundentes sobre los elementos normativos y actuativos.

- **Elementos no matemáticos**
  - Relaciones
    - Estatus
      - Posicionamiento al/texto
      - Inmersión
      - Alumno/materia
    - Contacto
      - Participación
      - Integración
      - Identificación interactiva
    - Implicación afectiva
      - Relación D/A
      - Alumno/alumno
      - Alumno/texto
    - Filiación (identificación contextual)
      - Generalidad
      - Representación
      - Autoria de la audiencia
      - Grado de Autonomía
  - Interacción
    - Texto/lector
      - Identificación dialogante
      - Nombramiento
      - Institucionalización grupal
    - Texto/materia
      - Representación explícita
      - Referencial didáctico
  - Personalización
    - Modulación Lector/audiencia
    - Evaluativos
      - Impersonalidad
      - Declaración
      - Informalidad
      - Submisión al no saber
      - Legitimación valorativa
      - Posición de aprendizaje
      - Vinculación didáctica
    - Opinión
      - Cooperación
      - Reconocimiento docente
      - Posicionamiento Crítico
- **Matemáticos y epistémicos**
  - Cognitivos
    - Uso de elementos institucionalizados
      - Reconocimiento temático
      - Uso de definiciones
      - Sistemas representacionales
      - Elementos estructuradores
      - Uso equivalencias
      - Uso de autores matemáticos
    - Apropiación de habilidades
      - Reconocimiento de errores
      - Imitación de procedimientos
      - Relaciones procedimentales
    - Elementos de alto nivel
      - Análisis-síntesis
      - Identificación de argumentaciones
      - Valorización de justificativas
      - Particularización-generalización
      - Incorpora dominios de validez
  - Metacognitivos
    - Apropiación reflexiva
      - Reconocimiento de conceptos clave
      - Apropiación consciente de lenguajes
      - Incorporación de limitaciones
      - Control de las justificaciones
    - Autoconsciencia
      - Objetivación
      - Autoconsciencia de producción Expresa motivaciones propias al lector
    - Valorización epistémica
      - Introduce motivación extra-individual
      - Valoriza la discusión como método
      - Imita producción científica
      - Reconoce valor de juicios externos

Figura 3,23. Elementos matemáticos y no matemáticos que aparecen en cuatro tareas analizadas.

3.4.2. Las relaciones colaborativas en los textos.

Como punto de partida para el nuevo análisis (aún en el análisis crítica del discurso) es interesante que se ponga una primera mirada en dirección al grupo analizado, investigando las relaciones de poder entre los interactuantes. Para entender esas relaciones de poder en la interacción, Eggins ve un camino en los sistemas de Modo y Modalidad. La relación de los papeles establecidos entre los interactuantes puede ser entendida como un conjunto de cuatro dimensiones simultáneas, que Eggins (1997) extrae de Cate Payton y de Martin y que sirven con un modelo para nuestro análisis: (i) estatus; (ii) contacto; (iii) envolvimiento afectivo; y (iv) filiación.

(i) **estatus**: es visto a través de una escala construida a partir de los extremos de estatus igual/desigual. Para legitimar relaciones entre interactuantes con estatus desigual, Eggins esclarece que nos valemos de recursos que van desde el uso de la fuerza de la autoridad (en interacciones entre parejas jerárquicamente diferentes), de la especialización (posición diferente en relación al dominio del conocimiento), hasta el uso de símbolos de estatus representados por una gama inmensa no solo de objetos del deseo, como de profesiones, nivel de educación, viajes, local de morada, etc.). Así, la relación profesor/alumno es entendida como ejemplo de relación con estatus desigual (o asimétrico), tanto por la posición superior de autoridad cuanto por la especialización. En relación al grupo o alumno/escritor también se pone en posición superior en el momento en que asume para si el discursos didáctico y el dominio del conocimiento como quedará explicitado más adelante.

(ii) **Contacto**: el contacto entre los interactuantes puede variar por el nivel de familiaridad entre ellos, que puede ser frecuente o ocasional. Esos dos extremos también son dispuestos en escala estableciendo el tipo de contacto entre interactuantes en una dada situación. Así, la relación profesor/alumno y aluno/grupo estaría en el extremo "frecuente" en cuanto el de alumno/audiencia estaría en el de "ocasional".

(iii) **Envolvimiento afectivo**: el envolvimiento entre los interactuantes también puede ser dispuesto en escala cuyos extremos son colocados en términos de alto y bajo. El envolvimiento entre profesos/alumno está en el nivel alto bien como el de alumno/alumno. Ya el envolvimiento entre alumno/audiencia es considerado bajo por las diferentes elecciones lexicales hechas para cada participante que el escrito elige como lector.

(iv) **Filiación**:se refiere a la extensión con que nosotros identificamos con los valores y creencias de los interactuantes en contexto sociales diferentes como familia, compañeros de escuela, vecinos, pasajeros de autobús, etc. También puede ser dispuesto en escala cuyos extremos son colocados en términos de alto y bajo. En nuestro estudio la filiación de los participantes puede ser considerada alta en relación al profesor y al grupo y baja en relación a la audiencia que está siendo conquistada por el texto.

Cuadro los papeles establecidos entre los participantes en los textos analizados.

	Profesor/alumno	**Alumno/grupo**	**Alumno/audiencia**
Estatus (igual/desigual)	desigual	Desigual	desigual
Contacto(frecuente/ocasional)	frecuente	Frecuente	ocasional
Envolvimiento afectivo	alto	Alto	bajo
Filiación (alta/baja)	alta	Alta	baja

Figura 3.24. Papeles reconocidos en los textos analizados

Lo que es resaltado por Eggins es que dependiendo de la variación de cada una de esas dimensiones en una situación específica la lenguaje sufriría un impacto diferente. Así una situación informal tendría mayores posibilidades de ocurrir entre interactuantes con estatus igual, contacto frecuente, envolvimiento afectivo uy filiación latos; en cuanto situaciones formales tienen mayores posibilidades de ocurrir entre interactuantes con una relación situada en el polo opuesto. Cuando analizamos el tipo adoptado en las redacciones hechas por los alumnos, observamos que en la mayoría de ellas hay informalidad del texto contrastando con momentos de formalidad. La formalidad ocurre en las pasajes en que el escritor/alumno asume el discurso didáctico y la habla en dirección de una audiencia mayor. Su lector deja de ser el profesor o el grupo con quien establece una lenguaje informal y pasa a ser el lector anónimo con quien establece una lenguaje más formal, con características del discurso didáctico como el uso del imperativo y relación de poder asimétrica en que el lugar de poder superior es ocupado por el escritor (especialización).

Consideraciones parciales a partir de las observaciones realizadas

Se percibe el grado de libertad y desprendimiento que los alumnos muestran al producir las Redacciones – Evaluaciones (REv). Es claro que había sido solicitado que expresasen (redacción) sus reflexiones y opiniones (evaluación) acerca de una clase, pero dentro del genero formal reconocido y acordado en el ámbito de la institución. Lo que se ha visto en general fueran construcciones que espejearan la fuerte integración del grupo con un todo (profesor y alumnos) y la libertad en crear y disponer del conocimiento conferida aquellos que ya tiene el dominio sobre él. El hecho que constatamos de una fuerte tendencia de los alumnos en tomaren para si el discurso didáctico y con el la inversión de sus roles en relación al profesor es un factora más que reitera la idea de la integración en la clase y da libertad con relación a la relación con el conocimiento, que puede ser manipulado y explorado libremente.

Lo metacognitivo a partir de los análisis realizados.

Entendemos los textos como producciones matemáticas en cuyo proceso de escrito intervienen elementos de naturaleza metacognitiva. El término "metacognición" fue introducido por Flavell (1976) y desarrollado en el contexto de la educación matemática por Lesh, Silver e Schoenfeld (1982) en sus estudios sobre resolución de problemas. Según Lester y Garofalo (1985) la metacognición se refiere, entre otras cosas, al control activo y regulación, y orquestación consecuentes de estos procesos en relación a los objetos cognitivos sobre lo que ellos se aplican normalmente a servicio de algunos objetivos o fines concretos". Estos autores dan aún a la metacognición un significado cercano a la "reflexión sobre la cognición o pensamiento sobre nuestro propio pensamiento".

Schoenfeld (1987) hace referencia a tres categorías de metacognición: Su conocimiento sobre tus propios procesos de pensamiento, controle o autorregulación y Creencias y intuiciones. Con el análisis realizado, pensamos que controlamos dichas ideas. Aguilar (*1994) hace referencia a d*estrezas cognitivas de orden inferior: procesos asociados con la codificación, almacenamiento, recuperación y transformación de informaciones; y destrezas cognitivas de orden superior (metacognitivas e autoregulatorias): usadas para planear, activar, monitorizar, evaluar y modificar los procesos de nivel inferior. Para este autor "(..) entre los elementos que caracterizan aquello que son competentes en lo desempeño de alguna tarea se encuentra la capacidad de monitorizar su ejecución, detectar dificultades, avaluar su progreso e predecir los resultados de su actividad, acciones estas que constituye destrezas metacognitivas asociadas con a autorregulación de la actividad cognitiva propia."

Se percibe que desde la óptica de nuestros estudios las actividades de comunicación matemática contribuyen fuertemente para desarrollar las capacidades metacognitivas. Las REv que están en el centro de nuestro interese actual, dan cuenta de muchas de las propuestas echas por Schoenfeld (1987) y Garofalo (1987) para mejorar las capacidades cognitivas de los alumnos, y aún más: Animan a los estudiantes a ponerse preguntas y modos de representación y comunicación de ideas matemáticas provocan que los alumnos pongan en relación conceptos y procedimientos matemáticos. Con ello, en los ejemplos consideramos que podemos reconocer cómo se anima a los estudiantes a ponerse preguntas y modos de representación y comunicación de ideas matemáticas; provocan que los alumnos pongan en relación conceptos y procedimientos matemáticos; Estimula que los alumnos se coloquen del punto de vista del otro, simulando un pensamiento externo a ellos. Se estimula que los alumnos valoren positivamente los simulando un pensamiento externo a ellos, y se estimula que los alumnos valoren positivamente los procesos de aprendizaje y desarrollen esquemas de retenerlos.[en los textos de REv de la muestra hay explicitación de tales valoraciones. procesos de aprendizaje y desarrollen esquemas de retenerlos (Lopes, 2000).

3.5. Síntesis de la metodología.

A continuación se muestra un cuadro que recoge lo expresado en este capítulo.

Objetivo	Pregunta	Datos y Análisis	Cómo Base teórica	Donde está en la tesis
OB1 Identificar a partir de textos escritos, elementos constitutivos de una cultura matemática distintiva de un grupo de alumnos sobre el "que-hacer" matemático en clase en donde se construye matemáticas socialmente, en un periodo largo de tempo en la vivencia escolar.	P11 ¿Qué se puede saber de una práctica matemática a partir de producciones textuales de los alumnos? ¿En qué sentido los textos evocan unas intenciones y una implementación desarrollada que pone de manifiesto una forma de comunidad de práctica matemática? ¿Qué tipos de actividades matemáticas s e identifican en los textos?	Práctica. Configuración, epistémico intencionalidad Construcción regulada; Regulación; Comunidad ; Investigación colaborativa Interacción ; Enfoque comunicativo; Potencial cognitivo /T Rica Res problemas. Narrativa	EOS	Cap 2 Teórico
	P12 ¿Los textos matemáticos permiten ver cómo en los alumnos se apropian de ideas matemáticas y de hábitos de pensamiento matemático?	Normas. Legitimación Negociación Valor de lo textual para reconocer acción y práctica	Baker	Cap 2
	P13 ¿Se puede construir escenarios de interacción social en donde se asume una legitimación consensuada?	Consecuencias de ejemplos de prácticas	Ambiente AIL Balacheff	Ejemplos mostrados en el Capitulo 3
	P14 ¿Cuáles son los invariantes de contenido y procesos regulados en ese tipo de experiencia?	Cambio de Significados personales objetos y procesos matemáticos	Análisis sistémico; textual ; Análisis epistémico (EOS) Análisis conceptual	Ejemplos del Capitulo 5
	P15 ¿Qué características de interacción una cultura de clase, se pueden inferir?	Interacciones y conflictos y normas	Análisis normativo (EOS)	En capítulo 4 y 5
	¿Qué procesos interpersonales se manifiestan y que competencias matemáticas se ven desarrolladas?	Relaciones	Textual; relaciones semánticas	Análisis del discurso mostrado en este capítulo 3
OB 2 Desvelar algunas variables o elementos que otorgan legitimidad al "que-hacer" matemático de los alumnos en vías a negociar significados matemáticos.	P21. ¿Qué tipo de normas se reconocen en dicho escenario?	Normas presentes en los textos	Análisis normativo EOS. Análisis conceptual	Resultados de capítulo 5
	¿Qué características reguladoras de la construcción de significado se desprenden?	Construcción de significados	ACD y EOS y análisis estructurales para obtener relaciones cognitivas y metacognitivas así como patrones interactivos	trayectorias epistémicas así como son las interacciones, legitimación, en capítulo 4 y 5
	¿Cuál es el tipo de negociación de significados que se trasluce como permanencia en el AIL?	Elementos de negociación observables en textos	ACD y normativo en EOS y estructurales	Resultados de capítulo 5

Figura 3.25. Esquema metodológico de la tesis

CAPITULO 4

UNA PRIMERA CARACTERIZACION DE UNA COMUNIDAD DE PRÁCTICA. CPEIL.

Este capítulo pretende dar respuesta al objetivo 1 de nuestra tesis. Se inicia con un análisis epistémico-cognitivo de tres prácticas diferentes (4.1.). En la primera se analiza una actividad sobre polígonos (4.1.1.), que genera un proceso de problematización; en la segunda analizamos una actividad sobre construcción-definición (4.1.2.); y en la tercera una práctica sobre ángulos del reloj (4.1.3.). A continuación se analizan las interacciones en las mismas tareas anteriores (4.2.). Se desarrollará un análisis basado en el enfoque ontosemiótico, caracterizando el sistema de prácticas en dichas experiencias. Con ello, se pretende identificar las intenciones matemáticas que construye esta comunidad de práctica

Las formas de razonar matemáticas en este grupo van a ser reconocidas mediante el análisis de interacciones (4.2.), la forma de comunidad de práctica (unas matemáticas como dominio compartido, una forma de práctica matemática participativa colaborativa, ….) y se basa en una lectura transversal de los dos tipos de análisis realizados (4.1. y 4.2.).

En 4.3 discutimos los aspectos referentes al emocional y los afectos que aglutinan intereses y cómo cambian patrones en el ambiente que es el objeto del estudio. Para responder a la pregunta P13, y P14 y poder afirmar que la comunidad de práctica es de investigación, pensamos que nos servirán los resultados sobre lo epistémico. Para responder a P15, acudiremos a lo que nos aporta el análisis interaccional (4.2.).

Nos proponemos enfrentar la primera fase de estudio empírico que nos va a permitir dar características generales observadas de una Comunidad de Práctica Escolar de Inspiración Lakatosiana (CPEIL). Queremos mostrar su existencia y características, fundamentalmente las que apoyan la idea de que se trata de una comunidad de investigación, que comparte significados y otorga alta legitimidad de la construcción matemática a los estudiantes.

Para ello, se busca analizar varias prácticas matemáticas, entendidas como mini secuencias de enseñanza-aprendizaje para identificar en ellas unas características comunes que nos permitan responder a las primeras preguntas de nuestra tesis. Confirmar mediante ejemplos de las tres tareas, lo que en teoría se mostró en el capítulo responderá a la pregunta P11 expuesta en el capítulo 1. Se muestra también como un ejemplo del análisis que se realizará con tres tipos de situaciones, al mismo tiempo que se muestra los resultados específicos de este análisis en las diversas situaciones escogidas. Los episodios que se describen a continuación, son resultado de la dinâmica del ambiente de inspiración lakatosiana (AIL) que es objeto de estudio en esta tesis. Sus características se pueden mirar en el final deste capítulo. Pero es oportuno destacar el hecho de que las interaciones entre los alumno entre si y la gestión por el maestro, conducen a un intenso cambio hablas con reflexiones, proposiciones y argumentos que son valorizados e tienen un registro publico, en la pizzara e en los cuadernos que lleva a los alumnos a adquirir confianza para reflexionar y hablar sin receos. Es esto que propicia parte de la documentación que aquí es analizada.

4. 1. Análisis epistémico-cognitivo de prácticas.

Para el análisis epistémico-cognitivo se usa las herramientas de EOS, como se ha dicho en el capítulo anterior, para mostrar cómo se construyen los significados personales e institucionales. El objetivo es poder describir las prácticas, y reconocer características en el sistema de prácticas. Se analiza la configuración de los objetos y relaciones que intervienen en la secuencia didáctica, para visualizar la interactuación de los objetos y relaciones primarias y secundarias, en una perspectiva temporal y dinámica. Se hace en tres prácticas diferentes, que se dan en momentos diferentes, que se han escogido porque manifiestan la construcción de diferentes objetos y procesos matemáticos considerados complejos, para alumnos de 11-13 años. Se ha decidido usar dos formatos diferentes: descriptivo para la primera práctica, y esquemático para las otras dos.

4.1.1. Un análisis de una práctica sobre polígonos.

Los mosaicos permiten explicar la construcción de relaciones, se explica el ejemplo de tarea de poligonos. Se hace una identificación de los objetos y relaciones primarias puestos en juego, a partir de un análisis semántico. Así, en un momento inicial, como se muestra en la figura 1, el problema simiente es: "*Trazar 10 trazos de borde a borde en* *un rectángulo del tamaño de la hoja del cuaderno y colorear con la misma color las figuras de mismo número de lados*”.

La tarea de en si misma tiene muchas posibilidades de generalizaciones y muchas de ellas aparecen en el desarrollo de la clase cómo fue posible mirar a partir de los problemas registrados en los cuadernos, muchos con la autoría de sus autores identificada. Pensemos que el problema, es semejante al clásico problema del número de regiones que se forman a partir de un número de rectas pero con un acento muy diferente. Se trata de poner la mirada en los polígonos, y no en el proceso de inducción. A pesar de ello, en algún momento se plantea el problema numérico del número de polígonos (regiones). A continuación se describe de forma sintética la configuración inicial ante la demanda de construcción de un mosaico. Es decir, situación, sistemas de representación, definiciones, relaciones y proposiciones que aluden a razonamientos.

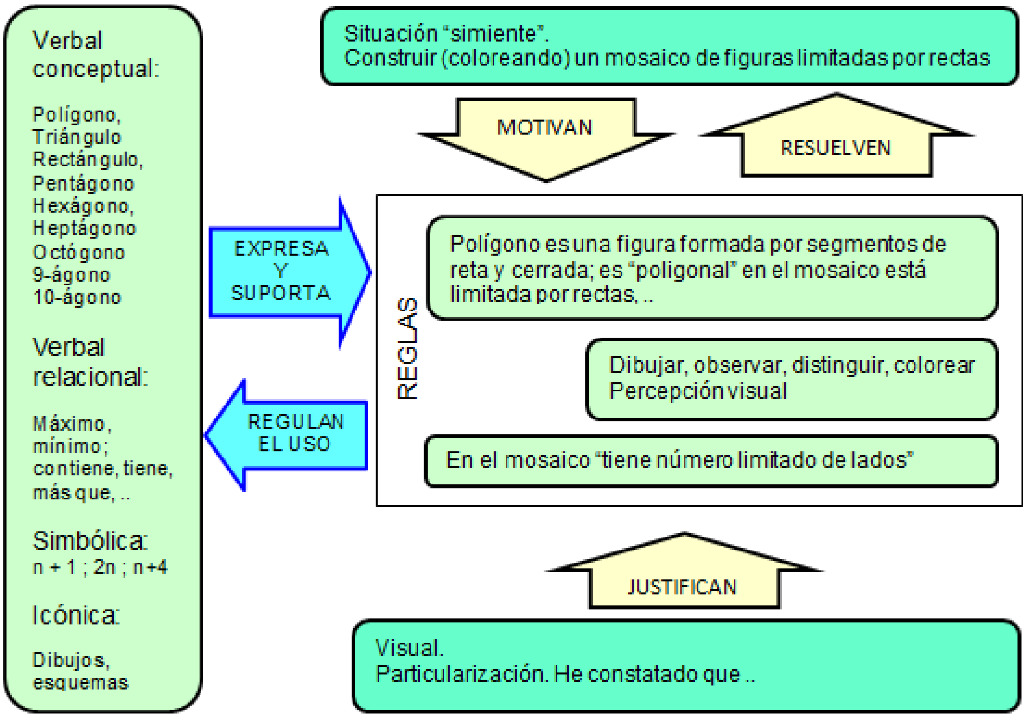


Figura 4.1: Configuración inicial epistémica de la actividad con polígono.

Así, sabemos que en trabajos que se han preocupado por los procesos inductivos, se indica que el descubrimiento de la regla, para que sea efectiva, pasa por una serie de acciones sistemáticas: Ir señalando cómo van aumentando el número de regiones según aumenta el número de rectas trazadas; descubrir que el mayor número de regiones se obtiene cuando al trazar una nueva recta, ésta corta al mayor número de las que ya había trazadas; ordenar los datos en una tabla que sirva de ayuda para ver la relación entre ellos para; generalizar la relación; finalmente, demostrar la expresión general por inducción completa (Cañadas, 2002). Por ello, será lógico pensar que estudiantes de 10-11 años no sean totalmente capaces de realizar este tipo de razonamiento. La descripción nos permite reconocer el tipo de negociación en el sentido explicado por Sophie Lauvergne explicado en el capítulo anterior.

Particularización – generalización en una tarea sobre polígonos.

Lo intensivo en cuanto ejemplo particular en este caso puede ser: (a) el hecho de que un polígono (n-ágono) se define a partir de su representación coloreada; (b) también cada caso particular de rectas que dibuja cada alumno sirve para reconocer situaciones conjeturadas o para lanzar preguntas; (c) cada mosaico actúa como un ejemplo particular sobre el que se activa algún tipo de generalización o tentativa de patrón. Lo extensivo de la clase de los n-ágonos se corresponde con las figuras del mismo color. La generalidad de la clasificación de los pares de rectas como paralelas o que se cruzan, como posiciones relativas de las rectas, que dan lugar a formas diferentes que permiten reconocer un número menor o mayor de polígonos o regiones.

Las primeras generalizaciones de los alumnos surgen a partir de una pregunta: *¿Cuál es el número máximo de lados que los polígonos del mosaico pueden tener?*

a) Generalizan según el número de rectas y la observación correspondiente del número de lados que encuentran, lleva a reconocer la existencia de un máximo y un mínimo, asocian el número de lados de los polígonos al número de rectas de la tarea. En el caso de la actividad de mosaicos se induce la exploración inicialmente poniendo 10 rectas. Con pocas rectas la tarea queda muy trivial, tiene poco llamamiento visual, no parece un mosaico para los alumnos. Luego se cambia la exploración de mosaicos con número mayor o menor (+/-2 rectas) desde que sea posible la distinción visual de los elementos pues muchas rectas impiden la percepción visual y la determinación numérica de ciertos hechos y relaciones. Para 10 rectas, pueden obtenerse desde un triángulo hasta un decágono.

b) Generalizan según el número de rectas el hecho de que siempre el triángulo es el polígono mínimo en cuanto al número de lados, independientemente del número de rectas. Los casos particulares dan la oportunidad de reconocer un mínimo y un máximo hipotéticos. Precisamente haber empezado por n = 10, da la oportunidad de "valorizar" la existencia de este mínimo, porque en cualquier dibujo, es altamente probable que aparezcan triángulos. Hay alumnos que postulan que "no hay polígonos con menos de tres lados" y otros que van a decir qué no se puede cerrar una figura solamente con 2 rectas.

c) Generalizan del hecho que la figura determinada por n rectas como "región limitada" se corresponde con n lados" (asociado al máximo). Las relaciones y los hechos numéricos locales pueden ser observadas en otras consignas, por ejemplo: un mosaico formado por 6 rectas genera de triángulos a hexágonos. Si el mosaico es formado por 8 rectas, se genera de triángulos a octógonos. En la consigna para un mosaico producido a partir del trazado de 100 rectas, aun que la figura siquiera sea borrada, los alumnos aceptan que serían generados del triángulo a un polígono de 100 lados, el "centágono" (hectágono o 100-ágono en la lenguaje formal).

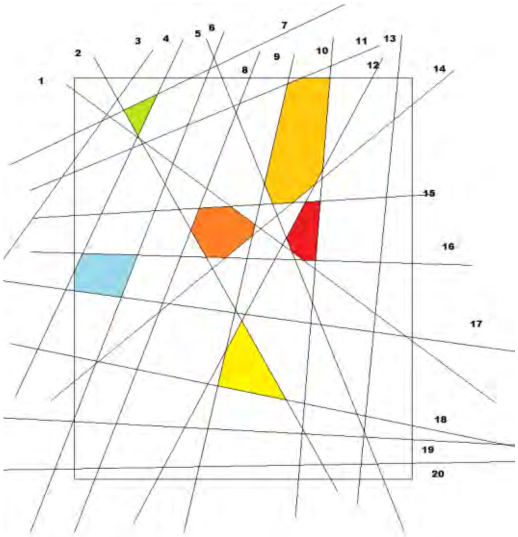


Figura 4.2: Polígonos de 3 a 8 lados generados por un mosaico producido por 20 rectas en el ordenador

Las condiciones del mosaico, permiten aun establecer otras proposiciones generalizadas.

d) Generalizan el hecho de que dado un número de rectas (n), se puede conseguir un polígono de n+4 lados usando los lados del rectángulo, o si no se diera esa condición, el número máximo de lados podría ser n (si no se utilizaran los bordes) …

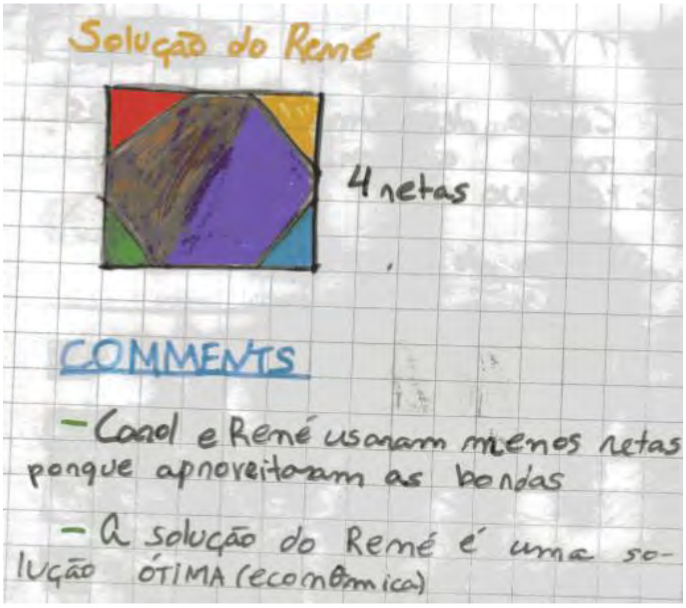


Figura 4.3: Fragmento de un cuaderno con solución de otra alumna en un momento de generalización

Las siguientes generalizaciones surgen inmediatamente de la pregunta: ¿Cuál es el número mínimo o máximo de figuras que se pueden obtener en el mosaico?

e) Generalizan sobre el número de polígonos que se pueden producir en un mosaico, dado un cierto número de rectas (n) y reconocer que el número es n+1. Inicialmente dicen que para 10 rectas se determinan 10 regiones.

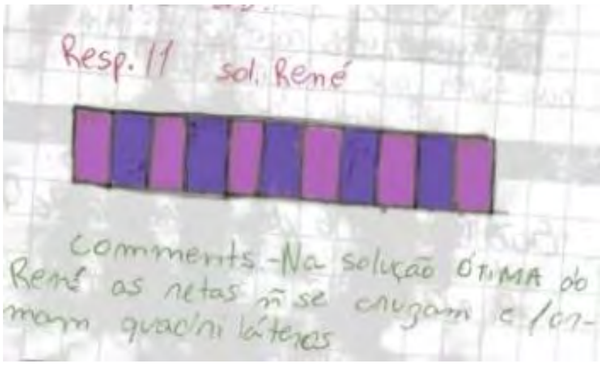


Figura 4.4. : Fragmento de un cuaderno con referencia a otro alumno

La socialización y el debate público, pone de manifiesto otras respuestas conflictivas, que llevan a que dibujen o cuenten. Así reconocen que son 11 el mínimo de polígonos Los alumnos responden con evidencias visuales (haciendo rectas paralelas o que no se cruzan con la ayuda visual de los colores). Otros usan argumentación de más alto nivel del tipo "cuanto menos cruzamientos, hay menos polígonos".

f) A la pregunta de cuál es el mínimo de polígonos que se pude obtener con un mosaico formado por 100 rectas lleva a 101 (demostración por elemento genérico, Balacheff (1987, 2000).

g) Generalizar sobre el número de polígonos que se pueden obtener dado un número de rectas (n) y reconocer que el máximo no es tan evidente. Se responde por conteo, sin establecer una relación con n.

Además de estas generalizaciones se podría haber abierto la pregunta clásica del número regiones que determinan un número de rectas en el plano. Pero precisamente, eso hace salir del contexto de figuras dibujadas realmente en una hoja, que es más cercano a su vida de "juego de dibujo de colorear".

En la tarea se particulariza ya en el propio enunciado, pero en la búsqueda del mínimo, el alumnado particulariza a n = 3, 4, etc. con intencionalidad de que el dibujo sea sencillo y familiar para dar la respuesta al objetivo buscado. Hay particularizaciones con el objetivo de "mostrar ejemplos" para el cuaderno de reglas generales que se reconocen más allá del ejemplo. Sabemos que la forma en que los estudiantes tratan los casos particulares influye en la tarea de generalización (Cañadas 2002), y es cierto que estos estudiantes no disponen de herramientas relacionales de estudio funcional en la Etapa Primaria.

Hay particularizaciones que se encauzan de parte del profesor para evidenciar los argumentos y ayudar a formular conjeturas que se quieren mostrar, sin imponerlas. Por ejemplo, una forma radial parece dar la evidencia de que el número de lados es 2n.

Figura 4.5: 4 rectas radiales que generan 8 polígonos

Una formulación de problema inverso particular como “¿qué número de rectas puede dar un cierto número de lados?” surge para refutar la conjetura que con n rectas se obtiene un n-ágono.

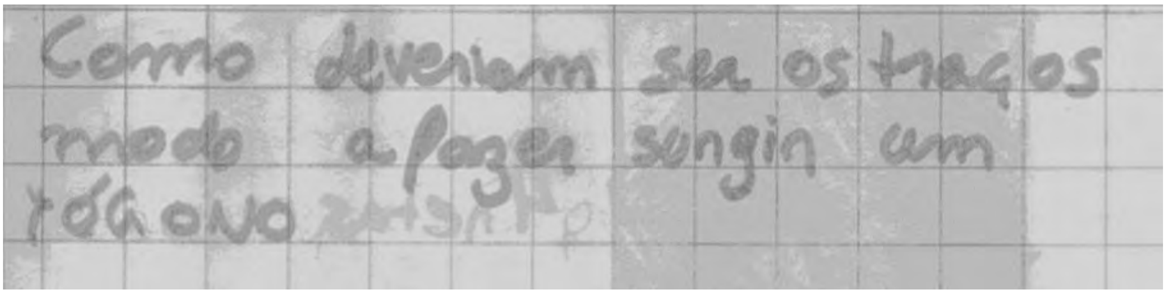


Figura 4. 6: fragmento de un cuaderno con pregunta de un alumno

Procesos de particularización y generalización en la tarea mosaicos

La tarea se inicia con un título: MOSAICOS. Y se da un enunciado no-ostensivo verbal. “Haga 10 trazos de lado a lado de un rectángulo del tamaño de la hoja de cuaderno (cerca de A4), y pinte del mismo color las figuras con el mismo número de lados”. Aunque la pregunta es verbal, pide una acción procedimental muy clara y conocida. Se plantea algo ostensivo, hacer un dibujo, en el que aparentemente “no hay problema matemático en esa acción”. Aparentemente es una actividad inicialmente a-didáctica, que se convierte en didáctica porque genera un conflicto. Precisamente, el hecho que este dibujo no es único, va a permitir reconocer posibles preguntas matemáticas que surgirán de algo simple concreto: ¿cuántos hay?, ¿de qué forma son? ¿Son polígonos de cuantos lados?, ¿cuántos triángulos pueden aparecer? …

El uso del color, da oportunidad para visualizar la cantidad, y permitir precisamente que se den preguntas de tipo numérico “cuantos”. El alumno no se imagina como va a ser su dibujo. Como tampoco se imagina el papel que va a tener como “mosaico” para poder servir precisamente de referente contextualizado en sus discusiones posteriores.

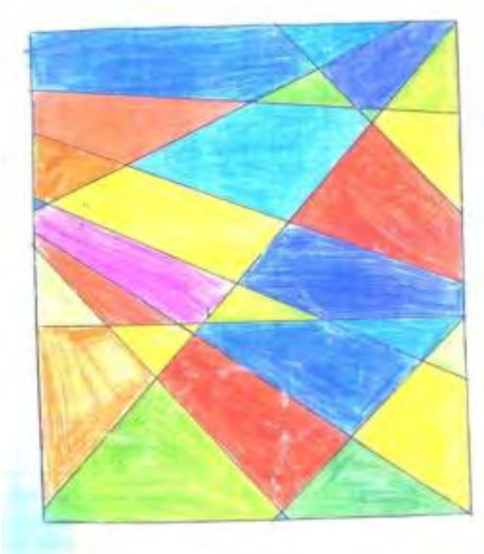


Figura 4. 7: fragmento de un cuaderno con mosaico

A lo largo de la tarea, aparecen elementos ostensivos visualizados (en el sentido de Bishop 1991) como el contorno del mosaico como lado posible de un cierto polígono. Desde el inicio el borrador actúa también como ostensivo para que los alumnos que están paralizados, tengan una "muleta" que seguir reflexionando. Por las características de la consigna, la actividad inhibe que aparezcan figuras con propiedades del tipo simétricas, con lados paralelos, etc. y no permite la emergencia de figuras no convexas. Tan poco se destacan elementos de los polígonos como diagonales, altura, ángulos, etc.

Algunos alumnos usan códigos (ostensivos) de color para nombrar los distintos n-ágonos. No estaba previsto que esto ocurriera. Fue precisamente el detonante para que se reconociera un valor al nombramiento de los polígonos según el número de lados.

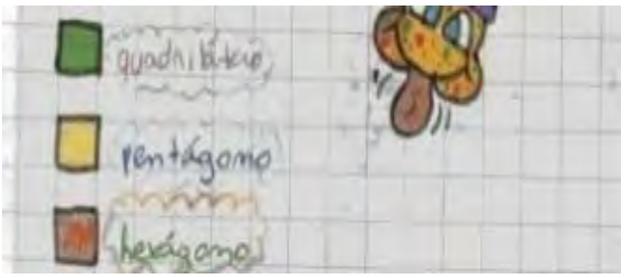


Figura 4. 8: fragmento de un cuaderno con leyendas

Se interpreta como ostensivo cuando se dice que los polígonos son limitados por "rectas". No es ostensivo (explicitado) que los polígonos son limitados por segmentos de rectas que tienen vértices comunes. Un elemento no ostensivo es el reconocimiento del hecho que cada vez que se añade una recta, aparecen tantas regiones más como el número de rectas que tenemos. Es una observación iterativa que no es fácil de convertir en regla general en función del número de lados. Las dificultades en visualizar el mosaico cuanto mayor es el número de rectas, obliga a reconocer el patrón numérico en los casos que es visible, para poder llegar a una fórmula general que no parece al alcance de alumnado de esta edad.

Procesos de descomposición – reificación

Durante la actividad individual los objetos matemáticos unitarios son las rectas, los lados, los polígonos, los triángulos, cuadriláteros, el mosaico dibujado (en cuanto forma particular de situar un cierto número de rectas). Después de la socialización se constituyen como parte de una familia de posibles formas de hacer las rectas. La fijación del número de lados hace que el objeto particular “pentágono” (o “hexágono”) frente a polígonos formados por otro número de rectas, sea unitario, bajo lo que va ser constituido como sus definiciones. Cada mosaico se interpreta como una relación (número de rectas, número de polígonos) o (número de rectas, número de n-ágonos) o como un elemento de una sucesión de valores. Sólo la observación discutida de los dibujos de varios estudiantes permite tener más pares de valores de las funciones que se discuten.

Lo sistémico en este caso es el conjunto de polígonos que “se cierran por n rectas”, el conjunto de polígonos que forman el mosaico no llega a identificarse como objeto de estudio, aunque se percibe en el desarrollo de la tarea. La diversidad de los mosaicos no permite ciertas clasificaciones de polígonos, porque no es fácil que aparezcan algunos tipos (simétricos, regulares). El formato de la actividad no permite reconocer el polígono a partir de sus lados, o ángulos, o vértices. Los polígonos se observan como regiones. La relación número mínimo de lados en las figuras n = 3 es quizás el elemento sistémico más fuerte que aparece en el desarrollo de la tarea. Es un precedente del significado de y(n) = 3 como función para cualquier valor de n. Por el contario $R_n = \frac{(n+1).n}{2}$ + 1 como, relación no se llega a reconocer sistémicamente. Aunque aparecen ciertos elementos de tipo inductivo.

Procesos de representación – significación

La tarea requiere expresar un dibujo llamado mosaico y reconocerlo como un conjunto de polígonos yuxtapuestos de forma conexa. Los polígonos son comprehendidos como figuras cerradas limitadas por rectas. Se reconocen el significado de relaciones numéricas del tipo “número mínimo”, “número máximo” que surge de un encadenamiento de relaciones (¿Mentales? ¿Colectivas? ...).

> Posición de rectas → un mosaico particular → permite reconocer polígonos asociados (dibujados) → se caracterizan los polígonos observados según número de lados → permite indicar mediante conteo qué número de polígonos de diferente número de lados aparece → confrontar ejemplos diferentes realizados por un mismo sujeto o diversos sujetos→ conjeturar y reconocer mínimo y máximo.

> Posición de rectas → un tipo de mosaico → reconocer polígonos asociados → permite indicar cuántos n-ágonos hay → confrontar ejemplos diferentes realizados por un mismo sujeto o diversos sujetos → reconocer mínimo y máximo.

Además de estas cadenas de construcciones, aparecen otras cadenas de significación asociadas a los procedimientos matemáticos implicados en el desarrollo de la tarea. Así, en este caso, se pretende dar significado a una problematización continua, en el sentido de investigación (Borasi, 1992) más que simplemente resolución de problema (en el sentido de Polya). Por ello, se construye sucesivos significados de las acciones:

> Dibujo de n rectas en una cierta posición como objeto inicial → observación del mosaico particular asociado como particular → comparación con otros mosaicos de colegas (como reconocimiento de un conjunto más amplio en el que se da una cierta propiedad) → planteamiento de una pregunta direccional del profesor (como observación de un elemento relacional o como sucesión numérica) → conjetura intuitiva de respuesta global o respuesta parcial argumentada → registro en la pizarra (o en el cuaderno) → respuesta total y/o planteamiento de nuevas preguntas (por los estudiantes que no tienen por qué ser relaciones cuantitativas) → conjeturas de respuesta (como producción de hipótesis que serán aceptadas como válidas mientras no son refutadas) → observaciones que permiten afirmar, reforzar o refutar (como reconocimiento del valor de verdad de afirmaciones con justificativa) → registro en la pizarra y en el cuaderno (como formas de reconocimiento propio y de comunicación matemática) (→ proceso de percepción de regularidades con reconocimiento de propiedades figúrales y/o formales → proposiciones → nuevas clasificaciones → definiciones) → consolidación de afirmaciones en el grupo (como formas dialógicas de validación y legitimación de las afirmaciones en el interior de la institución) → registro .. → problema .. → conjetura ..

Esta forma de hacer, implica una reconceptualización respecto lo que se hace habitualmente, que viene provocada por la emergencia del "objeto" polígono en un universo desconocido a priori. La tarea tal como es propuesta, inhibe que los alumnos formen una imagen mental los polígonos bien comportados (prototípicos), como discutido por (Vinner y Hershkowitz, 1980), las actividades centradas en las figuras "*no prototípicas*" disminuyen la ocurrencia de desvíos del tipo imágenes conceptuales dependiente de las formas prototípicas hegemónicas en las representaciones de polígonos en los textos didácticos y el uso social – tecnológico (formas industrializadas, media, logos, etc.). El significado atribuido a las conjeturas es complementario de lo que algunos autores llaman de confrontación de hipótesis (Boero 1988).

En algunos momentos, se consigue una secuencia de significados precisa sobre lo que se podría denominar búsqueda de soluciones óptimas o económicas.

> Con ocho rectas es posible conseguir polígonos de 8 lados. ¿Será el menor número posible? → Creación de un subproblema inverso: ¿cuál es la posición de un menor conjunto de rectas para que aparezca un polígono de 8 lados? →

Producción de conjetura a partir de caso particular: Consigo un ejemplo con 6 lados → Se consigue un ejemplo con 4 → Reconocimiento de una regla general (puedo disminuir el número de rectas aprovechando los bordes del mosaico) → Resolución argumental visual del subproblema (El número mínimo es 4).

Los alumnos saben que posicionando las 8 retas, cambiando la inclinación de las rectas, es posible obtener un polígono en que cada lado pertenece a una delas rectas, pero cuando utilizan las bordas del rectángulo que delimita el mosaico, solo necesitan de 4 rectas para obtener el octógono

Procesos de personalización – institucionalización.

Los objetos emergentes principales en esta tarea son figuras, funciones o sucesiones, conjeturas, formulación de problemas. En la actividad, el objetivo pretendido sobre la producción de conjeturas resulta una sorpresa para los estudiantes, porque provienen de una tradición de años anteriores en que se define polígono, se clasifican y se analizan por ellos, quitando la oportunidad de que ellos mismos lo hagan. Mientras que aquí, se observan figuras y se trata de establecer relaciones o patrones.

Las conjeturas parciales se reflejan en el cuaderno con los nombres de sus autores. Sus formas de representación parciales (porque corresponden a registros personales que no tienen objetivo de ser leídos) no reflejan la idea de relación, sino que se privilegia la producción de las conjeturas y si pone en evidencia los subproblemas que se han desarrollado.

Veamos como ejemplo, como a lo largo de la discusión se formula una pregunta-problema "*¿Cómo debería ser la posición de los trazos para que se obtuviera un octógono?*" que no estaba prevista inicialmente. Se aportan diversas soluciones con 8 rectas, con seis, con 4, etc. Se percibe en las respuestas la multiplicidad de propuestas que se pueden acercar a la conjetura. Hay un número menor que 8 rectas, menor que 6 rectas, quizás no se pueda hacer con menos de 4 rectas…

Y de ahí surge la generalización que ya se ha comentado anteriormente. Se logró que los estudiantes asumiesen el hecho problematizar como algo natural, desarrollando hábitos de pensar matemáticamente (Mason, Burton y Stacey, 1988; y Schoenfled, 1988) y se involucrasen en la producción de conjeturas y definiciones, porque tanto el punto de partida como el diálogo, son una consecuencia directa de la construcción que se pide, la multiplicidad de posibilidades en sí misma genera la necesidad de confrontar la validez de las mismas.

La tarea en sí misma como establecimiento de relaciones, es compleja, y quizás por falta de un sistema de representación de la evolución en el descubrimiento de la relación, puede hacer pensar que se está perdiendo la imagen global del problema, para privilegiar el proceso con los subproblemas.

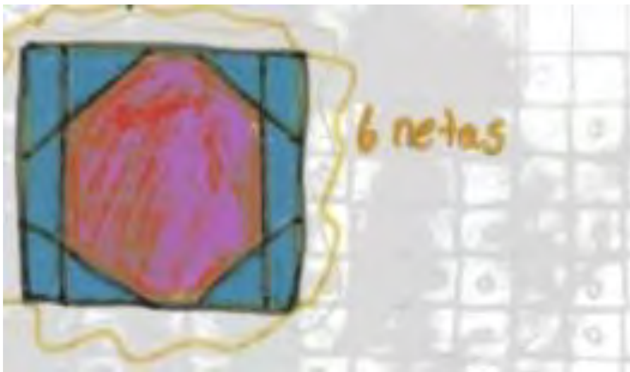


Figura 4.9: fragmento de un cuaderno con solución de un problema, el octógono con 6 rectas

Pero la operacionalización de la tarea permite reconocer que el proceso de argumentación junto con las visualizaciones particulares, permite depurar las respuestas inicialmente intuitivas. La inducción de tipo iterativo que llevaría a una fórmula generalizada resulta ser lo más difícil para los estudiantes de esta edad.

El logro de la personalización implicó la atención constante del profesor a la gestión de los conocimientos, problematizando continuamente, compartiendo la responsabilidad con los estudiantes. Además, la presentación colectiva de los resultados alcanzados por los estudiantes, bien individualmente o trabajando en equipos, su discusión colectiva y las intervenciones de regulación final por el profesor fueran cruciales para el progreso colectivo del aprendizaje y el logro de las competencias de análisis de datos pretendidas.

Así pues, a partir de nuestro análisis no sólo podemos afirmar que se construyeron un conjunto de objetos y procesos, éstos fueron claramente construidos mediante una negociación en donde los estudiantes aprovecharon la potencialidad de la tarea para establecer proposiciones que se corresponden con las que se esperan de la institución, pero que fueron legitimadas por el mismo grupo en el juego de confrontaciones y refutaciones.

4.1.2. Análisis de una actividad sobre Grado de No Convexidad.

En otro momento, con los mismos estudiantes, se propone la tarea de construcción polígonos en un geoplano cuadriculado con puntos. A continuación, se plantea una primera configuración epistémica, a partir de dicha situación simiente con una mediación diferente a la anterior que pretende evidenciar otro tipo de problemas, en un momento inicial nuevo.

En efecto, se propone seguir con la idea de hablar de propiedades de los polígonos. Ahora bien, el docente no tenía previsto que el análisis llevaría más allá de investigar a una definición nueva que los propios estudiantes llamaron grado de no convexidad. Veamos en la figura siguiente la configuración inicial.

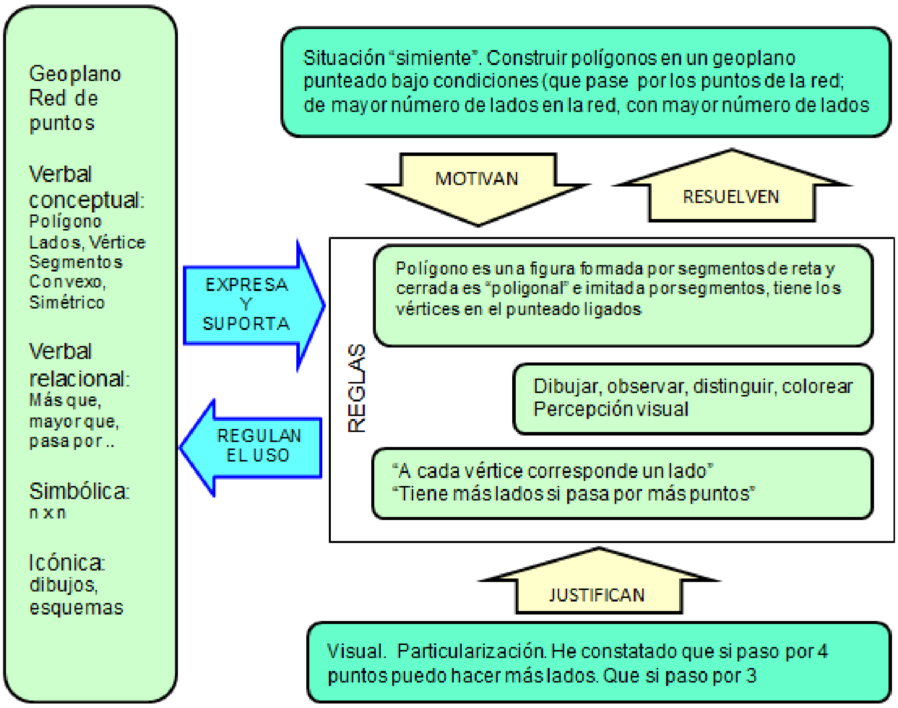


Figura 4.10: Configuración inicial epistémica de la actividad con geoplano.

Más adelante, después de diversas interacciones, se provoca una nueva configuración que presenta la posibilidad de divergencia en el desarrollo matemático. En la figura 4.11 se muestra el momento inicial: Construcción de polígonos con 100 lados en un geoplano

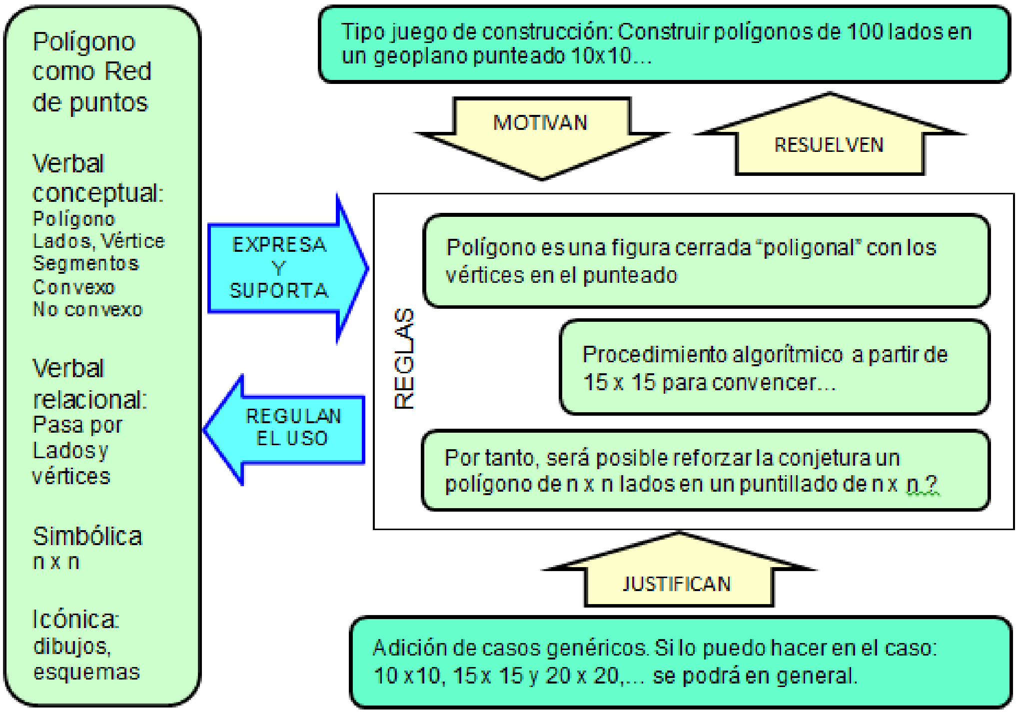


Figura 4. 11: Configuración inicial epistémica de la actividad con polígono en la red.

Estudio de la interactuación de los objetos y relaciones primarias y secundarias, en una perspectiva temporal y dinámica.

Aqui hay un cambio de giro en la secuencia didáctica, con la proposición de un problema de construcción de un polígono en un contexto distinto, en el geoplano de papel, la primera consigna es: "*Construye en el puntillado un polígono cuyos vertices coincidan con los puntos de la trama*".

Procesos de particularización – generalización

En esta situación de los polígonos en la trama de puntos también se da oportunidad de múltiples generalizaciones y particularizaciones. La primera particularización surge del propio enunciado, porque cada estudiante dibuja un polígono. En la elaboración se puede ver como no se dibujan figuras convexas.

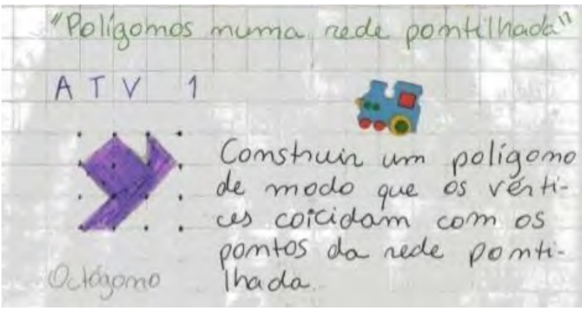


Figura 4. 12: fragmento de un cuaderno con la consigna y la solución

Inmediatamente se particulariza la relación según el número de puntos. En lo que toca la secuencia sobre los puntillados se inicia la actividad a partir de la exploración de una trama cuadriculada determinada, 4 x 4, luego se cambia para otros tramados cuadriculados, 5 x 5, 6 x 6, de acuerdo con las descubiertas y/o cuestiones propuestas por los alumnos o profesor, hasta la exploración de la trama 10 x 10.

Una primera generalización asocia a la trama el hecho que puede hacerse un polígono que "pase" por todos los puntos. En 4x4, se consigue dibujar una figura de 16 lados, y en otras tramas (n x n) se puede hacer un polígono que pasa por todos los puntos pero no siempre tiene n lados. Esta generalización no se explicita en algunos casos, pero es el modo en que se enfrenta el problema general.

Figura 4. 13: fragmento de un cuaderno con la consigna y la solución

Otra generalización implícita que aparece es el hecho de que el triángulo es el polígono con menor número de lados En el contexto de la tarea, no se trata de aplicar una definición sino reconocer que siempre podríamos hacer un triángulo, pero hay un polígono con mayor número de lados, y luego se descubre que hay un número limite que depende de las dimensiones del geoplano puntillado.

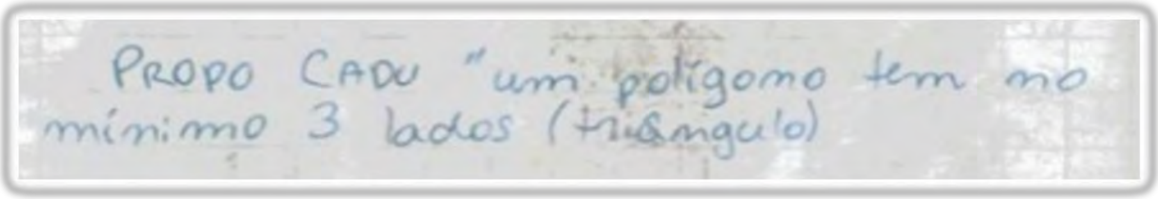


Figura 14: fragmento de un cuaderno con proposición de un alumno

A continuación se asocia el número de lados del polígono buscado en función del tamaño de la red. El punto de partida clave para la generalización es el desafío de obtener el "polígono con el mayor número de lados". La experimentación en dominios particulares (4 x 4, 5 x 5, etc.), lleva a los alumnos a percibir que *cuanto más puntos del puntillado convertidos en vértices, más lad 4.os va a tener el polígono*, así persiguen la meta de conseguir dibujar un polígono de 4 x 4 = 16 lados. El éxito en la resolución del desafío da seguridad al qué apliquen una regla general, o sea, en el puntillado 5 x 5 el polígono con mayor numero de lados va a tener 25 lados, en la trama 8 x 8 debe generar un "64-ágono".

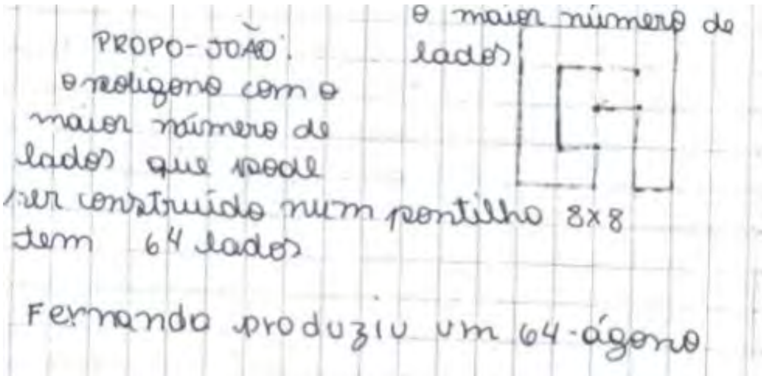


Figura 4. 15: fragmento de un cuaderno con proposición de otro alumno y el registro de que alguien ha encontrado la solución

Y luego se extiende al 10 x 10 si genera un polígono de n x n = n^2 lados, un nuevo indicio de la demostración por elemento genérico. A partir del cual, se plantea una generalización basada sobre la conjetura de que será posible el procedimiento para conseguir hacerlo. Se intuye que hay que empezar por una "sierra" y completar mediante un casi cuadrado en la esquina contraria. La idea es completar una forma espiral que se cierre en el interior.

Procesos particularización y generalización.

Ya son ostensivos los conceptos de polígono, n-ágono, lado y relaciones del tipo "mayor que...", "más lados...". Quedan explicitadas y definidos conceptos intuidos como el de vértice de un polígono. La tarea de "obtener el polígono con número máximo de lados", es no ostensiva, involucra el control de unos procedimientos para tener éxito. La realización de polígonos no convexos, es un ostensivo. Incluso el término acaba siendo una apropiación de los estudiantes.

En efecto, se observan polígonos con muchas entradas. En la tradición didáctica del país, los polígonos así se llaman “no convexos”, aunque en unos poco libros se utiliza el termino cóncavo (más común le los textos de física). En libro antiguos se hace referencia a los polígonos que tienen ángulos salientes (los convexos) y los que tienen ángulos reentrantes, o sea, ángulos mayores que la media vuelta (> 180º) que son los no convexos. Después de los años 1960 esta nomenclatura es abandonada y los maestros utilizan da idea informal de que se los polígono no tienen “entrada” se llaman convexos, pero si tienen entrada entonces no son convexos.

La relación que asocia a cada vértice uno, y solo uno, lado del polígono, aunque trivial para las personas ya matematizadas, no es conocida a priori y es formulada con el júbilo de una descubierta como resultado de la discusión pública entre los miembros de la comunidad de aula. Dibujar un polígono de 100 lados toca lo afectivo, por el placer generado por la conquista.

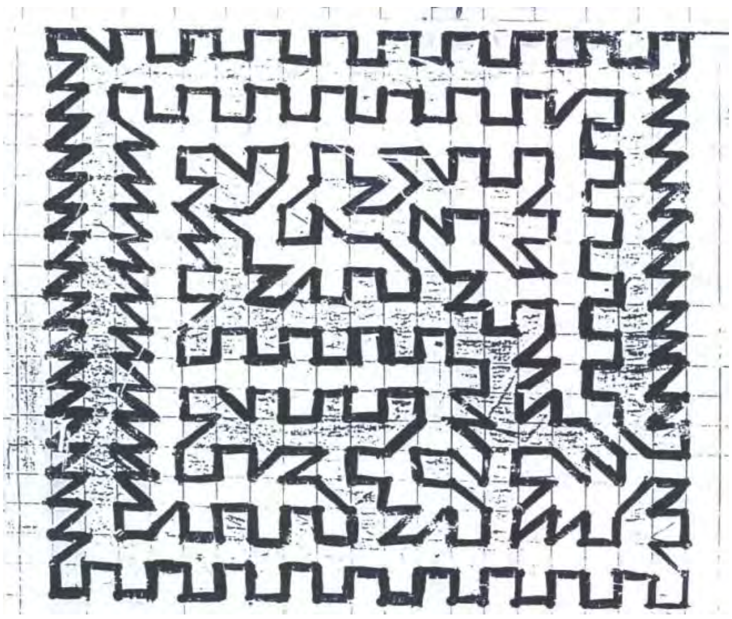


Figura 4. 16: 400-ágono producido por Luciana, 12 años

Las “caracterizaciones de polígonos” no son ostensivos, las clases de polígonos tampoco.

Procesos de descomposición – reificación en la actividad

Son elementos unitarios: cada polígono (figura), las proposiciones como entidades en la situación problema. Cada figura se puede interpretar como una pareja (número de puntos; polígono con un cierto número de lados) Son de naturaleza sistémica los tipos de polígonos (simétricos o no, convexos o no).
El problema de la existencia de figuras de n lados en la trama de n x n es de compleja solución. Se reduce a subproblemas, dado que en los casos particulares surgen intereses problemáticos divergentes provocados en la misma tarea, que “distraen” del propio gran problema.

Procesos de representación – significación

Al hacer figuras como la del dibujo de la figura 17 surge la idea de que hay polígonos con simetría de rotación.

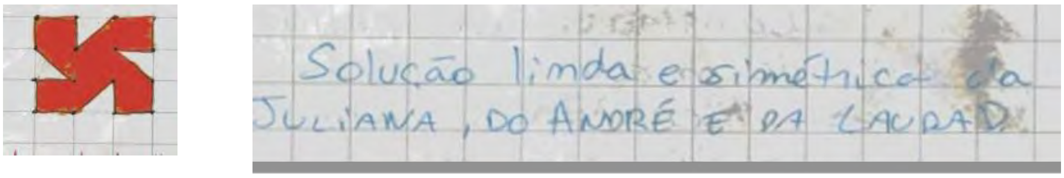


Figura 4. 17: fragmento de un cuaderno con crédito de solución de alumnos

Parece que su proceso es el siguiente: Dibujar polígonos diferentes en una cuadrícula → dar valor a características → asignar cada forma a un tipo determinado según propiedades → construyen polígonos en ciertas condiciones (las propiedades se convierten en elementos para el algoritmo de construcción) → reconociendo definiciones (no siempre explícitas) por caracterización (por ejemplo, convexo como figura sin entradas) → asociación de elementos genéricos para las proposiciones sobre relaciones.

El éxito de la construcción de polígono con muchos lados (e. g.: n > 100) del alumno exige y control en un procedimiento de naturaleza algorítmica como en una actividad de punto de cruz. Los gestos de asombro y alegría del alumnado, hacen pensar en lo emocional.

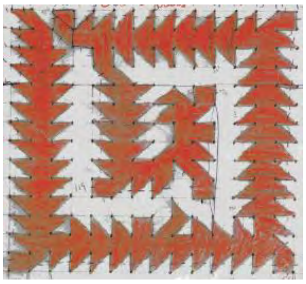


Figura 4.18: fragmento de un cuaderno con solución de desafío: 225-ágono hecho en un geoplano 15 x 15

Procesos de personalización - institucionalización (dualidad personal – institucional):

La importancia del desarrollo dialógico de la tarea, permite que se produzcan muchos significados personales, no previstos por la institución. Es el caso que los estudiantes se preguntan por características de las áreas de las figuras, cuando la línea de discusión estaba centrada en la posibilidad de analizar figuras convexas.

El contexto del cuadriculado, como por ejemplo el 3 x 3 o 4 x 4, comporta que los estudiantes se planteen como significados personales una variedad diversa de nuevos problemas como: (a) producir figuras con condiciones (octógonos, formas simétricas, formas convexas o no, con área máxima, con área mínima, el triángulo con la mayor área, el cuadrilátero con menor y/o con mayor área), (b) discusiones sobre las soluciones, (c) apertura de las soluciones (solución determinada o múltiples).

Figura 4.19: Fragmento de un cuaderno con estudios para descubrir formas poligonales en un geoplano 3 x 3

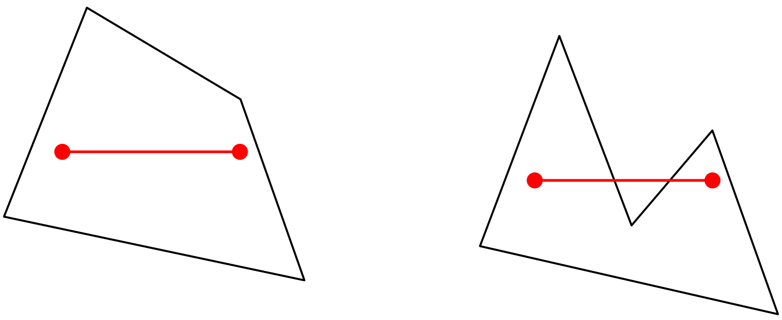
Entre estos nuevos problemas, algunos estudiantes quieren discutir a respecto de la medida de los perímetros de las figuras construidas. Pero el contexto del geoplano, tiene alto grado de generar conflictos, una vez que la probabilidad de que emerjan medidas irracionales con radicales es muy grande. Dado que se sabe que provocan obstáculos cognitivos y epistemológicos de difícil gestión con una comunidad de alumnos de edad tan temprana, se decide no seguir cuando surgen las primeras dificultades para medir segmentos diagonales.

4.1.2. Análisis de la configuración epistémica de la tarea GNC

Para empezar enunciamos las intenciones de la tarea propuesta por el maestro. En el universo de los alumnos de 11 años, así como en la mayor parte de los libros de texto brasileños, la convexidad no es definida. En general se habla de figuras convexas o no, y se suele definir como una propiedad topológica de las matemáticas especializadas:

> “Um polígono é convexo se nenhum par de seus pontos está em semiplanos opostos relativamente a uma reta que contém um lado do polígono” (Moise & Downs, 1971).
>
> “Um polígono é convexo se está sempre contido em um dos semiplanos determinados pelas retas que contêm os seus lados” (Barbosa, 1985).
>
> “Um conjunto C de pontos é uma região convexa se e somente se $\forall A$, $\forall B$ $(A \in C \wedge B \in C \wedge A \neq B \rightarrow [AB] \subset$” (Castrucci, 1978).

De modo pretensamente informal los libros de texto parten de una de las definiciones de convexidad para polígonos para “definir” los polígonos no convexos: “Si dos puntos pertenecen a un polígono convexo, entonces todo segmento que tiene estos dos puntos como extremidades, estarán contenidos en el polígono”



Figuras 4.20 y 4.21: Esquema de libros de texto para ejemplificar polígono convexo y no convexo

La convexidad se presenta como una propiedad que se utiliza únicamente para reconocer una característica, el polígono es o no convexo. A partir de ahí, se considera que el término convexo o no forma parte del vocabulario de los alumnos. Nos parece que la idea de polígono convexo se asocia a una necesidad de nomenclatura para poder hablar de propiedades que se cumplen en este tipo de polígonos.

En la propuesta realizada, los estudiantes se enfrentan con los polígonos no convexos como objeto de estudio que es interesante para ellos. A diferencia de las actividades anteriores, la producción de hipótesis nos parece que ha llevado a los estudiantes a hablar de estas figuras, más allá de lo que el docente se proponía.

El giro crucial de la secuencia completa ocurre cuando ocurre la socialización de lo construido por los alumnos, al comparar sus producciones de polígonos, observan que tienen diferente número de entradas. Varios alumnos manifiestan la intuición de que "cuanto más "entradas" menos convexa la figura" Y por ello, proponen comparar las figuras porque unas son menos convexas que otras. Un estudiante propone entonces la siguiente pregunta: "¿Qué polígono es menos convexo?".

Surge la necesidad de disponer de alguna herramienta relacional que pueda comparar dos polígonos en cuanto a la propiedad "convexidad". Pero tal herramienta no existe en el universo de lo institucional pretendido, no hace parte de los programas curriculares, libros de texto y ni siquiera del conjunto de saberes de los maestros. En realidad aparece un concepto de grado de no convexidad, o índice de convexidad, asociado a problemas de optimización y separabilidad de figuras. Pero incluso esa medida no tiene el significado que le dotan los estudiantes en su juego de búsqueda.

Pero hay que seguir por delante y se considera legítima la curiosidad y/o necesidad de establecer una relación de orden entre los polígonos respecto a la convexidad. Algunos alumnos manifiestan la intuición de que "cuanto más "entradas" menos convexa es la figura" Se hace necesario un cambio en la expectativa de los alumnos basadas en normas que orientaran sus experiencias escolares anteriores.

En la norma que se pone de manifiesto, no hay temas que no se puede discutir, mismo los que no componen el menú de las matemáticas escolares oficiales. Se acuerda por la tentativa de crear un criterio coherente que pueda decir cuál es el más convexo entre dos polígonos. La primera constatación colectiva, esto es, manifestada por muchos alumnos cuasi simultáneamente es que "dos polígonos convexos son igualmente convexos", y por tanto no cabe decir si uno es más convexo que otro.

El problema elegido como importante fue comparar la convexidad de polígonos no convexos. El grupo sigue una ruta inspirada por el uso del geoplano de pinos y gomas, que es un criterio que daría cuenta de construir una proposición definidora del criterio de comparación de convexidad. Un alumno dibuja en la pizarra un polígono inscrito en un polígono convexo que lo contén, debe ser el polígono de menor área posible, para esto lo mayor número de lados de los dos polígono deben ser coincidentes fig. 4.22.

La idea fue contestada con un ejemplo intuitivo puesto por otro alumno. "Creo que las figuras 4.23 y 4.24, son igualmente no convexas". Parece que lo que se refleja es que hay algo semejante entre esas figuras que no puede ser atribuido al área la distinción.

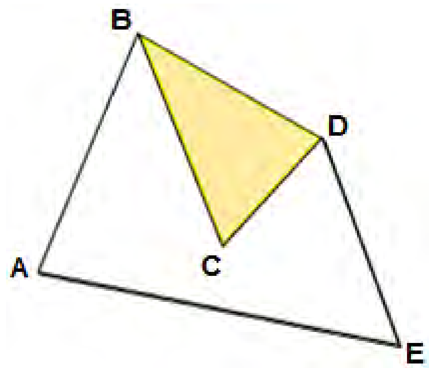
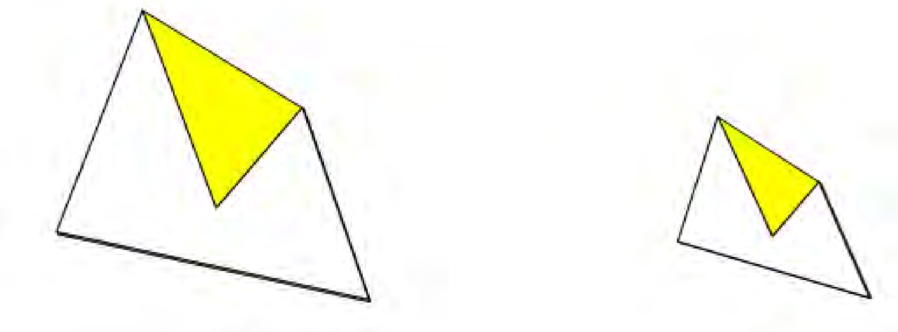


Figura 4.22: Pentágono ABCD inscrito en el cuadrilátero ABDE

Se inscribe el polígono en cuestión en un polígono convexo de menor área. Y se compara las áreas que no hacen parte del polígono convexo original. Entonces, se dice que la figura 23 es menos convexa que la figura 24.


Figuras 4.23 y 4.24: Esquema de ejemplificación

El grupo pronto acepta como se fuese un "contra-ejemplo" y el argumento que lo sostiene ya aun la aproximación conceptual del GNC que empieza a ser definida. Vuelven a buscar un nuevo criterio aceptable que pueda comparar o quizá medir la no convexidad. Parece que la idea visual de entrada está siendo clave para decir que las figuras 23 y 24 anteriores son semejantes y debería ser cuantificada por algún criterio controlable. Nuevamente la referencia al geoplano de pinos y gomas da el camino. Definen como el grado de no convexidad (GNC) de un polígono el número de clavos-vértices que van hacia fuera de la figura, cuando esta es construida con gomas" Así las figuras 1 y 2 tiene el mismo GNC (1) = GNC (2) = 1, en cuanto la figura 3 tiene el GNC (3) = 2.

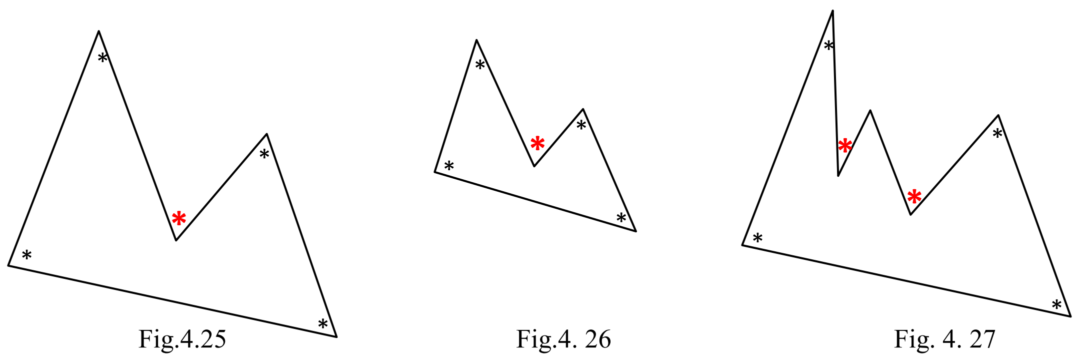


Fig.4.25 Fig.4. 26 Fig. 4. 27

La institucionalización del criterio anterior no acaba con la tarea. Profesor y alumnos intentan poner nuevas preguntas a respeto del nuevo concepto. ¿Cuál es el GNC de un polígono convexo? No tienen duda en responder “cero” porque no hay entrantes. La evidencia no se explicita, como muchas veces hacen los matemáticos. ¿Cuáles son los posibles GNC de un octógono? Los dibujos y experimentaciones conllevan a los alumnos a responder 0, 1, 2, 3 o 4. ¿Si un polígono tiene 12 lados, cual es el máximo GNC? Más experimentación a través de dibujos y algunas mentales, la respuesta es 6. ¿Se puede generalizar ese resultado? ¿Cuál es el máximo GNC que puede tener una figura de n lados? ¿Qué pasa con polígonos que tienen un número par de lados? ¿Y cuando el número de lados es impar? El grupo dice que: “siempre se puede hacer estrellas de una figura (y muestran en la figura como duplican el número de lados, llevándolos hacia dentro)”, y por eso dirán que en un polígono de 10 lados no hay más de 5 entradas. Por eso, enuncian que

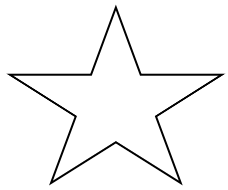


Figura 4.28: Estrella de 5 puntas

Si n es par y $n > 4$, entonces el GNC máximo es $n/2$.
Se n es impar > 4 entonces el GNC $= (n+1)/2 - 1$

En el caso impar, experimentar con el caso $n = 5, 7, 9$ da intuición que la regla anterior se cumplirá.

Estudio de la interactuación de los objetos y relaciones primarias y secundarias, en una perspectiva temporal y dinámica.

En esta configuración correspondiente al problema, consideramos la idea de Freudenthal que las definiciones no deben ser consideradas como entidades o reglas arbitrarias prescritas para los alumnos (Freudenthal, 1973). En efecto, él tomaba la clasificación de los cuadriláteros como ejemplo, al asociar a los distintos tipos la caracterización mediante el uso de propiedades diferentes. En esta actividad se ponen en juego las dos tipos de definición que Freudenthal hablaba: lo descriptivo (puedo hablar de polígonos de tal o cual tipo) y lo constructivo (puedo hablar de GNC como nuevo contenido que aparece en la discusión). Los polígonos convexos en nuestra actividad, se contraponen con los que no lo son, con la ayuda del geoplano y la pregunta motriz que se propuso. Vinner hablaba de un proceso de reconstrucción con ejemplos con funciones (Vinner, 1991). Y también aparece un ejemplo funcional de reconstrucción en nuestra actividad en cuanto los estudiantes no consiguen crear una imagen igual de poderosa para la relación (número de clavos, número de lados máximo del polígono que pasa por ellos).

De forma semejante, Borasi había desarrollado la idea de trabajar reconstruyendo las definiciones en el caso de círculo y otros conceptos. En ese momento se introducía la idea de proceso investigativo como proceso heurístico para el diseño de actividades que tratan de revisar definiciones incorrectas de un concepto dado o bien introduciendo contextos diferentes (Borasi, 1992: 155), En un sentido semejante pero constructivo, las actividades propuestas por R. Hershkowitz y otros. Estas situaciones son llamadas SDC situaciones de definición-construcción (Duchet, 1997). En este tipo de actividad, no se acentúa la redefinición (en sentido de Borasi).

En este trabajo, entendemos que esta situación es de construcción conceptual en el sentido que “Un procedimiento de definición es un procedimiento de formación de concepto” (Lakatos, 1961; p54) que es asumido por los estudiantes en el proceso y como proceso. Podríamos llamarlo definición-propio como la enuncian los estudiantes y la atribuyen a un colega que la formuló. Pero también aparecen las definiciones como evidencias conceptuales en sí mismas. El significado de no convexidad en relación a entradas (como Euclides) no es sólo construcción sino que se usa para reconocer polígonos diferentes (en el sentido clasificatorio como Aristóteles). Este sentido dialéctico muestra que la definición no es sólo asociada a terminología metamatemática (Ouvrier, 2004),

Procesos de particularización – generalización.

En esta situación, también se da oportunidad de múltiples generalizaciones y particularizaciones. En efecto, una primera generalización es el propio acuerdo en el interés común por un problema general que consiste en establecer una relación de orden entre los polígonos respecto a la convexidad. Se pretende que existe tal relación. Otra generalización se da respecto el número de entradas de la figura, y se da cuando se busca una regla general para comparar polígonos no convexos y se formula la intuición de que “cuanto más “entradas” menos convexa la figura. De aquí la necesidad de cuantificación. Se particulariza la idea de nombrar que el polígono convexo no tiene entradas, y se asocia a cero en la convexidad porque no hay entradas. La evidencia no se explicita, como muchas veces hacen los matemáticos.

4.1.3. Análisis de práctica de resolver problemas: ángulos en el reloj.

Consideramos una situación que se propuso en un momento intermedio, y que dio lugar a un artículo explicando en detalle las intenciones del profesor investigador. Ello da oportunidades a tener un relato cualificado que vamos a analizar. No sólo muestra la transcripción de lo ocurrido, sino los comentarios sobre la intencionalidad de los momentos, y una subdivisión natural en episodios.

La tarea matemática propuesta, propone que los alumnos reconozcan como problema inicial encontrar el ángulo que forman las manecillas del reloj en una hora determinada. Para ello, se pide que busquen en los relojes de sus casas el ángulo que forman las manecillas a la hora de entrada, de patio y de salida de clase, y posteriormente se planteen la hora en que ellos nacieron, como situación que genere un proceso de resolución inductivo general como caso crucial (en sentido de Balacheff). Subdividimos la práctica que se desarrolla en dos clases en varios episodios.

- Problema inicial particular El ángulo correspondiente a la hora. 7:20
- Sobre las limitaciones del método experimental a partir del ejemplo de 11.40
- Tentativas de generalización. Búsqueda de una unidad de relación pequeña.
- Propuesta generalizadora. Del ángulo a la hora.

Para analizar características observables en dicho trabajo, usamos dos modelos teóricos combinados que son EOS y el modelo de Scott y Mortimer (Vanegas, Giménez y Font 2010).

Análisis de prácticas, objetos y procesos

Iniciamos con la identificación de prácticas matemáticas, para posteriormente reconocer objetos y procesos.

Episodio	PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	Sujetos
PP1	Plantea la pregunta de cuál es la medida del ángulo correspondiente a lo que marcan tres horas específicas (7:20; 10:40; 12:45) en un reloj de agujas (asociadas a horarios de entrada al colegio, hora del recreo, hora de salida).	PRO
PP2	Plantea una segunda pregunta en donde se pide el ángulo firmado por las agujas del reloj en la hora que nació cada estudiante.	PRO
PP3	Pide a los estudiantes exponer sus soluciones argumentándolas	PRO
PP4	Interviene para que el estudiante explique su respuesta	PRO
PP5	Repite la respuesta del estudiante dando relevancia a los procesos de representación y medición.	PRO
PP6	Pide a toda la clase que se reconozca el método matemático usado por F	PRO
PP7	Pregunta al grupo si algún estudiante ha llegado a la solución por otro método (con el objetivo implícito de distinguir entre método experimental y la que se basa en argumentos lógicos).	PRO
PP8	Pregunta que busca que el estudiante amplíe la explicación	PRO
PE1	Un estudiante F explica el método que utilizó para las la hora de las 7:20	EST
PE2	F Dibuja una curva (que quiere que sea una circunferencia)	EST
PE3	F Marca los cuartos de hora, colocándolas en orden 12, 3, 6, 9 y posteriormente hace las señales correspondientes a 1, 2, 4, 5 y 7	EST
PE4	F enuncia su respuesta	EST
PE5	F enuncia procesos de representación y medida desarrollados	EST
PE6	I reconoce y denomina la respuesta como método experimental	EST
PE7	Combina dos representaciones, dibujo inicial con gesto	EST
PE8	Establece la relación "1 hora vale 30 grados"	EST
PE9	Enuncia que a las 7:20 las agujas forman un ángulo de más de 90 grados	EST
PE10	Justifica su respuesta y no aludiendo a la representación	EST
PE11	G reconoce la relación 2 minutos corresponden a 1 grado	EST
PE12	Justifica que 20 minutos recorren 10 grados	EST
PE13	Enuncia que la respuesta buscada son 100 grados	EST
PE13	H expresa incomprensión de la explicación dada	EST
PE14	Explica el procedimiento con mayor detalle "90 de antes y 10"	EST
PE15	Otro estudiante interviene para aclarar el procedimiento explicado, ayudándose de la representación gráfica y gestualizando.	EST
PE16	I otro estudiante muestra un razonamiento, que se apoya en el hecho de que la aguja de las horas se mueve más allá del 7, relacionando que 20 minutos que avanza, se corresponde con un tercio de hora, que son 10 grados más de 90 y no sólo 90.	EST
PE17	Otro estudiante problematiza , preguntando qué ocurre a las 7:14	EST
PE18	Otro estudiante enuncia que el resultado será fraccionario.	EST

Figura 4.29: Prácticas matemáticas en episodio 1
Profesor: PRO; Estudiante: EST

Nuestro propósito es identificar que en los procesos de estudio analizados, se dan características diferenciales como por ejemplo el hecho de que los estudiantes son los que establecen un mayor número de objetos y procesos matemáticos. Ello no sólo muestra el potencial de la tarea propuesta de promover aprendizaje matemático, como mayor calidad y cantidad de procesos, sino que constata un tipo de relación que no está centrada en el profesor.

Para verlo, se toma uno de los relatos de aula del profesor investigador en donde se perciben distintos tipos de prácticas, como se muestra a continuación.
Los estudiantes realizan un número doble de prácticas matemáticas en este episodio respecto a las del profesor, lo cual hace ver que se asume como natural que en el proceso de resolución de problema se dan argumentos diferentes, se contrastan, se asumen cuando son consistentes y se acaba por problematizar nuevamente.

A continuación nos proponemos mostrar qué tipo de objetos y procesos emergen de las prácticas citadas. En formato de tabla, mostramos los objetos encontrados en el episodio. Como se puede observar, contra lo que suele ser habitual, surgen casi totalmente de parte de los alumnos. Incluso los conceptos que se relacionan en la resolución del problema no son ni tan sólo reforzados por el profesor.

Con lo que podemos ver que eso es debido a la función de la intervención básicamente provocadora, que jamás responde o concluye por los estudiantes, sino que ánima a la discusión con preguntas que alimentan las interacciones entre los participantes del grupo. En la tabla siguiente, se han detallado aspectos relacionados con la actividad matemática desarrollada en el episodio inicial de la clase, estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* cuyo análisis nos informa "anatomía de un texto matemático".

En la configuración epistémica observada, la situación-problema que la motiva, aunque no aparece en la transcripción de manera explícita, se podría expresar del siguiente modo:

¿A cada hora del reloj se corresponde un ángulo formado por sus manecillas? ¿Hay algún procedimiento que nos permita encontrar dicha medida?

En un segundo episodio se propone a los alumnos si es posible usar el método de Ian, de forma generalizada, partiendo de la pregunta de saber el ángulo correspondiente a las 11:40. Iniciamos con la identificación de prácticas matemáticas, para posteriormente reconocer objetos y procesos.

Como en el episodio anterior, en un momento inicial del episodio 2, se indica la importancia de argumentar las explicaciones y procesos usados. Como en el episodio anterior, en un momento inicial del episodio 2, se indica la importancia de argumentar las explicaciones y procesos usados. Se continúa abordando el tema de medición de ángulos, la tarea que se pretende analizar tiene un carácter abierto y de implicación emocional, ya que se alude a la medida del ángulo que forma las manecillas del reloj en la hora de nacimiento de cada estudiante.

En este sentido, cada estudiante, tiene un problema diferente a resolver, pero como elemento común para la discusión la descripción de la manera como determinan la medición de dicho ángulo.

PROBLEMA: ¿Determinar el ángulo formado por las manecillas del reloj cuando marca las 7:20 h (hora de entrada al colegio)	PRO
PROPOSICIONES: **P1** *Gab* "Da 110 grados" **P2** *Fla* "Dibujé y medí" **P3** *Ian* "Usó el método experimental" (un aluno hablando de otro) **P4** *Gab* "Cada hora vale 30 grados" **P5** *Gab* "El ángulo que buscamos vale más de 90 grados" **P6** *Gab* "Cada dos minutos de la manecilla en las horas corresponde a un grado" **P7** *Gab* "20 minutos recorren diez grados" **P8** *Gab* "Da 100 grados" **P9** *Gab* "90 que teníamos más 10 que la aguja de las horas recorrió, da 100" **P10** *Ian* "Si la aguja de las horas no se moviera, las 7 y 20 darían 90 grados" **P11** *Ian* "La manecilla de las horas se mueve, corresponde a un tercio de horas" **P12** *Ian* "La aguja de las horas correrá un tercio de 30 grados, que es 10 grados" **P13** *Ian* "Dará quebrado" **P14** *Ian* "Los ángulos serán fracciones"	 EST EST EST EST EST EST EST EST EST EST EST EST EST EST
CONCEPTOS: **C1** Medida de ángulos **C2** Ángulo como giro (rotación) **C3** Medida de tiempo **C4** Relación entre medida de tiempo cronológico y variación ángulo **C5** Proporción (no explícita)	 EST EST EST EST EST
PROCEDIMIENTOS **M1** Comparación (de representación, de relaciones) **M2** Aproximar la medida de ángulos (medida directa) **M3** Reconocimiento de propiedades de las relaciones **M4** Lectura de horas en el reloj	 EST EST EST EST
LENGUAJE **L1** *Verbal oral* [7 y 20; ángulos; 110 grados; 100 grados; 30 grados; horas; 20 minutos; 7 y 14; fracciones; quebrados ; medí; más de 90] **L2** *Verbal escrito* [los números del reloj] **L3** *Gráfico* [representación del reloj analógico, colocando los números de las horas y señales] **L4** *Gestual* [movimientos de la mano indicando apertura del ángulo de las manecillas]	 PRO y EST EST EST EST
ARGUMENTOS **A1**: *Fla* "Dibujé y medí" **A2**: *Gab* "Cada hora vale 30 grados" **A3**: *Gab* "Cada dos minutos en la manecilla de las horas corresponde a 1 grado" **A4**: *Gab* "20 minutos recorren 10 grados" **A5:** *Ian* "La manecilla de las horas se mueve, (20 minutos) corresponde a un tercio"	EST EST EST EST EST

Figura 4.30: Objetos matemáticos de episodio 1

Episodio 2	PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	Sujetos
PP1	Plantea la pregunta de si sirve el procedimiento de Ian para las 10:40)	PRO
PP2	Pide a los estudiantes exponer sus soluciones argumentándolas	PRO
PP3	Repite la propuesta de dibujo realizada inicialmente por Ian, mostrando que en el caso de las 10:40 es posible que uno se equivoque más al hacer una medición a ojo	PRO
PP4	Plantea una pregunta que invita a la consideración de otros métodos para la solución de la tarea	PRO
PP5	Reitera la pregunta propuesta en la tarea, busca la explicación de nuevas respuestas y descripciones	PRO
PP6	Pregunta un estudiante concreto ¿A qué hora naciste? Y ¿A qué ángulo corresponde?	PRO
PE1	*Fla* explica que el ángulo es fácil de encontrar dibujando, usando las rayitas de los cuartos (del círculo del reloj)	EST
PE2	*Fla* cuenta 90 grados desde el 11 hasta el 8 y el trozo de más allá	EST
PE3	*Gab* enuncia su respuesta de 90 + 10 + 10	EST
PE4	*Al4* las 12:45 el ángulo será 90 y algo más	EST
PE5	Hace falta saber 1/3 de 30	EST
PE6	*Mar* interviene para describir el método que ella ha realizado. Hace una representación del reloj, en la que se asigna a cada minuto una marca (ella hace 5 marcas entre una hora y otra, y no 4)	EST
PE7	*Mar* asigna una medida a la distancia entre una marca y otra (5º) y argumenta que es porque 30º/6 es 5º	EST
PE8	*Mar* describe lo que ella hace para determinar el ángulo que se genera en una hora determinada (6:20)	EST
PE9	*Mar* aplica la relación descrita anteriormente del valor de medida entre marca y marca del reloj y argumenta que a las 6:20, en grados sería (30 + 30) + 10, y explica que este último valor corresponde a los grados que se deben añadir por el desplazamiento de la manecilla de las horas hacia la izquierda.	EST
PE10	*Mar* concluye que el ángulo formado por las manecillas del reloj a la hora que nació (6:20) es de 70º	EST
PE11	*Al5* responde a la pregunta del profesor sobre su hora de nacimiento (10:30)	EST
PE12	*Al6* responde a la pregunta del profesor, sobre el ángulo a la hora de nacimiento de otro compañero (10:30 – 135º)	EST
PE13	*Al7* otro estudiante interviene para decir su hora de nacimiento 9:05	EST

Figura 31: Prácticas matemáticas en episodio 2

Como se puede observar, en ese segundo episodio, los estudiantes siguen siendo también los protagonistas de la mayor parte de prácticas. Si bien es evidente que al ser una segunda propuesta, que sube el estatus de la reflexión, el convencimiento de encerrar una generalización, hace que el episodio se desarrolle mucho más rápidamente.

PROBLEMA: ¿Podemos resolver el problema de las 10:40 con el método de Ian?	 PRO
PROPOSICIONES: **P1** Mar "En el reloj entre una hora y otra hay 5 marcas" **P2** Mar "La distancia entre cada pequeña señal es 5 grados" **P3** Mar "En el reloj entre una hora y otra hay 5 marcas" **P4** Mar "Treinta grados dividido entre 6 da cinco grados" **P5** *Mar* "Son seis intervalos" **P6** "Cada intervalo de cinco grados corresponde a diez minutos" **P7** *Al6* "135º"(respondiendo a la pregunta del problema)	 EST EST EST EST EST EST EST
CONCEPTOS: **C1** Intervalo de ángulos relacionado l periodo de tiempo **C2** Correspondencia marcas – ángulos recorridos **C3** Relación ángulo fracción (en el círculo del reloj)	 EST EST EST
PROCEDIMIENTOS **M1** Dibujar teniendo como referencia las subdivisiones del círculo **M2** Comparación (de representación, de relaciones) **M3** Estimar teniendo como referencia los ángulos especiales (90º) **M3 M4** Describir un método basado en representación y dibujos **M5** Establecer correspondencia (entre marcas e intervalos angulares)	 EST EST EST EST EST
LENGUAJE **L1** *Verbal oral* [30º divididos entre 6 da 5º; sumaré 30º + 30º que es 60º; cada intervalo de 5º corresponde a 10 minutos recorridos por la manecilla de los minutos; la manecilla de las horas avanza 10º o sea 60º + 10º = 70º] **L2**: Gráfico [dibujo de las subdivisiones del reloj] **L3**: V*erbal escrito* [explicación acerca de los números del reloj	 EST EST EST
ARGUMENTOS **A1** La distancia entre cada pequeña señal es 5º porque 30º dividido por 6 da 5º **A2** Cada intervalo de 5º corresponde a 10 minutos recorridos por la aguja de los minutos **A3** Como son las 6:20, entonces la manecilla de las hora avanza 10º	 EST EST EST

Figura 4. 32: Objetos matemáticos de episodio 2

Los estudiantes siguen siendo los protagonistas de las intervenciones, proponiendo sus casos particulares respecto a la hora de su nacimiento y manifestando su interés por explicar sus procedimientos para determinar la medida del ángulo. Podemos reconocer que aunque el profesor en algún momento se dirige a un estudiante en particular, los demás también se sienten involucrados en la pregunta y responden a ella. También se puede evidenciar el interés de comentar su caso, dado que la tarea daba la oportunidad de dar una respuesta por cada estudiante.

En el episodio 3, el proceso de explicación y discusión de la tarea con todo el grupo, es enriquecido por el planteamiento novedoso de un estudiante, quien propone hablar de su hora de nacimiento no aludiendo al tiempo, sino a la medida del ángulo: “Yo nací cuando el ángulo era 100º”, lo cual no sólo plantea la situación inversa de la inicial, sino que genera que la clase considere un nuevo tipo de relaciones y se planteen nuevas situaciones, haciendo que haya una evolución en la significación de los objetos matemáticos involucrados en la tarea.

Episodio 3	PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	Sujetos
PP1	Reconoce la importancia de la nueva formulación de un estudiante y llama la atención de todo el grupo planteando una pregunta	PRO
PP2	Solicita que un estudiante explique cómo ha llegado a la respuesta	PRO
PP3	Reitera que la respuesta dada por un estudiante es verdadera	PRO
PP4	Afirma que una solución no ha sido probada	PRO
PP5	Solicita a un estudiante que diga la hora de su nacimiento, para que toda la clase constate que la respuesta dada por su compañero es válida (pero, no necesariamente única)	PRO
PP6	Legitima la propuesta de un estudiante que implica la reformulación del problema, lo cual posibilita considerar una situación más general (¿Es la relación entre la posición horaria y la medida angular, biunívoca?)	PRO
PP7	Interviene para que reflexionar sobre la unicidad de una respuesta	PRO
PP8	Solicita que ciertas propuestas de respuesta se escriban en la pizarra	PRO
PP9	Solicita a los estudiantes que generalicen la relación que está evidenciando en casos particulares	PRO
PE1	Gab dice “Yo nascí cuando estaba 100º”	EST
PE2	*Gus* responde a la pregunta que propuso el profesor a toda la clase sobre la hora de nacimiento de otro compañero (que inicialmente fue expresada en grados)	EST
PE3	*Gus* explica que ha llegado a una solución, tomando en cuenta la respuesta dada a otro problema (problema expresado en el episodio 1). Compara hora y medida del ángulo. Establece una relación de equivalencia.	EST
PE4	*Al8* interviene para cuestionar si la respuesta dada por *Gus* es única o existen otras posibilidades.	EST
PE5	*Al9* propone una nueva situación, la posibilidad o no que se dé un determinado ángulo, considerando que la manecilla de las horas se mueve.	EST
PE6	*Al10* pregunta si la manecilla de las horas se mueve, entonces nunca puede formar un ángulo recto	
PE7	Dos alumnos responden a la pregunta propuesta por su compañero (*Al9*), enuncian casos particulares: 3:00h – 90º; 9:00h – 90º	EST
PE8	Gui expresa una generalización que ha reconocido sobre las horas que se corresponden con los mismos ángulos y afirma que “solamente los ángulos de 90º y 180º se repiten”	EST
PE9	Dos alumnos responden a la pregunta propuesta por su compañero (*Al9*), enuncian casos particulares: “a las 3:00h se forma el ángulo de 90º”; y “a las 9:00h también”.	EST
PE10	*Gus* manifiesta que tiene un contraejemplo a una de las cuestiones planteadas, pues "5:00 y 7:00 hacen el mismo ángulo"	EST
PE11	*Lui* enuncia otros ejemplos de horas en que reconoce que la medida del ángulo es la misma, como “las 4:00 y las 8:00”	EST

PE12	Otros reconocen y enuncian horas en la que las manecillas del reloj formarían un ángulo de 90º (6:15h; 6:45h; 3:30h y 9:30h)	EST
PE13	*Gus* manifiesta que tiene un contraejemplo a una de las cuestiones planteadas	EST
PE14	Varios estudiantes buscan formular una proposición más generales, algunos haciendo gestos con las manos, otros relacionando conceptos	EST

Figura 4. 33: Prácticas matemáticas en episodio 3

En esta parte de la clase el foco de la discusión son los problemas formulados por los alumnos.

PROBLEMA: "¿A qué hora nació Gabriel?" (qué ha dicho que nació cuando las manecillas estaban en 100º) "¿Cómo podemos saber si no era otra la hora que las manecillas formaban el ángulo de 100º? "Si la aguja de las horas camina,.. ¿Nunca dará ángulo recto?	 PRO EST PRO
PROPOSICIONES: **P1** *Gus* "A las 7:20" **P2** "La solución de Gustavo es verdadera, pero no es objeto de prueba inmediata" **P3** *Al9* "Sí que puede ser. A las 3:00 las manecillas forman un ángulo de 90º" **P4** *Al10* "A las 9h00 también" **P5** "Si sospechamos que existen otras "horas" que forman el mismo ángulo, quería decir que no es posible tener certeza de la hora que nació Gabriel" **P6** *Gui* "Sólo los ángulos de 90º y 180º se repiten" **P7** *Aln* "6:15h; 6:45h; 3:30h y 9:30h se corresponden con el ángulo recto" **P8** *Gus* "Yo tengo un contraejemplo" **P9** *Gus* "5:00 y 7:00 hacen el mismo ángulo" **P9** *Lui* "También a las 4:00 y a las 8:00 da el mismo ángulo... y a las 3:00 y las 9:00 también, y aún más..."	 EST PRO EST EST PRO EST EST EST EST EST
CONCEPTOS: **C1** Medidas de ángulos **C2** Ángulo recto **C3** Movimientos de giro	 EST EST EST
PROCEDIMIENTOS	
LENGUAJE **L1** *Verbal oral* ["Yo nascí cuando estaba 100º", 3:00h – 90º; 9:00h – 90º; "También a las 4:00 y a las 8:00 da el mismo ángulo... y a las 3:00 y las 9:00 también, y aún más..."; "Yo tengo un contraejemplo"] **L2** *Verbal gestual* [... estudiantes buscan formular una proposición más general, algunos haciendo gestos con las manos ...]	 EST EST
ARGUMENTOS **A1** *Gus* "Acabamos de resolver el problema del ángulo de las manecillas cuando era esa hora y el resultado era 100º **A2** *Gus* "pues 5:00 y 7:00 hacen el mismo ángulo"	 EST EST

Figura 4. 34: Objetos matemáticos de episodio 3

Los problemas que surgen de las propias discusiones en la dinámica de proporciones – explicaciones, el maestro abdica de por fin a la discusión, como podría ser si pidiese al alumno *Gab*riel que le diga a qué horas nasciste. El maestro coordina la discusión colectiva y actúa como catalizador. Aunque los alumnos que hacen proposiciones puedan parecer pocos, el hecho es que los demás están atentos a lo que ocurre e razonando sobre los problemas que va surgiendo. Aunque en el registro de este episodio no hay referencia a la utilización del lenguaje escrito, se supone que es utilizada por los alumnos en sus borradores, antes de dar respuestas o hacer proposiciones. Lo mismo se puede inferir respeto los procedimientos que no aparecen en las enunciaciones verbales, aunque estén implícitas en las estrategias de solución de los problemas. En el último trozo de la clase ocurre el cuarto episodio en el que el grupo produce la respuesta al problema de Gabriel, buscando generalizar y ofreciendo un tipo de argumento que puede ser utilizado en otros problemas análogos basado en el concepto de simetría.

El maestro organiza los datos en la pizarra qué está llena con registros numéricos y geométricos, qué serán cruciales para que los alumnos perciban las regularidades que posibilitaran la resolución del problema generado por un alumno.

Contra-exemplo geral da Luíza: "Há vários outros ângulos que se repetem no intervalo de 12:00 hs.”

1:00	---------	11:00
2:00	---------	10:00
3:00	---------	9:00
4:00	---------	8:00
5:00	---------	7:00

Figura 4. 35: representación de una parte de la pizarra

Episodio	PRÁCTICAS MATEMÁTICAS	Sujetos
PP1	Problematiza pidiendo que alumnos reflexionen sobre contraejemplo	PRO
PP2	Legitima de modo informal la respuesta del último desafío propuesto por el grupo.	PRO
PP3	Retoma la cuestión pendiente por el desafío de Gabriel	PRO
PP4	Sugiere que observen los registros de la pizarra, como la tabla con los datos organizados.	PRO
PE1	*Al11* explica la relación, basada en el “ajuste igual en relación al eje (vertical) de las 6:00”	EST
PE2	*Lui* enuncia lo que sustenta la solución, basada en la simetría	EST
PE3	*Gus* refuerza el argumento que está siendo construido, con la descubierta de que “suma doce”	EST
PE4	*Al12* intenta enunciar una respuesta y corregir la misma	EST
PE5	*Al13* da la respuesta del problema	EST
PE7	El grupo confraterniza con los actos finales que llevaran a la respuesta basados en el contraejemplo de *Lui* y la regularidad de *Gus*.	EST
PE8	*Gab* confirma la respuesta del desafío propuesto	EST

Figura 4. 36: Prácticas matemáticas del episodio 4

En las prácticas que se reconocen a continuación ya se podrá percibir que el ambiente problematizador del docente, genera que los estudiantes se impliquen no sólo en la respuesta a la tarea, sino en una conciencia de estar resolviendo un problema. Como se puede observar, es el profesor es quien problematiza inicialmente, pero son los estudiantes los que toman las riendas de la producción sistematizando incluso y llegando a visualizaciones geométricas del problema colectivamente. Veamos en la figura 4.37. la configuración del episodio, final

PROBLEMA: "Alguien consigue formular una proposición más general que esa ? (la hecha por Luísa)"	 PRO
PROPOSICIONES: P1 "Ah! ... es que se ajusta igual en relación al eje de las 6:00" P2 Lui "Es simétrico" P3 Gus "Suma doce" P4 *Al12* "A las 5:40" (después auto corregida) P5 *Al13* "A las 4h40"	 EST EST EST EST EST
CONCEPTOS: **C1** Simetría	 EST
PROCEDIMIENTOS:	
LENGUAJE **L1** *Verbal oral* [es que ajusta igual ..; Es simétrico; Suma doce; .. **L2** *Gestual* [explicación a la pregunta del profesor, acerca de la generalización]	 EST EST
ARGUMENTOS **A1** "Es simétrico" **A2** "Suma doce"	 EST EST

Figura 4. 37: Objetos matemáticos de episodio 4

Sobre los procesos que se observan en las prácticas.

El profesor hace preguntas, y no enuncia proposiciones, lo cual es propio de un discurso investigativo (Ponte, Segurado y Oliveira, 2003) en el que el docente no lleva la voz cantante. Los estudiantes no sólo sienten que "resuelven el problema" sino que han desarrollado

PROCESOS MATEMÁTICOS	Sujetos
ENUNCIACIÓN / PARTICULARIZACIÓN: Al detallar el enunciado de las horas escogidas, y los alumnos establecen la relación entre las horas y los ángulos.	PRO y EST
DESCOMPOSICIÓN/REIFICACIÓN: aproximaciones de una medida.	EST
REPRESENTACIÓN y **MATERIALIZACIÓN**: Al mostrar el reloj dibujado para reconocer mejor la abertura del ángulo.	EST
ENUNCIACIÓN: Proposiciones que indican comparaciones.	EST
COMUNICACIÓN: Al explicitar las relaciones que deben interpretarse También se da un proceso de comunicación cuando el profesor busca llamar la atención sobre la diferencia de métodos para llegar a la solución de una medida. Otro proceso de comunicación surge con las intervenciones del profesor cuestionando no la solución sino procurando que se amplíen las explicaciones ente ellos mismos.	EST y PRO
ARGUMENTACIÓN: para explicar las soluciones encontradas.	EST
INSTITUCIONALIZACIÓN: Al resaltar la importancia de las formas de resolución que no dan una única estrategia. Por otro lado, aunque no se institucionaliza un procedimiento general, se permite que en el caso particular ya haya algún estudiante que generaliza el método y reconozca que a según qué minutos que no sea divisor de 60 no va a dar un resultado exacto en el ángulo.	EST y PRO

GENERALIZACION: Para establecer el uso las propiedades de las proporciones que permiten resolver el problema de formas diferentes.	EST
PROBLEMATIZACION: Cuando un estudiante propone un enunciado para ver que en algunos casos el proceso no dará un número natural sino fraccionario.	EST
PERSONALIZACION: Cuando se identifica que se puede encontrar una solución al caso particular por medida directa.	EST

Figura 4.38: Procesos matemáticos en el episodio 1

Al analizar los procesos matemáticos del episodio, se busca reconocer el "funcionamiento" de la actividad matemática, es decir, cómo interactúan los objetos en una perspectiva temporal y dinámica. Hay una cesión de responsabilidad de los procesos por parte del docente y se manifiesta la construcción muchos procesos de parte de los estudiantes.

Al reconocer la trayectoria epistémica en el episodio 1 como la distribución a lo largo del tiempo de la enseñanza de los componentes del significado institucional implementado. En una situación de resolución de problema, el profesor no es quien decide el orden en que se tratan los distintos objetos. La trayectoria epistémica global se inicia de forma situacional, puesto que se enuncia un ejemplar de un cierto tipo de problemas. En el episodio, se ve una trayectoria fundamentalmente de tipo actuativa, en donde lo lingüístico se deja al alcance de los estudiantes, que usan sus propias notaciones. Lo *conceptual* aparece en este caso en el ámbito de dar valor a la representación de la medida. Lo *proposicional*: se enuncian e interpretan propiedades. En cuanto a lo *argumentativo*, los estudiantes gestionan las justificaciones y se enuncian propiedades.

Veamos en a figura 4.39 cómo se desarrollan los objetos y procesos matemáticos del episodio 2

PROCESOS MATEMÁTICOS	**Sujetos**
ENUNCIACIÓN / PARTICULARIZACIÓN: Al detallar el enunciado de las horas escogidas, y los alumnos establecen la relación entre las horas y los ángulos.	PRO y EST
DESCOMPOSICIÓN/REIFICACIÓN: aproximaciones de una medida	EST
REPRESENTACIÓN y **MATERIALIZACIÓN**: Al mostrar el reloj dibujado para reconocer mejor la abertura del ángulo	EST
ENUNCIACIÓN: Proposiciones que indican comparaciones	EST
COMUNICACIÓN: Al explicitar las relaciones que deben interpretarse. También se da un proceso de comunicación cuando el profesor cuestiona no la solución sino procurando que se amplíen las explicaciones ente ellos mismos.	EST y PRO
ARGUMENTACIÓN: Para explicar las soluciones encontradas	EST
INSTITUCIONALIZACIÓN: Al problematizar sobre procedimientos y mirar la atención de los alumnos en los métodos	PRO
GENERALIZACION: Al tener como marcos ángulos de 90º para responder a ángulos específicos y cercanos.	EST
PROBLEMATIZACION: Sobre los métodos, al proponer que se miren y comparen distintos métodos	PRO
PERSONALIZACION: Al defender métodos propios y poner nuevas preguntas	EST

Figura 4.39: Procesos matemáticos en el episodio 2

El profesor sigue haciendo preguntas, y no enunciando las proposiciones principales que desarrollan las prácticas, lo cual es propio de un discurso investigativo (Ponte, 2003) en el que el docente no lleva la voz cantante. En el episodio 2 se ponen en funcionamiento diversos tipos de procesos matemáticos que pueden observarse en las figuras 4.38 y 4.39. Del análisis de objetos y procesos en este episodio, podemos concluir que los estudiantes asumen un papel preponderante en la construcción de significados.

4.2. Análisis de las interacciones.

Analizamos la intencionalidad comunicativa, a través del reconocimiento de conflictos en la clase, el principal conflicto evidenciado en este episodio se manifiesta por el hecho de que la manecilla de las horas se mueve cuando se mueve la de los minutos con una velocidad diferente. Los propios estudiantes lo resuelven dicho conflicto, aunque no se dan cuenta que el problema será cuando el número de minutos sea impar, y el caso de las siete y catorce minutos realmente tiene solución entera. Pero aparecen además otros tipos de conflictos potenciales. Dichos conflictos tienen a ver con los que surgen de la faceta extensiva intensiva de la representación del conocimiento matemático del episodio, Más precisamente en cuanto al uso del binomio particular/ejemplar-tipo. A lo largo de la clase estudiada, el docente muestra ejemplos de medidas y proposiciones sobre ellos. Así, consideramos que es oportuno usar las clasificaciones de las funciones semióticas explicadas teóricamente en el capítulo 2, en cuanto son explicativas de posibles conflictos potenciales, y usaremos las nomenclaturas que se han dado en ese momento. En este episodio, percibimos que el docente no resuelve algunos de los conflictos generados.

Análisis de normas y significados.

Al analizar las normas, en los diversos episodios, reconocemos distintos tipos de normas. En la tabla siguiente (fig. 4.40) se muestran los tipos de normas que fueron identificados en este episodio. De los seis tipos de normas propuestas en el enfoque EOS (Godino, Contreras y Font, 2006), sólo aparecen las que se refieren a la implementación del proceso de estudio. Se separan en dos grupos: las que se centran en el docente, y las centradas en los estudiantes.

NORMAS	**Sujetos**
METAEPISTÉMICAS:	
N1: Los enunciados de los problemas se pueden modificar, permitiendo problematizar otros casos particulares.	PRO (y EST)
N2: La argumentación en la clase de matemáticas es importante. Permite analizar y concluir cuando las respuestas ante una pregunta son diferentes.	PRO (y EST)
N3: La contextualización es fundamental para la introducción y desarrollo de conexiones matemáticas.	PRO
N4: Diferentes maneras de resolver problemas, ayudan a mejorar la comprensión de los objetos matemáticos involucrados.	PRO
N5: Es importante reafirmar las respuestas y explicación dada por un estudiante sobre una tarea para que sea asumida por toda la clase.	PRO
N6: No basta con dar un resultado a una tarea, sino que hay que explicar el	

proceso de resolución. **N7**: El profesor no institucionaliza el resultado como correcto o incorrecto, sino que valora que se dieron justificaciones sin refutación.	PRO PRO
EPISTEMICA **N8**: Las situaciones comparativas en las que se hace una representación a escala, son proporcionalidades, como es el caso de relacionar tiempo del reloj y ángulo. **N9**: Las representaciones son importantes para la construcción de significados.	EST EST
COGNITIVAS: **N10**: El profesor valora el momento adecuado de incorporar una generalización, toma decisión de no seguir un problema propuesto porque encuentra que no es el momento adecuado de generalizar, sino más tarde.	PRO
INTERACTIVAS: **N11**: El profesor genera preguntas para que se den explicaciones y argumentos cada vez más potentes	PRO y EST
AFECTIVAS: **N12**: Los estudiantes se sienten motivados y legitimados a dar justificaciones diferentes de un proceso de resolución. **N13**: Los estudiantes se sienten espontáneos para colaborar solidariamente con los compañeros que no entienden algo.	EST EST
MEDIACIONALES: **N14**: relojes	EST
ECOLOGICAS: **N15**: Cultura de investigación, valoración del conocimiento como un bien. **N16**: El centro es de tradición democrática **N17**: Hay libertad curricular que es ejercida **N18**: Los maestros de las varias asignaturas mantiene interacciones didácticas entre si	EST COM PRO PRO y COM
INTERACTIVAS: **N19**: Los estudiantes interviene n cuando tienen dudas **N20**: Los estudiantes dan explicaciones a petición del profesor **N21**: Hay elementos, referentes en lo cotidiano que nos ayudan a comprender lo matemático y establecer relaciones, como es el caso del dibujo del reloj. **N22**: Los estudiantes reflejan, argumentan y problematizan entre sí.	**EST** **EST** **EST** **EST**

Figura 4.40: Normas observadas en el episodio 1.Comunidad: COM

A continuación se desarrolla el análisis de los episodios según el esquema de Scott y Mortimer en el episodio 1. El profesor actúa sólo como catalizador.

Propósitos de enseñanza y formas de intervención en el episodio.

Ante todo veamos los propósitos de enseñanza. El profesor inicia la clase preguntando a los estudiantes sobre la realización en casa de la tarea propuesta en la clase anterior. Podemos reconocer en este episodio de clase que se busca implicar intelectual y emocionalmente a los estudiantes en el reconocimiento de estrategias diferentes para abordar una situación problemática, dar oportunidades de hablar y pensar sobre diferentes relaciones de manera individual y por medio de actividades con toda la clase.

Al preguntar por sus respuestas, se da soportes a los estudiantes para producir significados individuales, contrastarlos con otros, internalizando sus ideas. Se reconoce que con ello, se motiva y guía a los estudiantes en el uso, aplicación, y ampliación de ideas sobre proporcionalidad y medida de ángulos, y se pretende transferir progresivamente a los estudiantes el control y la responsabilidad de su uso.
Observemos ahora las **formas de intervención** identificadas en el episodio según los dos tipos que citan los autores.

a. Intervenciones orientadas a hacer el conocimiento científico asequible en el plano social de la clase. *Intencionalmente dado que se trata de una actividad de resolución de problemas, no se pretende dar forma a los significados por parte del profesor sino que sean los estudiantes mismos que entren en una dinámica de mostrar, argumentar, probar y refutar si se ve que el argumento no es poderoso. Marca significados clave en cuanto promueve que se discutan estrategias diferentes.*

b. En el episodio se promueven intervenciones orientadas a hacer alcanzable el punto de vista científico a todos los estudiantes y a *contrastar los significados y comprensiones que ellos van desarrollando. El profesor chequea el entendimiento de los estudiantes: El profesor solicita que los estudiantes expliquen las estrategias usadas, refinando la argumentación* para reconocer si es suficientemente convincente.

Patrones de interacción.
En este episodio, se produce una interacción abierta. El profesor *inicia* (I) estas interacciones solicitando a toda la clase que explique su respuesta a la tarea planteada. Los estudiantes *responden* (R) y el profesor abre y organiza entonces la discusión, señalando que se han dado respuestas diferentes […] y hace un comentario en donde resalta la importancia de argumentar para analizar la validez de las respuestas. Solicita a un estudiante a que explicite las razones de su respuesta y anima a los otros a participar en el debate, escuchando a su compañero [...] apoyando (P). El estudiante *responde*, explicitando sus razones […]**.** El profesor plantea otras preguntas (*feedback*) que buscan mejorar la explicación dada por el estudiante obteniendo la respuesta espontánea de otro estudiante [...]. Así, en este episodio inicial, se reconoce un patrón del tipo IRFRFP + IRFRPIP. No hay evaluación de esa respuesta final (que no es correcta) sino convencimiento de que se ha concluido con la solución correcta de los 100 grados.

4.3. Lo emocional en el AIL

Analizamos los episodios de construcción de conocimientos matemáticos en el ambiente de inspiración lakatosiana para responder las preguntas de este estudio, mostrando como se articulan los aspectos epistémico-cognitivos y las interacciones entre los participantes según varios modelos teóricos. Pero es posible aun hablar de los aspectos emocionales que pueden mostrar evidencia s respecto al interés y la motivación de los estudiantes, contestando así la pregunta P23 de las que nos proponemos responder en el capítulo 1.

Muchos autores dedicaran sus estudios para tentar contestar preguntas sobre las influencia de las emociones en la aprendizaje: ¿De qué modo la cuestión de las emociones tienen influencia en la formación de creencias?¿Cómo los afectos pueden influir en el conocimiento de las matemáticas?¿Hay relación entre los estilos de hacer matemáticas y las emociones?¿Qué tipo de influencia las buenas tareas pueden ter sobre el interés de los alumnos?

Los estudios sobre lo emocional, los afectos, actitudes y creencias son obyecto de atención de un centenar de autores en las últimas décadas, con destaque para Buxton (1981), Cobb, Yackel, Wood (1989), Goldin (1988), Goleman, 1985) y otros. Salovey y Mayer (1990) utilizan el término "inteligencia emocional" qué definieron como "aquélla que comprende la habilidad de supervisar y entender las emociones propias así como las de los demás, discriminar entre ellas y utilizar esta información para guiar nuestro pensamiento y nuestras acciones" (Salovey y Mayer, 1990, p.57). Goleman (1995) popularizó el concepto de inteligencia emocional, años después ha hecho un rol de siete ingredientes claves que explican la inteligencia emocional: confianza, curiosidad, intencionalidad, autocontrol, relación, capacidad de comunicar y cooperación. Goleman (2002).

En los estudios sobre el aprendizaje de las matemáticas destacamos los estudios de Gómez-Chacón, (2000) que estudió la integración entre la perspectiva afectiva y cognitiva en situaciones de enseñanza y aprendizaje de matemáticas en distintos contextos y con una variedad de sujetos. Para ella los afectos ejercen una influencia decisiva en el aprendizaje y en cómo los alumnos perciben y consideran las matemáticas, así como en la propia visión de sí mismos como aprendices y en su conducta. Para esta investigadora los afectos en el aprendizaje matemático desempeñan las siguientes funciones:

a) Como un sistema regulador; la toma de conciencia de la actividad emocional sirve al alumnado y al profesorado como instrumento de control de las relaciones interpersonales y de autorregulación del aprendizaje.
b) Como un indicador de la situación de aprendizaje; a partir de la perspectiva matemática y las creencias del estudiante se pueden estimar sus experiencias de aprendizaje, la perspectiva profesional del profesor, el tipo de enseñanza recibida, etc.
c) Como fuerzas de inercia, cuando los afectos impulsan la actividad matemática, y como fuerzas de resistencia al cambio.
d) Como vehículos del conocimiento, pues trata de conocer las dificultades que comporta tanto aprender cómo enseñar matemáticas, facilitando la búsqueda de estrategias más efectivas a utilizar en el aula para la obtención de mejores resultados.

Esta autora señala que para un desarrollo óptimo de la dimensión afectiva en el aula de matemáticas son necesarias situaciones que posibiliten el descubrimiento y la liberación de creencias limitativas del alumnado, la incorporación de experiencias vitales así como la estimación de la emoción y el afecto como vehículos del conocimiento matemático.

Gómez Chacón habla que la competencia emocional constituye una meta-habilidad que determina el grado de destreza que alcanzaremos en el dominio de todas nuestras facultades. (Gomes-Chacón, 1997, 2000), ella cree que hay dos estructuras de afecto a considerar en el sujeto: la local y la global. Entendiese que la local refiere a los estados de cambio de sentimientos o reacciones emocionales en el ámbito de la resolución de la tarea en clase; la global tiene a ver con la incorporación de las rutinas que ocurren en las locales, que posibilita la construcción de estructuras generales de los conceptos, la ocurrencia de misconcepts y el desarrollo de creencias. Lo global sufre la influencia de aspectos extra-escolares que actúan sobre lo individuo, como los contextos en que los alumnos están inmersos y variables de naturaleza socioculturales.

Las emociones en el ambiente de inspiración lakatosiana.

En este estudio acerca de la producción de conocimientos matemáticos en el AIL, buscamos marcas y otros elementos que indiquen la influencia de lo emocional y como interfieren en las interacciones y en la aprendizaje de los sujetos. Las marcas se pueden ver con más nitidez en los textos de Redacción-Evaluación, que son analizados en lo capítulo 5 de esto estudio, mediante las herramientas del Análisis Crítica del Discurso de Halliday, Kress y otros. Con todo, podemos verlas también en los y textos que hemos visto en este capítulo.

Resultado 4.3.1. Los elementos lexicales utilizados por los alumnos permiten hacer inferencias sobre lo afectivo y sus relaciones en el conocimiento producido en el colectivo.

Palabras como difícil, fácil, legal, bueno, etc. Y también situaciones que muestran la valoración del otro, confianza, recelo, impotencia, apreciación, etc. sirven para reconocer que se muestran expresiones afectivas.

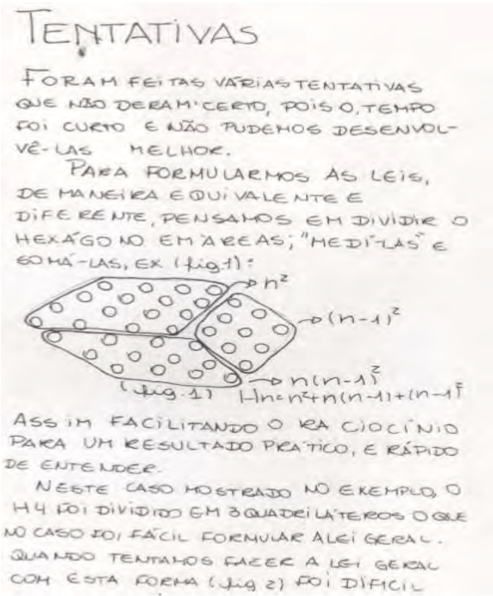
Resultado 4.3.2. Los alumnos analizados en el AIL siempre enfrentan los problemas propuestos por el maestro y también los que surgen de la dinámica de clase, no desisten y desarrollaran el hábito de problematizar asumiendo como protagonista el rol que en la enseñanza tradicional queda en general con el profesor o el libro texto.

En los variados géneros textuales que producen y son analizados en este estudio, no hay marcas de conversación autodestructiva. Esto difiere de muchos estudios, como el de la propia Chacón (2000) que destaca hablas de sus investigados en que palabras como "tuve la sensación de que no podría resolverlo", "pese que era difícil", "sentí miedo por si me equivocaba", "un poco insegura", al contrario en los episodios analizados en los apartados anteriores los indicios son cuasi todos de mucha involucramiento activo de tono positivo.

En el libro de “Números Hexagonales” un trabajo de investigación qué los alumnos de 8º año hicieron en clase (figura 4.41.) , las componentes del equipo escriben todo el texto en la 1ª persona del plural, con una incidencia muy grade de términos como : “nosso” (nuestro), “descobrimos” (descubrimos), “esperamos”, “começamos” (empezamos), “vimos”, “percebemos” (percibimos), “fizemos” (hicimos), “pensamos”, “tentamos” (intentamos), “aprendemos”, “podemos”, etc.

El texto tiene las marcas de otras producciones del grupo como la intención didáctica que mira a una audiencia genérica, un cierto estilo con toques de humor con intención de mantener la atención y el dialogo con el lector

.



TENTATIVAS

FORAM FEITAS VÁRIAS TENTATIVAS QUE NÃO DERAM CERTO, POIS O TEMPO FOI CURTO E NÃO PUDEMOS DESENVOLVÊ-LAS MELHOR.

PARA FORMULARMOS AS LEIS, DE MANEIRA EQUIVALENTE E DIFERENTE, PENSAMOS EM DIVIDIR O HEXÁGONO EM ÁREAS; "MEDÍ-LAS" E SOMÁ-LAS, EX (fig.1):

h^2

$(n-1)^2$

$n(n-1)$

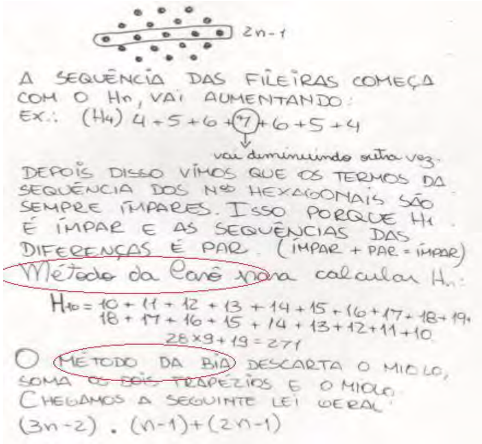
(fig. 1) $H_n = n^2 + n(n-1) + (n-1)^2$

ASSIM FACILITANDO O RACIOCÍNIO PARA UM RESULTADO PRÁTICO, E RÁPIDO DE ENTENDER.

NESTE CASO MOSTRADO NO EXEMPLO, O H4 FOI DIVIDIDO EM 3 QUADRILÁTEROS O QUE NO CASO FOI FÁCIL FORMULAR A LEI GERAL. QUANDO TENTAMOS FAZER A LEI GERAL COM ESTA FORMA (fig 2) FOI DIFÍCIL

Figura 4.41 Una página del libro sobre números hexagonales

Resultado 4.3.3. El modelo AIL se centra en la interacción y producción en lo colectivo, esto no quita el foco el los alumnos individualmente, pero este foco privilegia el individuo en lo grupo, interaccionando con sus pares. Se puede percibir en los variados textos el vínculo con la situación, el placer por la descubierta, el sentimiento de orgullo tanto por sus propias producciones como por la de sus colegas, lo que es un fuerte indicio de sentido de solidaridad y de pertenencia a una comunidad.


2n-1

A SEQUÊNCIA DAS FILEIRAS COMEÇA COM O Hn, VAI AUMENTANDO:

EX.: (H4) 4+5+6+7+6+5+4

vai diminuindo outra vez.

DEPOIS DISSO VIMOS QUE OS TERMOS DA SEQUÊNCIA DOS Nº HEXAGONAIS SÃO SEMPRE ÍMPARES. ISSO PORQUE H1 É ÍMPAR E AS SEQUÊNCIAS DAS DIFERENÇAS É PAR. (ÍMPAR + PAR = ÍMPAR)

Método da Carô para calcular Hn:

$H_{10} = 10+11+12+13+14+15+16+17+18+19+$
$18+17+16+15+14+13+12+11+10$
$28 \times 9 + 19 = 271$

O MÉTODO DA BIA DESCARTA O MIOLO, SOMA ~~OS DOIS~~ TRAPÉZIOS E O MIOLO. CHEGAMOS A SEGUINTE LEI GERAL:

$(3n-2) . (n-1)+(2n-1)$

Figura 42 fragmentos de cuaderno con cita de colegas

Un indicio emblemático de que en el AIL hay una actitud muy positiva está en el hecho de que independiente del maestro proponer problemas y desafíos, los propios alumnos lo hacen por su propio deseo, como en el caso de los polígonos gigantes de n > 100 lados, a figura 16 hecha por la alumna Luciana. El 400-ágono fue hecho por su propia cuenta, es ejemplo de persistencia movida por el placer de enfrentar un desafío, muestra curiosidad, preciosismo, organización, sentido estético, etc., y cuando esto es socializado, los colegas se interesaron y se auto-desafiaran a producir polígonos con más lados, lo que ocurrió es que a cada dos días uno mostraba un polígono con más lados que el de otro, y luego equipos se organizaran para dividir la tarea de producir partes de un polígono que se yuxtapone a otro. Quedaran producidos polígonos en el geoplano puntillado sobre el papel cuadriculado, con miles de lados.

Resultado 4.3.4. En un ambiente AIL, se muestran tareas ricas y significativas, consignas y preguntas no convencionales con la socialización de las respuestas, sin preocupación con lo cierto y lo errado contribuyen para que los alumnos cambien la imagen de las matemáticas y de lo que es hacer matemáticas, se observó que frente a lo inusual y lo inesperado

En efecto, en los casos que se analiza en este capítulo, aumenta la posibilidad de quiebra de algunos modelos previos que llevan a condicionamientos que bloquean la involucración de los alumnos en las tareas. Si observa que los alumnos mejoran su autoconcepto como aprendices de matemáticas y cuanto más confianza adquieren tienden a mejorar su nivel como productores de conocimientos matemáticos, pues arriesgan más sin recelos. La rutina en esto tipo de ambiente cambia estructuras globales y cimentar una nueva cultura matemática.

Las tareas tienen un rol especial, porque son sencillas y se puede responder cuestiones, inicialmente basado apenas en la intuición. Lo que se torna complejo es el proceso de problematización, con valoración de las proposiciones y sus argumentos, como en la tesis-ficción de Lakatos, que tiene como combustible la dinámica de pruebas y refutaciones. La naturaleza de las tareas y la diversidad de respuestas y producciones de los alumnos, qué por ser nuevas contaminan el ambiente, haciendo que la experiencia vivida sea como una viaje en que se saborea todo. No hay los comportamientos comunes en algunos alumnos que tienen dificultad con las matemáticas como la ansiedad cuando ellos tienen ritmos muy distintos de los demás para producir una respuesta, porqué relajan al apreciar lo que ocurrí en lo colectivo. Para Gómez Chacón (2000) la ansiedad es una conducta que provoca: miedo excesivo al cometer faltas, pánico cuando le falta la memoria, ignorancia sobre como persistir, lo que contribuye para disminuir el grado de atención e implica en interferencia en la concentración, la memoria e eficacia de razonamiento.

Nuestra hipótesis acerca del desánimo y la frustración, que es común cuando los alumnos se bloquean frente a una tarea en contexto tradicionales que valoran el mérito personal, tiende a ser disminuidos en el AIL una vez que la tarea de atacar los problemas es un compromiso del colectivo y/o de los grupos pequeños en consecuencia lo las energía negativas del proceso se dispersan con la responsabilidad distribuye en lugar de centrarse en un individuo. En este ambiente, la dificultad frente a la comprensión del problema no es paralizante, lo que podría inmovilizar los alumnos, pues no tiene como única autoridad que legitima (en general el maestro omnipresente) a que se debe dirigirse, e si a lo colectivo que es cuasi igual (son colegas con el mismo rango de conocimientos y experiencias), lo que atribuye tranquilidad y confianza.

4.4. A modo de conclusiones sobre el AIL

Los textos son consecuencia de tres momentos de la vida del maestro-investigador: (1) vivencial (algo que ocurrió); (2) documental do docente (que registra o que ocurre); (3) investigador-socializador (que permite analizar lo que ocurrió inclusive con os propios alumnos e alumnas).

Marcas de un contrato didáctico diferente.

Entre las diversas observaciones que hemos realizado, se reconocen características del ambiente que se reconocen en el estudio realizado. Así como:

- Problematización continuada. No sólo porque se proponen problemas con enunciados claros para todos. Las proposiciones, enunciados construidos y externalizados sometidos a un proceso de pruebas y refutaciones inspirado en Lakatos (1976), como un ambiente de "verdades provisionales". Este proceso no es lejano a lo que expone Soury-Lauvergne (2007)
- El error se considera como una auténtica provocación y es explorado como contenido. La institucionalización no ha quedado en manos del profesor únicamente, sino que el valor de verdad ha quedado validado por el modelo que acepta aquello que no ha sido refutado, y rechaza lo que un cierto argumento consigue refutar.
- Los recursos juegan un papel diferente al habitual, en donde la pizarra ya no es el lugar de encuentro, sino el cuaderno.

- Se da un tipo de actividad reguladora en la realización de textos de redacción evaluación como elementos de reflexión que contribuye a generar respeto por el grupo y los individuos que se sienten constructores de significados institucionales. Una característica especial de estos textos es que buscan tener una intencionalidad didáctica producción escrita que mira un lector /audiencia.
- Se valoriza el uso de recursos de y aprecio por lo estético en la descripción matemática, de manera que le da un tinte "pedagógico". Se ha observado en la utilización de diferentes recursos lingüísticos y semióticos con el propósito de garantizar comunicación con audiencia.

Marcas de una forma nueva de negociación de significados.

Los estudiantes no se vieron obligados a utilizar un modelo cerrado de los problemas estudiados utilizando estrategias algebraicas o la regla de 3, ya que todo esto quedo secundario. Una de las características de la gestión de esto ambiente es dejar que los estudiantes desarrollen el trabajo con flexibilidad y sin imposiciones de llegar a un punto final o resultado, que los alumnos y alumnas piensen que es lo esperado por el maestro. Sin embargo, hay una visión curricular que aprecia cada momento, si lo que se dice en el aula está cercano o lejos de un objetivo importante del curso.

En este tipo de trabajo de producción que hemos alcanzado lo que parece que es más que una investigación humanística (en palabras de Borasi, 1991). De hecho, el error no sólo se utiliza como fuente de reflexión, sino también como un objeto de conocimiento, aunque provisional (Lopes, 1987), pero sobre todo como un promotor de una reflexión metacognitiva de alto nivel - incluso en los primeros grados - provocando legitimación del trabajo de descubrimiento del grupo.

- La intervención de bajo nivel tiende a desaparecer;
- Los estudiantes aumentan su confianza, el autocopcepto y el nivel de participación, ya que se sienten como sujetos del proceso reconocidos por todos los participantes (profesor y alumnos);
- Si se acepta y distingue la producción relevante de la que no es;
- Si integra la categorización y la organización del conocimiento;
- El profesor actúa como catalizador y organizador y no como el dueño de las verdades que se distribuyen y si confirman;
- El aula es el laboratorio/usina de matemáticas, un laboratorio que prescinde de los objetos materiales (mediacionales). Las ideas, proposiciones, conjeturas, refutaciones, validaciones y exploraciones diversas son el que constituye como la materia prima de este laboratorio.

Elementos del tratamiento del contenido en la comunidad.

A partir de los análisis de datos realizados, las características de producción matemática obtenidas en el ambiente son:

- reflexión generalizada (casi cien por cien de la aula) basado en el contraste y e en la problematización continuada;
- Si asume los elementos de responsabilidad del maestro;
- Se considera como producción autónoma y personal;
- Los participantes del grupo se consideran productores de los conocimientos y no sólo un sencillo consumidor de hechos y reglas.

La aula y sus fenómenos es compleja (dinámica, diversa, etc.), y con tal cantidad de elementos comunicativos, que no todo puede ser detectado. Nos referimos aquí a una gran cantidad de información, sabiendo que otras quedaran perdidas. Para el profesor-investigador es importante la tarea de reflexión-documentación de su trabajo, ya que permite hacer cambios en su enseñanza.

Resultado 4.4.1. Caracterizamos el **enfoque comunicativo** como interactivo dialógico. Y esa calificación se da en muchos de los episodios analizados en esta práctica. En los análisis se destaca como las normas no son sólo asumidas por el alumnado sino muchas de ellas se han generado por ellos mismos.

Resultado 4.4.2. Los procesos matemáticos se han centrado en el alumnado mucho más que en el profesorado, lo que hace ver que el papel del docente es claramente secundario, y ha generado diálogos matemáticos de calidad.

Así pues, no sólo podemos decir que ha habido una tarea rica, sino que la gestión ha propiciado la construcción de objetos y procesos matemáticos de parte del alumnado, que ha legitimado dichas construcciones. La institucionalización no ha quedado en manos del profesor únicamente, sino que el valor de verdad ha quedado validado por el modelo que acepta aquello que no ha sido refutado, y rechaza lo que un cierto argumento consigue refutar.

CAPITULO 5

ANALISIS EPISTEMICO-COGNITIVO A LO LARGO DE UN PERIODO LARGO EN LA CPEIL

En este capítulo se presentan las actividades realizadas en la clase, entre las que se escogen las de dos de dos estudiantes (5.1.). Concretamente una actividad sobre tangram (5.1.1.), una actividad sobre pentominós (5.1.2.), una tercera actividad sobre ecuación de segundo grado (5.1.3.), una cuarta sobre conjuntos numéricos (5.1.4.) y una quinta sobre el recuerdo de cuatro años de trabajo (5.1.5.).

En un segundo momento, se analiza los aspectos matemáticos e en la actividad inicial sobre construcción (5.2.), análogamente con la actividad de pentominós (5.3.), así como la ecuación de segundo grado (5.4.). Se analiza también una tarea sobre conjuntos numéricos (5.5.), un análisis de una tarea final de resumen de 4 años (5.6.).

Para continuar, una mirada global de las tareas de forma comparativa según las dos estudiantes analizadas y se hace una reflexión sobre rasgos de lo emotivo en ocho textos de resumen final (5.7.).

Para finalizar el capítulo se sintetizan los resultados más importantes que ayudan a responder a los objetivos de identificar el potencial cognitivo matemático ligado al ambiente, y lo que se liga a las tareas (5.8).

5.1. Los textos y la experiencia escolar.

En este capítulo se pretende mostrar elementos que permitan dar respuesta definitiva al objetivo 2 de nuestra tesis y mostrar que se desarrolla una comunidad de intereses matemáticos que evidencia un potencial socio cognitivo del conocimiento Matemático construido socialmente. Para ello es oportuno hacer un análisis de diversas producciones de los estudiantes a lo largo de un periodo largo de manera que podamos constatar que no sólo se mantienen las características de una comunidad de intereses como un estilo comunicativo y una forma inquisitiva de hacer matemática sino que también se potencia el trabajo matemático en sí mismo. Para ello, se decide tomar 5 producciones de dos estudiantes a lo largo de cuatro años, en donde queremos ver invariantes en las prácticas matemáticas que muestran un potencial cognitivo que se construye socialmente, y es de calidad. El docente tuvo el privilegio de seguir con los mismos estudiantes durante cuatro años. Ello no es habitual, y por lo tanto en la experiencia escolar realizada, se tiene la oportunidad de seguir a los estudiantes en su desarrollo matemático. En ese recorrido de de tareas reguladas, llamadas de redacción-evaluación, vamos a mosrar que se desarrolla una CEPIL. Se desarrollan muy diversas actvidades , entre las cuales decidimos escoger cuatro de ellas, en las que se encuentran: una de trabajo con tangram en grado 5 ; una tarea con pentominós al inicio de grado 6 ; una sobre ecuaciones de segundo grado, que se realizó al final de grado 6, que aprovechamos de un trabajo anterior (Lopes,2007), Una sobre conjuntos numéricos, en grado 8. Y un texto final en el que se pidió resumir lo aprendido en los cuatro años.

5.1.1. El problema del tangram. Construcción.

La actividad inicial de tangram tenía como objetivo profundizar sus conocimientos acerca de objetos, relaciones y propiedades geométricas. La elección del tangram se justificó por ser un juego que motiva a los alumnos a hacer una variedad de construcciones bajo determinadas condiciones y por poner en juego algunos conceptos antes conocidos y tratados de modo aislados, como los ángulos. Lo principal es que los problemas propuestos exigen razonamiento geométrico de distintos niveles, como visualizar, representar, construir, clasificar y analizar justificando.

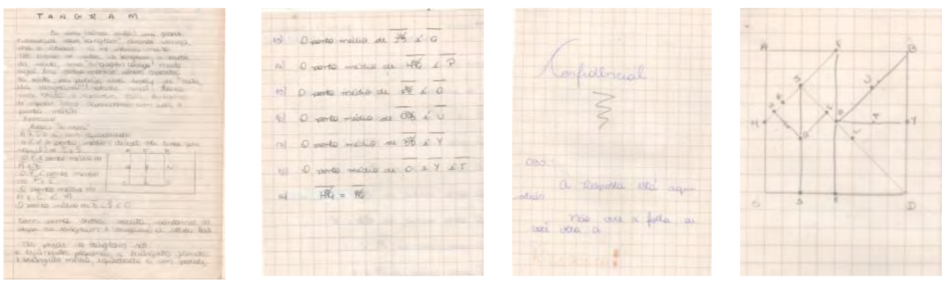


Figura 5.1. Registro de Joana a la actividad del tangram

Con esta actividad de redacción se pretende reconocer de qué forma los estudiantes han interpretado el proceso de construcción. Hasta qué punto se identifican los objetos matemáticos involucrados y cómo expresan los procesos matemáticos implicados. Por otro lado, si reconocen un valor compartido de los objetos y procesos. El csrácter investigativo del trabajo planteado se provoca por el hecho de situar preguntas que aún la comunidad matemática no ha resuelto, como por ejemplo si hay alguna descomposición del pentágono que permita con las piezas obtenidas construir un cuadrado. Detrás de este tipo de problemas, están los mosaicos. Es el caso de que en el momento de escribir estas líneas, se conoce un nuevo tipo de pentágono irregular que sirve para teselar el plano.

5.1.2. Los pentominós.

Esta fue la primera actividad después de la que se realizó sobre mosaico y se analizó en el capítulo anterior. Los pentominós tienen unas características muy especiales para involucrar los alumnos en actividades geométricas, son un juego que va más allá del espeto lúdico. Por la facilidad de representarlos en una hoja cuadriculada permiten una diversidad de situaciones de investigación en el rango de edad de los alumnos del quinto grado. Si por un lado los pentominós son una parte de la matemática recreativa por otro son objetos de un área de las Matemáticas conocida como Geometría Combinatoria, que tiene un acervo de problemas interesantes que generan métodos de resolución de ingenio, que van más allá de actividades de cálculo o de fijación de vocabulario.

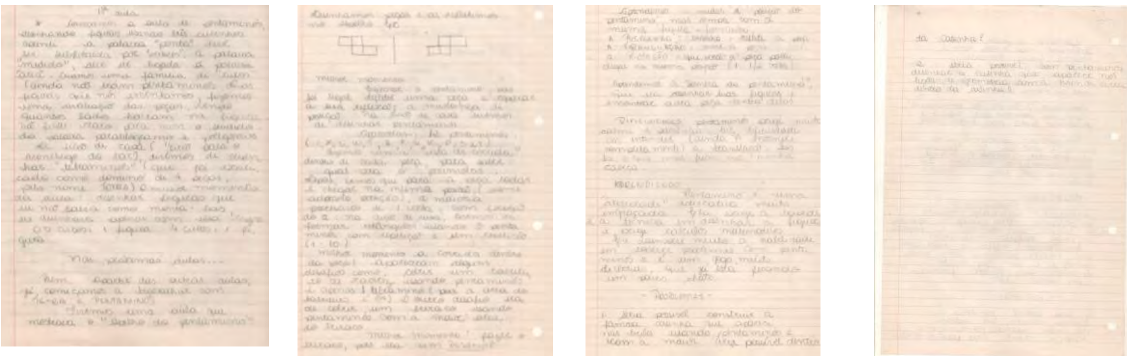


Figura 5..2. Registro de Joana en la actividad pentominós

La secuencia didáctica desarrollada a partir de los pentominós permitió inserir los alumnos en un mundo en que estudiaran formas, ángulos, medidas de área y perímetro; propiedades como la simetría y la convexidad, entre otras. Entre los puntos fuertes del trabajo que se propone con los pentominós está el hecho que poner los alumnos frente a problemas abiertos y conjeturas que la comunidad de expertos matemáticos aún no ha resuelto. Pensamos a priori que en esta actividad los estudiantes desarrollan un argumento matemático relacionado con las razones por las cuales él piensa que algo es verdad. Se propone a los estudiantes realizar justificaciones para mostrar su comprensión de una idea o proceso matemático.

5.1.3. Actividad sobre ecuación de segundo grado.

Se escogió dicha actividad, porque de ella ya teníamos analizado lo ocurrido con un grupo de cuatro estudiantes, y estudiamos el potencial cognitivo de esta actividad, como proceso de resolución encadenado de un problema matemático general como es encontrar un método de descomposición factorial, que permita encontrar soluciones de ecuaciones de una forma lo más general posible. Aunque parezca una actividad de tipo algorítmico, se convirtió en una actividad de tipo investigativo. Dado que es un elemento curricular que se trabaja en todas las escuelas de todo el mundo, pretendemos ver diferencias sustanciales en el desarrollo particular que se realiza, y poder no sólo ver lo cognitivo, sino ver las interacciones que se reflejan en el texto.

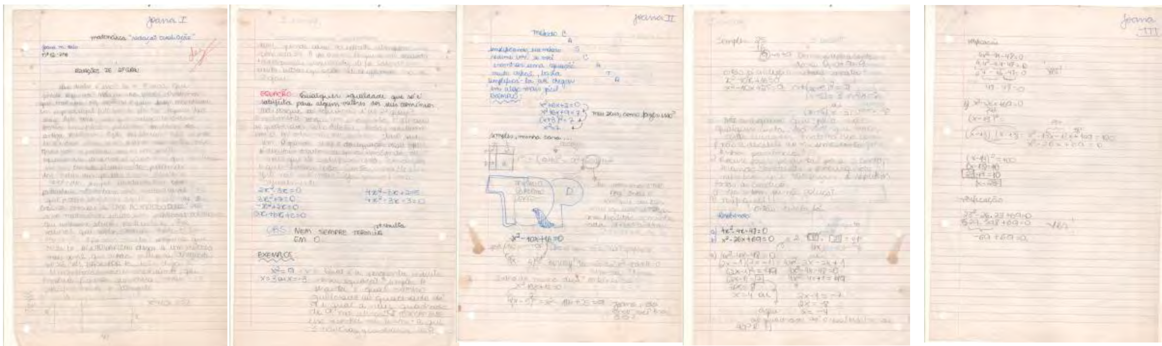


Figura 5.3. Registro de Juana sobre la ecuación de segundo grado

5.1.4. Actividad de resumen de conjuntos numéricos.

En esta actividad sobre conjuntos numéricos, se procura reconocer aspectos que se relacionan con la reflexión sobre la estructura numérica/algebraica. Se propone integrar lo que distingue un conjunto de otro, sus significados, así como los significados relacionados con las operaciones.

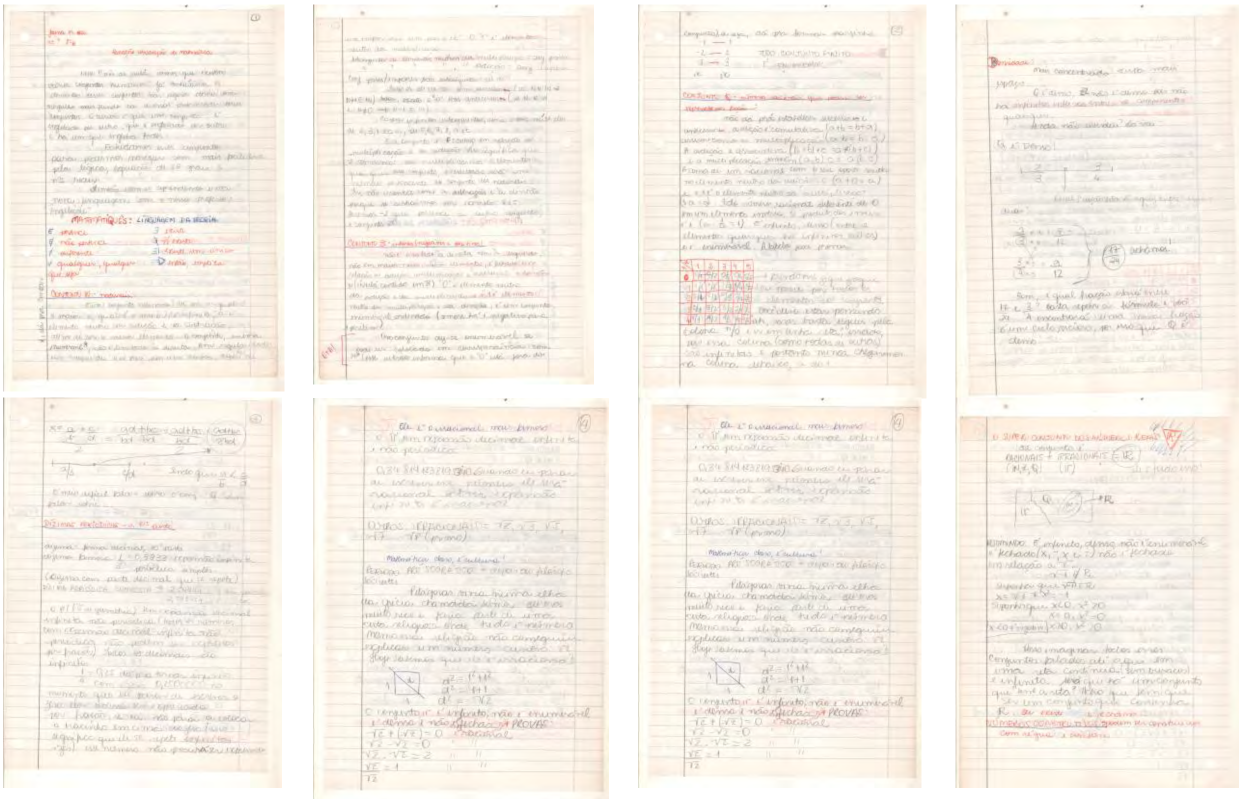
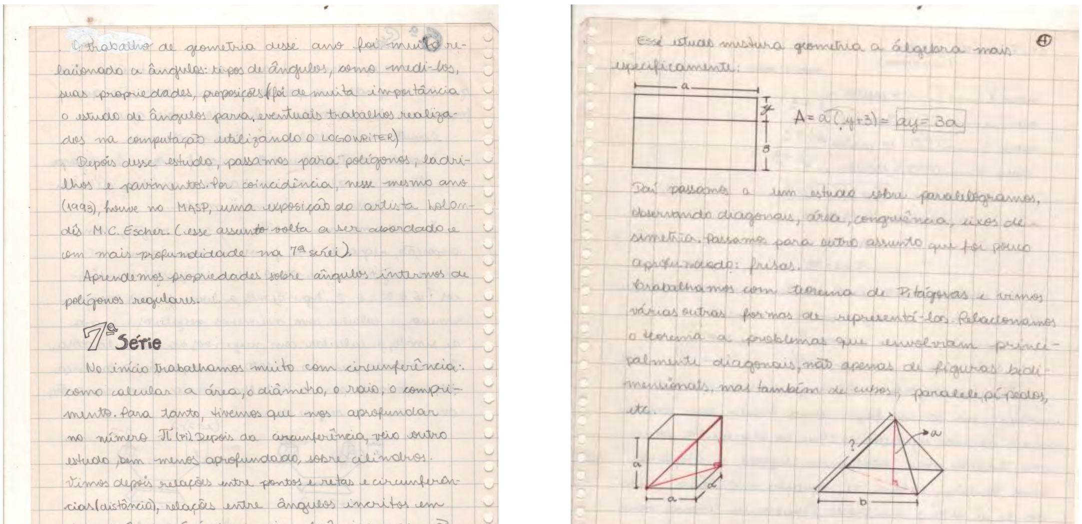


Figura. 5.4. Registro de la redacción sobre conjuntos numéricos

En esta actividad, se pretendió resolver un problema curricular, ya que los conjuntos se presentan aislados, y se quiere darles unidad. Se quiere mirar a dichos objetos como elementos estrictamente matemáticos. Se trata de buscar una cierta formalización y tomar una mirada internalista (siguiendo a D'Ambrósio) sin llegar a hacer una mirada axiomática.

5.1.5. Una actividad final de resumen de lo aprendido.

En dicha actividad que se sitúa al final de cuatro años de trabajo, pone de manifiesto una reflexión metacognitiva que se pide a los estudiantes para ver cómo reflejan su reflexión a nivel individual, y reconocer si hay trazos comunes en las hablas diferentes. En anexo se puede ver los textos producidos por los dos estudiantes que se analizan más adelante. Se propone una actividad de forma muy abierta, que permite que cada estudiante reconozca de forma libre y sin consignas específicas, tipos de viajes de reflexión diferentes. Se pretende que se den estilos narrativos diferentes. Se pretendía que se implicaran, no conformándose en una redacción que no sea cortita de su experiencia de enseñanza-aprendizaje que han tenido.


O trabalho de geometria desse ano foi muito relacionado a ângulos: tipos de ângulos, como medi-los, suas propriedades, proposições (foi de muita importância o estudo de ângulos para eventuais trabalhos realizados na computação utilizando o LOGOWRITER)

Depois desse estudo, passamos para polígonos, ladrilhos e pavimentos. Por coincidência, nesse mesmo ano (1993), houve no MASP, uma exposição do artista holandês M.C. Escher. (esse assunto volta a ser abordado e com mais profundidade na 7ª série).

Aprendemos propriedades sobre ângulos internos de polígonos regulares.

7ª Série

No início trabalhamos muito com circunferência: como calcular a área, o diâmetro, o raio, o comprimento. Para tanto, tivemos que nos aprofundar no número π (Pi). Depois da circunferência, veio outro estudo, bem menos aprofundado, sobre cilindros. Vimos depois relações entre pontos e retas e circunferências (distância), relações entre ângulos inscritos em circunferências. Saindo das circunferências, mas não fugindo do assunto, nosso foco passa para curvas e arcos especiais e/ou maravilhosos (elipse, ying yang, etc...).

Já misturando geometria e matemática, começamos a estudar área de figuras estranhas.

Esse estudo mistura geometria a álgebra mais especificamente:

Daí passamos a um estudo sobre paralelogramos, observando diagonais, área, congruência, eixos de simetria. Passamos para outro assunto que foi pouco aprofundado: frisas.

Trabalhamos com teorema de Pitágoras e vimos várias outras formas de representá-los. Relacionamos o teorema a problemas que envolvam principalmente diagonais, não apenas de figuras bidimensionais, mas também de cubos, paralelepípedos, etc.

O início do curso de matemática da 7ª série, foi relacionado a sequências ordenadas, onde tinha que se descobrir uma lei geral, que seria poder através de um cálculo simples descobrir o número de unidades numa ordem "n".

Figura 5.5. Dos páginas diferentes de una redacción final que muestran formas comunicativas diferentes.

Con una propuesta abierta, algunos estudiantes van a pensar en hacer una carta al profesor, un formato de libro con intención didáctica, un formato novelado, etc. La intencionalidad de esta tarea muestra continuidad con todas las anteriores. Como pretendemos mostrar en los análisis posteriores, se quiere que los estudiantes expliquen en clave de evaluación reguladora (Giménez, 2013) mediante el uso del instrumento escrito, que hemos dicho en el capítulo teórico que va a permitir reconocer cómo se interpreta el conocimiento adquirido (lo personal) y cómo fue esa producción de conocimiento para identificar características comunes a los textos, que es analizar lo emotivo que queda de lo realizado. Se quiere ver si hay trazos del ambiente, como: la producción de hipótesis, qué tipo de relación entre campos, problemas y situaciones. Digamos también que el hecho de que puedan ojear el cuaderno de clase, no quiere decir que van a copiar, aunque pueden hacerlo.

5.2. Análisis conceptual de la actividad de pentominós.

Ante todo identificamos el desarrollo del contenido matemático, basado en el análisis del discurso para cada texto de cada estudiante a partir de cada uno de los textos. En dicho cuadro se ilustra el contexto supuesto y subjetivo del protagonista; el texto subdividido en tres partes (relato, intercalaciones y explicaciones metodológicas); nombramientos (tipos de elementos, participantes, papel de los mismos); y atribución (tipos y acciones). Con este instrumento buscamos caracterizar las competencias sintáctica e metalingüística analizamos donde se pude mirar la consciencia de rigor y como es explicitada de modo formal o coloquial; también se busca ver los indicios de consciencia en el uso de registros y el dominio de estas competencias. También se observa cómo trabaja las relaciones conceptuales en relación a las conexiones entre conceptos, procedimientos y contextos.

5.2.1. Significación conceptual en texto de Gabriela sobre Pentominós.

En esta tarea, se puede ver que Gabriela usa definiciones nominales y por extensión. En su primera experiencia de escribir una Redacción Evaluación, la alumna Gabriela, es económica y escribe solamente una página, pero se puede reconocer muchos elementos significativos. Es un texto con características más descriptivas que cuenta a alguien lo que ocurrió en la clase. Gabriela demuestra apreciación por una comunicación tan detallada cuanto posible en su primera experiencia de escribir sobre sus procesos y sus saberes, encadena los contenidos de naturaleza conceptual (objeto, relaciones, propiedades) y procedimentales. Su foco son las actividades, hay pocas referencias a lo interaccional aunque en algunas pasajes utiliza el tempo verbal de la 1ª persona del plural (hicimos, aprendemos, empezamos), en algunas partes se percibe elementos de la dinámica de clase, “me gusta los títulos de las clases”, “sacamos una foto de la pizarra”, esta ultima una metáfora, pues en la época no había los recursos tecnológicos de hoy, pero sugiere la pizarra como un espacio público de registros. También no se percibe referencia a contextos extra matemáticos. Respetando una secuencia de lo más simple a lo más complejo. Se percibe que valoriza lo registro en forma de dibujos (con leyendas) y un aprecio por el dominio de la terminología geométrica cuando nombra las transformaciones isométricas (rotación, translación y reflexión), y un inicio de uso de notaciones. Reconoce lo provisional de los resultados obtenidos por lo grupo de colegas frente a la información de otros resultados fuera de su contexto personal, haciendo referencias al hecho de que hay otros resultados mejores frente a lo problema del hueco limitado por pentominos, que es un problema abierto que aún no fue demostrado. Hay muchos elementos de dominio conceptual para una estudiante de menos de 11 años, que va más allá de la repetición de hechos y técnicas, son nítidos os elementos de reflexión en el texto que es una de sus primeras experiencias escolares de escribir sobre matemáticas y procesos. Hay pocas referencias a procesos de argumentación, solamente en el tercero parágrafo en que dice que es posible formar un rectángulo 4x5 agregando la pieza I a un rectángulo 3x5 que relata que ha conseguido formar con 3 pentominos.

5.2.2. Lo conceptual en el texto de Joana sobre pentominós.

Joana interpreta "pentominós" como una actividad, que sintetiza um conjunto de experiencias y desafíos. El texto de Joana es más detallado que el de Gabriela (3 páginas), ella interpreta "pentominos" como una actividad ora como un objeto o juego, en este momento pentominos es un rótulo que sintetiza un conjunto de experiencias y desafíos. En relación a sus competencias sintáctico lingüísticas, se percibe que incorpora definición nominal (composición etimológica) por la característica de construcción, usando analogía, sin explicitación de las condiciones. Hace definición por extensión sin uso del "es". Habla de perímetro de modo coloquial, como "contorno", aún no asociado con la medida. La idea de área que utiliza es la de conteo, una consecuencia del hecho que los poliminos como objeto de la geometría combinatoria se pueden tratar en el ámbito de lo discreto. Utiliza terminología propia (asumida y/o creada por el grupo) como la idea de la "pista" (como un circuito de carrera) asociada a la idea de contorno.

En esta su primera experiencia con textos de redacción-evaluación hay poco uso de registros semióticos, solamente una vez para explicar lo que es "reflexionar" un tetramino. Usa códigos de letras para enunciar el rol de las piezas. Reconoce o valor das palabras compuestas (composición etimológica do termo), resignificando cada parte do termo. Dialoga con si misma pero en dirección a un lector genérico lo provisional de su conocimiento "no queda claro para mí el sentido de la palabra paralelogramo y polígonos", como qué buscando lo mismo padrón que reconoce en otros términos aprendidos.

Explicita relaciones conceptuales y procedimentales De forma categórica (clasificatoria) para representar clases, cuando describe posibles movimientos del plano. Asume implícitamente que as figuras planas tiene perímetro e que sabe cómo calcular o perímetro. Evoca una relación (pentomino – simetría especular) en el contexto de lo que tiene acontecido en clase. Hace relación de las piezas y sus dibujos con la cuantificación de las posibilidades. Evoca una relación piezas-movimientos y pieza-invariancia/rotación. Para Joana los problemas son problemas porque admite que "no lo sabía resolverlos", hace referencia a tipos de problemas sencillos y complejos.

Enuncia todos los pentominos descubiertos, valoriza los problemas de composición bajo condiciones (rectángulos con 3 piezas); expresa y valora ideas claves como en el caso de los movimientos isométricos, explicitando su apreciación y dominio de la simetría por espejo y su dificultad en relación a la translación (lo que la caracteriza). Hace referencia a la mirada aritmética en un problema geométrico. Formula nuevos problemas. Reconoce que el cambio de posición de los pentominos bajo movimientos isométricos preserva la forma.

Reflexiona sobre algunas dificultades y las condiciones personales necesarias para resolver problemas con pentominos, asume que la idea de la translación aún es incompleta y oscura. Reflexiona positivamente sobre el valor “educativo” del trabajo con pentominos y asume que ha desarrollado habilidades de resolución de problemas geométricos. Por fin formula problemas nuevos involucrando construcción con las piezas y la medida de área (mínima y máxima)

5.2.3. Significación conceptual comparativa sobre Pentominós

A continuación se muestran los resultados comparativos correspondientes a la configuración de objetos matemáticos. Las dos estudiantes muestran estilos distintos en su primera experiencia de escribir una REv, de comun el hecho de que hay poca o ninguna referencia a contextos extramatematicos, o a la interaciones que ocurren en clase, pero las dos alternan el tiempo verbal entre la 3ª persona del singular a la 3ª pernosa del plural. En estes dos textos no se pude inferir mucho acerca de la autonomia, que podemos decir que es relativa, Joana explicita, aunque una vez, a la produción colectiva (“inventamos”). Las referencias a la dinámica de la clase, con indícios de marcas de contrato, son puntuales.

Las dos reflexionan para dentro de sus emociones, hacendo referencias al hecho de sus sentimientos con respeto a la actividad (me gustó, no me gustó, está quedando aburrido, comprendi, no comprendi, no sabia hacerlo, mejor momento, dificuldad). Gabriela utiliza más representaciones, Joana carga en las palabras. Joana demuenstra más intención didáctica, su texto con indicios de autoria se dirige a una audiencia genérica.

En lo que toca a los elementos conceptuales, se percibe una preocupación en escribir de modo coherente, articulando lo hechos y los contenidos de modo temporal, dando indicios de cómo una actividad genera otra. Las relaciones y conceptos nuevos (pentominos, simetrias, transformaciones) son cuidadosamente tratadas, en el caso de Joana con preocupación didáctica y meticulosa (para su nível) con los significados. Lo argumentativo aparece puntualmente en las explicaciones sobre algunos problemas (rectángulo 4x5, cubrir un tablero de ajedrez). Lo indicios de lo metacognitivo se puede encontrar en el texto de Joana, que dedica un parrágrafo para hablar sobre la aprendizaje y como desarrollo sus habilidades en resolver problemas.

5.3. Analisis del texto sobre el tangram.

La propuesta de hacer una REv sobre las actividades con tangram fue de las primeras experiencias de escrita sobre contenidos y procesos matemáticos experimentadas por los alumnos de este grupo de análisis cuando tenían 10/11 años. También fue la primera a ser analizada de modo especial, una vez que los alumnos la desarrollaran sin la presencia del maestro, todo lo que es relatado por los alumnos/as fue desarrollado en un periodo de una semana de trabajo con un profesor substituto. La consigan principal era que el maestro titular, pretendía poder saber lo que pasó por medio de sus textos. La análisis de los escritos de los alumnos desencadeno el interese por profundizar el trabajo con las redacciones-evaluaciones (las REv).

Ante todo identificamos el desarrollo del contenido matemático, basado en el análisis del discurso para cada texto de cada estudiante a partir de cada uno de los textos. Se organizó los elementos observados en cuadros con elementos sobre lo que se puede sacar de las relaciones que se puede inferir de la escrita, en términos de lo contexto supuesto y subjetivo del protagonista; el texto subdividido en tres partes (relato, intercalaciones y explicaciones metodológicas); nombramientos (tipos de elementos, participantes, papel de los mismos); y atribución (tipos y acciones). También se miró las competencias sintácticas y metalingüísticas, y las relaciones y conexiones conceptuales, procedimentales en relación a contextos matemáticos o extramatematicos.

5.3.1. Análisis textual y conceptual del texto de Gabriela.

Empieza su textos haciendo afirmación sobre lo que es el objeto tangram (un juguete chino) y lo caracteriza por cantidad y forma de sus piezas “tiene 7 piezas” situando la existencia de otros tipos de tangram (“redondos, ovales, en forma de corazón”). La caracterización descriptiva de las piezas del tangram clásico se hace por dibujos que preservan la forma y la proporcionalidad) y la emergencia de conocimiento raro para los alumnos de misma edad y grado en lo que toca al dominio de la terminología específica y el rol de propiedades reconocidas algunas enunciadas en forma de proposiciones.

“Con esas piezas es posible formar 13 figuras convexas”, este es un hecho demostrado en por dos geómetra chinos en el año 1942 y probablemente fue una información del maestro, pues no hay en lo texto indicios de que los alumnos conseguirán hacer estas construcciones, por lo tanto debemos considerar la cita como una valoración del contexto cultural intramatemático vivenciado en un ambiente que valoriza la cultura matemática. En seguida Gabriela atribuye elementos caracterizadores de la idea de convexidad, que se percibe es una novedad para el grupo de alumnos, definiendo por la descripción de los elementos de la figura “.. figuras convexas, o sea, figuras que tienen todos los vértices para el lado de fuera”, exhibe un dibujo para ejemplificar y usa sectas para realzar la dirección “de fuera”.

Hace lo mismo cuando afirma que “Todas las piezas del tangram son simétricas”, su definición es ostensiva, una vez que dibuja todos los casos para reforzar el texto “ .. simétricas, o sea, se dividiésemos alguna pieza al medio, las dos mitades quedan iguales”, da un tratamiento especial para explicar la “simetría de paralelogramo”, “esta pieza llamada paralelogramo por tener todos los lados paralelos, es simétrica por rotación: vea (dibujo, con secta curva indicando el giro) se nos giramos la pieza a partir del punto del centro, una hora ella se encaja”, agrega que esta propiedad también ocurre con otras piezas.

Cabe un recuerdo, con respeto a la experiencia de los alumnos de 10/11 años con el paralelogramo, que fascina los alumnos, que lo consideran como un rectángulo “torcido”, pero algunos manifestaran en la REv de Pentominos alguna dificultad en caracterizar los paralelogramos. Pódese considerar que en esta actividad Gabriela superó esto tipo de dificultad.

La exploración con tangram descrita por Gabriela pone acento en los ángulos, y según sus escritos generan una clasificación (la canónica): recto, agudo, obtuso. Y agrega su descubierta que destaca en una caja:“Descubrí en casa que cualquiera pieza que tiene tres ángulos de cualquier tamaño es un triángulo (dibujos)” Este es un momento crucial si comparado con la REv anterior, pues es el primero registro asumido de descubierta reflexiva, con respeto a objetos matemáticos aprendidos y no necesariamente enseñados. Es un indicio de vínculo con el conocimiento, en dirección a la autonomía que se pretende comprobar en el fin de esto estudio.

Sigue utilizando verbos de la 1ª persona del plural (“descubrimos”) para afirmar lo que ocurrió en la clase. Sus descubiertas refieren-se a la suma de los ángulos internos de un polígono en función del número de lados. Enuncia la medidas de los cuadriláteros, pentágonos y hexágonos pero no lo demuestra, pero da indicios de que reconoce un padrón y es capaz de argumentar con la frase en forma de diálogo con el lector “Se usted percibió, toda la vez que aumenta un lado, aumenta 180º”.El próximo tema que ella trata es el área de las figuras formadas con las piezas, basado en el triángulo pequeño como unidad de medida. Su relato sigue ahora haciendo referencia a la congruencia de los lados entre las piezas, un hecho importante para hacer las construcciones bajo condiciones.

Las conexiones se pueden inferir cuando relaciona las piezas del tangram con fracciones, ejemplifica ahora hablando específicamente sobre las fracciones y sus significado. Termina su REv dialogando con el lector e intentando definir lo que es un polígono.Al observar las atribuciones se observan algunas características específicas como: marcas culturales, marcas vivenciales, etc. Gabriela asume que se dieron definiciones y se descubrieron propiedades. La intencionalidad del texto se dirige a comunicar para otros.

5.3.2. Análisis textual y conceptual del texto de Joana.

Joana empieza su REV sobre Tangram hablando sobre lo que pensava antes de hacer las actividades, sobre su curiosidad y como su interese fue aumentando.Realata que lo primero que ha hecho fue montar (dibujar y recortar) las piezas a partir de una receta que era un roteiro en linguaje fmormal que tenia el proposito de iniciar los alumnos a una terminologia especifica de construciones geométricas. Joana utiliza muchos terminos metafóricos y hace un ensayo de definir “receta que es una “lenguaje codigo”, asume que aprendió cosas nuevas con la interpretación de la receta, como por ejempo]lo lo que era “punto medio”. En esta parte de la REv lo conceptos geométricos aparecen como ya conocidos, sin una preocupación de hacer definiciones, que solo son hechas en los textos cuando el concepto es nuovo para el alumnos. Lo que se destaca aquí son los aspectos procedimentales de contruir las piezas a partir de la receta.

Una primera definición aparece cuando hace referencia a la congruencia de los ángulos, pero no es una definición formal e si por aproximación y ejemplificación, dibuja dos triángulos pretensamente semejantes y destaca sus ángulos congruentes, Se percibe aquí una despreocupación con una lenguaje formal, utiliza "punta" del triángulo en lugar de "vértice" del triángulo, habla de la "parte de bajo" del triángulo y no en la "base" del triángulo. Describe algunas construcciones, y hace un rol de hechos dibujando y mostrando: ángulos de 90º, 45º, 135º, indicando a suma de los ángulos internos de un triángulo como 180º, y del rectángulo de 360º. Solamente en este caso se encuentra un indicio de prueba,

Las atitudes y lo emocional quedan registrados en algunas partes del texto de Joana, sea por el uso libre de lenguaje propria cuando crea el termino "batalla tangranal" en alusión al juego "batalla naval", o en referencia a las invenciones que tenian hecho en clase, o mismo en el final cuando aforima que le gustó mucho el trabajo y formula un problema de naturaleza geométrica "¿Cuál es la menor caja que puede contener todas las piezas del tangram?", dá una solución.

5.3.3. Resumen comparativo en los textos sobre tangram.

Al observar los textos, se ve en el de Gabriela referencia clara a interacciones y comunicación con el lector. Muestra insistencia sobre el contenido matemático con hechos y relaciones (algunas generales) argumentadas. Evidencia un relato propio con indicios de consignas de las tareas. Podemos casi afirmar que no hay toma de posición de tipo afectivo. En este texto hay un referencial contextual bien determinado, sobre el tangram chino, pero se muestran pocos indicios de autonomía personal, excepto cuando muestra su descubierta en casa con respeto a los triángulos. Hace uso de argumentaciones y generalizaciones. Se ve un sentido comunicativo fundamentalmente en los momentos de presentación e intercalación. Hay un contrato implícito evidenciado. Se percibe un texto que evidencia una tarea realizada con poder de descubrimiento de hechos (propiedades, etc.),

El texto de Joana casi no hay referencia a las interacciones, y muestra gran insistencia sobre el contenido como elenco de hechos, de forma descriptiva. El texto muestra respuestas a prácticamente todas las consignas de las tareas. Algunas tomas de posición del tipo afectivo en respeto al trabajo realizado. El referencial es existencial vivencial. Hay un contrato explícito del maestro. Hay una tarea propuesta por el maestro que se tiene que hacer que implica aprender, estudiar. Se ve un reconocimiento de que la tarea realizada hay acción (construcción) y descubrimiento de hechos (propiedades, etc.) y se muestran poco indicio de autonomía. Al comparar las observaciones realizadas entre el trabajo de las dos estudiantes, percibimos que no reconocen los mismos objetos matemáticos.

En lo que toca a las conexiones Joana insiste que lo clave fue la suma (de los ángulos internos) del rectángulo se hace un ejemplo, y Gabriela resalta la las figuras simétricas, el área y su relación implícita con las fracciones. Joana cierra su texto formulando un problema, Gabriela preguntando al lector se sabe lo que es un polígono. De común na intención de atar la atención del lector.

Tangram (Joana)	Tangram (Gabriela)
Objetos matemáticos y sistemas evocados.	
Registra las nociones de codificación y descodificación, Ponto médio; Quadrado (representado por uma notação que se apoia nos vértices); Triângulos. paralelogramo, retângulos. Referência a proporcional com um sentido de padrão de medida "ângulos" como puntas. Cuadriláteros. Área como conteo.	Convexidade. Simetria e observada por justaposição de propriedades. Ângulo retos, agudo e obtuso. Área como relação com uma unidade
Representaciones y significados	
Interpreta las coordenadas y los ángulos, com a metáfora da "batalha naval". Observa la congruência de ângulos a partir de las piezas ycomo dibujo, mediante marcas iguales de los ángulos. Hace uso de la notación de grado.	Habla de Simetria enquanto duas metades iguais. Simetria enquanto existe um centro de rotação. Fala de ângulos iguais. A área é associada pelas frações, e subdivisões. Polígono identificado pela não abertura
Uso de las definiciones	
Ponto medio como distancia igual (centro de simetria) Figuras cuadriláteras como figura de 4 lados.	Convexo que tiene todos os vértices para o lado de fora. Usa "no convexo" define por complementaridad
Argumentos	
Referencia a congruencia para describir el encaje de piezas y proceso de construcción. Suma (de los ángulos internos) del retângulo	Relación área-fracciones no explícita Mayor número de lados da una mayor suma interna El cuadrado es un rectángulo porque tiene 90º
Sentido para las propiedades matemáticas	
Reconhece ângulos reto, agudo e obtuso no universo das peças de tangram associando as medidas correspondentes; Fala sobre soma interna (de ângulos) de triângulo	soma interna (de ângulos) de triângulo 180quadril, 360; pentágono 540, hexágono 720

Figura 5.6. Comparación de elementos observados em Gabriela y Joana.

Ambos textos de Joana y Gabriela, se organizan mediante yuxtaposición de ideas, explicitando cada una de manera diferente: Joana va aludiendo a curiosidad, acciones (montamos, empezamos a estudiar, mostramos) y Gabriela con presentación, características, acciones (descubrimos, vimos). No se hace conexión entre ángulos y lados en la congruencia. Casi ninguna referencia a las interacciones; Insistencia sobre el contenido con elenco de hechos. Respuesta a las consignas de las tareas. Algunas tomadas de posición del tipo afectivo en respeto al trabajo realizado. El referencial observado es de tipo existencial vivencial. Aparece un contrato explícito: hay una tarea propuesta por el maestro que si se tiene que hacer que implica en aprender, estudiar, etc. Reconoce que la tarea realizada hay acción (construcción) y descubrimiento de hechos (propiedades, etc.) pocos indicios de autonomía.

En cambio para Gabriela, hay referencia a interacciones y comunicación con el lector; Insistencia sobre el contenido con hechos y relaciones (algunas generales) argumentadas Relato propio con indicios de consignas de las tareas Sin toma de posición de tipo afectivo referencial contextual Poco indicio de autonomía Hace uso de argumentaciones y generalizaciones. En cuanto al contrato implícito : hay una tarea propuesta que debe ser un relato que privilegia el contenido matemático - Reconocimiento de que la tarea realizada en clase hay acción (construcción) y descubrimiento de hechos (propiedades, etc..), Joana insiste que lo clave fue la Suma (dos ángulos internos) do rectángulo se hace un ejemplo, y Gabriela resalta Figuras simétricas. Fracción. Joana cita como aplicación intramatemática Problema de busca de suma de ángulos y Gabriela habla de la referencia al tangram como juego chino como conexión extramatemática.

5.4. Análisis textual y conceptual de la actividad ecuaciones.

A continuación, se presenta los resultados observados a partir del análisis textual realizado y el análisis del contenido matemático de los textos sobre ecuaciones. La REv propuesta, según las alumnas aquí analizadas, ocurrió en el final del año lectivo de su 7º grado, el tercero año del proyecto de enseñanza de las matemáticas basado en los principios del AIL.

El tema de las ecuaciones del segundo grado ya había sido analizado de la perspectiva de la análisis crítica del discurso en Lopes (2000) en aquello estudio se buscó mirar el potencial cognitivo de la actividad, como proceso de resolución encadenado de un problema matemático general. En Brasil ecuaciones de según grado son estudiadas en el 8º grado o en el 1º de la enseñanza media (equivalente al bachillerato). La decisión de anticipar el tema tiene una razón didáctica de llevar los alumnos a utilizar las herramientas matemáticas que tenían disponibles en su desarrollo cognitivo para mirar como la utilizarían para enfrentar un problema novedoso de álgebra.

5.4.1. Análisis textual y matemático de Gabriela.

Como contexto, Gabriela muestra un referencial a la historia de las ideas producidas con frases como "ya sabíamos resolver" , "la ecuación de ...ya era conocida..." o bien "mucha gente no entendió los pasos ..." Encontramos referencia a la situación curricular, y reconoce denominaciones.

La REv de Gabriela tiene un estilo didáctico hacia al formal, pero con muchos elementos de una lenguaje coloquial de quién se dirige a una audiencia genérica que se pretende atar en la lectura, persuadir para garantizar el interese y la comprensión. Empieza su texto haciendo referencias a la historia vivida como estudiante en el grupo que hace parte, hace informe de acción, y referencia a dinámica de la clase: "día 14 de noviembre, anticipando un tema del 8º grado, tuvimos nuestra primera clase sobre ecuación de 2º grado", "La primera cosa que el maestro hizo fue mostrar algunas ecuaciones que nosotros ya sabíamos resolver", "Ya sabíamos resolver 4 casos ..", "entonces el maestro dio un ejercicio y había dos métodos surgieran", aquí una clara referencia a la dinámica de la clase en que los alumnos investigan y descubren métodos de solución de problemas. Esto reconocimiento y mención de la producción colectiva aparece en otra parte de su REv, como cuando escribe "Quien descubrió esto método, recordó de las clases sobre la suma y el producto y resolvió". Lo interaccional y la cultura de aula queda explícito en los nombramientos que se puede constatar pela elección del tempo verbal (1ª persona de plural) con en la cita "En la clase siguiente, ya teníamos dominado el métodos de la "balanza cuadrado perfecto" y solo resolvemos ejercicios. Dominamos también el método cascada, que ya teníamos estudiado en la 1ª aula".

Los contextos también son evocados cuando ella escribe un apartado intitulado "Historia", en ello hace referencia a civilizaciones antiguas y como resolvían problema geométricos, llamando la atención, después de resolver un problema genérico de un triángulo rectángulo de lados consecutivos, para el hecho de que las civilizaciones antiguas no aceptaban números negativos, lo que por su conclusión, una de las soluciones tendría que ser descartada.

Usa un conjunto de herramientas matemáticas con seguridad, en las 3 páginas de REV se puede reconocer las siguientes: resolución de ecuaciones respectando el principio del equilibrio (se suma/substrae lo mismo en los dos miembros de la ecuación), factorización de trinomio cuadrado perfecto, regla de señales, verificación de condiciones de existencia de raíces, aplicación de la relación pitagórica, transformaciones algebraicas, raíces cuadradas, "método cascada". Estas herramientas son utilizadas para convencer el lector, resolver ecuaciones, demostrar hechos y proposiciones.

En cuanto a los procesos, se muestra una evocación de un proceso de generalización basado en 3, 4, 5 conservado en x, x+1, x+2 para resolver un problema geométrico con condiciones(determinar la medida de los lados de un triángulo rectángulo cuyos lados forman una secuencia de números consecutivos).

Se puede observar ideas de recontextualización, como por ejemplo "esto ayuda a la hora de simplificar". Se dan indicios de generalización. En cuanto los procesos, se ve la idea de cuadrado perfecto relacionado con la historia, la evidencia de las transformaciones de ecuaciones equivalentes. La identificación de propiedades generales, la referencia a 4 casos de ecuación, tipología, etc. El ejercicio concreto lleva a conducir métodos en los que se evidencia la conexión con sujeto elíptico (autor) en relación con el contenido de relaciones entre paréntesis y ecuaciones, explicitando un método matemático. En cuanto los recursos que apoyan lo matemático, se ve una alusión a la balanza como modo de indicar equivalencias, acompañado de representación algebraica. Y en cuanto conexiones catafóricas, anafóricas y metáforas. Aparece el reconocimiento del poder del método como transformación a un problema anterior. Descripción de métodos, ejemplificando y nombrando. Deja implícita la posibilidad de poder llegar al TQP a partir del "método da balanza".

En el discurso de Gabriela, se problematiza, y se reconoce que asume dominio sobre casos particulares, se observa un reconocimiento implícito que hay un universo desconocido de las ecuaciones y sus métodos de resolución. Reproduce ejercicios hechos en aula pero elige otros para hacer sus propias ejemplificaciones. Hay expresión en lenguaje algebraico de casos generales, mostrando una jerarquía implícita. Hay identificación de un tipo del casos especial nombrados en lenguaje algebraico.

Incorporación de información investigada o recibida desde el aula que ella misma informa enriqueciendo y acentuando.

Se reconoce un marco cultural considerado y valorado, Se muestra interpretación o incorporación de hecho aprendido a referencia y percepción del conflicto y obstáculos epistemológicos sobre números negativos supuestamente aceptados por el grupo.

En cuanto las representaciones, las usa con indicio de apropiación y reconocimiento de valor, de forma explícita. Si percibe una variedad de recursos representacionales en uso: cajas para destacar hechos o destaques que ella considera importantes, una escalera para realzar la idea del "método cascada", dibujos geométricos para ejemplificar aplicación, setas para orientar la lectura, esquema que sugiere los platillo de una balanza en situación de equilibrio, colores e marcadores (con número y letras). Las establece explícitamente para mostrar dominio para una audiencia.

Conecta perfectamente la mayor parte de los conceptos implicados, y usa referenciales para determinar saberes, explicar y legitimar el conocimiento construido por el grupo. Por fin a la semejanza de las REv anteriores, Gabriela muestra vínculo y apreciación por el conocimiento y la posibilidad de comunicarlo con intención didáctica explicita.

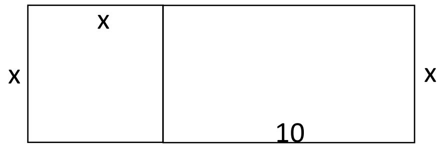
5.4.2. Análisis conceptual y textual en texto de Joana

La REv de Joana repite su estilo coloquial que simula un diálogo con el lector, mantiene la intención didáctica detentada en las REv ya analizadas. El lenguaje coloquial que adopta no sacrifica el rigor esperado para su nivel de desarrollo, hace uso de hablas propias o creados en el grupo, como "Caza al método general", "método cascada". Empieza haciendo una auto reflexión "(Ecuación de 2º grado) ¿Qué diablo es esto?". fue la primera cosa que pensé, ¿Algo nuevo?", "No (Joana) son problemas que ". Queda entendido en estas primeras líneas de la REv que cuando el tema fue propuesto, los alumnos, reflexionan sobre el contenido, su naturaleza, sus complexidades, etc.

Es posible inferir que tienen una mirada metacognitiva con respeto a la naturaleza epistemológica de los contenidos, aunque no necesariamente tiene consciencia disto. Es posible suponer también la atención y el interese generado cuando el maestro hace un viaje histórico con respecto a las ecuaciones, pues Joana reproduce a su manera (diferente de otros alumnos), con sus propios filtros y acentos.

La contextualización en este caso se presenta por la mirada de la evolución de las ecuaciones en Egipto, Babilonia, hasta los árabes e hindúes con *Al*-Khwarizmi y *Bhaskara*. En sus escritos sobre la historia, se preocupa en tratar de métodos, habla de métodos generales y de otros basados en particularizaciones.

Describe un método que involucra figuras geométricas, para mostrar relación de igualdad equivalente, describe y representa un problema antiguo. No deja claro se la figura expresa la ecuación o viceversa.



$X^2 + 10X = 39$

Pero hay una pista en el próximo parágrafo "Bueno, grande cosa. Hay infinitos rectángulos con área 39, lo que sugiere que la figura intenta expresar la ecuación. Este es un ejemplo de cómo problematiza, usa problemas para ilustrar y para enseñar métodos. Joana sigue en su jornada didáctica haciendo preguntas retóricas para atar el lector en el tema. Para esto presenta su definición de ecuación, y pregunta "¿Pero por qué la ecuación es de 2º grado?", responde y reflexiona a seguir "Ha! Entonces no tiene sentido". Pasa entonces a describir lo que para ella significa resolver la ecuación, que es descubrir el valor de la incógnita que satisface las condiciones (de igualdad). Ejemplifica e corrige para evitar una interpretación que sale del control. Su estilo es muy singular, explica preguntando. "$x^2 = 9 \rightarrow$ ¿Cuál es la pregunta indirecta en esta ecuación?", "Es simples, La pregunta es ¿Cuál es el número que elevado al cuadrado es 9, ¿E cuál es la raíz cuadrada de 9?" Hace preguntas retóricas, como se fuese la profesora "$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 =$ "¿Joana donde usted ha sacado el 9?" Este diálogo ficticio no ocurrió, pero existe en el diálogo de Joana con la Joana, que quiere se apropiar no solo de la técnica, sino también del método En ese diálogo con ella misma, se ve la comunicación con intención didáctica.

Dedica un apartado completo al "Método cascada". Ejemplifica con caso particulares luego intenta generalizar, con dibujos geométricos e expresiones algebraicas, expresa la relación entre el cuadrado de un binomio y su desarrollo: "$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$", refuerza las relaciones utilizando sectas y otros marcadores para controlar el significado de las transformaciones, realzando que una es la inversa de la otra.

factorización

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

producto

Cuando describe el método, se preocupa en hacer verificaciones. La REv de Joana por tratar un tema que fue desarrollado en solo dos clases, no presenta muchos elementos conceptuales, aunque haga referencia a ecuación (definiendo), trinomio cuadrado perfecto (ejemplificado y resuelto), solución de una ecuación, método, etc. Lo fuerte de la REv de Joana es lo procedimental que la alumna muestra dominio de calidad y procura enseñar al lector genérico.

5.4.3. Análisis comparativo de la actividad de ecuaciones.

Aunque los textos presentan estructuras conceptuales y elecciones distintas de los elementos integrados, todas: identifican el elemento temático central y lo relacionan a conceptos conexos; comunican y desarrollan lo(s) método(s) que se usan para encontrar sus soluciones. A esta estructura mínima común se observa los elementos que cada alumno de la muestra consideró significativos en relación al tema: elementos históricos, relación entre TQP y ecuaciones de 2° grado, reconocimiento del método cascata, consideración a los aspectos geométricos y procedimientos de verificación. desarrollado en esta comunidade de AIL.Las dos alumnas demuestran un gusto por la comunicación y, aunque mesclen elementos de naturaleza cultural y afectiva, es evidente que hay una apreciación en escribir para una audiencia genérica, se puede suponer que ya tienen el habito desarrollado, una vez que escriben con mucha libertad y tranquilidad (como quien piensa acerca del pensamiento de quien va ser su lector/a), utlizando las herramientas que se supone, aprendieran en las clases de la lengua materna (el portugues) y que utilizan para intentar atar la atención y despertar el interesse del lector genérico. Los dos textos muestran dominio de saber y una preocupación en tener control sobre la interpretción del lector. Aún en relación al estilo, se puede decir qué Gabriela intenta ser más enciclopédica y impersonal, en cuanto Joana simula un diálogo fictício, disminuindo distancias y creando una "interacción" simulada con las posibles voces que podrian surgir en una situación de clase real. Es posible que Joana reinterprete lo que vivió como testigo, ocurri que esta es una de sus marcas desde que escribió sus primeras REv cuando tenía dos años menos.En los dos textos se puede reconocer intención didáctica e esto es importante porqué al mirar la mente de su lector, ellas ponen foco en sus propias mentes, una vez que tienen que razonar del punto de vista del otro, que las lee.

Volviendo a los elementos comunes, ambas las alumnas valoran el uso de las representaciones, que es adecuado, aunque en el texto de Gabriela esto sea más aparente. Gabriela y Joana tratan de situaciones comunes con representaciones distintas; ambas se refieren a las balanzas, pero Gabriela las repoduce, ambas discuten el método cascada, pero con representaciones distintas; ambas hacen referencia a representaciones geométricas, pero Joana las usa com más seguridad. En lo que toca a los problemas, Joana formula cuestiones como una maestra, intentando controlar el pensamiento del lector. Las dos utilizan ejercícios, pues están preocupadas en mostrar métodos en una perspectiva procedimental. Probablemente debido a la naturaleza del tema, las relaciones procedimentales se sobreponen a las conceptuales, aunque estas estean presentes en las REV. El texto de Joana es más frecuente en terminos de referencias a contextos (los historicos principalmente), pero ambas hacen referencias al contexto del colectivo, por medio de como nombrean los partcipantes y describen las acciones. La comparación no permite decir quien aprendió más, pues las dos alumnas hicieron eleciones distintas y las sostuvieron con claridad y calidad. Pero es posible hablar del dominio robusto del tema estudiado en las dos clases, y también de una apropiacion consciente acerca del tema de la la resolución de ecuaciones, sus métodos y conexiones con contenidos ya aprendidos y otros que van a estudiar.

5.5. Análisis textual y conceptual sobre conjuntos numéricos

Ante todo identificamos el desarrollo del contenido matemático, basado en el análisis del discurso para cada texto de cada estudiante a partir de cada uno de los textos. En dicho cuadro se ilustra el contexto supuesto y subjetivo del protagonista; el texto subdividido en tres partes (relato, intercalaciones y explicaciones metodológicas); nombramientos (tipos de elementos, participantes, papel de los mismos); y atribución (tipos y acciones).

5.5.1. Análisis del texto de Gabriela sobre Conjuntos.

Cuando escribieran estos textos las dos alumnas cursan el 8º grado y ya tienen 3 años de experiencia escribiendo REv sobre temas de matemática. Los primeros textos de REv tenían 1 o 2 páginas, estos últimos tienen de 6 a 8, lo que muestra no solo la experiencia de escribir, mas también el hecho de practicar un estilo comunicativo con relación a la tarea como parte del quehacer-aprender matemáticas.

Hasta este inicio del cuarto año de estudios, losd almnos conocian números pero en una perspectiva conceptual no sistémica, los conjuntos numericos eran conocidos aisladamente, un ejemplo es lo conjunto de los numeros naturales, las propiedades que podrian ser conocidas y/o estudiadas era limitada, no era posible poner en ralación con lo conjunto de los interos o racionales por ejemplo. El objetivo didácticomatemáticos del tratamiento aquí es porponer la oprtunidad de mirar hacia atrás, haciebndo una refelxión sobre todos los tipos de números que se conoce e poner en relación los conjunto numéricos para identifiucar más características, propiedades y relaciones. Se procura reconocer aspectos que se relacionan con la reflexión sobre la estructura numérica/algebraica. Se propone integrar lo que distingue un conjunto de otro, sus significados, así como los significados relacionados con las operaciones. Lo esperado después del estudio es romper con las concepciones supuestamente fragmentadas y intentar darles unidad, posibilitando mirar conjuntos numéricos como objetos matemáticos, objetos que son formados por otros objetos (subconjuntos, números) . Tratase de una abordage internalista de la matemática sin preocupación en llegar a hacer una mirada axiomática.

En el texto de Gabriela sobre los conjuntos numéricos no hace referencia a contextos extra matemáticos, queda implícito que está hablando de matemáticas duras y relaciones abstractas entre objeto matemáticos. Su texto tiene preocupación comunicativa que se puede mirar con el uso de elementos propios del universo editorial, como la utilización de cajas, colores, globos onomatopéyico, claves y dibujos.

Aunque aparezcan verbos en la 3ª persona del plural (empezamos, miramos, citamos, estudiamos, discutimos) la mayor parte de las 6 páginas adoptan estilo impersonal, como en los libros de matemática superior. Se habla de objetos matemáticos no de fenómenos situación que involucra interacciones. Las marcas internacionales son raras e solo se percibe en lo uso de los verbos arriba citados o en una cita luego en inicio “nosotros formulamos proposiciones a respecto de los números naturales”, y sigue una lista de propiedades que según la autora del texto son de autoría del grupo ella misma y sus colegas.

Los problemas son de otra orden, se utiliza para simular un diálogo con el lector “¿Lo que son subconjuntos de N?”, “Cual conjunto tiene más elementos, P (pares) o N (naturales)?, “¿Cómo saber “construir” un número irracional?”, “¿Cómo construir fracciones en la recta ?”, “¿Cómo encontrar el número $\sqrt{2}$?”, “que conjunto numérico contiene la recta R?”. Son “problemas” retóricos con intención de servir de escalera para un hecho, una definición o una propiedad a ser enunciados. Pódese decir que el estilo adoptado es muy diferente de las REv anteriores, tiene intención de mostrar dominio de saber adquirido.

En cuanto a los contenidos la REv es bastante rica, los conceptos y relaciones son encadenados en una jerarquía propia de la encontrada en los libros de matemática superior. Sigue una secuencia de términos que son utilizados y discutidos:

conjunto de números *naturales*	es *numerable*
números *enteros positivos*	*semirrecta*
N es *infinito*,	semirrecta N
.. tiene *subconjuntos* (pares, impares, primos, ..)	el conjunto es *denso*
.. es *cerrado* en relación a la adición y la multiplicación	*equipotencia*
	construible

Utiliza cajas para hablar sobre la simbología y las notaciones matemáticas nuevas, la primera sobre los separadores (paréntesis, corchetes, llaves) y sus usos. La segunda es para presentar los símbolos de la teoría de los conjuntos, símbolos de pertinencia, inclusión, implicación, cuantificadores universal y existencial.

Gabriela discurre sobre otros conjuntos sus propiedades y las relaciones entre ellos, relaciones de inclusión. Allá de na enunciaciones del tipo “Z es numerable”, ejercita la prueba de que el conjunto Q de los racionales es numerable, para tanto utiliza representación matricial que posibilita un conteo controlado. El dominio de algunos proceso de prueba sigue con la explicación de porqué Q es denso en la recta, calculando la media aritmética de dos fracciones particulares y mostrando por equivalencia que la media está entre la dos fracciones iniciales. En este universo en que los elementos son números y emergen ideas como infinito o densidad, la generalización queda supuesta. Aquí se percibe una clara intención de negociar con el lector el lenguaje que va a usar a partir de esta primera página. Gabriela escribe en lenguaje matemática formal lo que muestra su evolución en el ámbito del dominio de un aspecto de las matemáticas poco explorado en la enseñanza tradicional centrada solamente en hechos y técnicas. Pero en inicio de su REv se puede inferir la negociación de significado con el lector:

“Como se escribe, por ejemplo “¿Todo natural (N), tiene un sucesor” en matematicas?” Si n $\in N \Rightarrow n+1 \in$ N

La negociación de significados aparece en otras partes cuando utiliza metáfora y lenguaje coloquial para proveer de sentido algunas ideas, como cuando usa el término "pequeños agujeritos" para construir la idea de densidad en la recta. Gabriela utiliza un caja para tratar de la idea de numerabilidad de N "La idea de numerable, es decir, que si alguien puédase escribir o hablar eternamente los elementos de un conjunto sería posible "barrer" todos los números". Aunque, a diferencia de otras REv que escribió en años anteriores en que se pude identificar las interacciones ocurridas en aula, aquí ellas no aparecen, pero si, se puede decir que la interacción es de la autora con el lector.

Los procedimientos que aparecen en el texto son los que utiliza para hacer pruebas, como por ejemplo construcciones geométricas para construir números racionales expreso como fracción o la construcción de un cuadrado con su diagonal proyectada en la recta para ilustrar a construcción de $\sqrt{2}$.

En lo que toca al uso de representaciones se percibe un uso adecuado, con variedad. Se observa la utilización de simbología y notaciones con sentido, explicitando sus significado, utilización. Utilización de representación en la recta, diagramas de Venn (para explicar relaciones de inclusión), representación matricial para muestra na numerabilidad, construcciones para mostrar constructibilidad y elemento semiótico, propio de los medios editoriales como el uso de sectas, cajas, colores y globos.

Los procesos argumentativos son nítidos y de nivel comparable a lo utilizado por alumnos de bachillerato o de los primeros años de cursos superiores. Son allá de persuasivas, tiene formalidad y rigor. Gabriela muestra sus habilidades en este proceso en varias partes de su texto, probablemente para mostrar dominio:

Ante todo identificamos el desarrollo del contenido matemático, basado en el análisis del discurso para cada texto de cada estudiante a partir de cada uno de los textos. En dicho cuadro que utilizamos para hacer las análisis (ver anexos) se ilustra el contexto supuesto y subjetivo de las protagonistas; el texto subdividido en tres partes (relato, intercalaciones y explicaciones metodológicas); nombramientos (tipos de elementos, participantes, papel de los mismos); y atribución (tipos y acciones). Se mira también las competencias sintácticas, metalingüísticas, ver como usan la representación y se hay, los elementos semióticos. Se analizan las relaciones conceptuales en relación a conceptos, procedimientos, procesos y contextos. Se analiza los problemas que generan ideas, construcción de conceptos u nuevos problemas. se observa que

- Muestra que el conjunto de los naturales es equipotente al conjunto de los números pares positivos, usando una correspondencia 1-1, basada en la función linear $x \rightarrow 2x$

- Muestra por recursos no formales que Z es numerable

- Utiliza el concepto de media aritmética y fracciones equivalente para mostrar que entre una fración y otra representada en una recta, hay siempre al menos otra entre ellas, para sugerir que Q es denso en la recta

- Usa representación matricial para convencer que Q es numerable
- Hace operaciones con radicales para mostrar, por el contrario-ejemplo que los irracionales no son cerrados sea en relación a la adición o a multiplicación
  $(\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0 \rightarrow racional$ y
  $\sqrt{2}.\sqrt{2}=2 \rightarrow racional$
- Utiliza recursos de construcción con regla y compas y propiedades de triángulos semejantes para probar que cualquiera fracción puede ser construida.
- Utiliza recursos de construcción con regla y compas y el hecho de que la diagonal del cuadrado (Pitágoras implícito) para mostrar que $\sqrt{2}$ es construible., por extensión muestra que se pude construir varios números irracionales $2\sqrt{2}$; 1 + $\sqrt{2}$; - $\sqrt{2}$; 1 + (-$\sqrt{2}$), etc.

En el final de esta REv, la alumna escribe un P.S. (post scriptum) diciendo que hasta la hora que estaba escribiendo la REv, cuando fue hacer la corrección, ha descubierto nuevos números que no son reales $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}, \sqrt{-4}$ ... Es oportuno recordar que la producción de esta REV tuve dos momentos distintos. Los alumnos escribirán dos REv, una en aula, que quedo con el maestro y otra en casa sin limitaciones de tiempo en que los alumnos podrían hacer consulta a sus anotaciones y libros. En la tercera página de la REv que Gabriela escribió en aula, hay la siguiente frase "*El conjunto R de los reales involucra todos los números del conjunto Q e Ir, o sea, todos los números excepto* $\sqrt{-1}$". Si puede suponer que esta creencia cambió e durante o después de la escrita de la REv con tiempo para reflexionar y hacer revisión.

Este es un indicio que sugerimos en Lopes (2000) que la REv propicia oportunidad de reflexionar sobre las matemáticas, los conceptos, relaciones, etc. desde una mirada fuera de la situación en una perspectiva metacognitiva que, en este caso posibilito ir más allá de lo que fue enseñado y/o aprendido. El compromiso de los alumnos con el contenido va más allá de lo que tradicionalmente es esperado por los maestros, el compromiso es con su propio proceso de desarrollo, su curiosidad y su espirito investigativo.

La REv de Gabriela muestra que alcanzó madurez en relación a muchos objetivos didácticos de naturaleza matemática. Es un texto cohesionado, con intención didáctica que busca mostrar al lector dominio del léxico especifico, uso de lenguaje matemática con indicios de formalismo, capacidad de hacer definiciones con intención de claridad, explicitación de relaciones conceptuales y procedimentales, variedad de representaciones procesos de argumentación refinados.

5.5.2. Análisis del texto de Joana sobre conjuntos

Joana empieza su REv haciendo referencia a lo conocido sobre conjuntos en los años anteriores, pero hace consideraciones cuasi filosófica, reconoce que la mirada ahora es muy diferente de los estudios anteriores, "estamos mirando para estos conjuntos con otros ojos y haciendo una análisis diferente", "Es difícil conceptuar de forma concreta lo que son los números, desde niños sabemos y temo contacto con ellos y a cada año aprendemos y crecimos más en el saber manejarlos". En esto texto escrito en aula, hace una pequeña referencia a contexto histórico cuando escribe "Tiene gente que hasta crea una religión basada en números, lo que son y explican todo", probablemente en referencia a numerología, pero la cita es abandonada en la REv que escribió en su casa, lo que sugiere que la distancia temporal posibilitó una reflexión más concentrada en los aspectos matemáticos. Otras referencias al contexto histórico aparecen cuando discute la irracionalidad de $\sqrt{2}$, escribe con bolígrafo en azul, que "Matemática claro es cultura!" y hace referencia a Pitágoras y el período Pre-Socrático" después del filósofo Sócrates", pero no se da cuenta que pre no es después, lo que sugiere que probablemente no hizo una relectura de su REv.

Dentro las n una muestra de REv de otros alumnos hay referencias a contextos de la historia de los números, pero en la REv de Joana no se percibe más conexiones contextuales.

Aunque aparezcan verbos en la 3ª persona del plural las diez páginas son escritas en un estilo impersonal. Se habla de objetos matemáticos, propiedades, relaciones, procesos, lo que torna raro marcas de interacción en clase, solamente con lo lector, por medio de interjecciones que llama informalidad ("achamos!" Trad. "encontramos!"), asteriscos, con notas, en la explicación de porqué el conjunto de los racionales es numerable, aparece nuevamente la marca de diálogo con el lector "Usted debe estar pensando "Ah más basta seguir pela columna n/0 e ir en línea recta" Errado, pues esta columna (como todas las otras) son infinitas y por tanto nunca llegaremos na columna abajo, la del 1". En el P.S. en el final nueva "interacción" con el lector, pero aquí no parece genérico e si el maestro "Hizo esta redacción sin el uso del libro, solo he usado mi cuaderno y mi cabeza", en alusión a la memoria.

Se puede percibir marcos de la preocupación con la audiencia (el lector) pues Joana edita su REv haciendo uso de subtítulos en color, símbolos matemático en otra color, sectas, para orientar la lectura, las representaciones solo son utilizadas con

Utiliza elementos metafóricos, como cuando dice "Puedo imaginar todos estos conjuntos en una recta continua (sin agujeros) e infinita" y sigue para completar la idea problematizando con el lector "Sera que hay un conjunto que "tiene" la recta", aquí el uso de las aspas por arriba del "tiene", es para negociar el significado de "tener" aquí utilizado, y concluye como se estívese pensando en voz alta "Creo que tiene que ser un conjunto que contenga R"

A diferencia de las REv que escribió en años anteriores, en este texto sobre conjunto los problemas son raros, son citados en situación de negociación de significados con intencionalidad comunicativa como cuando escribe "¿Bueno, e cual fracción esta entre $\frac{17}{24}$ y $\frac{3}{4}$?" Sigue respondiendo para completar su razonamiento "Basta repetir la fórmula y usted encontrará una nueva fracción, es un círculo vicioso, por esto Q es denso", aquí la idea de "circulo vicioso" es su metáfora de proceso iterativo en el sentido de la recursividad.

En cuanto a los contenidos la REv de Joana presenta hechos, conceptos y relaciones que son encadenados en una jerarquía que respeta la coherencia matemática y didáctica. Estos son los términos y proposiciones utilizados y discutidos:

conjuntos *numéricos*	conjunto *cerrado en relación a una operación*
conjunto ordenado	números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales
elemento neutro	décimas periódicas
conjunto *numerable*	fracción *generatriz*
subconjuntos	números *constructivos*
sucesor y antecesor	*plan cartesiano*

En cuanto a las representaciones utilizadas, hace un "diccionario" de símbolos matemáticos que llama de "Matemáticas: lenguaje de la teoría", y luego la utiliza para expresar relaciones, propiedades y proposiciones como: "Todos los elementos (de los naturales) tienen sucesor (si $n \in N \Rightarrow n + 1 \in N$), excepto el cero tiene un antecesor (si $n \in N$ y $n \neq 0 \Rightarrow n - 1 \in N$)".

Utiliza una variedad de representaciones de naturaleza matemática, como la matricial para explicar a numerabilidad de Q, a correspondencia 1-1, para mostrar que los números negativos se ponen en correspondencia a los números positivos. Representaciones en la recta continua para tratar de la densidad de los racionales, diagramas de Venn para ilustrar la inclusión de conjuntos numéricos, construcciones geométricas como la mediatriz para construir puntos medios, y paralela por punto fuera de la recta para construir triángulos semejantes para mostrar que cualquiera fracción puede ser construible.; plano cartesiano (modificado) para hablar de la mostrar donde queda los números $\sqrt{-1}\ y\ 1 + \sqrt{-1}$ en lo plano. Utiliza códigos para indicar una décima periódica.

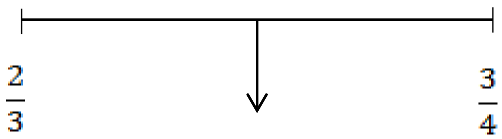
En lo que toca a los elementos y relaciones conceptuales hay una variedad de partes de su largo texto en qué se pude observar dominio.

Define todo lo que para ella es nuevo, lo que pódese suponer que piensa que debe ser nuevo a su lector. Define conjunto cerrado en relación a una operación, conjuntos numerables, densidad (como subtítulo) lo que indica la importancia y significación para Joana."Este conjunto es cerrado en relación a la multiplicación ya a la adición. Esto significa que se sumamos o multiplicamos 2 elementos cualquiera d esto conjunto, lo resultado será un número pertenece a lo conjunto" "Los números que no pueden ser expreso como razón de dos números enteros no son racionales"

En cuanto a proposiciones afirma "Existen infinitos subconjuntos de los naturales, como los de los múltiplos de 2, 3, 4, etc.""El conjunto Z no es limitado a la derecha ni a la izquierda, o sea, no tiene mayor o menor elemento, es cerrado en relación a la edición y la multiplicación y también a la sustracción, y contiene N (N está contenido en Z). El “0” es elemento neutro de la adición y de la sustracción el “1” el elemento neutro de la multiplicación y de la división, es un conjunto numerable ordenado (siempre hay un negativo para 1 negativo)”.“Proposición no es posible determinar el sucesor de un número racional “Todo número racional diferente de cero tiene un elemento inverso” “Todo conjunto finito es numerable”

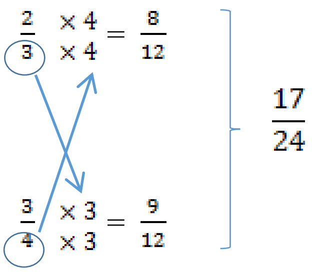
Respecto a Procedimientos describe como generar una fracción generatriz de udécima periódica; muestra como contar los números racionales.

Proposición seguida de argumentación: “Densidad: más concentrado, ocupa más espacio” se cree que busco en otra fuente no matemática un sentido de la palabra, para luego a seguir escribir “Q es denso, Z no es denso pues no hay infinitos enteros entre 2 componente cualquiera” Negocia la interpretación escribiendo directamente al lector “¿Aún no entendió? “Lá vai” (expresión idiomática del portugués que invita a acompañar (en esto caso la argumentación):Q es denso !



¿Cuál fracción queda aquí entre estas dos ?

Observe que la pregunta retórica es una invitación al lector para acompañar el razonamiento que va a ofrecer en seguida.



Encontramos!

En esto registro del razonamiento se omitió algunas pasajes que quedaran implícita para quien conoce el tema, por ejemplo, utiliza los denominadores de las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ para construir fracciones equivalentes de mismo denominador: $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, pero no se puede aceptar como fracción el punto medio $\frac{8{,}5}{12}$ entonces escribe la fracción equivalente multiplicando por 2, lo numerador y el denominador: $\frac{17}{24}$.

Generaliza utilizando la lenguaje algebraica demostrando que entre dos fracciones cualquiera $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, existe su media aritmética $\frac{ad+bc}{2bd}$

Hace uso de otros procesos argumentativos cuando prueba la numerabilidad de Q o muestra por contraejemplo que los números irracionales no son cerrados en relación a las cuatro operaciones, porqué $\sqrt{-1}$ no puede ser un número real (prueba por absurdo).

La REv de Joana exhibe su dominio de procesos y su conocimiento sobre conjuntos numéricos, sus relaciones y propiedades, explicita su dominio de herramientas adquiridas al longo se su trayectoria escolar para responder a cuestiones o a sostener sus proposiciones. Domina la comunicación matemática de varios modos, sea con objetivos de persuasión en qué simula una interacción con el lector en lenguaje coloquial y con uso de elementos editoriales, o cuando quiere demonstrar madurez e hace uso correcto del formalismo matemático, considerado prematuro para su grado de enseñanza. Por todo esto se puede inferir un alto nivel de autonomía en relación a sus saberes matemáticos.

5.5.3. Significación conceptual comparativa sobre Conjuntos

Diferente de REv escrita en años anteriores, cuando los estilos de escrita y comunicación matemática eran muy distintos, se puede perciber muchos elementos comunes en lo que toca al dominio de los conceptos y sus relacciones, dominio y uso de la lenguaje formal, domínio de la lengua materna aplicado al texto matemático y más. En el tema de los conjuntos numéricos las dos alumnas, que son objeto de nuestro estudio, intentan escribir de modo impersonal, aunque utilizan verbos en la 3ª persona del plural para afirmar lo que es colectivo en terminos de dinámica en la aula o de procesos de creación y decubrimiento. El dominio de los hechos y relaciones conceptuales son marcantes en las dos REv, lo que sugiere autonomía. Otra marca comun de los dos textos sobre conjuntos es la poca referencia a las interacciones o a los aspectos emocionales, aunque en el texto de Joana hay pequeños chistes o frases de intención interativa, pero más como un estilo de atrair la atención del lector.

No hay referencia significativas sobre dificuldades, como fue mirardoen los primeros textos cuando tenian 11 años. Los textos sobre conjuntos son una afirmación de sus saberes.

Gabriela hace un barrido intentado dar cuenta del maximo de contenidos, por otro lado Joana exhibe más procesos argumentativos y demuentra mantener su intención didáctica. La utilización de representaciones es equivalente y restrita al contenido, las dos utilizan reprsentación en la recta, matricial, dibujos de contrucción geométrica y diagrama de Venn, pero Gabriela urtiliza representacionbes propias y no formales.

Hay referencia selección de contenidos en los dos textos, por ejemplo Gabriela discurre más sobre las proposiciones que el grupo ha producido sobre los naturales, encuanto Joana profundizo el tema de las décima periódicas; Gabriela se preocupó en explicar el uso de señales separadores (parentesis, corchetes y llaves) Joana no, pero ambas trataran de mostrar que Q es denso y numerable demontrando estos hechos. Se percibe proceso de generalización en el texto de Joana, pero no en el de Gabriela.

De la riqueza de los dos textos de REv sobre conjuntos se puede inferir que Gabriela y Joana comparten los mismos conocimientos matemáticos y lo que difiere en los textos es marca de lo que es singular en cada una de ellas en cuanto adolescentes que están en proceso de crecimiento y desarrollo cognitivo.

5.6. Análisis conceptual de la actividad final.

Esta última tarea tiene una naturaleza diferente a las anteriores, dado que implica la construcción de un texto reflexivo y valorativo de un proceso desarrollado a lo largo de cuatro años. En esta tarea no hay un "guión" específico para su elaboración, cada estudiante puede estructurarlo de una manera diferente y profundizar o no en determinados aspectos. A efectos de la investigación consideramos que es un buen instrumento, que nos ha permitido reconocer, aquello que realmente ha sido apropiado por los estudiantes a lo largo de este periodo, tanto en lo referido a las formas de hacer matemáticas, así como a las nociones que han sido más relevantes para ellos, aquellas que han quedado su memoria y que ante un desafío como es éste ponen enunciados de manera especial.

Este carácter abierto, creativo y de resumen de la tarea, tiene el potencial arriba mencionado, pero a la vez presenta unas limitaciones, ya que en ella no podemos ver directamente aspectos del proceso de construcción de significado de ciertas nociones matemáticas, lo cual si se reconoció con las tareas anteriores, en las cuales analizamos lo ocurrido en un conjunto de clases, en donde pudimos a partir de los diálogos descritos reconocer el proceso de construcción de una idea matemática para un individuo o para el colectivo. Consideramos por tanto que este tipo de textos requieren una mirada diferente.

5.6.1. Análisis de tarea final en el relato de 4 años de Joana

En cada uno de los textos que analizamos hemos identificado evidencias relacionadas con diferentes aspectos (problemas clave; objetos matemáticos, representaciones, establecimiento de relaciones conceptuales y procedimentales, definiciones, argumentos y razonamiento heurístico) y las hemos organizado en tablas, junto con las primeras interpretaciones de las mismas, posteriormente hemos realizado un análisis global. A continuación se muestran dichos análisis y las tablas asociadas a cada uno de ellos, para los dos casos seleccionados. Al mostrar estas evidencias, tratamos de reconocer como se establece un contrato de negociación de significados diferente al habitual.

Un primer aspecto que se puede reconocer en la narración de Joana (anexo 16) es que enuncia de manera explícita *cuatro problemas* que parece que considera claves en el proceso desarrollado en su clase de matemáticas a lo largo del periodo de tiempo relatado. Todos ellos refieren a situaciones que involucran *procesos de generalización*, idea clave en la actividad matemática. No se limita a copiar sólo los enunciados, sino que *integra* los problemas en su contexto de aula, en el momento que se trabajaron y *relacionado con otros problemas, conceptos o procedimientos*.

Se reconoce en su escrito que ella es consciente que en su clase de matemáticas una *forma de hacer era el proponer y resolver problemas*, y recuerda que ella misma *inventó* alguno. En algún caso, el enunciado está tan integrado a la historia de aula, que dice "Observando figuras, clasificamos el grado de convexidad" que nosotros interpretamos como un enunciado implícito que podría ser formulado como "si llamamos a una figura convexa que no tiene concavidades (grado de no convexidad cero), podemos considerar figuras asociadas a diferentes grados de concavidad". En ese ejemplo, se hace evidente que la situación de clase no se generó porque el profesor propuso un problema, sino que surgió realmente del grupo, mediante *descubrimiento*. E incluso no estaba previsto por el profesor. Hay una frase de la alumna que dice "empezamos a trabajar con las fórmulas" o "aprendimos casos de factorización" que pone en evidencia el *privilegio de la idea* sobre los enunciados de problemas que suelen hacerse, y realmente se hicieron. En algunos de los problemas se hace *alusión a aspectos históricos*, por ejemplo, cuando la estudiante habla de números figurados y refiere a la manera como hacían los griegos. Y es interesante que en un caso se explica el *proceso de descubrimiento* de números cuadrados primero, y cómo surge la pregunta de hablar de números cuadrados. En uno de los enunciados, se describe el problema de Gauss de la suma de números consecutivos, y se explica en el contexto de cómo Gauss siendo niño lo resolvió y se hacen comentarios de carácter emocional, ya que la alumna *se siente identificada* con la situación.

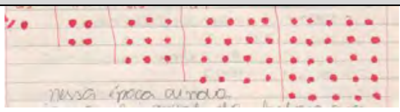
Aspecto	Evidencias	Interpretaciones
Problemas clave (como los que hacen un aporte distintivo) **Reconocimiento de tipos de problema**	 "Buscar el enésimo número triangular y el enésimo número cuadrado" (Grado 5º) "Observando figuras, clasificamos el grado de convexidad" "Estuvimos jugando a inventar problemas. Yo inventé este: Toma un número, multiplícalo por 6, divide por 3, súmale 6, réstale 3, réstale 3" (Grado 6º) "…Su profesor pidió a un niño "desordenado" que sumase los números de 1 a 100, porque así estaría entretenido…Tres minutos después el niño respondió: 5050" (Grado 7º)	Alude fundamentalmente a problemas de generalización. Da relevancia a los problemas con aspectos históricos

Figura 5.7. Problemas clave identificados por Joana en la tarea final

Objetos matemáticos evidenciados.

Respecto a los objetos matemáticos evocados, un aspecto que consideramos importante es el recorrido que puede evidenciarse por diferentes pensamientos matemáticos, en el que no se hace una simple descripción temporizada, sino que se alude tanto a conceptos como procedimientos. Otro aspecto relevante es que en la enunciación de dichos objetos se establecen relaciones con su representación. Esto junto con la lectura completa del texto consideramos que muestra *trazos de intencionalidad* didáctica en el discurso. Por ejemplo, para hablar de grado de convexidad, muestra un dibujo de grado cero, y uno de grado uno. Para hablar de los números triangulares, muestra los casos n=1, n=2, n=3, n=4. Es decir la representación ilustra ejemplos distinguibles como proceso de clasificación.

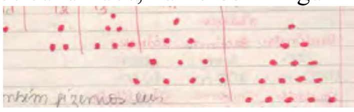
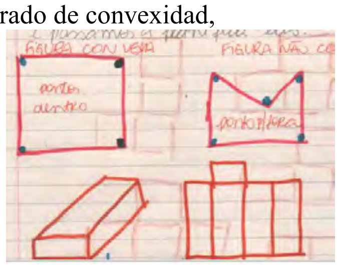
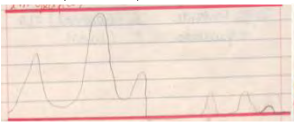
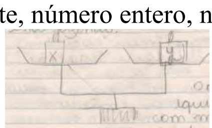
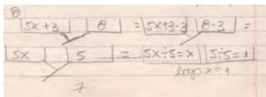
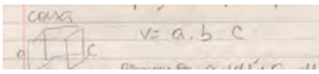
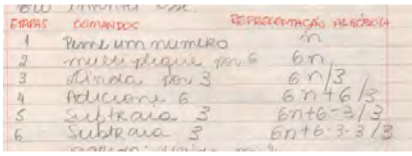
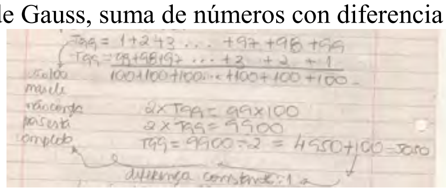
Aspecto	Evidencias	Interpretaciones
Objetos matemáticos evocados	Tetraminos, radicación, algoritmos indo-arábigos, sistema de numeración, sistema decimal, símbolos numéricos, cálculo mental, números cuadrados, números triangulares,  fracción, pies y pulgadas, sistema de medidas, múltiplos y submúltiplos, grado de convexidad,  polígonos, pentaminós, Tetraminos, potencia y factorización, descomposición (en factores), mínimos divisores, media aritmética, moda,   desviación media, velocidad, densidad demográfica, renta per cápita, densidad de un cuerpo, escala, porcentaje, razón constante, número entero, número negativo, ecuación,   volumen,  conjuntos numéricos, incógnitas, expresiones algebraicas, comandos  método de Gauss, suma de números con diferencia constante,  áreas de figuras planas, Casos de factorización (Factor común, agrupamiento, trinomio cuadrado perfecto, diferencia de cuadrados), productos notables, probabilidad	Hace un recorrido por diferentes pensamientos matemáticos Alude tanto a procedimientos, como a conceptos. Utiliza representaciones variadas para presentar ideas, conceptos, procedimeintos y procesos.

Figura 5.8.. Objetos matemáticos evocados por Joana en la tarea final

Sobre las representaciones.

Aunque se han separado en el análisis las representaciones, identificamos un uso seleccionado de nombres acompañados de las representaciones correspondientes, que no se han copiado del cuaderno simplemente, sino que se resumen indicando procesos de clasificación, ejemplificación, ostensivos asociados, etc. El texto de Joana es especialmente rico en el uso de representaciones. A lo largo del texto relaciona diferentes representaciones que refieren al valor numérico, al número como cantidad, a la fracción como la relación: parte – todo, y como razón.

Joana establece relaciones conceptuales que pueden hacer ver que también las valora, y considera que hacen parte del quehacer matemático. Las conexiones verbales que hace usan no sólo las relaciones clasificatorias que tradicionalmente se describen en forma de dos puntos y elenco de elementos, sino también relaciones que expresan acciones realizadas. Se muestra una relación entre observación y clasificación. Se vincula la ejemplificación que muestra ideas didácticas de difícil adquisición como el ejemplo de las magnitudes que se definen como proporciones. Así, con frases como "Medir es comparar. Para eso se usa pies hasta pulgadas y también kilómetro, hectómetro, decámetro…" se indica una relación entre el concepto de medir y las unidades de medida.

Aspecto	**Evidencias**	**Interpretaciones**
Establecimiento de relaciones conceptuales	"Vimos el sistema decimal y aprendimos símbolos numéricos de los egipcios, babilonios, mayas, y romanos" "Con fracciones vimos n/d ….y también trabajamos con sistemas de medidas" "Medir es comparar. Para eso se usa pies hasta pulgadas y también kilómetro, hectómetro, decámetro…" "Observando figuras clasificamos el grado de convexidad" "También estudiamos razones: velocidad ($V = \frac{d}{t}$); densidad demográfica (d= $\frac{n}{a}$); renda percápita ($R = \frac{PNB}{n}$), densidad de un cuerpo $(D = \frac{m}{v})$, escala, porcentaje, razón constante en el cuadrado $\frac{d}{l} = 1{,}4$" Trabajamos cálculo mental con sistemas de medidas	Se establecen conexiones entre diferentes sistemas de numeración Se establecen relaciones entre las fracciones y los sistemas de medida Se establecen conexiones entre diferentes unidades de medida Se reconoce la observación/visualización como un proceso fundamental para determinar un atributo de las figuras Se asocia a una noción su uso en diferentes contextos Los sistemas eliminan alguarismos

Figura 5.9.   Relaciones conceptuales percibidas en el texto de Joana

Reconocimiento de relaciones procedimentales.

Pero también se reconocen relaciones procedimentales, en algunas descripciones. Así, Joana identifica que un tipo de representación de los números nos puede ayudar en el cálculo mental, que las leyes generales nos ayudan a calcular un valor determinado, que podemos asociar a ciertos prefijos en matemáticas reglas implícitas como el valor de cantidad. Lo que llama "formas de los números ", es una clara alusión a los significados.

Aspecto	Evidencias (habla de …)	Interpretaciones
Relaciones procedimentales evocadas	"Trabajamos el cálculo mental y vimos formas de los números" "Hicimos leyes generales para calcular el enésimo número triangular o el enésimo número cuadrado" "Número de lados / Nombre del polígono" "Factorización, descomposición, quebrar número" "Resolvíamos las ecuaciones chutando valores para las incógnitas, haciendo tablas" "Profundizamos en medidas de áreas de figuras y comenzamos a trabajar con fórmulas" "Método de Gauss…su profesor le pidió que sumas de los números de 1 a 100"	Un tipo de representación de los números nos puede ayudar en el cálculo mental Las leyes generales nos ayudan a calcular un valor determinado "Se establece la relación entre palabra y cantidad (3 –tri; 4 –cuadri; 5 – Penta; 6 – hexa, etc.) Se reconocen relaciones cuantitativas en tablas que permiten solucionar ecuaciones Se asocia el cálculo de áreas al uso de fórmulas Se reconoce la potencialidad del método de Gauss, para simplificar problemas que parecen que requieren de mayor cantidad de operaciones y de tiempo para su solución

Figura 5.10 Relaciones procedimentales en el texto de Joana

Así, por ejemplo, se observa en su texto, que determinado tipo de contexto, nos permite representar un conjunto numérico y construir un significado, ya sea de cantidad, medida oy en ellos el reconocimiento de propiedades como patrones. Que la representación gráfica nos ayuda a reconocer características de las figuras; que las representaciones nos ayudan a ver transformaciones 3D – 2D.

Aspecto	Evidencias (habla de …)	Interpretaciones
Representaciones usadas **Significados asociados a las ideas matemáticas**	Aprendimos símbolos numéricos de los egipcios, romanos, babilonios, mayas; Configuraciones puntuales de los números ; Un rompecabezas: el tangram ; símbolos unidades de medida; ejemplos figuras dibujadas Nombres de figuras; tetraminós, pentominos "Es imposible estudiar promedio sin gráficos" Ejemplo de representación de fracciones y sus nombres; de unidades de medidas y sus nombres. "Contextos que surgen para representar y significar los números menores a cero: saldos bancarios, temperaturas, elevadores, altitudes, profundidades, fechas" "Vimos balanzas que me ayudaron mucho a reproducir ecuaciones" Trabajamos con fórmulas: Área del triángulo = $\frac{B.H}{2}$ Área trapecio = $\frac{B+b.h}{2}$, Área del rectángulo= L.L Expresión verbal y algebraica de un problema inventado por ella Utiliza con naturalidad notación indexada del tipo T_n para los números triangulares y Q_n para los cuadrados.	Utilización de dibujos y esquemas, con intención didáctica y para garantizar que la comunicación sea efectiva Representaciones multiplas de nos números antiguos. En forma de tabla. Utiliza variedad de representaciones para una misma idea, con dibujos e representación algebraica en el casod de n]umeros figurados

Figura 5.11. Representaciones en el texto de Joana

Que en un diagrama de barras, la barra más alta indica la moda y sumando las áreas de Se establece la relación entre palabra y cantidad (3 –tri; 4 –cuadri; 5 – Penta; 6 – hexa, etc). Se reconocen relaciones cuantitativas en tablas que permiten solucionar ecuaciones; se asocia el cálculo de áreas al uso de fórmulas y se reconoce la potencialidad del método de Gauss, para simplificar problemas que parecen que requieren de mayor cantidad de operaciones y de tiempo para su solución. Observamos que Joana alude a normas epistémicas implícitas de un ambiente que cuida de estos aspectos. La originalidad en la forma de expresar los objetos matemáticos, da muestra de la libertad en la que se mueve no sólo la actividad en particular, sino también todo el proceso. La estudiante se siente libre en esa formulación, y legitimada en hacer dichas afirmaciones. las barras se puede obtener la muestra. Que el equilibrio es una buena metáfora para el trabajo de las ecuaciones, aunque no se diga explícitamente que alude a las reglas de la igualdad. El hecho de que pueden evidenciar representaciones de diferente tipo, algebraicas, gráficas, expresión verbal, dibujos, lo cual es fundamental en la construcción de significados de las ideas matemáticas. Y como dichas representaciones han sido construidas colectivamente.

Observamos un uso simple de definiciones, que se valorizan a lo largo del escrito. En algunos casos, se hace un uso personal ("mi definición"). La mayoría de definiciones aludidas hacen referencia a conceptos estadísticos y de probabilidad. Nuestra hipótesis es que en este momento del texto, Joana intenta hablar con una audiencia (con intención didáctica) que usa estos términos de forma confusa, y quizás valora porque se discutió eso en el aula. Pensamos también que Joana reconoce la potencia de ciertas definiciones, porque involucran más aspectos o porque logran evocar una generalización.

Definiciones y construcciones de propiedades.

Lo provisorio de la estabilidad de una definición se puede percibir cuando presenta tres definiciones para la idea de media, agregándolas a la suya. Da ejemplos, con cita de la definición de un colega "O Diego fez a seguinte proposição: a média aritmética de 3 números é obtida somando-os e dividindo o resultado por 3".

Refuerza con una proposición más general del mismo colega, sugiriendo que ha hecho un registro de la discusión ocurrida 3 años antes "*Propo mais forte Diego: Dados n números a média aritmética é a soma desses números dividido por n*".

Y explica lo que es "Propo más fuerte", en un claro indício de que dialoga con el lector de su texto: "*Uma propo é mais forte que a outra quando ela é mais igual e engloba a proposição original*". Sigue dando ejemplos de otros colegas, con un ejemplo genérico do Gui para cinco valores. En estas afirmaciones se demuestra que asume generalizaciones colectivas y no sólo individuales, y muestra construcción colectiva de significados.

Aspecto	Evidencias (habla de …) en orden cronológico	Interpretaciones
Definiciones ¿Cómo son ?, ¿Qué sentido le da?, ¿qué valor ..?	"*Medir* es comparar" *Promedio: "(*mi definición): es la cantidad no exacta, pero que es más próxima… Diego hace la siguiente proposición: La media aritmética de 3 números, es obtenida sumándolos y dividiendo el resultado por 3. Proposición más fuerte de Diego: Dados n números a media aritmética es la suma de esos números dividido por n" "Una *proposición* es más fuerte que la otra cuando es más, igual y engloba la proposición original" "*Moda* es el valor más frecuente" "*Desviación media* es el valor de cuanto falta para llegar al promedio" "*Capacidad*: espacio que el objeto dispone para almacenar" "*Volumen*: Espacio ocupado por cualquier cosa" "*Probabilidad*: Cualidad o carácter de prueba del motivo o indicio que deja presumir la verdad o la posibilidad de un hecho"	La mayoría de definiciones aludidas hacen referencia a conceptos estadísticos y de probabilidad, medidas. Define más que conceptos, en el caso de las proposiciones, especifica lo que es "proposición más fuerte" Se reconoce la potencia de ciertas definiciones, porque involucran más aspectos o porque logran generalizar En el lenguaje utilizado se reconoce el rasgo de construcción personal de dichas definiciones Se asocia a la idea de medir un proceso fundamental, la comparación

Figura 5.12. Definiciones en el texto de Joana

Sobre los argumentos evidenciados.

En cuanto a los argumentos evocados, hay muchos que podríamos pensar que son implícitos, pero hay tres evidentes: dos ligados a la generalización y el álgebra, otro del ámbito estadístico para justificar que el gráfico ayuda en la interpretación reconociendo características que los parámetros como la media aritmética no llegan a definir.

Aspecto	Evidencias (habla de …) en orden cronológico	Interpretaciones
Argumentos matemáticos y razonamiento (heurístico)	"Estuvimos jugando a inventar problemas. Yo inventé este: Piensa un número ---- **n** multiplícalo por 6 ------ **6n** divide por 3 -------------- **6n/3** súmale 6 ----------------- **(6n +6) / 3** réstale 3 ------------------ **(6n +6 -3) /3** réstale 3 ------------------ **(6n + 6 -3-3) / 3n** "Es imposible estudiar promedio sin los gráficos…Promedio estatura 6ºB" "Hicimos leyes generales para calcular los números triangulares y cuadrados" Calcula $T_{99} = 1 + 2 + 3 \dots + 97 + 98 + 99$ y $T_{99} = 99+ 98 + 97 \dots + 3 + 2 + 1$, $2x\ T_{99} = 4950$ concluyendo que $T_{100} = 4950 + 100 = 5050$	Al proponer un problema, se identifican sus partes y se expresa cada una de ellas en lenguaje algebraico. Además se consideran los pasos anteriores. La realización de un gráfico nos ayuda a la interpretación y solución de situaciones. Para llegar a generalizaciones es importante considerar y comparar varios casos y lo que cambia de uno a otro La descripción que presenta para ejemplificar la suma de Gauss es diferente de lo tradicional la demostración es detallada con intención didáctica al explicar porque calcula primero la suma de 1 a 99, e que la diferencia entre cada parcela de la soma tiene una regularidad. para quedar sencillo la soma $(1+ 99) + (2 + 98) + .. = 2x\ T_{99} = 99x100$

Figura 5.13. Argumentos matemáticos en el texto de Joana.

En cuanto a la generalización, se reconoce la importancia de la comparación entre casos particulares. Viendo el conjunto de los comentarios realizados, pareciera que se identifica que una serie de casos lleva a una generalización, pero no la justifica completamente. Con ello, parece que está reconociendo el valor del razonamiento heurístico en la clase.

Además de lo que descubrimos como construcción matemática en el texto de Joana, hay que decir que se reconocen trazos de la cultura de clase. Sorprende sin embargo que Joana usa un estilo comunicativo en que establece una ruptura entre un pasado en el que aprendió cosas interesantes, pero ahora cambió a una posición en que se enfrenta con las matemáticas de forma más abierta. Joana inició su texto dedicando 4 páginas hablando de las matemáticas de su época pasada, no entra en un discurso formal como se esperaría habitualmente sino que usa un lenguaje coloquial. Realmente quiere resaltar ese momento de cambio.

> " … fue cuando descubrí que las matemáticas estaban en todos los lugares y momentos de nuestra vida, … la matemática está presente incluso en mi rostro! Quien hace clases de dibujo aprende que entre un ojo y otro el espacio es del mismo tamaño de otro ojo, la nariz es del tamaño de dos ojos, y así… "(JO, pg. 4, línea 31-33 y pg. 5, línea 1-3)
> Al llegar a 5º año, llegó un profesor nuevo. Tenía bigote. Comenzó enseñándonos los símbolos indo-arábigos, egipcios, … "
> (Jo; pg. 5, línea 10- 13).

Y al final del texto, habla de nuevo con libertad del cambio acontecido, usando incluso con ironía el lenguaje matemático.

> "Confieso que tenía miedo, y no me gustaba la matemática, pero ahora… (puntos suspensivos de la propia estudiante) pues no puedo decir que estoy loca por la matemática pero estoy segura que mejoré un 200%"
> (Jo; pg. 17; línea 7-11)

El balance del último año de estudio no hace referencia a contenidos, es más filosófico y reflexivo acerca de cómo evoluciono sus conocimientos, sobre la belleza del razonamiento matemático, la creatividad y las relaciones de las matemáticas con las otras áreas del conocimiento.

En esta descripción, han podido verse características de un texto en el que se han negociado significados a lo largo de todo el texto. Hay evidencias más que suficientes para ver que se ha construido sólo personalmente los significados sino que se han construido socialmente. Se reconocen elementos cognitivos de buen nivel, en todos los aspectos de una configuración epistémica, aunque se evidencian algunas desconexiones, sobre las estructuras matemáticas, que son difíciles de encontrar habitualmente. Podemos afirmar que se da una buena representatividad del conocimiento matemático.

5.6.2. Análisis de tarea final en el relato de 4 años de Gabriela

El texto de Gabriela (completo en anexo 13), está lleno de información respecto los contenidos matemáticos estudiados, en muchas partes hace un recorrido que muestra una cadena de contenido que se conecta con otro, explicitando las conexiones expresas por nombramiento de conceptos, descripción de procedimientos, relaciones, propiedades, problemas que generan ideas y en algunos casos citas de proposiciones producidas por los alumnos.

Para cada año (grado de enseñanza) describe al menos un proceso de resolución de problema (de pentominos, procedimiento (resolución de ecuaciones con balanzas), deducción de una fórmula (ley general de los frisos) o razonamiento lógico.

Sobre los problemas.

En relación a la memoria de situaciones problema alude a problemas muy diversos, no solo por la gran variedad de los objetos matemáticos que involucran, sino por los procesos que se requieren para su desarrollo.

Cada uno de los problemas resaltados implica formas de razonamiento y niveles de complejidad diferentes. Otro aspecto clave que se puede evidenciar en los problemas enunciados por Gabriela, es el tipo de preguntas que se propone en cada uno de ellos.

Aspecto	Evidencias	Interpretaciones
Problemas clave (como los que hacen un aporte distintivo) **Reconocimiento de tipos de problema**	"Formar con cada pentominos rectángulos de dimensiones 4 x 5" "¿Es posible cubrir un tablero de ajedrez usando todos los pentominos?" "Usando todos los pentominos, cercar el espacio (hueco) de mayor área" "Con un pentomino de la silueta resultante de un movimiento (translación, rotación, reflexión)" "Relacionamos el teorema de Pitágoras con problemas que involucraban principalmente diagonales tanto en figuras 2D como 3D" (incluir dibujos)" Búsqueda de una ley general para un friso de cerrillas "Decidir si una conclusión es verdadera, partiendo de dos premisas" "¿Qué es una taxi circunferencia?"	Alude a problemas muy diversos, no solo por la gran variedad de los objetos matemáticos que involucran, sino por los procesos que se requieren para su desarrollo. Cada uno de los problemas resaltados implica formas de razonamiento y niveles de complejidad diferentes En la proposición de problemas sobre secuencia figuradas, utiliza una variedad de recursos explicativos y representaciones para sostener su prueba

Figura 5.14 problemas en el texto de 4 años de Gabriela

Utiliza enunciados de problemas para comunicarse mejor y conseguir estructurar su texto, en clara intención didáctica con una audiencia genérica de los posibles lectores de su texto. En la proposición de problemas sobre secuencias figuradas, utiliza una variedad de recursos explicativos y representaciones para sostener su prueba. Otro aspecto clave que se puede evidenciar en los problemas enunciados por Gabriela, es el tipo de preguntas que se propone en cada uno de ellos. La selección de enunciados es especialmente interesante, evocando los que dieron lugar a conceptos importantes.

Sobre los objetos matemáticos.

La estudiante hace un gran recorrido por los diferentes pensamientos matemáticos (numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional) que componen sus experiencias matemática al largo de 4 años. Su recorrido es muy detallado, pero con fuertes indicios de producir un texto con cohesión en que la preocupación es la comunicabilidad y la comprensión del lector. Alude tanto a procedimientos como a conceptos y a diversas relaciones matemáticas y en algunos casos extra matemáticas. En los diversos momentos del escrito explicita la conexión entre conceptos y procedimientos. Eso se evidencia a continuación.

Es decir, un tema de geometría en relación con otro tema de geometría, pero en algunos casos, hay relación entre campos distintos, como en el caso de problemas con pentominos cuya respuesta se basa en conocimientos sobre múltiplos, o en los estudios de propiedades aritméticas para resolver ecuaciones algebraicas.

Aspecto	Evidencias	Interpretaciones
Objetos matemáticos evocados	Tetraminos, hexaminós, pentominos, simetría, noción de área, rectángulos, múltiplo, figuras asimétricas, rotación, translación, repetición, reflexión, planificación del cubo, congruencia de lados y de ángulos, fracciones, descomposición de figuras, patrones, números, conteo, sistemas de numeración (Maya, egipcio, babilónico, indo-arábigo), potencias, cuadrados mágicos, mínimo común múltiplo, máximo común divisor, media aritmética, moda, estadística, razones, proporción, regla de tres, impuestos (simples y compuestos), porcentajes, números negativos, conjuntos numéricos, relaciones mayor y menor que, ecuaciones, reglas de signos, expresiones equivalentes, multiplicación, división y potenciación de fracciones, tablas, gráficos y “pizzas”, ángulos, tipos, medición y propiedades, polígonos, circunferencia, área, perímetro, radio, diámetro, pi, cilindros, relaciones entre puntos y rectas, curvas, arcos, paralelogramos, diagonales, ejes de simetría, frisos, teorema de Pitágoras, secuencias ordenadas, sistemas de ecuaciones, reglas, métodos, factorización, probabilidades, finitos, infinitos, subconjuntos, raíz cuadrada, recta numérica, método de Al- Khwarizmi, funciones, primer grado, segundo grado, parábola, Matemática comercial y financiera, rendimiento, capital inicial, alícuota, lógica, diagrama de Carrol, plano, geometría del taxista, ..	Respecto a los objetos matemáticos, hace un gran recorrido por los diferentes pensamientos matemáticos (numérico, métrico, espacial, aleatorio y variacional) Alude tanto a procedimientos como a conceptos y a diversas relaciones. Explicita la conexión entre conceptos y procedimientos.

Figura 5.15 Objeto matemáticos en el del texto de 4 años de Gabriela

Sobre relaciones conceptuales y procedimentales.

Las relaciones conceptuales, en general, son presentadas por bloques conceptuales del mismo tipo que se realizaron en momentos diferentes.

Aspecto	Evidencias	Interpretaciones
Establecimiento de relaciones conceptuales	"Junto con la idea de simetría, viene también rotación, translación e reflexión" ".. profundizamos los hexaminós, pues varios de ellos son planificaciones de cubos .." " .... un gráfico que relacionaba las estaturas de los alumnos, descubrimos la media y encontramos la moda" " .. aprendimos propiedades sobre ángulos internos de polígonos regulares" "Relacionamos el teorema (de Pitágoras) a problemas que involucran principalmente diagonales, no solo de figuras bidimensionales, sino también cubos, paralelepípedos, etc." "trabajamos con potenciación que va ser importante para la resolución de ecuaciones de 2º grado"	Relaciones intraconceptuales, en el campo de la geometría Relaciones estadísticas con representación Expresa el proceso de pasaje del bidimensional al tridimensional, que sugiere aunque implícitamente los objetos geométricos de cada dimensión y reconocimiento de la generalidad de una herramienta (el teorema) que sirve para resolver problemas en los dos espacios. Relación entre objetos y propiedades aritméticas y algebraicas

Figura 5.16. Relaciones conceptuales en el texto de 4 años de Gabriela

Los conceptos están bien explicados, demostrando apropiación y dominio de lenguaje formal

Aspecto	Evidencias (habla de …)	Interpretaciones
Relaciones procedimentales evocadas	"aprendimos a .. calcular con negativos con la calculadora (de bolsillo)" " .... construimos un gráfico que relacionaba las estaturas de los alumnos, descubrimos la media y encontramos la moda" "El trabajo de geometría mucho relacionado con ángulos. Tipos de ángulos, como medirlos, sus propiedades, proposiciones, fue de mucha importancia para trabajos realizados en el ordenador, utilizando LogoWriter" "Después resolvimos problemas qué para su resolución, es preciso hacer una tabla qué llevaba a ecuaciones de 1º o 2º grado" "Aprendimos a construir números sobre la recta" "Desarrollamos un proyecto de construcción y el presupuesto de una piscina cilíndrica teniendo en cuenta el material necesario, la cantidad de agua, etc. De todos modos, era un proyecto"	Referencia a uso de instrumentos de cálculo para generar y operar con números negativos. Relación entre conceptos de estadística con sus representaciones Alusión a múltiples relaciones angulares en el plano, en polígonos, en la circunferencia, etc. Alusión al proceso de construcción de tablas y ecuacionamiento para resolver problemas Referencia a números construibles en una recta numérica Referencia a procedimientos de construcción con regla y compás de números racionales y algunos radicales sobre la recta. Utilización de herramientas matemáticas (proporciones, medidas, etc.) para hacer un proyecto de naturaleza multiconceptual e interdisciplinar

Figura 5.17 Relaciones procedimentales en el texto de 4 años de Gabriela

Gabriela hace referencia a muchas relaciones procedimentales, en general siempre relacionado a conceptos y problemas. Procura explicitar relaciones de proceso, por ejemplo, como la construcción del gráfico estadístico permite detectar la moda.

Sobre representaciones.

En diferentes momentos alude a la palabra representaciones, relacionándola con diferentes nociones matemáticas. Expresa con cuidado los dibujos y representaciones, como que orientando la comprensión del lector, las relaciones que quiere expresar. Utiliza adecuadamente terminología específica de cada campo conceptual.

Muestra dominio de lenguaje matemática para comunicarse con una audiencia genérica, en algunos casos controlando la comprensión del lector por la redundancia como recurso de comunicación (poliminos, friso de cerrillas).

Aspecto	**Evidencias (habla de …) en orden cronológico**	**Interpretaciones**
Representaciones usadas y Significados asociados a las ideas matemáticas	Dibujos de los tetraminos, hexaminos y pentominos, con destaque a composición/descomposición de rectángulos y siluetas Hexamino plegable para generar un cubo Cuadrado mágico con indicación de la suma mágica. Después de esto estudio, con polígonos, tesselación, pavimentos,. Por coincidencia, en este mismo año, tenía una exposición del artista holandés M. C. Escher (el tema vuelve con más profundidad en el próximo año de grado 7º) Dibujos de balanza de platillo para resolver ecuaciones “.. la balanza fue importante para el trabajo posterior con ecuaciones, así como para la regla de señales” Esquema geométrico para mostrar propiedad algebraica (distributiva) Dibujos de figuras tridimensionales con diagonales internas y representación de la altura Dibujos sobre secuencias figuradas (números triangulares y hexagonales, escaleras con cerrillas) Recta numérica Esquemas de plano taxigeometrico	En diferentes momentos alude a la palabra representaciones, relacionándola con diferentes nociones matemáticas Produce y agrega al trabajo un hexamino bidimensional que se transforma en un cubo tridimensional Hace dibujo de balanza como metáfora para la comprensión de las operaciones algebraicas que se hacen para resolver ecuaciones Utiliza representaciones con esquemas y dibujos para explicitar relaciones algebraicas y elementos geométricos

Figura 5.18 Representaciones y significados en el texto de 4 años de Gabriela

Sobre las definiciones.

El estilo comunicativo elegido por Gabriela hace poco uso de definiciones, las considera implícitas, por la informalidad en que utiliza la mayoría de los términos matemáticos. Con ello, queremos resaltar que no es que rehuya el nombramiento de los conceptos, sino que les da un sentido de coloquialidad.

Aspecto	Evidencias (habla de …) en orden cronológico	Interpretaciones
Definiciones **¿Cómo son ?, ¿Qué sentido le da?, ¿qué valor ..?**	Tetraminos, pentominos y hexaminos Explica lo que es un cuadrado mágico ostensivamente. Describe un friso de cerrillas para proveer de sentido lo que es “regularidad” y ley general “Después pasamos a resolver problemas que para su resolución, era necesario hacer una tabla, esa tabla conducía a una ecuación de primer o segundo grado” “Imagine lo que es una taxicircunferencia? En el plan normal circunferencia es el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia de un centro C. En la taxigeometria también es así, pero esto ocurre de modo diferente”	Los poliminos so definiendo nominalmente explicitando sus características específicas Define los cuadrados mágicos por ostensión de la consigna del problema y la exhibición de la solución particular. Hace referencia a la cadena de objetos (tabla) en una etapa que se hacen herramientas en otra (para resolver ecuaciones). En el tema de las regularidades para descubrir una ley general, “define” por descripción del proceso. Define taxicircunferencia por extensión y analogía al concepto conocido de circunferencia en el plan euclidiano, pero llama la atención para lo que es distinto.

Figura 5.19 Las definiciones en el texto de 4 años de Gabriela

Las definiciones aludidas hacen referencia objetos no tan populares como los poliminós o una taxicircunferencia, lo que muestra una preocupación en negociar significados con lectores ajenos a su cultura matemática. En el lenguaje utilizado se reconoce el rasgo de construcción personal y apropiación de los conceptos.

Procesos argumentativos. Ocurren aunque no son tan frecuentes, pero se percibe que Gabriela ofrece un ejemplo por grado de enseñanza, como muestras de cada etapa de su desarrollo.

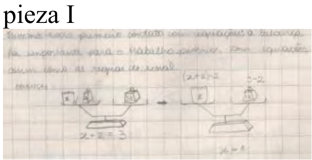
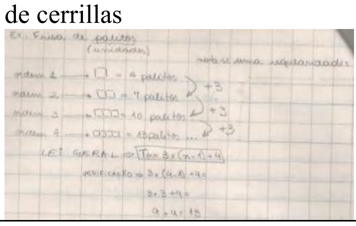
Aspecto	Evidencias (habla de …) en orden cronológico	Interpretaciones
Argumentos matemáticos y razonamiento **(heurístico)**	En el problema de formar un rectángulo 4x5 con pentominós, argumenta a partir de la solución de los problema de componer un rectángulo 3x5, por el acrecimos de la pieza I  “.. aprendimos a determinar la media aritmética, la regla fue poco a poco con las proposiciones (de los alumnos) que se han ido mejorando y conseguir más general” Determinación de la ley general de un friso de cerrillas 	Concluye que hay un mínimo de 17 construcciones distintas del rectángulo 4x5 con el pentominós Y, una vez que ha encontrado 17 soluciones del problema 3x5. Explica procedimientos de resolución de ecuaciones de 1º grado, por analogía con la estructura y el equilibrio de una balanza de platillos. Expresa la aceptación de reglas o métodos por medio de la dinámica de enunciar proposiciones en el aula En la proposición de problemas sobre secuencia figuradas, utiliza una variedad de recursos explicativos y representaciones para sostener su prueba Observa padrones, en secuencias figuradas, generaliza, hipotetiza y verifica para casos particulares.

Figura 5.20 Los argumentos en el texto de 4 años de Gabriela

Utiliza procesos de naturaleza argumentativa muy distintos uno del otro (rectángulo 4x5 (5º), resolución de ecuaciones con balanzas (6º), ley general de un friso de cerrillas (7º), la taxicircunferencia (8º)).

5.6.3. Análisis comparativo de los textos en la actividad final

Aparte la diferencia de estilo de las dos alumnas, sea en relación a su intención comunicativa, el estilo "literario" y el modo personal en que cada una gestiona sus memorias, registros e conocimientos se puede hacer un rol de objeto matemáticos evocados con elementos comunes y otros muy distintos en los textos de Joana e Gabriela. De los objetos comunes se destaca: los pentominós (tetraminós y hexaminós); los sistema de numeración antiguos, el tangram; la factorización de número naturales; los números triangulares y cuadrados; la estadística con las medias y la experiencia de construir un gráfico de estaturas cuando estudiaban en el 6º grado; los números negativos, sus reglas y usos; la resolución de ecuaciones con balanzas; los problemas algebraicos de adivinación; las reglas algebraicas; la ecuación de 2º grado; probabilidad, los conjuntos numéricos. Otros temas y objetos estudiados por las dos alumnas, fueran elegidos y citados por una de ellas, sea por la alta significatividad que se percibe en el texto, lo que puede haber sido responsable por la permanencia en la memoria de cada una de ellas.

Los textos de Joana y Gabriela son legítimos, y llenos de significados, es en las palabras de Lins (2012) "plausible, porque hace sentido, es aceptable en este contexto", el contexto de la producción de un texto para un interlocutor genérico e cargados de justificación personal.

El estilo de Joana, organiza el texto con proposiciones cada vez más fuertes, asumiendo el proceso de aprendizaje y se expresando siempre en la 1ª persona del plural (trabajamos, hacíamos, hicimos, estudiamos, empezamos, descubrimos, vimos, inventamos, revimos, aprendimos, etc.), En la narración de Joana, si bien sólo se enuncian de manera explícita, alude en diferentes momentos a tareas matemáticas y su relación con la construcción de diferentes nociones matemáticas. Apropiación de una cultura acerca de la matemática y las operaciones (quinta operación—radicación) tal como fue nombardo por el matemático português Bento de Jesus Caraça en 1941.

Utiliza aun palabras que expresan procesos de conquista como "incorporar, profundizar, etc.", en su habla final expresa allá de sus sentimientos, también un proceso consciente de adquisición-construcción de conocimientos matemáticos -en una líneas más "filosófica" utilizando palabras y frases como: "estábamos más maduros y miramos para atrás para recordamos y primorearnos nuestro conocimiento", "crecemos y todo lo que aprendimos ..", ".. la matemática no es una bestia de siete cabezas, el razonamiento matemático es bellísimo y se utiliza para que nosotros podamos entender el mundo donde vivimos, yo no tengo miedo de las matemáticas, pues tengo certeza que gané las mejores herramientas para pelear con ella, como la creatividad sea mirando las grabado de Escher o recordar las clases, los libros, cuadernos.

Actividad final (Joana)	Actividad final (Gabriela)
Objetos matemáticos y sistemas evocados (distintos)	
Sistema de medidas decimal y otros; polígonos; razones especiales: velocidad, densidad, reta per cápita, escala, porcentaje. Razones contantes (d/l=1,4)	Ideas de simetría e los movimientos rígidos (translación, rotación, reflexión); cuadrados mágicos; ángulos, lenguaje Logo; Pi, figuras extrañas; secuencias con cerrillas; subconjuntos; lógica, Diagrama de Carrol, taxigeometria; funciones; matemática comercial y financiera; teselaciones y Escher.
Sentido para las propiedades matemáticas	
Proceso de equilibrio de la balanza para la resolución de ecuaciones	Proceso de equilibrio de la balanza para la resolución de ecuaciones
Relaciones procedimentales involucradas y ejemplos	
Resolución de ecuaciones; decisión sobre la convexidad; cálculo de medias; factorización de números naturales; resolución del problema de adivinación; fórmulas de área;	Problemas con pentominos; planificación de cubo; escrita y operación en el sistema numérico egipcio; determinación de la diagonal de un cubo y la altura de una pirámide; área de figuras extrañas
Representaciones y significados	
Material dorado; Números figurados (triangulares y cuadrados); Grado de convexidad; nomenclatura de polígonos, tetraminos e pentominos; gráfico de estaturas; nombramiento de símbolos egipcios, fracciones, unidades de medida, polígonos, razones; lenguaje simbólica para los números figurados;	Tetraminos, pentominos, hexaminos; nombramiento de símbolos egipcios; números figurados y secuencias figuradas (frisos y escaleras de cerrillas)
Uso de las definiciones	
Hace más uso Razones especiales: velocidad, densidad, reta per cápita, escala, porcentaje polinomios (monomios binomios, trinomios) probabilidad, media, moda, ..	Hace poco uso, y cuando define lo hace por nominación y por analogía; define especialmente términos no tan conocido o tradicionales como los poliminos o la taxicircunferencia
Argumentos	
Ejemplificación de factorización, Proposiciones respecto la media; proposición más fuerte (de Diego); Resolución de ecuaciones con balanzas de platillos; juegos de adivinación; sumas de Gauss (de 1 a 100) Reconoce y legitima las proposiciones hechas en aula.	Prueba de que existen al menos 17 soluciones para un rectángulo formado con pentominos; resolución de ecuaciones con balanzas de platillos; determinación de la ley general del problema del friso de cerrillas de orden n; sugestión de resolución de problemas con secuencia figuradas; Reconoce y legitima las proposiciones hechas en la clase

Figura 5.22. Comparando elementos de la configuración matemática de Joana y Gabriela.

Hoy mezclo mis conocimientos matemáticos con el filosófico científico, lo geográfico, la lengua ..". Merece una mención especial el hecho que Joana no olvida y hace citas de algunas "PROPOS", una característica muy particular del Ambiente de Inspiración Lakatosiana. En el cuadro (figura 5.21), se constatan las diferencias entre ambos textos, que dan lugar a las observaciones indicadas. Gabriela es más descriptiva, hace un recorrido temporal, como se fuese una guía, tiene la intencionalidad de fornecer el máximo de información al lector, haciendo un sumario cuasi completo de todos los conceptos y procedimientos que ha estudia al largo de 4 años del 5º al 8º grado. La singularidad de su texto es la concatenación temporal y conceptual entre un contenido (conceptual y procedimental) y otro, en cuanto Joana intenta hablar directamente con el lector como se estuviese delante ella, Gabriela intenta ser persuasiva y convincente, detallando lo que ha aprendido y describiendo métodos y procesos de distintos estilos, sea exhibiendo ejemplos, haciendo uso de representaciones que hablan por sí y que necesitan de poca explicación, detallando una ley general utilizando distintas representaciones Gabriela valora los temas no convencionales como la lógica, los diagramas de Carroll, el proyecto de la piscina y la taxi geometría. Tal como Joana hace referencia a lo extramatemático, como la exposición de Escher en un museo, no solo por el valor estético, más si por tener conciencia y dominio de las matemáticas que ello ha utilizado en sus obras.

Lo cognitivo matemático y epistemológico.

Aun comparando los recursos significativos de cuatro años de matemáticas de las alumnas Joana y Gabriela, se puede destacar diferencias en las formas de razonamiento **Joana** hace demonstración del razonamiento de Gauss con estrategia personal, calculando T_{99} y sumando 100 al final; describe procedimientos, explicita una regla para calcular media y cambia a partir de proposición más fuerte (más general); explica como funciona un juego de adivinación paso a paso; Gabriela, en cambio,

Muestra la existencia de solución del problema del rectángulo 4x5 formado por pentominos utilizando los datos de un problema más sencillo como sugerido por Polya y Schoenfeld. Deduce la ley general de la cantidad de cerrillas de un friso de orden n utilizando la geometría representación geométrica con el padrón de la secuencia del número de cerrillas (diferencia 3 entre dos friso consecutivos); hace verificación; exhibe conocimiento acerca de silogismo lógico decidiendo se una proposición es verdadera a partir de premisas.

En cuanto las conexiones, Joana resuelve ecuaciones utilizando analogía con la balanza de dos platillos; Relaciona conceptos de la física (velocidad, densidad), geográficos (densidad demográfica, escala), financieros (renta per cápita) con la idea general de razón; relaciona los números enteros (positivos y negativos) con sus usos en otras áreas del conocimiento (saldo bancario, temperaturas, altitudes y profundidades, fechas, etc.). Gabriela,

Hace conexión entre problema geométricos de cubrir un tablero de ajedrez con pentominós y sus conocimientos de múltiplos (de 5); resuelve y ecuaciones utilizando analogía con la balanza de dos platillos; relaciona propiedades algebraicas con representación geométrica; Hace referencia de conexiones de variados contenidos (conceptuales y procedimentales) en varios campos conceptuales (aritmético, geométrico, métrico, algebraico, variacional, estadístico), y explica lo que es grado de convexidad.

Lo comunicativo interaccional en los textos de Joana y Gabriela.

Los dos textos quedan caracterizados por un hilo común: la intención o didáctica, expresada por los escritos. Siempre teniendo conciencia de que existe un lector. El lector es un interlocutor, en el sentido de Lins (2012)

> "*El interlocutor es una dirección en la cual se habla. Cuando hablo en la dirección de un interlocutor es porque creyó qué este interlocutor diría lo que estoy diciendo y aceptaría/adoptaría la justificación qué me autoriza a decir lo que estoy diciendo*"

En ambos casos de las alumnas se puede reconocer intencionalidad didáctica, aunque con formas diferentes. . En efecto, Joana muestra un estilo conversacional; definición, descripción de procesos ocurridos en aula, mostrando arcas editoriales Utiliza expresiones verbales en la 1ª persona del plural, evidenciado la construcción colectiva del conocimiento. Gabriela usa un estilo de guion, muy didáctico; largo uso de representaciones, definiciones de ideas matemática nuevas al lector genérico (polimínos, taxigeometria); también con marcas editoriale. Su lenguaje es más imperativo y descriptivo. Hace uso de la 3ª persona del singular pero también utiliza la 1ª persona del plural indicando el proceso de producción colectiva del conocimiento.

Lo normativo

Joana valora la problematización como forma de comunicación con intención didáctica y las PROPOS (proposiciones producidas por los alumnos en el AIL; presenta indicios de apreciar la construcción colectiva del conocimiento. Gabriela, valora la problematización como forma de comunicación con intención didáctica y las PROPOS (proposiciones producidas por los alumnos en el AIL; presenta indicios de apreciar la construcción colectiva del conocimiento.

Lo mediacional

Hay pocas referencias a recursos mediacionales, lo que refuerza la valoración de las matemáticas como una ciencia que se hace en la mente. Joana habla de recuerdos "de la enseñanza primaria con uso de material dorado; alusión implícita del uso del geoplano" y de la construcción de juegos geométricos (pentominos y tangram); recurso imaginario de la balanza de dos platillos, Mientras que Gabriela hace modelo que va de lo bidimensional al tridimensional en el caso de la trasformación de un hexamino en una planificación de cubo; recurso imaginario de la balanza de dos platillos; LogoWriter; calculadora para producir y operar con números negativos.

Lo ecológico

En cuanto al valor de la matemática como cultura, ambas hacen una valoración y apreciación de la historia de los sistemas de numeración; aunque Gabriela lo especifica "Estos números (negativos) fueron llamados cariñosamente el mal de las matemáticas".

Ambas consideran una valoración de las matemáticas como producto y proceso que se hace socialmente. Se aprecia también en ambas la generalización.

Joana, organiza el texto con expresiones correspondientes a oposiciones cada vez más fuertes: Incorporar, profundizar, como relación extramatemática, insistiendo en que las matemáticas están presentes en cualquier lugar... Dice que los problemas eran aceptables. Gabriela en cambio, habla de "Secuencias ordenadas en las que tenía que descubrir".. ID ... através ... PROB. Integra visualmente como una aplicación intramatemática ... Habla de adivinanzas. Habla de relación MASP como contexto extramatemático En la narración de Joana, si bien sólo se enuncian de manera explícita, alude en diferentes momentos a tareas matemáticas y su relación con la construcción de diferentes nociones matemáticas. Apropiación de una cultura acerca de la matemática y las operaciones (Quinta operación—radicación) hablado por Caraça (portugués-1941).

En los problemas que propone enunciados podemos ver que Al inicio de la narración de Joana alude al tipo de matemáticas que realizaba con otro profesor antes del grado 5 Alude a problemas simples Mi padre pesaba 80kilos y tenía dos hijos, cada uno pesaba 40 kilos. Todos querían atravesar el río, pero el barquito sólo aguantaba 80 kilos. ¿Qué hacer? En el cual se puede reflejar el tipo de tareas y razonamientos que se lograban promover, que eran muy diferentes a los desarrollados en la clase de matemáticas reconocida como un ambiente con principios lakatosianos.

5.7. Análisis evolutivo del desarrollo cognitivo

En este momento, unimos las observaciones realizadas, de forma que podamos percibir como son las posiciones de ambas alumnas en cuanto el conocimiento matemático desarrollado. Pensar matemáticamente, Dominio de un lenguaje formal, por encima de la media de los alumnos, Posición matemática respecto a problemas, Mirar un objeto matemático desde diversos puntos de vista, Hacer conexiones matemáticas, Usar distintas representaciones en conceptos y procedimientos. Valorar procesos argumentativos, de forma sofisticada (reproducir, hacer sus propios procesos).

En cuanto al contenido matemático, tanto Gabriela como Joana muestran en sus textos continuidad en el reconocimiento de los elementos nuevos que aparecen en cada una de las tareas. Además identifica cuando se está definiendo o clasificando mediante propiedades. Los problemas se reconocen como ya se ha explicado. En todos los textos se mantiene el pensamiento hipotético propio de haber estado trabajando en equipo para descubrir las ideas matemáticas. As´, por ejemplo, el uso de los condicionales "llegaría" / si nosotros girásemos, para definir de forma hipotética.

Se mantiene también el uso de representaciones institucionales en todas las actividades. Desde la consciencia del uso del papel cuadriculado en la actividad de pentominós, como las propias piezas del tangram. Pero incluso crece el uso representaciones espontáneas a partir de la actividad de ecuación de segundo grado. Se usan esquemas metafóricos e icónicos: cascada y balanza. Se establecen las fracciones como formas de representar la probabilidad. En la actividad de conjuntos numéricos se muestra el uso de señales de puntuación, de relaciones de pertenencia cuantificadores universales, e incluso códigos de casos. Y en el último texto, se usan códigos y expresiones para situaciones generalizadas.

En cuanto las definiciones hay continuidad y asunción de los criterios que permiten dicha construcción en todas las tareas. Reconoce en el escrito final las secuencias de ideas a través de problemas. Se da sentido a las propiedades en las tareas que lo requerían. Así, se muestra un crescendo hasta el texto final, en el que se habla explícitamente de regla o ley general. Establece reglas o relaciones conceptuales en las últimas tareas. En el último texto se explicita A través problemas, Para tanto..., Después hicimos... Reconocimos... sus propiedades, Propone problemas… Vamos para otro... Relaciona ideas.

Respecto las relaciones procedimentales, inicia con frases de particularización, como el paso de la solución para 3x5 a la de 4x5 a afirmaciones de propiedades enunciadas de forma más general como "hacemos referencias a ecuaciones que ya sabíamos resolver" , o bien "construimos números con regla y compás". Se muestra también una progresión positiva que culmina en afirmaciones del tipo "adiestrados en métodos para valorar ". Es interesante observar que usa ejemplos en las primeras tareas, y casi nada en las últimas. En cuanto las argumentaciones, hay un progreso desde formulaciones descriptivas y de tipo cualitativo como "Mayor número de lados, mayor suma interna" a formas más generales como prueba por absurdo "prueba" por absurdo con explicación de los pasos de una ecuación a otra, de una representación de balanza de una transformación para otra en la tarea 3, o formulaciones de tipo deductivo en la tarea de conjuntos, como Tenemos entonces... Entendemos...que sería importante. O bien el uso de expresiones como al hablar de la densidad de un conjunto, exhibe casos particulares para sustentar que Ir no goza de ciertas propiedades En la última tarea surgen términos de tipo conclusivo y de conexión: retomamos; establecemos... tuvimos el privilegio.

En las primeras tareas no aparecen conexiones intramatemáticas, y en las cuatro últimas tareas, ya aparecen. Incluso en el texto final une adivinanzas con integración visual. Y en cuanto las extramatemáticas se relatan ejemplos cotidianos en casi todas las tareas.

5.8. Conclusiones. Significación y complejidad en una comunidad de aprendizaje matemático.

Para dar respuesta a los objetivos del trabajo, enunciamos a continuación los resultados más importantes que consideramos que se establecen a partir de los análisis realizados.

5.8.1. Habilidades conseguidas. Elementos de alto nivel.

De los ***elementos matemáticos*** institucionalizados se detecta: reconocimiento temático, uso de definiciones, sistemas representacionales, elementos estructuradores, uso equivalencias y cita de autores matemáticos. En cuanto a las habilidades se reconocen como apropiadas, entre otras: el reconocimiento de errores, imitación de procedimientos, relaciones procedimentales, aplicación de algoritmos a, análisis y verificación de resultados, discusión de modelos. De los elementos de alto nivel se observa: procesos de análisis - síntesis, identificación de argumentaciones, valorización de justificativas, particularización - generalización, incorporación de dominios de validez y la producción propia de los textos analizados.

5.8.2. Metacognición y trazos de la cultura colectiva de clase.

Observamos que se evidencia en los textos un nivel de proyección (identificación intencional) y de desarrollo colaborativo en el proceso de descubrimiento. Asimismo, se refleja "nivel" de posicionamiento frente al contenido adquirido: (a) los textos mantienen formas de coherencia lógica, (b) permiten revelar un "estilo didáctico científico", (c) permiten observar códigos semióticos - representacionales diversos, (d) posibilitan identificar elementos metacognitivos. A partir de las observaciones realizadas, podemos afirmar que:

Resultado 5.8.1. ***Los textos analizados, permiten reconocer múltiples características del contexto usado para construir significados matemáticos.***

Después de los análisis realizados, podemos concluir que las producciones textuales muestran un conjunto de categorías observables en todos los textos, como son elementos no matemáticos y matemáticos – epistémicos.

Resultado 5.8.2. ***Se muestran evidencias de un proceso de construcción socializado del contenido, asumiendo significados matemáticos diversos y de alto nivel.***

Tanto por las referencias explicitadas de episodios generadores de hechos matemáticos integrados, cuanto por el reconocimiento implícito del proceso y las sub-relaciones. Quedan en los textos, marcas de gestión y cláusulas contractuales (con negociación de significados, compartidas en un ambiente de co-construcción (en el sentido de la ZPD citado por Valsiner) y aún explicitación de papeles alternados de los participantes (alumno, profesor, grupo). Las normas socio-matemáticas quedan presentes en la forma como eligen elementos verbales para indicar solicitaciones, comparaciones, contrastes, resoluciones, verificaciones, transformaciones y procedimientos matemáticos diversos.

Resultado 3. ***Los textos analizados muestran integración, legitimidad y significatividad, y pueden considerarse como textos con intencionalidad didáctica-científica***. ***se tienen evidencias de elecciones realizadas por los alumnos respecto las situaciones vivenciadas con rasgos de interpretación de la mismas atribuyendo significados particulares a muchos elementos de la acción.*** Las evidencias son de tipo: situación, materialización, evidencias de los artefactos utilizados, campo semántico de desarrollo incorporado, estructura epistémica, relaciones con el conjunto, desarrollo de los procesos respondidos, elementos individuales gestionados, implícitos reconocidos.

Apropiación reflexiva y validez epistémica de los textos.

Primeramente nos preguntábamos sobre el propio potencial de los textos para reconocer dichas características, que es lo que mostramos a continuación.

Resultado 5.8.3. En cuanto a la comunicación propiamente dicha, los textos analizados, se diferencian de las producciones tradicionales no sólo por la estructura del texto mas también por la valorización de formas semióticas que van mas allá de las fórmulas, definiciones y cuentas.

Hacen uso de una diversidad de representaciones verbales, simbólicas, geométricas y otras, con el propósito claro de hacer ver a los lectores facetas de los conceptos y procedimientos presentados para convencerlos de su importancia y enseñarlos a hacer uso. A esto se une una preocupación de naturaleza estética en el modo que hacen el diseño (formatación) de sus producciones. Al mirar los elementos lexicales específicos del vocabulario utilizado por los alumnos y los verbos que indican las representaciones y acciones, al analizar los patrones y relaciones temáticas desde distintas miradas (estructural, metacognitiva, etc.) se puede capturar los contenidos estudiados, las relaciones hechas y habilidades conquistadas.

Aunque se presenten estructuras conceptuales y elecciones distintas de los elementos integrados, todas: identifican el elemento temático central y lo relacionan a conceptos conexos; comunican y desarrollan lo(s) método(s) que se usan para encontrar sus soluciones. A esta estructura mínima común se observa los elementos que cada alumno de la muestra consideró significativos en relación al tema.

De los ***elementos matemáticos*** institucionalizados se detecta: reconocimiento temático, uso de definiciones, sistemas representacionales, elementos estructuradores, uso equivalencias y cita de autores matemáticos. En cuanto a las habilidades se reconocen como apropiadas, entre otras: el reconocimiento de errores, imitación de procedimientos, relaciones procedimentales, aplicación de algoritmos a, análisis y verificación de resultados, discusión de modelos. De los elementos de alto nivel ya discutidos en la tabla de categorías de rango de habilidades se observa: procesos de análisis - síntesis, identificación de argumentaciones, valorización de justificativas, particularización - generalización, incorporación de dominios de validez y la producción propia de los textos.

Resultado 5.8.4. A partir de los análisis textuales y conceptuales realizados, detectamos ***elementos matemáticos*** institucionalizados: reconocimiento temático, uso de definiciones, sistemas representacionales, elementos estructuradores, uso equivalencias y cita de autores matemáticos.

En cuanto a las habilidades se reconocen como apropiadas, entre otras: el reconocimiento de errores, imitación de procedimientos, relaciones procedimentales, aplicación de algoritmos a, análisis y verificación de resultados, discusión de modelos. De los elementos de alto nivel ya discutidos en la tabla de categorías de rango de habilidades se observa: procesos de análisis - síntesis, identificación de argumentaciones, valorización de justificativas, particularización - generalización, incorporación de dominios de validez y la producción propia de las REv.

Resultado 5.8.5 En suma, observamos que se evidencia en los textos un nivel de proyección (identificación intencional) y de desarrollo colaborativo en el proceso de descubrimiento. Asimismo, se refleja "nivel" de posicionamiento frente al contenido adquirido: (a) los textos mantienen formas de coherencia lógica , (b) permiten revelar un "estilo didáctico científico", (c) permiten observar códigos semióticos - representacionales diversos, (d) posibilitan identificar elementos metacognitivo

Existe un grado de acercamiento acercamiento de las rproducciones de los estudiantes a los textos científicos. Lemke (1997) listaba algunas normas usuales que se encuentran en ella lenguaje científico como por ejemplo: evitar forma coloquiales (formas cercanas da lenguaje escrita); utilizar términos técnicos en lugar de sinónimos coloquiales o paráfrasis; evitar la personificación y el empleo de atributos o cualidades usual o específicamente humanas; evitar lenguaje metafórico y figurativo (palabras emocionales, coloridas y cargadas de valor, así como hipérboles, exageraciones ironía y expresiones humorísticas; no hacer referencia al aquí y ahora, o a eventos de clase o personas, tiempo o lugares específicos entre otras características. Todavía alerta para el hecho de que "*tales reglas se constituyen en una pauta de un leguaje torpe y alienante, y que sirven principalmente para crear un fuerte contraste entre el lenguaje de la experiencia humana y el lenguaje de la ciencia. Éste es el contraste que enseñamos a asociar la <<objetividad>> de la ciencia contra la <<subjetividad>> de la experiencia, exonerando la ciencia de los procesos sociales y de la actividad humana real, creé que es de aquí que proviene mucha de la "mística" y de la mistificación de la ciencia. impidiendo la comunicación de su contenido temático a los alumnos*". En su obra "Aprender a hablar ciencia" defiende romper estas normas en nombre de la comunicación y da significación.

Conclusiones sobe autonomía y legitimidad.

Como consecuencia de lo analizado, podemos afirmar

Resultado 5.8.6. ***En los textos analizados se percibe un alto grado de diversidad*** formal, de uso léxico, y de priorizaciones textuales lo que es índice de autonomía. Sin embargo hay uniformidad en la valoración cognitiva de los textos. ***Además, se tienen evidencias de elecciones realizadas por los alumnos respecto las situaciones vivenciadas con rasgos de interpretación de la mismas atribuyendo significados particulares a muchos elementos de la acción.***

Se muestra una diversidad personal, como se observó al comparar los trabajos de Gabriela y Joana, y es consistente y ampliado de lo que ya se había observado con otros textos (Lopes, 2000), que aseguran estilos de aprendizaje variados que el ambiente pensamos que ha provocado. Las evidencias son de tipo: situación, materialización, elementos componente, evidencias de los artefactos utilizados, campo semántico de desarrollo incorporado, estructura epistémica, relaciones con el conjunto, desarrollo de los procesos respondidos, elementos individuales gestionados, implícitos reconocidos.

Como consecuencia de lo expresado, podemos Reconocer el papel de las tareas y las interacciones que se dan en dicha cultura en cuanto a su potencial cognitivo, analizando en un ambiente el conocimiento que construyen los alumnos.

Resultado 5.8.7. *Se muestran evidencias de un proceso de construcción socializado del contenido*, tanto por las referencias explicitadas de episodios generadores de hechos matemáticos integrados, cuanto por el reconocimiento implícito del proceso y las subrelaciones. *Y podemos afirmar que los textos hablan de múltiples características del contexto.*

Como se vio en los análisis realizados se reconoce una cultura con marcas de gestión y cláusulas contractuales (con negociación de significados, compartidas en un ambiente de co-construcción (en e y aún explicitación de papeles alternados de los participantes (alumno, profesor, grupo). Las normas socio-matemáticas quedan presentes en la forma como eligen elementos verbales para indicar solicitaciones, comparaciones, contrastes, resoluciones, verificaciones, transformaciones y procedimientos matemáticos diversos.

La práctica matemática subyacente a los textos, muestra que en otro tipo de actividades, como las de resolución de problemas, se evidencian producciones ricas del punto de vista estratégico matemático (cognitivo y metacognitivo). Después de los análisis realizados, podemos concluir que las producciones textuales muestran un conjunto de categorías observables en todos los textos (ver cuadro de la página siguiente): (1) elementos no matemáticos y (2) matemáticos – epistémicos.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES. LIMITACIONES. PERSPECTIVAS.

En este último capítulo exponemos una interpretación conjunta de todos los resultados, con el propósito de potenciar la comprensión del ambiente llamado Comunidad de Inspiración Lakatosiana. En primer lugar, damos respuesta a la pregunta inicial que impulsó esta investigación (6.1.)

En segundo lugar, retomamos las ideas más relevantes del marco teórico y metodológico para reflexionar sobre los resultados obtenidos en relación con dicho marco. En este mismo apartado, además, presentamos la discusión sobre la metodología del estudio (6.2.)

Tras el apartado de discusión, presentamos en tercer lugar las implicaciones didácticas que se desprenden de este trabajo a modo de recomendaciones para profesores que puedan llevar a cabo clases que incluyan discusiones en gran grupo con tecnología (6.3.).

Por último, repasamos sucintamente las limitaciones que presenta el estudio y las generalizaciones y prospectivas que pueden extraerse (6.4.)

En este capítulo hemos modificado la estructura que hemos aplicado en los capítulos precedentes, ya que tratamos de presentar una conclusión global a la investigación: en lugar de seguir diferenciando los aspectos relativos a los dos objetivos de la investigación, el propósito de este capítulo es mostrar la relación entre los elementos de potencial cognitivo e interacciones que muestran una comunidad de investigación, y, por lo tanto, discutir acerca de la interpretación conjunta de todos los resultados.

6.1. Conclusiones

En este apartado responderemos las preguntas de investigación que hemos mencionado al inicio del capítulo mediante la interpretación conjunta de los resultados obtenidos en los capítulos 4 y 5.

Conclusiones relativas a la potencialidad de los textos

Un primer objetivo pedía identificar a partir de textos escritos, elementos constitutivos de una cultura matemática distintiva de un grupo de alumnos sobre el "que-hacer" matemático en clase en donde se construye matemáticas socialmente, en un periodo largo de tiempo en la vivencia escolar. Así, a partir de los resultados presentados en el capítulo anterior, se desprende que los textos son portadores de mensajes cognitivos e interaccionales, que muestran que se promueve la implementación eficiente y productiva de discusiones en gran grupo en las que se legitima el conocimiento.

Se ha puesto de manifiesto que la implementación de la secuencia de problemas ha generado oportunidades de aprendizaje, que ***manifiestan el potencial cognitivo del trabajo realizado***. Por tanto, se hace evidente la relación entre enseñanza y aprendizaje en todo el trabajo escolar realizado. Además, se confirma que. Se notan especialmente avances en la búsqueda de alternativas, la representación con precisión y el establecimiento de conjeturas.

De los ***elementos matemáticos*** institucionalizados se detecta: reconocimiento temático, uso de definiciones, sistemas representacionales, elementos estructuradores, uso equivalencias y cita de autores matemáticos. En cuanto a las habilidades se reconocen como apropiadas, entre otras: el reconocimiento de errores, imitación de procedimientos, relaciones procedimentales, aplicación de algoritmos a, análisis y verificación de resultados, discusión de modelos. De los elementos de alto nivel ya discutidos en la tabla de categorías de rango de habilidades se observa: procesos de análisis - síntesis, identificación de argumentaciones, valorización de justificativas, particularización - generalización, incorporación de dominios de validez y la producción propia de los textos, reflexión crítica sobre proposiciones y definiciones, perfeccionándolas.

Las discusiones públicas tienen un papel decisivo en el desarrollo competencial que se espera institucionalmente de los estudiantes. *Los resultados muestran evidencias de* *progreso matemático entre el trabajo realizado sea individual, por equipo (parejas o pequeños grupos) o como resultado de la producción del colectivo.* Estos resultados son una aportación novedosa, ya que contribuyen a un mejor conocimiento del ambiente CPEIL que incluye el trabajo colaborativo y el uso de la tecnología. En particular, esto ocurre respecto a las discusiones en gran grupo *y* la legitimación de la construcción de significados.

Consideramos que el discurso matemático no es algo "sencillo" y "objetivo" como los libros de texto intentan pasar. No es dominado por el razonamiento lógico e si por una combinación compleja de razonamientos lógicos, heurísticos, intuitivos y retóricos. Esta manera de pensar el discurso matemático se puede reconocer en los escritos de los alumnos, sea cuando intentaban comunicar lago de sus pensamientos o cuando reproducían una situación vivida. Observamos que se evidencia en los textos un nivel de proyección (identificación intencional) y de desarrollo colaborativo en el proceso de descubrimiento. Asimismo, se refleja "nivel" de posicionamiento frente al contenido adquirido: (a) los textos mantienen formas de coherencia lógica; (b) permiten revelar un "estilo didáctico científico"; (c) permiten observar códigos semióticos -representacionales diversos; (d) posibilitan identificar elementos metacognitivos; y también (e) posibilitan mostrar el camino divergente y as veces improbable de descubierta o construcción de una idea.

Para Lakatos (1976) "El estilo deductivo oculta la lucha, esconde la aventura", pues en las REV se puede sentir la energía de los alumnos luchadores (con problemas) y disfrutar su aventura, en busca de la resolución de problemas e producción de conocimientos matemáticos.

Sobre un nuevo tipo de contrato en la CPEIL

Se tienen evidencias de elecciones realizadas por los alumnos respecto las situaciones vivenciadas con rasgos de interpretación de la mismas atribuyendo significados particulares a muchos elementos de la acción.

Los textos analizados muestran un ambiente de integración, legitimidad y significatividad, y pueden considerarse como textos con intencionalidad didáctica-científica.

Sobre las relaciones e interacciones.

En todos los textos analizados se ha encontrado rastros de una comunidad en donde los estudiantes se hacen oír, oyen unos a los otros y el docente los escucha y es escuchado, pero se trata de una escucha (la de los alumnos) reflexiva, no oyen solamente para aceptar todo como verdades definitivas, se puede constatar que se trata de una escucha crítica, libres de las interferencias que ocurren en el diálogo tríadico. Proveyendo lo maestro de informaciones acerca de la complejidad con que los alumnos construyen sus estructuras conceptuales, en general, no capturables en los ambientes tradicionales.

Conclusiones relativas a los resultados metodológicos.

Para poder sacar conclusiones respecto a la potencialidad cognitiva del ambiente ha sido clave el uso del análisis epistémico mediante las herramientas del enfoque ontosemiótico. Pero ha .sido útil el uso de las nociones derivadas del enfoque de Scott y Mortimer sobre el análisis de las interacciones.

Los instrumentos metodológicos han sido útiles para llevar a cabo de forma precisa la planificación, implementación y evaluación del potencial matemática de las tareas. Los análisis textual y conceptual en la línea de Lemke y Bahtin ha resultado ser una herramienta útil para organizar una parte del análisis de los datos, y además ha contribuido a preparar el procedimiento para detectar el potencial cognitivo y complementar el análisis de lo normativo para identificar la construcción de significados.

En resumen, estos instrumentos son novedosos en relación con la literatura existente porque proporcionan herramientas concretas para potenciar las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Por un lado, dan facilidades para llevar a cabo el proceso de enseñanza de forma eficaz y productiva, y por otro, ayudan a mostrar con detalle características del aprendizaje matemático.

Conclusiones relativas al potencial cognitivo

El estudio permitió desvelar algunas variables o elementos que otorgan legitimidad al "que-hacer" matemático de los alumnos en vías a negociar significados matemáticos en la CPEIL Aunque no era el principal objetivo de esta investigación, gracias a la minuciosidad que ha permitido el instrumento durante el análisis, se han podido inferir varios resultados sobre las características de distintos factores que determinan una discusión en gran grupo.

Nos propusimos en este trabajo *desvelar algunas variables o elementos que otorgan legitimidad al "que-hacer" matemático de los alumnos en vías a negociar significados matemáticos*. Para esto consideramos importante sacar a luz algunos elementos del AIL que no fueran profundizados en el cuerpo de la tesis y que en trabajos futuros podrá ser más discutido. El Ambiente de Inspiración Lakatosiana AIL presupone una interpretación distinta y singular de la reinvención guiada de Freudenthal, con un condimento que agrega el sabor del falibilismo de Lakatos. En este ambiente, matematizar es un ejercicio de poner cosas en relación para generar nexos, con la realidad por medio de situaciones problemas, o de creación de proposiciones que hablen de lo que se está mirando.

La epistemología falibilista presente en el AIL, en el sentido de que verdades provisorias (proposiciones, aunque errores, despistes, etc.) tienen un estatus de legitimidad en el colectivo e quedan expuestas a la discusión pública para un juzgamiento hasta llegar a un consenso público o es abandonada cuando se exhibe un argumento convincente o un contraejemplo. En este ambiente el maestro ejerce varios papeles y da cuenta muchos objetivos, en especial lo de enseñar a mejorar la cognición de los alumnos. En el AIL, las matemáticas son un contexto más, no se trata la realidad externa como un mundo y los objetos y problemas de las matemáticas como otro mundo.Esto explica lo mismo placer que se observa en los textos de REv de los alumnos sea se trabajan con juegos (pentominos o tangram), se hacen un proyecto de construcción de una piscina o se investigan una ley general de los números hexagonales. Lo social en el AIL pretende ser crítico, el provisorio del conocimiento que consigue acordar con los alumnos (sin necesariamente tener que explicitar esto) contribuye para desarrollar un pensamiento flexible en los alumnos, en su lucha con los problemas, situaciones y proyectos. E esto lleva a un reconocimiento de objetivos y valores sociales, como pensar y respetar el habla del colega, reflexionar y no aceptar pasivamente, fundamentar y no imponer. Estamos seguros que los 70 alumnos, cuya producciones escritas que fueran objeto de esto estudio, aprendieran algo muy especial, como es mirar con sentido, y esto es un atributo importante cuando se persigue la aprendizaje con autonomía.

La presencia de Freudenthal en los fundamentos de la AIL aunque no tenga sido citada en los capítulos anteriores siempre estuve presente dentro de la visión epistémico-didáctica de este estudio, como está presente en las bases de la EOS, Godino (2011) y en las reflexiones epistemológicas de Camino Cañon (2006). Se trata de una Matemática irreverente en el sentido de no prestar reverencia, o sea, no necesitar de permiso para pensar, problematizar y poner cosas en relación.

6.2. Sobre los resultados.

Mostramos en el capítulo 4 varios episodios de construcción colectiva del conocimiento y utilizamos herramientas metodológicas variadas para reconocer la autenticidad de aquella producción. La metodología utilizada en el capítulo 5 cuando analizamos las escritas de dos alumnas en un período largo de 4 años, utilizamos otro instrumento, diseñados y experimentados por el autor, de modo a prospectar en los textos, como en una actividad arqueológica como conocen o comprenden, intentando categorizar: las definiciones (como comprenden una definición, que sentido la atribuyen, como definen); las representaciones (como la usan, que tipos de representaciones usan, o aprecian, la coherencia entre representación e concepto/procedimiento, el valor comunicativo); las relaciones conceptuales (el nivel de complejidad, las conexiones, el uso, la generalización); las conexiones (intramatemáticas; extramatemáticas); los contextos), los aspectos comunicativos, los internacionales, etc. Con esto fue posible reconocer progreso cognitivo, madurez, cultura construida.

Para la consecución del segundo objetivo, consistente en detectar el potencial cognitivo y hallar evidencias de su aprovechamiento, se mostró que las herramientas de idoneidad del enfoque ontosemiótico fue un bueno instrumento, para tratar los datos y mostrar que, a pesar de formas individuales de producción, hay muchos elementos comunes en los textos observados. El papel que ha tenido este instrumento de análisis ha sido decisivo, porque nos ha permitido encontrar otros resultados acerca de las características de algunos de los elementos involucrados en el análisis, que además contribuyen a comprender mejor las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. Podemos concluir que, en general, la metodología de este estudio ha contribuido a la organización y la validez de sus razonamientos.

6.3. Implicaciones didácticas.

A lo largo de este estudio se han tratado varios aspectos que directa o indirectamente pueden convertirse en recomendaciones didácticas para otros profesores. A continuación presentamos de forma resumida recomendaciones de gestión de discusiones en gran grupo.

Consideramos importante que el profesor no basta una planificación adecuada de la sesión de clase, hay que se interesar por el tema a ser enseñado e conocer la historia e los elementos epistemológicos relacionados. Así queda más rica la interacción con las ideas y verdades provisorias de los alumnos. El maestro debe intentar perfeccionar su escucha, preguntar más que responder. La pedagogía de la pregunta ayuda a los alumnos a tratar los diferentes estadios que el profesor tiene previsto que aparezcan en la discusión, pero con un andamiaje que también permita a los alumnos explorar por iniciativa propia. Se puede afirmar que el maestro, allá de los afectos, es un modelo cognitivo para los alumnos, siendo así su estilo de gestionar la aula carga un considerable conjunto de valores. Prácticas democráticas ayudan a valorar la democracia, el respeto por el otro contribuye para aprender a respetar.

Por esto la importancia de la explicitación y reflexión en el grupo de muchos actos que se realizan en la clase. Si se quiere que los alumnos valoren el registro y la escrita, los registro tienen que ser públicos e la escrita valorada e discutida como parte de la producción matemática, como es en verdad para los matemáticos. Se recomienda que los maestros aprendan a registrar los fenómenos de clase. También su modo reflexionar y razonar en público (en la clase) tiene importancia para el grupo, con un modelo más, que contribuye para que los alumnos desarrollan su propio estilo cognitivo. La importancia de estas consideraciones va más allá de conseguir que los alumnos aprendan hechos matemáticos. Nuestro propósito, a semejanza a lo defendido por Freudenthal es mirar la matemática como una actividad humana, o como habla D´Ambrósio en sus conferencias, matemática como cultura. Para nosotros las matemáticas son instrumentos que llevan a la autonomía y a la construcción de valores para la vida que pasa también fuera de la escuela.

6.4. Limitaciones.

Reconocemos algunas limitaciones en el trabajo que ahora se presenta: Falta de conexión comparativa con los trabajos realizados sobre textos por otros autores. En relación con la presumible falta de tiempo que puede experimentar el profesor al pretender una actuación tan minuciosa, de esta investigación se desprende la relevancia del trabajo en equipo y de conjugar esfuerzos para reflexionar acerca de las propias prácticas de enseñanza. Teniendo en cuenta esta limitación, al finalizar este estudio ofrecemos, como aportación didáctica, todo el material creado para esta secuencia didáctica junto con todos los instrumentos didácticos elaborados y ejemplos sobre cómo sacar provecho de estas discusiones en gran grupo con tecnología, que forman parte de una secuencia didáctica que tiene sentido en sí misma.

Analizar las implicaciones del uso de textos en la formación del profesor investigador, dado que este tema está en el orden del día en muchos países, en el Brasil especialmente, dadas las carencias del sistema educativo que tenemos en los varios niveles.

Reconocer el valor de los textos didácticos usados en las nuevas tecnologías. Estamos delante la comunicación virtual rápida que en los últimos años viene siendo utilizada en diversos contextos de naturaleza educativa como los cursos a distancia de formación continuada por Internet (véase experiencias de Fundación Bradesco-Brasil, plataformas del Porto-Digital en Recife, la Univesidad Abierta de Brasil, etc.), donde la interacción y los procesos de tutorización aún son basados en elementos escritos en la pantalla y enviados a los centros. La investigación en este campo aún está en su inicio, muchas cuestiones quedan abiertas y la eficacia de estos mecanismos y aparatos tecnológicos aún están lejos de lo ideal. Creemos que una profundización en la línea puesta por este trabajo puede dar contribuciones significativas para los desafíos puestos.

Comparar el grado de autonomía y el conocimiento adquirido por estudiantes frente a distintos medios de enseñanza. La pregunta es: ¿Qué importancia puede tener la escrita en modelos de enseñanza virtuales? ¿Qué herramientas se puede utilizar en plataformas de enseñanza virtual en qué la escrita tiene protagonismo?

6.5. Propuestas de futuro.

En este apartado final, presentamos algunas recomendaciones para realizar futuros estudios siguiendo esta línea de investigación. Dichas recomendaciones surgen de ideas que se han desarrollado durante el presente estudio pero que no se han trabajado de forma profunda. Primero, un aspecto general que consideramos importante es la posible generalización de los resultados de la investigación. Aunque hay indicios de que muchas de las partes sí que serían generalizables – como, por ejemplo, algunos aspectos de los instrumentos metodológicos – aunque el trabajo con escrita en el aula sea practicado en algunas escuelas, en escuelas y con alumnos de variados perfiles, no se ha realizado un estudio posterior suficientemente exhaustivo para confirmarlo. En el Brasil hay solamente un grupo (en la Universidade Estadual de Londrina, UEL) que ha se dedicado a la escrita como objeto de investigación, otros grupos supervisados por el profesor Arthur Powell tiene atención a la escrita en proyectos de aprendizaje colaborativa, pero aún es una investigación muy puntual. Por eso que consideramos oportuno continuar a investigar en esta línea. Tememos el peligro de considerar que el gran avance de la tecnología pueda llevar a una depreciación de las actividades de escrita en las clases de matemática.

Un segundo aspecto tiene a ver con el Ambiente de Inspiración Lakatosiana. No encontramos estudios sobre la relación entre los estudios filosófico-epistemológicos de Imre Lakatos. Creemos que en la literatura de Educación Matemática hay más fascinación que comprensión o influencia real. El hecho es que Lakatos no tenía una preocupación con la enseñanza, pero sus ideas falibilistas se citan en muchos trabajos, teóricos. Creemos que esta una investigación en esta dirección merece ser profundizada, pero no solamente en el ámbito de las ideas e si intentar comprender como la construcción del conocimiento de los alumnos es bien o mal influenciada por la visón formalista de las matemáticas.

Un segundo aspecto tiene a ver con el Ambiente de Inspiración Lakatosiana. No encontramos estudios sobre la relación entre los estudios filosófico-epistemológicos de Imre Lakatos. Creemos, siguiendo a Cardoso (1997) que en la literatura de Educación Matemática hay más fascinación que comprensión o influencia real. El hecho es que Lakatos no tenía una preocupación con la enseñanza, pero sus ideas falibilistas se citan en muchos trabajos, teóricos. Creemos que esta una investigación en esta dirección merece ser profundizada, pero no solamente en el ámbito de las ideas e si intentar comprender como la construcción del conocimiento de los alumnos es bien o mal influenciada por la visón formalista de las matemáticas. El objetivo para el presente/futuro de este autor es seguir en la investigación de otros ambientes de inspiración lakatosiana y construir un acervo de producciones auténticas de alumnos tal como las muestra presentadas en este estudio.

6.6. Contribuciones relacionadas con la tesis

El tema de la tesis ocupa el autor hace muchos años y se puede considerar un marco la publicación de un artículo en los anales de la reunión de grupo CIEAEM en Shebrooke, Canadá en el año de 1987. A partir del vínculo con el programa de la Facultat d'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona en el Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals, se produjo muchos artículo y materiales diversos en el campo de la educación matemática en variada subáreas como la formación de profesores y desarrollo de materiales instruccionales (incluso vídeos). Algunas de estas producciones tienen relación directa con el tema de la tesis o con algunos de los referenciales teóricos que la sostiene. La elección de las producciones científicas se privilegió lo que fue hecho con supervisión de los órganos oficiales del Ministerio de Educación de Brasil, y publicaciones reconocidas por arbitrajes nacionales e internacionales.

Artículos publicados em revistas com árbitro

Lopes, A.J. (2009) O perímetro do TANGRAM e suas aplicações no desenho industrial. Pátio: Ensino Médio, v. 2, p. 36-38.

Lopes, A.J. (2008) O Que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender Sobre Frações, Quando Tentamos lhes Ensinar Frações. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 31, p. 01-22.

Lopes, A.J. (2009) Análise de Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Série-Estudos (UCDB), v. 26, p. 235-237.

Lopes, A.J. (2007) A Favor da Tabuada, mas Contra a Decoreba. Boletim GEPEM (USU), v. 51, p. 13-23.

Lopes, A.J. (2002). A Escrita no Processo de Ensino Aprendizagem de Matemática. Pátio. Revista Pedagógica (Porto Alegre), Porto Alegre, v. 22, p. 42-44.

Lopes, A.J. (2001). Um ângulo é mais do que 2 semi-retas de mesma origem. Salto para o Futuro, v. 1, p. 1-5, 2001.

Libros publicados/organizados

Lopes, A.J. (2014). Pacto nacional pela alfabetização na idade certa: Saberes Matemáticos e outros campos do saber. 1a. ed. Brasília: Ministério da Educação: Secretaria de Educação Básica. 80p .

Lopes, A.J. (2014). Matemática : soluções para dez desafios do professor : 4º e 5º ano do Ensino Fundamental. 1a. ed. São Paulo: Editora Ática, v. 1. 112p .

Lopes, A.J. (Org.), Frant, J. B. (Org.). Lins, R. C. (2014). Matemática e a relação com outros campos do saber no Ciclo de Alfabetização. 10. ed. Rio de Janeiro: TV ESCOLA/ SALTO PARA O FUTURO, v. 1. 38p

Lopes, A.J. ; Frant, J. B. (2011). Matemática : soluções para dez desafios do professor: 1º- 3º ano do ensino fundamental. 1a. ed. São Paulo: Ática Educadores. v. 1. 96p .

Lopes, A.J. ; Gimenez, J. (2005). Matemática do Cotidiano & suas Conexões. 1. ed. São Paulo: FTD,. v. 4. 310p .

LOPES, Antonio José. (2000) Matemática Hoje é Feita Assim. São Paulo: Editora FTD. v. 4. 1472p .

Capítulos de libros publicados

Lopes, A.J. Vianna, C. R.. Rolkouski, E. et alii (2014). Os saberes das crianças como ponto de partida para o trabalho pedagógico. In: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB. (Org.). Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Alfabetização Matemática: Apresentação. 1ed.Brasília: MEC, SEB, v. 1, p. 32

Lopes, A.J. (2005) Explorando o uso da calculadora no ensino de matemática. In: UNESCO; MEC; RAAAB. (Org.). Construção coletiva: contribuições à educação de jovens e adultos. Brasília: UNESCO, 2005, v. , p. 301-320.

Lopes, A.J. .(2004) Gestión de interacciones y producción de conocimiento matemático en un día a día lakatosiano. In: Codina, Roser; Burgués, Carme; Font, Vicent; Giménez, Joaquim;et alii. (Org.). Mathemátiques i la seva didàtica. 1ed.Barcelona: Universitat de Barcelona, 2004, v. 287, p. 109-212.

Trabajos completos publicados en actas de congressos

Lopes, A.J.; Gimenez,J.. Bairral, M. A.. Araujo, J. (2002) Geometrical Teachers Literacy: an Equity International Framework Improved by Network Distance Courses. In: The 53 Conference of the C.I.E.A.E.M., 2002, Verbânia. CIEAEM 53, Verbânia, Itália. 2001. Publicado em Mathematical Literacy in the Digital era. Verbânia: G&C Guisetti e Corvi Editori, v. 1. p. 253-256.

Resúmenes expandidos publicados en actas de congressos

Lopes, A.J. . Frant, J. B. .(2010) Writing, Talking and Sharing: a Frame for Building Social Knowledge. In: 34th *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2010, Belo Horizonte. PProceedings of the 34th Conference of the International Group of Psychology of Mathematicas Education. Belo Horizonte: UFMG, 2010. v. 2. p. 2-62.

Resúmenes publicados em actas de congressos

Lopes, A.J. (2002) Impacts of a Teacher Professional Development Course in mathematics Classroom: A Case of a Distance Learning Course. In: Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques, 2002, Vilanova i la Geltrú. A Challenge for Mathematics Education: to reconcile commonalities and differences. Barcelona: Universitat Politécnica de Catalunya (UPC) y Universidad de Barcelona, 2002. v. 1. p. 109-112.

Serie de TV/Divulgación científica

LOPES, Antonio José, & Roberto Machado (2009). Matemática em Toda Parte. 2009. 12 vídeos de 26 min cada. MEC/Brasil. UNESCO.

REFERENCIAS

Abreu, G. (2005). Cultural identities in the multiethnic mathematical classroom. Cerme 4 - Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. http://ermeweb.free.fr/CERME4/CERME4_WG10.pdf (pp. 1131-1140)

Abreu, G. de & Gorgorio, N. (2007) Social representations and multicultural mathematics teaching and learning. Cerme 5, Larnaca, Cyprus, http://ermeweb.free.fr/CERME5b/WG10.pdf (pp.1559-1566

Andriessen,J.; Baker,M.J. & y Dan Suthers, D. (2003) Argumentation, computer support and the Educational context of confronting cognitions. In J Andriessen, M.J.Baker & D. Suthers (Eds) Arguing to learn Confronting Cognitions in Computer-Supported Collaborative Learning environments, p.1-25 Dordrecht. The Netherlands. Kluwer Av Academic Publishers.

Antaki, C. (1994). *Explaining and arguing: The social organization of accounts.* London: Sage.

Apple, M. (1995). Taking power seriously: new directions in equity in mathematics education and beyond. In W. Secada, E. Fennema, & L. Adajian (Eds.), *New directions for equity in mathematics education* (pp. 329-348). Cambridge: Cambridge University Press.

Antaki, C. (1994). *Explaining and arguing: The social organization of accounts.* London: Sage.

Applegate, J. L. (1982). Construct system development and identity-management skills in persuasive contexts. Paper presented at the annual meeting of the Western Speech Communication Association, Denver, CO.

Applegate, J. L., & Delia, J. G. (1980). Person-centered speech, psychological development, and the contexts of language use. In R. St. Clair & H. Giles (Eds.), *The social and psychological contexts of language.* (pp. 245-282). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Applegate, J. L., Burke, J. A., Burleson, B. R., Delia, J. G., & Kline, S. L. (1985). Reflection-enhancing parental communication. In I. E. Sigel (Ed.), *Parental belief systems: The psychological consequences for children*. (pp. 107-142). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Astolfi, J.-P., Darot, É, Ginsburger-Vogel, Y. et Toussaint, J. (1997) *Mots-clés de la didactique des sciences. Repères, définitions, bibliographies*, Bruxelles, De Boeck, pp. 61-65.).

Baker M., 1995, Negotiation in Collaborative Problem-Solving Dialogues, in R.J. Beun, M. Baker et M. Reiner (eds.) Dialogue and Instruction: Modeling Interaction in Intelligent Tutoring Systems, NATO ASI Series F142, Berlin: Springer-Verlag, pp. 39-55

Balacheff, N (1988) Aspects of proof in pupils'practice of school mathematics (D. Pimm, Trans.). In D. Pimm (ed.), Mathematics, teachers and children (pp. 216-235). London, UK: Hodder and Stoughton.

Ball, D.L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90,* 449-466.

Barab, S. & Squire, K. (2004). Design-Based Research: Putting a Stake in the Ground. The Journal of the Learning Sciences, 13(1): 1-14Barnes, D y Todd, F. 1995, *Communication and learning revisted. Making meaning through talk.* Boynton/Cook, Portsmouth

Barbosa, J. L. M. (1985). Geometria Euclidiana Plana. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática.

Barnes, D y Todd, F. (1995), *Communication and learning revisted. Making meaning through talk.* Boynton/Cook, Portsmouth

Bartolini Bussi 1991, Social interaction and mathematical knowledge. En P.Boero y otros (Eds) Proceedings of PME XV, Assissi 1.1-16

Bell, E. S., & Bell, R. N. (1985). Writing and mathematical problem solving: Arguments in favor of synthesis. *School Science and Mathematics, 85*, 210-221.

Berber Sardinha, A. P. 1993. *Mapa Lexical de uma Reunião de Negócios*. Working Paper 3. DIRECT Papers. CEPRIL, PUCSP, AELSU, Liverpool University.

Berrocal, Pablo F. y Zabal, M.A.M (1995). La interacción social en contextos educativos. Madrid: Siglo XXI

Bishop, A.J. (1991) Mathematical values in the teaching process. In A.J.Bishop, S.Mellin-Olsen, & J. van Dormolen (Eds) *Mathematical knowledge: its growth through teaching.* Dordrecht, Holland: Kluwer.

Boavida, Ana Maria y João Pedro da Ponte, (2011) "Investigación colaborativa: potencialiades y problemas", traducción del portugués por Diego Alejandro Pérez y Diana Jaramillo, Revista Educación y Pedagogía, Medellín, Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, vol. 23, núm. 59, enero-abril, 2011, pp. 125-135.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Boero, P. & Ferrero, E. 1994. *La produzione dei testi nel progetto "Bambini, maestri, realtà": tipologia dei testi: tecniche didattiche innovative per sostenetre la producione dei testi.* (documento interno del proyecto). Génova.

Borasi.R. 1989, Journal writing and mathematics instruction. In Educational Studies in Mathematics 20(4) Dordrecht , pp 347-375

Borasi, R., & Rose, B. (1989). Journal writing and mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics, 20*. 327-365.

Bressane, T. 2000, "*Construção de identidade numa empresa em formação*". Dissertação de mestrado. PUC-SP

Cai, J., Jakabcsin, M. S.,& Lane, S (1996). Assessing students' mathematical communication. *School Science and Mathematics, 96*, 238-246.

Camelo, F., García, G., Mancera, G. y Romero, J. (2008). Reinventando el currículo y los escenarios de aprendizaje de las Matemáticas, de la espacialidad. Un estudio desde la perspectiva de la Educación Matemática Critica. En memorias del IX Encuentro de Matemática Educativa. Valledupar – Colombia.

Cañadas, M. C. (2002). Razonamiento inductivo puesto de manifiesto por estudiantes de Secundaria. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada, España.

Cañon, C. (2006) Supuestos epistemológicos en Educación Matemática. La Gaceta de la RSME. Vol. 9-2. pp. 425-438.

Caraça, B. J. (1941) Conceitos Fundamentais da Matemática. Lisboa: Biblioteca Cosmos.

Cardoso, V. C. (1997). As teses falibilista e racionalista de Lakatos e a Educação Matemática (disertación de Maestria). Rio Claro: UNESP.

Carvalho, C. (2001). *Interacção entre pares: contributos para a promoção do desenvolvimento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Lisboa: APM.

Castle, J., (1997). "Rethinking mutual goals in school-university collaboration", en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform, New York, NY, State University of New York Press, pp. 59-67.

Castrucci, B. (1978). *Fundamentos da geometria: estudo axiomático do plano euclidiano*. Rio de Janeiro: LTC.

César, M. (1994). *O papel da interacção entre pares na resolução de tarefas matemáticas: trabalho em díade vs. trabalho individual em contexto escolar*. Lisboa: Departamento de Educação da Faculdade de Ciências de Lisboa Dissertação de doutoramento,

César, M. (2003). A escola inclusiva enquanto espaço-tempo de diálogo de todos e para todos. In D. Rodrigues (Ed.), *Perspectivas sobre a inclusão: da educação à sociedade* (pp. 117-149). Porto: Porto Editora.

César, M., & Oliveira, I. (2005). The curriculum as a mediating tool for inclusive participation: a case study in a Portuguese multicultural school. *European Journal of Psychology of Education, XX*(1), 29-43.

César, M., & Santos, N. (2006). From exclusion into inclusion: collaborative work contributions to more inclusive learning settings. *European Journal of Psychology of Education, XXI*(3), 333-346.

César, M., Bárrios, J., & Cristo, I. (in press). Investigar para aprender: análise de protocolos no desenvolvimento do professor. In AFIRSE/AIPELF (Eds.), *Actas do XV colóquio internacional AFIRSE/AIPELF*. Lisboa: FPCEUL.

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing, PNA, 6(4), 135 – 146.

Chapman, O. (2012). Prospective elementary school teachers' ways of making sense of mathematical problem posing, PNA, 6(4), 135 – 146.

Charmaz, K. (2000). Grounded theory: Objectivist and Constructivist Methods. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd edition). (pp. 509-536). Thousand Oaks, CA: Sage.

Chevallard, Y. (1992) Concepts fondementaux de la didactique: perspectives apportées par une aproche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques 12 (1) 73-112.

Christians, C. G. (2000). Paradigmatic controversies, contradictions, and emerging confluences. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd edition). (pp. 163-188). Thousand Oaks, CA: Sage.

Christiansen, H. et al. (1997). "Making the connections", en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform, New York, NY, State University of New York Press, pp. 283-292.

Christiansen, I., (1999). "Are theories in mathematics education of any use to practice?", For the Learning of Mathematics, vol. 19, núm. 1, pp. 20-23.

Clark, H. H. (1996). Communities, commonalities, and communication. In J. J. Gumperz & S. C. Levinson (Eds.), *Rethinking Linguistic Relativity.* (pp. 324-355). Cambridge University Press.

Clark, C. et al. (1996). "Collaboration as dialogue: Teachers and researchers engaged in conversation and professional development", American Educational Research Journal, vol. 33, núm. 1, pp. 193- 231.

Clark, R. A., & Delia, J. G. (1976). The development of functional persuasive skills in child hood and early adolescence. *Child Development, 47*, 1008-1014.

Clarke, D. J., Waywood, A. ,& Stephens, M. (1993). Probing the structure of mathematical writing. *Educational Studies in Mathematics,* 25, 235-250.

Climent, N. y Carrillo, J. (2008). El desarrollo profesional como práctica reflexiva: una conceptualización a partir de estudio de caso de una maestra respecto de la enseñanza de la matemática. Documento Interno. Master IEAC

Cobb, P. & Bauersfeld, H. (1995). *Emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Cobb, P. y Whitenack, J. W. (1996). *A Method Conducting Longitudinal Analyses of Classroom Videocordings and Transcripts.* En *Educational Studies in Mathematics 30*: 213-228.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. Journal for Research in Mathematics Education, 23, 2-33

Cobb, P., Wood, T., & Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In N. Minick, E. Forman, & A. Stone (Eds.), *Education and Mind: Institutional, Social, and Developmental Processes* (pp. 91-119). Oxford, England: University Press.

Cobo, P. (1998). *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superfícies planas. Un estudio de casos*. Tesis doctoral. Dept. Didáctica de la Matemática i de les Ciències de la UAB. Inédita.

Cohen, L., Manion, L., & Morrisson, K. (2000). *Research methods in education* (5^{th} ed.). London and New York: Routledge/Falmer.

Coll, C. y Solé, I. (1987): «La importancia de los contenidos en la enseñanza», en Investiga-ción en la Escuela, nº 3, pp. 19-27.Collins, H. (ed.). 1994. *The Especialist*. São Paulo, EDUC

Collins, A. (1999). The changing infrastructure of education research. En E. Lagemann y L . Shulman (Eds), Issues in education research (pp. 289-298). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Collins, A et al. (2004). The changing infrastructure of education research. En E. Lagemann y L . Shulman (Eds), Issues in education research (pp. 289-298). San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Collins, A.; Joseph, D. & Bielaczyc, K (2004) Design research: Theoretical and Methodological Issues. *The Journal of the Learning Sciences* 13(1) 15-42

Comiti y Grenier; 1997; Regulations didactiques et changements de contrats Recherches en Didactique des Mathématiques vol 17(3) 81-102

Connolly, P. (1989). Writing and the ecology of learning. In P. Connolly & T. Vilardi (Eds.), *Writing to Learn Mathematics and Science* (pp. 1-14). New York: Teachers College Press.

Connolly, P., & Vilardi, T. (Eds.). (1989). *Writing to Learn Mathematics and Science*.New York: Teachers College Press.

Contreras,A.; Font,V.;Luque,L; Ordoñez, L.(2005) ARElgunas aplicaciones de la teoria de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. Recherches en didactique des mathématiques 25 (2) 151-186.

Corbin, J., & Strauss, A. (2008). *Basics of qualitative research: Techniques and procedures for developing grounded theory* (3rd ed.). London: Sage Publications

D'Ambrósio, U. (2002). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo Horizonte: Autêntica.

Dagher, Z. & Cossman, G. (1992). Verbal explanations given by science teachers: Their nature and implications. *Journal of Research in Science Teaching,* 29, 361-374.

Day, C., (1999) *Developing Teachers: The Challenges of Lifelong Learning*, London, Falmer. and using codebooks. In B. Crabtree, & W. Miller (Eds.), *Doing Qualitative Research* (pp. 93-109). London: Sage.

De Landsheere, Gilbert. (1996) La investigación educativa en el mundo. México: Fondo de Cultura Económica.

Delia, J. G., Kline, S. L., & Burleson, B. R. (1979). The development of persuasive communication strategies in kindergartners through twelfth-graders. *Communication Monographs, 40*, 241-256.

Delia, J. G., O'Keefe, B. J., and O'Keefe, D. J. (1982). The constructivist approach to communication. In F. E. X. Dance (ed.). *Human Communication Theory: Comparative Essays.* (pp. 147-191). New York: Harper & Row.

Drake, B. M., & Amspaugh, L. B. (1994). What writing reveals in mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics, Summer Edition, 16(3)*, 43-50.

Dubar, C. (1997). *A socialização: construção das identidades sociais e profissionais.* Porto: Porto Editora.

Ebert, C.L. (1993). *An assessment of prospective secondary teachers' pedagogical content knowledge about functions and graphs*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 366 580).

Eggins, S. 1994. *An Introduction to Systemic Functional Linguistics*. London, Pinter Publishers.

Fairclough, N. (1989). *Language and Power*. London, Longman, Favilli, F., César, M., & Oliveras, M.L. (2004). *Projecto IDMAMIM: matemática e intercultura*. Pisa: Universidade de Pisa [3 CdRoms: La Zampoña, Os Batiques e Las Alfombras].

Fairclough, N. 1989. *Language and Power*. London, Longman,

Flecha, R.; Gómez, J.; Puigvert, L. (2001). Teoría sociológica contemporánea. Barcelona, Paidós.

Fleuri, R. (2005). *Intercultura, educação e movimentos sociais no Brasil*. [Versão electrónica]. Retirado a Maio 26, 2007 de http://www.paulofreire.org.br/Textos/fleuri_2005_recife_resumo_e_texto_completo.pdf

Freire, P (1978) Pedagogia do oprimido. Rio do Janeiro. Ed Paz e Terra

Freudenthal, 1973 Didactical Phenomenology of Mathematics Streuctures. Dordrecht. Kluwer.

Friesen, D., 1997, "The meaning of collaboration: Redefining pedagogical relationships in students teaching", en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform, New York, NY, State University of New York Press, pp. 219-231.

Garofalo, J., & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education. 16*(3), 163-176.

Gerdes, P. (1996). Etnomatemática e educação matemática: uma panorâmica geral. *Quadrante, 5*(2), 105-138.

Gerdes, P. (2007). *Etnomatemática: reflexões sobre matemática e diversidade cultural*. Vila Nova de Famalicão: Edições Húmus.

Gilly, M., Fraisse, J., & Roux, J.-P. (2001). Résolutions de problèmes en dyades et progrès cognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans: dynamiques interactives et mécanismes sócio-cognitives. In A.-N. Perret-Clermont, & M. Nicolet (Eds.), *Interagir e connaître: enjeux et régulations sociales dans le développement cognitive* (2ª ed., pp. 79-101). Paris: L'Harmattan. Dispoibe em http://www.eses.pt/interaccoes MATEMÁTICA COM ARTE **161**

Giménez, J. (1997). *Evaluación en Matemáticas: Una Integración de perspectivas*. Madrid. Editorial Sintesis.

Giménez, J., Font, V., y Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process in Margolinas, C. (Ed.). Task Design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22. Oxford

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research.* Mill Valley, CA: Sociology Press.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de profesores de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM. Recife.

Goldin, G.A.: (1988), 'Affective representation and mathematical problem solving', in M.J. Behr, C.B. Lacampagne and M.M. Wheler (eds.), Proceedings of the Tenth Annual Meeting on the PME, North American Chapter of International Group, Vol. II North Illinois University. DeKalb, pp. 1–7

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. In A. Cuoco, & F. Curcio (Eds.). *The Roles of Representation in School Mathematics*. (pp. 1-23). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics

Goldin, G.A.: (1988), 'Affective representation and mathematical problem solving', in M.J. Behr, C.B. Lacampagne and M.M. Wheler (eds.), Proceedings of the Tenth Annual Meeting on the PME, North American Chapter of International Group, Vol. II North Illinois University. DeKalb, pp. 1–7

Goleman, D. (1995). *Emotional Intelligence*. Nueva York: Bantam Books. (Trad. Cast. Kairós, 1996).

Gómez-Chacón, I.M.: (1995), 'Mathematics in the "Centro-Taller": Looking for the conections between the affective issues and the cultural influences in the mathematical learning', A paper presented at the 19th Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), in Booklet Cultural aspects in the Learning of Mathematics, Some current developments. PME19, Recife, pp. 33–46.

Gómez-Chacón, I.M.: (1998), Matemáticas y contexto. Enfoques y estrategias para el aula. Narcea, Madrid. Gómez-Chacón, I.M.: 1998a, 'Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas', Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas, 16 (3), 431–450.

Gómez-Chacón, I.M.: (1997), Procesos de aprendizaje en matemáticas con poblaciones de fracaso escolar en contextos de exclusión social. Las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas, Doctoral Dissertation, Universidad Complutense de Madrid, Spain.

Gomez-Chácon, I. M. (2000). Matemática Emocional: Los afectos en el aprendizaje matemático. Madrid: Narcea

Goulet, L., y B. Aubichon, (1997), "Learning collaboration: Research in a First Nations teacher Investigación colaborativa: potencialidades y problemas Revista Educación y Pedagogía, vol. 23, núm. 59, enero-abril, 2011 135 Educación matemática: enfoque sociocultural cation program", en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz, y M. Macers, orgs., 1997 Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform, New York, NY, State University of New York Press. pp. 115-127.

Halliday, M. A. K. (1985) (1st edition), 1994 (2nd edition). *An Introduction to Functional Grammar*. London, Edward Arnold Hodge, R. e Kress, G. 1993. *Language as Ideology*. 2ª edição. London: Routledge

Hargreaves, A.,(1998), *Os professores em tempos de mudança*, Lisboa, Mc Graw-Hill.

Heller, M. y Martin-Jones, M. (2001). Introduction: symbolic domination, education and linguistics differences. In M. Heller and M. Martin Jones (eds), Voices of Authority: Education and Linguistic Differences. Westport, CT: Ablex, 1-28

Hermans, H. (1996). Voicing the Self: From information processing to dialogical interchange. *Psychological Bulletin, 119*(1), 31-50.

Hermans, H. (2001). The construction of a personal position repertoire: method and practice. *Culture and Psychology, 7*(3), 243-281

Hodge, R. e Kress, G. (1993). *Language as Ideology*. 2ª Ed.. London: Routledge.

Hodson D. y Hodson J. (1998): From constructivism to social constructivism: a Vygotskian perspective on teaching and learning science. School Science Review, 79 (289), 33-41.

Hookey, M., S. Neal y Z. Donoahue, 1997, “Negotiating collaboration for professional growth: A case of consultation”, en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform, New York, NY, State University of New York Press, pp. 69-81.

Howarth, C. (2006). A social representation is not a quiet thing: exploring the critical potential of social representations theory. *British Journal of Social Psychology, 45*, 65-86.

Hodson D. y Hodson J. (1998): From constructivism to social constructivism: a Vygotskian perspective on teaching and learning science. School Science Review, 79 (289), 33-41.

Jaworski, B. (1994) Investigating mathematics teaching: A constructivist enquiry. London: Falmer Press.

John-Steiner, V.,Weber,R & Minnis,Y. (1998). “The challenge of studying collaboration”, American Educational Research Journal, vol. 35, núm. 4, pp. 773-783

Jorba, J, Gómez, I. & Prat, A. (2010) Hablar y escribir para aprender: uso de la lengua en situación de enseñanza-aprendizaje desde las áreas curriculares. UAB. Madrid: Editorial Síntesis

Kelly, A. E. (2004). Design research in education: yes, but is it methodological? *The Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 115-128.

Knipping, C. (2003) Argumentation structures in classroom proving situations. Paper contributed to working Group 4: Argumentation and Proof, Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 3), Bellaria 2003.

Koschmann, T. et al. (2003). Problematizing the problem: A single case analysis in a dPBL meeting. In B. Wasson, S. Ludvigsen & U. Hoppe (Eds.), Designing for change in networked learning environments: Proceedings of the international conference on computer support for collaborative learning (CSCL '03) (pp. 37-46). Bergen, Norway: Kluwer Publishers.

Koschmann, T., Stahl, G., & Suthers, D. (2006). Computer-supported collaborative learning: An historical perspective. In R. K. Sawyer (Ed.), Cambridge handbook of the learning sciences (pp. 409-426). Cambridge, UK: Cambridge University Press

Kress, G. e van Leeuwen, T. 1996. *Reading Images. The Grammar of Visual Design*. London, Routledge

Kumpulainen, K., Hmelo-Silver, C., & César, M. (2009). *Investigating classroom interactions: methodologies in action*. Rotterdam: Sense Publishers

Lakatos, I. (1978). Pruebas y Refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático. Madrid: Alianza Editorial.

Lampert, M. (1998). Mathematical talk: What is there to teach and how might it be learned? In Lampert, M. & Blunk, M., (Eds.), Talking Mathematics: Studies of Teaching and Learning in School . NY: Cambridge University Press.

Lampert, M. (1998). Why study mathematical talk and school learning? In Lampert, M. & Blunk, M., (Eds.), Talking Mathematics: Studies of Teaching and Learning in School . NY: Cambridge University Press.

Lave, J. (1996). Teaching, as learning, in practice. *Mind, Culture, and Activity, 3*(3), 149-164.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge, USA: Cambridge University Press

Lemke, J.L. (1997). *Aprender a hablar ciencia: Lenguaje, aprendizaje y valores.* Buenos Ayres: Paidós.

Leontiev, A. N. (1978) Actividad, conciencia y personalidad. Buenos Aires, Ed. Ciencias del Hombre.

Lins, R. (1995). O modelo teórico dos Campos Semânticos: Uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. In Dynamis pp. 29-39.

Lins, R. (2012). O Modelo dos Campos Semânticos: estabelecimentos e notas de teorizações, in Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática: 20 anos. Org. Angelo et alii. São Paulo: Midiograf

Llado, C. 1996, Interacción social, lenguaje y aprendizaje de la matemática. En *UNO Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8 Barcelona : 53-67

Lopes, A. J. (1987). Erreurs: Mensoges qui semblent vérites ou vérites qui semblent mensoges. In: 39. Encuentro de la CIEAEM. *Role de L'Erreur dans L'Apprentissage et L'Enseignement de la Mathematique*. Sherbrooke: Les Éditions de L´Université de Sherbrooke, 1987. v. 1. p. 440-443.

Lopes, A. J. (2000). *Textos de Redacción-evaluación matemáticos: Análisis de la producción de significados por alumnos de 13-14 años.* Tesina. UAB (no publicada)

Lyons, J. (1996). *Semântica.* São Paulo, Ed. Presença / Martins Fontes.

Mason, J. , Burton, L. y Stacey, K. (1988). *Pensar Matematicamente*. Barcelona: Labor

Mason, J. (2001). Aspects of generalization and algebra: exploiting children's power. In: Haggarty, Linda ed. Aspects of teaching secondary mathematics: perspectives on practice. London, UK: Routledge Falmer, pp. 105–120.

Meira, L. (1994). Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. Temas em psicologia. pp. 50-71

Mercer, N. (1998). As perspectivas socioculturais e o estudo do discurso em sala de aula. In: Coll, C; Edwards, D. (eds.) *Ensino, aprendizagem e discurso em sala de aula: aproximações ao estudo do discurso educacional.* Porto Alegre: Art Med. Cap. 1.

Mercer, N. (2001). Palabras y mentes: cómo usamos el lenguaje para pensar juntos. Buenos Aires: Paidós, 2001

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: a qualitative approach.* San Francisco: Jossey-Bass Publishers. Meira, L. 1994. Análise microgenética e videografia: ferramentas de pesquisa em psicologia cognitiva. *Temas em psicologia.* pp. 50-71.

Mitchell, J. (2003). On-line writing: a link to learning in a teacher education program. Teaching and Teacher Education, 19(1), 127-143

Moise, E. E., Downs, F. L. (1971). *Geometria Moderna*. São Paulo. Editora Edgard Blucher

Moll, L. C., González, N. & Amanti, C (eds). (2005) Funds of Knowledge: Theorizing Practices in Households, Communities and Classrooms. NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Moreira, D. (2007). Infilling the gap between global and local mathematics. In CERME 5 (Eds.), *CERME 5 Proceedings*. [Versão electrónica]. Retirado a Abril 29, 2007 de http://www.cyprusisland.com/cerme/Group10/GROUP%2010_6.doc

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically* . London. Falmer Press

Morin, E. (1990). *Introdução ao pensamento complexo.* Trad. Dulce Matos. 2a ed. Lisboa: Instituto Piaget.

Mortimer, E.F. and Scott, P.H. (2000) Analysing discourse in the science classroom. In Leach, J., Millar, R. and Osborne, J. (Eds) *Improving Science Education: the contribution of research.* Milton Keynes: Open University Press.

Nieto, S. (2002). *Language, culture and teaching: critical perspectives for a new century*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum

Olson, M., (1997). "Collaboration: An epistemological shift", en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Refor*m, New York, NY, State University of New York Press, pp. 13-25

Pena-Shaff, J. & Nicholls, C. (2003). Analyzing student interactions and meaning construction in computer bulletin board discussions. Computers & Education, 12, 243-256.

Perrin-Glorian, M. J. & Hersant, M. (2003). Milieu et contract didactique outils pour l´analyse de sequences ordinaries. Rechercers en didactique des Mathématiques, 23(2), 217-276

Perry, M. (2000). Explanations of mathematical concepts in Japanese, Chinese, and U.S. first and fifth- grade classrooms. *Cognition and Instruction,* 18(2), 181-207.

Philipsen, G. (1997). A theory of speech codes. In G. Philipsen & T. L. Albrecht (Eds.). *Developing Communication Theories.* (pp. 119-156) Albany, NY: State University of New York Press.

Pirie, S. E. B. (1998). Crossing the gulf between thought and symbol: Language as (Slippery) stepping-stones. In H. Steinbring, M. G. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.) *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* (pp. 7-29) Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Piscarreta, S. (2002). *Malmequer, bem-me-quer, muito, pouco ou nada: representações sociais da Matemática em alunos do 9º ano de escolaridade.* Lisboa: APM.

Piscarreta, S., & César, M. (2004). Desafinado... ou o meu primeiro amor: a construção das representações sociais da matemática. *Vetor Neteclem*, *2*(s/n.º), 31-51.

Ponte, J. P., I. Segurado y H. Oliveira, 2003, "What happens when pupils work on mathematical investigations?", en: A. Peter-Koop et ál., orgs., Collaboratiojn in Teacher Education: Examples from the Context of Mathematics Education, Dordrecht, Kluwer, pp. 85-97.

Porter, M. K. & Masingila, J. O. (2000). Examining the effects of writing on conceptual and procedural knowledge in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 42*, 165-177.

Powell, A. B. (1997). Capturing, examining, and responding to mathematical thinking through writing. *The Clearing House: A Journal of Educational Research,Controversy, and Practices,* 71(1), 21-25

Powell, A y Lopez, J.A. (1989). Writing as a vehicle to learn mathematics: A case study.En P.Connolly & T Villardi (Eds) Writing to learn mathematics and science, New York, Teachers College Press, pp 157-177

Powell, A. B., & Ramnauth, M. (1992). Beyond questions and answers: Prompting reflections and deepening understanding of mathematics using multiple-entry logs. *For the Learning of Mathematics: An International Journal of Mathematics Education*, 12(2), 12-18.

Pugalee, D. K. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of students' problem solving processes. *Educational studies in mathematics, 55*, 27-47.

Ramos, Rosinda C. G. 1997. *Projeção de Imagens através de Escolhas Linguísticas: Um Estudo no Contexto Empresarial*, tese de doutorado Morgan, Candia. 1998, *Writing mathematically* . London. Falmer Press.

Reason, P., (1988[a]), "Introduction", en: P. Reason, org., Human Inquiry in Action. Developments in New Paradigm Research, London, Sage Publications, pp. 1-17. _, 1988b, "The co-operative inquiry group", en: P. Reason, org., Human Inquiry in Action. Developments in New Paradigm Research, London, Sage Publications, pp. 19-38.

Santos, V. B. M. P. 1996. *Padrões Interpessoais no Gênero de Cartas de Negociação*. Dissertação de Mestrado. PUCSP

Rogoff, B. (1990). *Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context.*New York: Oxford University Press.

Rogoff, B., Mistry, J., Goncu, A, & Mosier, C. (1993). Guided Participation in cultural activity by toddlers and caregivers. *Monographs of the Society for Research in Child Development, 58*(8, Serial No. 236).

Rowan, K. E. (1999). Explanatory Skills. In A.L. Vangelisti, J.A. Daly, & G.W. Friedrich. *Teaching Communication: Theory, Research, and Methods (2nd Ed.).* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Salovey, P. y Mayer, J.D. (1990). Emotional intelligence. *Imagination, Cognition, and Personality*, 9, 185-211.

Santos, V. B. M. P. (1996). *Padrões Interpessoais no Gênero de Cartas de Negociação*. Dissertação de Mestrado. PUCSP

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In Cognitive science and mathematics education (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum

Schoenfled, A.H (1992), Metacognition and sense-making in Mathematics en D.A.Grows (Ed) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York McMillan pp 334-389.

Schubauer-Leoni, M.L., & Perret-Clermont, A.-N. (1997). Social interactions and mathematics learning. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: an international perspective* (pp. 265-283). Hove: Psychology Press.

Schwandt, T. A. (2000). Three epistemological stances for qualitative inquiry. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (2nd edition). (pp. 189-213). Thousand Oaks, CA: Sage.

Seeger, F. (1998). Discourse and beyond: on the ethnography of classroom discourse. InH. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shavelson, R. J. y Towne, L. (2002). Scientific research in education. Washington, DC: National Academy Press

Shield, M., & Galbraith, P. (1998). The analysis of student expository writing in mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 36*. 29-52.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Constructivist, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* (pp. 30-62). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Silver, E. A., Leung, S. S., and Cai, J. (1995). Generating multiple solutions for a problem: a comparison of the responses of U.S. and Japanese students. *Educational Studies in Mathematics, 28*, 35-54.

Silver, E. A., Smith, M. S. (1996). Building discourse communities in mathematics classrooms: a worthwhile but challenging journey. In P.C. Elliott & M.J. Kenney (Eds.), *Communication in Mathematics, K-12 and Beyond.* Reston, VA: NCTM.

Skovsmose, O. (2000). *Cenários para investigação*. *Bolema, 14*, 66-91.

Soury-Lavergne, S. (1998). Etayage et explication dans le preceptorat distant, le cas de telecabri. Thése de doctorat. Université Joseph-Fourier - Grenoble

Spradley, J. (1997). Ethnography and culture. In J. Spradley, & D. McCurdy (Eds.), *Conformity and conflict: reading in cultural anthropology* (pp. 18-25). Boston MA: Little, Brown and Company.

Stake, R. (2000). Case studies. In N. Denzin, & Y. Lincoln (Ed.), *The handbook of qualitative research* (pp. 435-454). Thousand Oaks: Sage Publications. Disponible en internet http://www.eses.pt/interaccoes

Sthenhouse, L. (1984). Library acess, library use and user education in Academic Sixth Forms. In R. Burgess (Ed.), *Theresearch process in education settings: ten case studies* (pp. 211-233). Lewes: Falmer Press, integralmente transcrito]. Stoer, S., & Magalhães, A. (2005). Contributos para a reconfiguração da educação inter/multicultural. In S. Stoer, & A. Magalhães, A diferença somos nós. *A gestão da mudança social e as políticas educativas e sociais* (pp. 137-142). Porto: Edições Afrontamento

Stenhouse, L . (1993). The verification of descriptive case studies. In R. Burgess, & J. Rudduck (Eds.), *A perspective on educational case study* (pp. 59-86). Coventry: Center for Educational Development, Appraisal and Research, University of Warwick.

Stewart, H., 1997, “Metaphors of interrelatedness: Principles of collaboration”, en: H. Christiansen, L. Goulet, C. Krentz y M. Macers, orgs., *Recreating Relationships: Collaboration and Educational Reform*, New York, NY, State University of New York Press, pp. 27-53

Stoer, S., & Magalhães, A. (2005). Contributos para a reconfiguração da educação inter/multicultural. In S. Stoer, & A. Magalhães, *A diferença somos nós. A gestão da mudança social e as políticas educativas e sociais* (pp. 137-142). Porto: Edições Afrontamento

Suarez, D. (2005). *La documentación narrativa de experiencias pedagógicas. Una estrategia para la formación de maestros.* Buenos Aires: MECyT / OEA.

Teles, L. (2005). *Matemática com arte: um microprojecto intercultural adaptado a alunos da escola de dança do conservatório nacional*. Lisboa: APM.

Tele, L., & César, M. (2006). Dancing with mathematics: collaborative work and project work contributions to mathematics learning. In A. Breda, R. Duarte, & M. Martins (Eds.), *Proceedings of the International Conference in Mathematics, Sciences and Science Education* (pp. 162-169). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Thiollent, M. (1992). Metodologia da Pesquisa-Ação. São Paulo, Cortez.

Thompson, G. e Thetela, P. 1995. *The Sound of Hand Clapping: the Management of Interaction in Written Discourse*. Text, 15(1): 103-127

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1994). Talking about rates conceptually. Part I: A teacher's struggle. *Journal for Research in Mathematics Education, 25,* 279-303.

Tolchinsky, L. (2001) Developmental aspects in learning to write. Dordrecht: Kluwer

Valero, P. (2002). Consideraciones sobre el contexto y la educación matemática para la Democracia. Recuperado en internet el 12 de septiembre de 2013 de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/articulos/otros/politica/Consideraciones%20sobre%20el%20contexto%20y%20la%20educaci%C3%B3n%20matem%C3%A1tica%20para%20la%20democracia*Valero,%20Paola*Valero,%20P.%20Consideraciones%20sobre%20el%20contexto%20y %20la%20...2002.pdf

Valls, Amparo T. (1997) Análisis de la conversación. Barcelona: Editorial Ariel.

Valsiner, J. (1997). Subjective construction of intersubjectivity: semiotic mediation as a process of pre-adaptation. In M. Grossen, & B. Py (Eds.), Pratiques sociales et médiations symbóliques (pp. 45-59). Berlin: Peter Lang.

Valsiner, J. (1998). *Indeterminação restrita nos processos de discurso*. In Ensino, aprendizagem e Discurso em Sala de aula org. Coll, C y D. Edwards. Porto Alegre, Artes Médicas.

Van Zee, E. H. (2000). Analysis of a student-generated inquiry discussion. *International Journal of Science Education*, 22, 115-142.

Van Zee, E. H., & Minstrell, J. (1997). Reflective discourse: developing shared understandings in a physics classroom. *International Journal of Science Education,1*9, 209-228.

Veerman A. (2003). Constructive discussions through electronic dialogue. In Arguing to Learn: Confronting Cognitions En: Computer-Supported Collaborative Learning Environments.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), Proceedings of the 4th PME conference (pp. 177–184). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Vion, R. (1992). *La communication Verbale. Analyse des interactions* Hachette Supérieur, Paris.

Voig, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In P. Cobb, & H. Bauersfeld. *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Volosinov, V.N. 1973. *Marxism and the Philosophy of Language*. Transl. by L. Matejka and I.R. Titunik. New York: Seminar..

Vygotsky, L. (1932/1978). *Mind and society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press [Original publicado em russo, em 1932].

Wagner, J., (1997), "The unavoidable intervention of educational research: A framework for reconsidering researcher-practitioner cooperation" Educational Researcher, vol. 26, núm. 7, pp. 13-22.

Watson, G. (1995, April). *Middle school mathematics teacher change: Social constructivism climbs a step.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Boston, MA. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 382 469).

Webb, N. M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small groups. *Journal for Research in Mathematics Education,* 22, 366-389.

Wells, G. (1998). Da adivinhação à previsão: discurso progressivo no ensino e na aprendizagem de ciências. Pp. 107142. In Ensino, Aprendizagem e discursos em sala de aula: Coll, C y Edwards, D. (orgs.) Porto Alegre: Artmed

Wenger, E. (1999). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press. http://www.eses.pt/interaccoes
Wenger, E (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad*. Paidós.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action.*.Cambridge: Harvard University Press.

William, S. R., & Baxter, J. A. (1996). Dilemmas of discourse-oriented teaching in one middle school mathematics classroom. *The Elementary School Journal,* 97, 21-38.

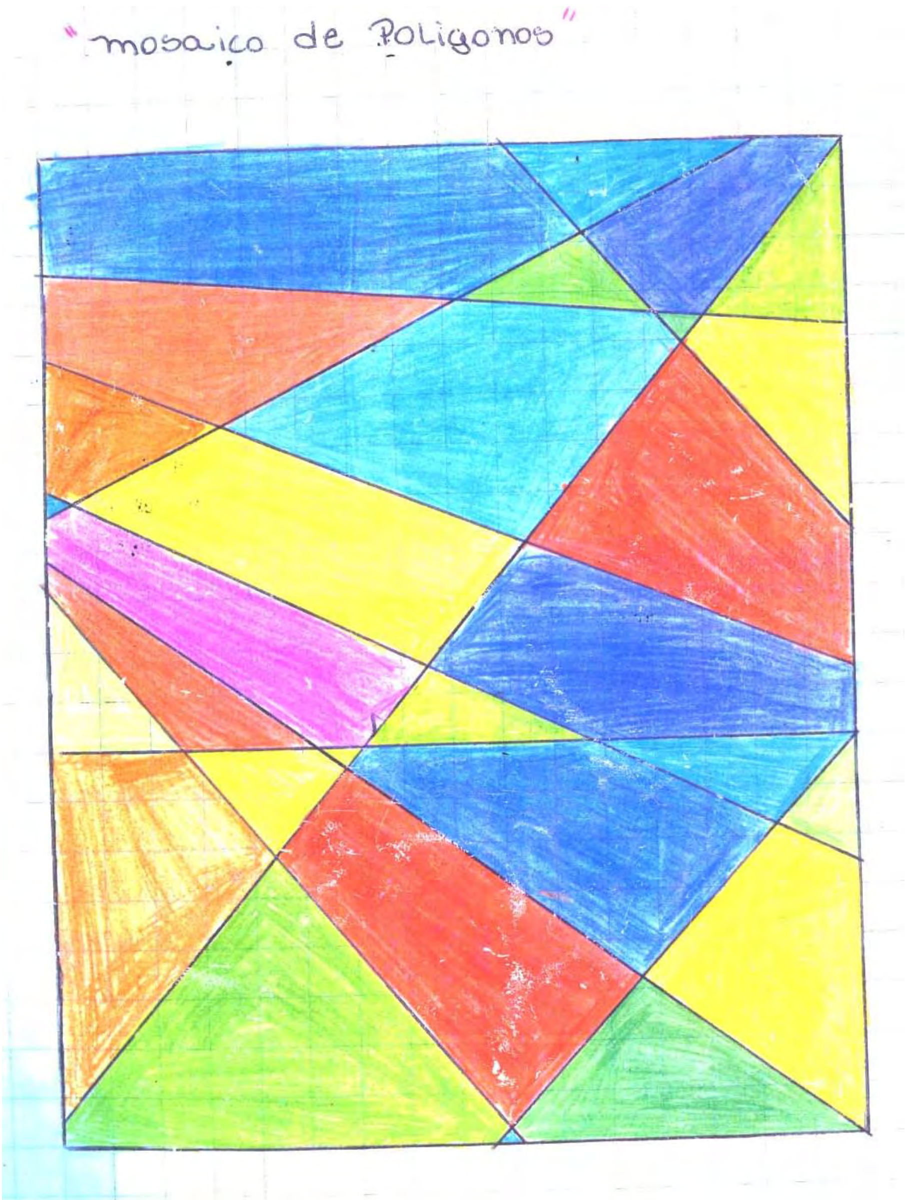
Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal forResearch in Mathematics Education, 30*, 171-191.

Yackel, E. (1995). Children's talk in inquiry mathematics classrooms. In P. Cobb, & H.Bauersfeld. *The Emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures. Hi*llsdale NJ Erlbaum.

ANEXOS

ANEXO 1

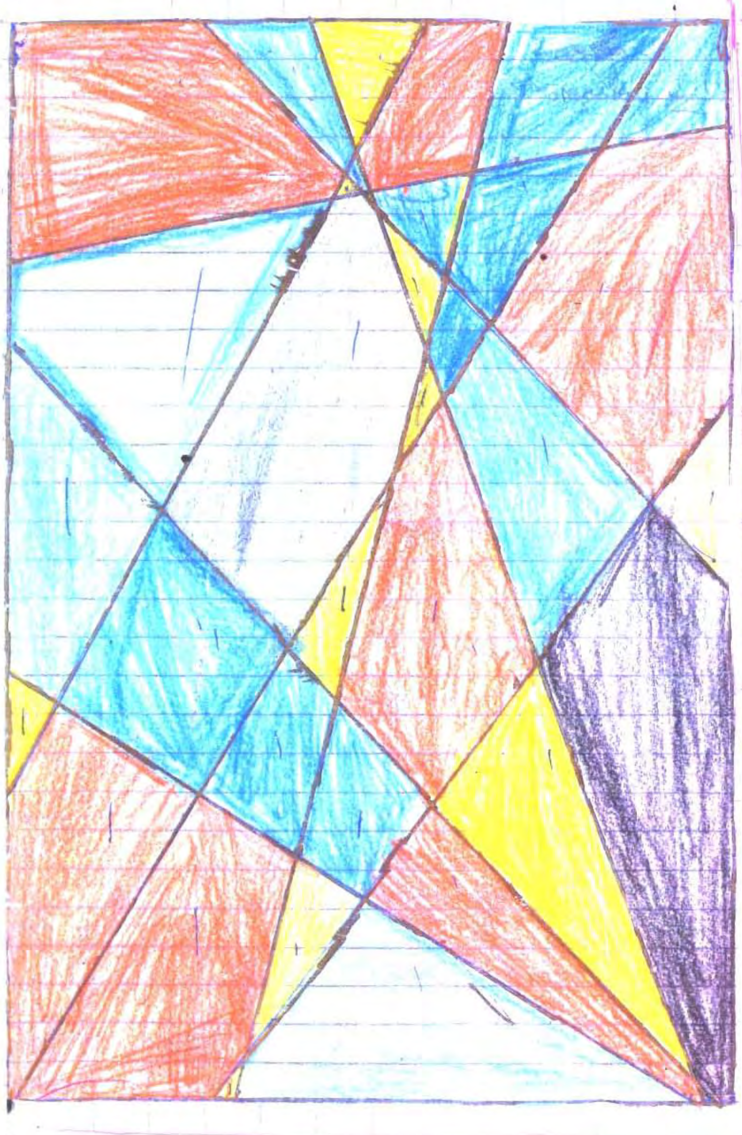
ACTIVIDAD SOPORTE DEL CAPITULO 4 MOSAICOS Y POLIGONOS



03/3/94

"Mosaico de Polígonos

ATV 1 Faça 10 traços da borda em borda, de modo a produzir um mozaico. Depois, descubra todos os polígonos e pinte-os



Legenda:

Hexágonos 1

pentágonos 7

quadriláteros 14

triângulos 9

ANEXO 2

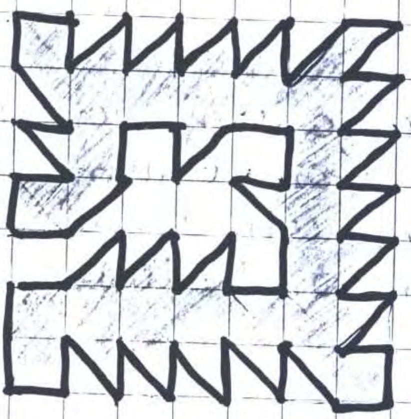
ACTIVIDAD SOPORTE DE CAPITULO 4

GRADO DE NO CONVEXIDAD

"Vértices e lados"

ATV 6

construa no pontilhado um polígono cujos os vertes devem coincidir com os pontos. O polígono deverá ter o maior número de lados



PROPO- JOÃO:
o polígono com o maior número de lados que pode ser construído num pontilho 8x8 tem 64 lados

Fernanda produziu um 64-ágono

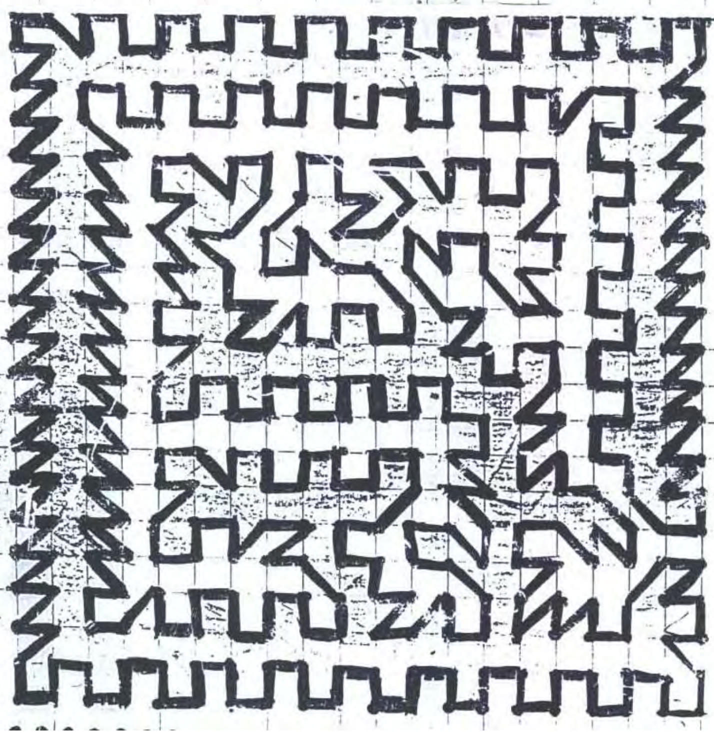
GEOMETRIA

"PROBLEMA do Gustavo

"Como o pentaminó é possível formar retângulos. Quais são os outros pentaminós que não é possível formar retângulos?"

LPADLDL 

Bolar comando do logo para



Luciana

7 / 04 / 97

ANEXO 3

ACTIVIDAD DE SOPORTE DE CAPITULO 4 LOS ANGULOS DE UN RELOJ

13 de abril de 1995, são 12h00, todos dentro da sala de aula.

O professor percorre as carteiras enfileiradas fazendo a devolução das lições feitas, comentando-as. Esses registros têm a função de marcar a presença do adulto-docente no controle dos combinados (contrato explícito), ritualizam alguns dos momentos da avaliação contínua.

P -- Bom dia turma. Vão sentando e abrindo o caderno de geometria.

O professor se desloca pela sala, acelerando a preparação do material sobre a mesa.

A1 -- Eu fiz a lição de casa viu.

P -- É o que eu esperava. E que tal a lição ? Foi bom fazer ?

A1 -- Foi.

P -- Levantem a mão aqueles que fizeram a lição de casa.

Um pouco mais de 4/5 da turma levanta a mão, enquanto isso o professor pergunta a cada um, quantos minutos levou para fazer a tarefa.

A1 -- 5 minutos

A2 -- 4 minutos

A3 -- Eu levei 8 minutos.

P -- Olha aí, no máximo 8 minutos, qualquer desculpa do tipo "não deu tempo", não pode ser aceita.

O professor escreve no quadro o problema original, proposto na aula anterior, que consiste em:

Determinar o ângulo formado pelos ponteiros do relógio, quando marca:

a) 7h20 (hora da entrada)
b) 10h40 (hora do parque)
c) 12h45 (hora da saída)
d) A hora em que você nasceu.

Os alunos são encorajados a ir ao quadro para expor suas soluções.

O professor alterna as falas dos alunos que fizeram a lição com aqueles que não a fizeram, a fim de inserir esses últimos no ambiente de trabalho, de modo que não se sintam ou fiquem marginalizados. Além do fato de que a discussão em sala de aula, neste caso, não depender exclusivamente do que foi produzido em casa.

Flávio explica seu método, no caso em que o relógio marca 7h20.

F -- Faz de conta que é um círculo.

Diz sorrindo, após desenhar uma curva disforme. Faz ajustes na curva para que ela pareça o mais possível uma circunferência. Faz as marcações das horas colocando na ordem 12, 3, 6 e 9, faz em seguida as marcações do 1, 2, 4, 5 e 7.

F -- Deu 110^o.

P -- Como você chegou a este resultado ?

F -- Eu desenhei e medi.

P -- Pessoal. O Flávio desenhou e mediu, como vocês chamariam este método.

An -- Método experimental.

Dizem 2 ou 3 alunos.
P -- *Alguém resolveu através de um método não experimental.*
G -- *Eu.*
Diz Gabriel com o braço levantado.
Gabriel aproveita o relógio desenhado por Flávio e explica
G -- *Cada hora vale 30^o.*
Explica mostrando com a mão apontando a abertura entre 4 e 5.
G -- *É mais que 90^o por que o ponteiro das horas anda para a esquerda.*
P -- *Anda quanto ?*
G -- *Olha eu vi que cada 2 minutos correspondem a 1^o, no ponteiro das horas. 20 minutos andam 10^o.*
G -- *Então dá 100^o.*
A -- *Não entendi.*
Fala uma aluna da fileira da esquerda.

G -- *90^o que já era, mais 10^o que o ponteiro das horas andou, dá 100^o.*
Explica Gabriel mostrando com a mão e com o giz, simulando o movimento dos ponteiros do relógio.
Ian, com a mão levantada, se oferece para descrever seu método.
I -- *Se o ponteiro das horas não se mexer, 7 e 20 fazem 90^o. Mas como o ponteiro dos minutos andou 20 minutos, isto corresponde a 1/3 de hora, então o ponteiro das horas vai andar 1/3 de 30^o, que é 10^o.*
Do fundo da classe Flávio problematiza.
F -- *E se for 7 horas e 14 minutos ?*
I -- *Vai dar quebrado, os graus vão ser fracionados.*
O professor procura "ler" o pensamento e as hipóteses de Flávio. Supõe que ele compreendeu o método do Ian, mas conjecturou que tratava-se de um método que só poderia funcionar com frações "bem comportadas", ou seja, aquelas cujos denominadores são divisores de 60.
Enquanto isto a classe é solicitada a resolver o problema das 10h40 através do método do Ian.
Muitos alunos se candidatam a resolver verbalmente ou indo ao quadro.
Depois de alguns exemplos mais, o professor está seguro de que o método do Ian foi dominado pela maioria do grupo.
P -- *Alguém tem um outro método para expor ?*
Maria, com a mão levantada, inicia sua explicação sobre como determinou o ângulo formado pelos ponteiros do relógio na hora em que nasceu.
M -- *Num relógio, entre uma hora e outra, tem 5 risquinhos.*
Maria tenta mostrar um relógio em que estão marcadas as horas cheias, e há marcações para os 60 minutos na volta completa. O professor deixa a explicação correr e não corrige o equivoco sobre o número de risquinhos que marcam os intervalos de minuto, são 4 e não 5, entre dois números consecutivos no mostrador do relógio.
M -- *A distância entre cada risquinho ...*
Ela está se referindo à distância angular que, entretanto, ainda não foi conceituada como distância.
M -- *. . é 5^o, porque 30^o dividido por 6 dá 5^o.*
Embora não verbalize, Maria assume a relação que faz com que 5 risquinhos determinem 6 intervalos.
M -- *Para achar, por exemplo, o ângulo formado pelos ponteiros do relógio quando este marca 6:20, eu somo 30^o + 30^o que dá 60^o, mais o que o ponteiro das horas andou para a esquerda, como são 6 intervalos, cada intervalo*

de 5º corresponde a 10 minutos percorridos pelo ponteiro dos minutos,
... como são 6:20, então o ponteiro das horas avança 10º. 60º + 10º = 70º.

P -- *Em que horas você nasceu ?*
A1 -- *10:30.*
P -- *Qual é o ângulo correspondente ?*
A2 -- *135º*
A3 -- *9:05.*
P -- *E o seu ?*
Gabriel com olhar maroto, não fala as horas em que nasceu.
G -- *Eu nasci quando tava 100º.*
Gabriel (em geral pouco participativo) mostra que captou e incorporou um dos objetivos procedimentais do curso de geometria, que é o de problematizar, jogar com os cenários e situações de desafio. Ademais sua postura põe acento em um aspecto importante da resolução de problemas que é o de explorar a situação inversa à do ponto de partida..
Num contexto mais "tradicional" os estudantes teriam dito a hora de seu nascimento. Aqui todos calam. Há um contrato assumido de que o ambiente de problematização não deve desvelar as respostas gratuitamente.
Ciente disso o professor devolve para a classe o novo problema.
P -- *Turma. Quando o Gabriel nasceu os ponteiros do relógio formavam um ângulo de 100º. Em que hora ele nasceu ?*
G -- *7:20.*
Afirma Gustavo.
P -- *Como você chegou à esta resposta.*
G -- *Nós acabamos de resolver o problema dos ângulos que os ponteiros fazem quando é 7:20 e o resultado foi 100º.*
P -- *EEpa. Sabemos que a solução apresentada pelo Gustavo é verdadeira, mas ela não foi objeto de prova imediata.*
Gustavo incorporou uma informação pela memória e atenção, usou essa informação como referência para a solução de um problema novo. O professor não perdeu a oportunidade de explicitar o procedimento de Gustavo valorizando-o.

Porém o professor, nesse ambiente de inspiração lakatosiana, não deve dar por terminada uma conversação tão interessante. Há que seguir indagando, sem "cortar" o tema como: "Gabriel, diz-nos a que horas nasceste para que tiremos a dúvida". Ademais podem surgir perguntas mais interessantes e não tão específicas como resolver o ângulo das 7:14 hs. Em seguida o professor intervém legitimando uma proposta de um aluno (A1) e reformulando para o grupo um problema mais geral como o de saber se a relação entre posição horária e medida angular é biunívoca.
A1 -- *Mas como podemos saber se não era uma outra, a hora em que os ponteiros fizeram 100º ?*
Indaga um aluno.
P -- *Êpa ! Se suspeitamos que existem outras "horas" que fazem o mesmo ângulo não é possível ter certeza sobre que horas nasceu o Gabriel.*
Os olhares do grupo indicam o reconhecimento de que há um novo problema importante para pensar.
Porém Guilherme, que não acompanhava esta parte da discussão, entretido, que estava com suas hipóteses, afirma:
G -- *Só os ângulos 90º e 180º se repetem.*

Guilherme está conjecturando que no intervalo de 12 horas os ponteiros ocupam as infinitas posições angulares no giro de 180º, repetindo a mesma medida duas vezes.
Gabriel está calado. Só ele tem o segredo da hora em que nasceu e das questões suscitadas pelo seu desafio. Ele aprecia a dinâmica do grupo na tentativa de desvendar o mistério da hora de seu nascimento.
Enquanto os alunos registram as várias soluções, indagam ao professor e a seus colegas a respeito de alguns fatos ou curiosidades observadas.

A1 - Se o ponteiro das horas anda, então nunca vai dar ângulo reto ?

A2 - Vai sim. As 3 horas os ponteiros fazem 90º. Afirma um aluno.

A3 - Às 9 horas também. Arremata outro.

Neste momento, alguns alunos se movimentam na colocação de suas proposições.
Os ângulo retos mais "óbvios", na percepção imediata dos alunos, são os que indicam 3 e 9 horas. Alguns segundos depois alguns alunos arriscam outras horas candidatas angulo reto: 6h15; 6h45; 3h30 e 9h30. 3 ou 4 alunos contestam simultaneamente, estes últimos como ângulos retos. Estas discussões estão acontecendo em duplas ou pequenos grupos de 3 ou 4 alunos.
Enquanto isto o professor atento ao debate e ciente de que algumas falas podem se perder, vai colocando no quadro negro sua versão das proposições feitas incluindo as refutações a proposições formuladas. Ele está exercendo sua função de socializar as proposições locais para acelerar (nesse caso) a geração de contra-exemplos, porisso registra a "propo Gui" ainda que saiba que está equivocada.

(1) Propo Gui: "Só os ângulos 90º e 180º se repetem num intervalo de 12 horas."

Gustavo com a mão levantada refuta.

G - Eu tenho um contra-exemplo ...

Explica enquanto o professor escreve no quadro.

(2) Contra-exemplo do Gustavo à propo Gui: "5:00 hs. e 7:00 hs. fazem o mesmo ângulo".

Luíza, uma aluna que não tinha feito a lição de casa, levanta a mão para comunicar sua observação.

L -- Também as 4:00 hs. e as 8:00 hs. fazem o mesmo ângulo ... e as 3:00 hs. e as 9:00 hs. também, e assim por diante.

O professor se dá conta que é um momento importante da aula, pois Luísa raramente se manifesta, introspectiva mantém relação pessoal com um restrito grupo de amiguinhas, entretanto, movida pela significatividade da situação, manifestou-se pela primeira vez no ano letivo.Está claro que a partir de um certo momento o grupo adota implicitamente o dia de "12 horas", dadas as características do relógio analógico.
O professor não perde tempo, dá visibilidade às contribuições de Luíza, registrando sua fala formatando-a, como tabela.

(3) Contra-exemplo geral da Luíza: "Há vários outros ângulos que se repetem no intervalo de 12:00 hs.

1:00 ------- 11:00
2:00 ------- 10:00
3:00 ------- 9:00
4:00 ------- 8:00
5:00 ------- 7:00

P -- Olha pessoal pense neste contra-exemplo geral da Luíza.

Neste momento os olhos do professor não conseguem esconder sua apreciação pela descoberta de Luíza, que reage com um tímido sorriso de orgulho. É a primeira vez que seu nome vai para o quadro e daí para o caderno dos colegas na forma de proposição.

P *-- Alguém consegue formular uma proposição mais geral que esta ?*

Balburdia ... movimentos e excitações.. Muitos falam ao mesmo tempo. O professor vai regulando para garantir que todos possam argumentar e ouvir os argumentos dos outros.

A1 *-- AH! ... é que se ajusta igual ...*

Diz um aluno mostrando com a mão.

A1 *-- ... em relação ao eixo das 6:00 hs.*

A2 *-- É que ...*

L *-- É simétrico ..*

Diz Luíza pensando em voz alta e com o olho fixo no relógio.

O tom de sua voz realça sua convicção.

O professor sugere que pensem centrados no contra-exemplo registrado no quadro negro. Há uma regularidade que pode ser percebida pela leitura e disposição dos dados. Luíza tem uma hipótese baseada na geometria do relógio, numa simetria, ainda não percebeu uma relação aritmética na sua própria descoberta.

Os alunos continuam se manifestando entusiasticamente, formulando caóticas e legítimas explicações sobre algo que o professor sabe que eles sabem, embora tenham dificuldade para verbalizar. Até que o Gustavo arremata.

G ***-- Soma doze.***

P *-- Ahá. Touché !*

Por um instante cessa o movimento, num longo silêncio de fração de segundo. Aqueles 70 olhos fixos no contra-exemplo da Luíza, escrito no quadro, explodem de tanto brilho para enfim espalhar um harmonioso e espontâneo - **AAAAAH!** - por toda a classe. Como quem diz: “Mas é claro, porque não pensei nisso antes ?”

- **AAAAAH!**

O grupo tem grande prazer em ter participado da descoberta de algo inicialmente complexo e finalmente simples e “engenhoso”.

O professor retoma a questão, pendente, sobre a hora em que Gabriel nasceu.

A1 *-- 5:40 .. não, não, é . . é . .*

A2 ***-- 4:40***

Arrematam 3 ou 4 alunos sem dar tempo para os outros 3 ou 4 concluírem.

P *-- Gabriel a que horas você nasceu ?*

O relógio da classe marca 12:45 (hora da saída).

G *-- 4:40.*

Diz com um sorriso de satisfação por ter gerado toda aquela rica discussão.

As 12:46 o grupo vai desarmando seu acampamento de produção matemática. Dispersam-se, arrumam suas malas, vão saindo e conversando, alguns comentando as descobertas da aula como um gol marcado na partida de futebol.

O professor, já com sua mala nas costas, se despede da turma pensando:

"Humm !! ? Será isto mesmo ? Então num intervalo de 12 horas um certo ângulo α, formado pelos ponteiros do relógio, ocorre em dois horários distintos t_1 e t_2, com $t_1 + t_2 = 12$ hs. Ë isso ? Não, . . . talvez, sejam 12 os “tempos” que fazem o mesmo ân

ANEXO 4

TEXTO DE NUMEROS HEXAGONALES

(una parte)

NÚMEROS HEXAGONAIS

1ª EDIÇÃO

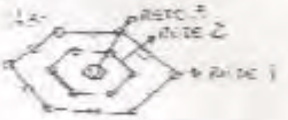
Mariana, Cada, Patrícia e Giuliana

EDITORA JAMAPÁ

INTRODUÇÃO

Nosso projeto teve início devido à uma discussão que foi feita na aula de matemática sobre números hexagonais. Um hexágono é formado assim

A sequência de números hexagonais é feita a partir da quantidade de redes pelas quais o número é composto ex.



O nosso objetivo era descobrir através de uma lei geral a "receita" ou a quantidade de pontos que existem em uma rede hexagonal.

TENTANDO ACHAR UMA LEI-GERAL DESCOBRIMOS QUE HAVIAM VÁRIAS DELAS DE VÁRIOS PONTOS DE VISTA.

ESPERAMOS QUE POSSAM UM DIA USUFRUIR DO NOSSO TRABALHO POIS NÚMEROS HEXAGONAIS É UM ASSUNTO MUITO CURIOSO E CONSEQUENTEMENTE INTERESSANTE.

TEXTO SOBRE A AULA

NA AULA DE 7 DE MAIO DE 96 INTRODUZIMOS O TRABALHO COM NÚMEROS HEXAGONAIS COM O OBJETIVO DE CHEGAR A UMA LEI GERAL.

O NOSSO PROFESSOR BIGODE EXPLICOU O QUE ERAM NÚMEROS HEXAGONAIS. DISSE QUE ERAM NÚMEROS CONHECIDOS APENAS POR ALGUNS MATEMÁTICOS.

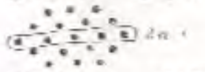
COMEÇAMOS VENDO QUANTO VALIA CADA REDE HEXAGONAL DE 1 a 4. O 1º FOI FÁCIL POIS SABÍAMOS QUE ERA 1 E O 2º 7 PORQUE ERAM ACRESCENTADOS 6 "BOLINHAS" REPRESENTANDO 6 VÉRTICES MAIS 1 COM A DO MEIO. EX. (FIG 1)

(fig 1)

DEPOIS VIMOS QUE A REDE HEXAGONAL 3 (H_3) VALIA 19 E H_4 VALIA 37. ESCREVEMOS O RESULTADO DA SEQUÊNCIA PARA VER SE HAVIA ALGUMA REGULARIDADE (1, 7, 19, 37, 61, ...) A DIFERENÇA ENTRE 1 e 7 ERA DE 6, E A DIFERENÇA ENTRE 19 e 37 ERA 18. PERCEBEMOS ENTÃO QUE A DIFERENÇA ERA SEMPRE UM MÚLTIPLO DE 6, PORÉM NÃO HÁ UMA BOA RESPOSTA, POIS SE QUISERMOS SABER DE 100, POR EXEMPLO PRECISARÍAMOS SABER A DIFERENÇA DE 99, OU SEJA SEMPRE DEPENDE DO ANTERIOR.

9

ENTÃO, DEPOIS DE DISCUTIRMOS, CHEGAMOS À CONCLUSÃO TAMBÉM DE QUE SE SOMARMOS TODAS AS "FILEIRAS" DO HEXÁGONO OBTEMOS O Hn E SEMPRE A FILEIRA DO MEIO É A MAIOR, EQUIVALENTE A 2n-1 EX (fig. 2)



A SEQUÊNCIA DAS FILEIRAS COMEÇA COM O Hn VAI AUMENTANDO:
EX.: (H4) 4 + 5 + 6 + 7 + 6 + 5 + 4
vai diminuindo até o n

DEPOIS DISSO VIMOS QUE OS TERMOS DA SEQUÊNCIA DOS Hn HEXAGONAIS SÃO SEMPRE ÍMPARES. ISSO PORQUE Hn É ÍMPAR E AS SEQUÊNCIAS DAS DIFERENÇAS É PAR. (ÍMPAR - PAR - ÍMPAR)
Método da Gauss para calcular H

$H_{10} = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19$
$19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10$
[illegible]

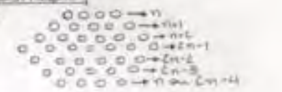
O MÉTODO DA [illegible] [illegible] [illegible], [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. CHEGAMOS À SEGUINTE LEI GERAL
$(3n-2) \cdot (n-1) + (2n-1)$

CAP. 1

ESSA LEI-GERAL NÃO FOI FEITA COM AUXÍLIO DE UMA ILUSTRAÇÃO, E SIM COM BASE NAS DISCUSSÕES QUE OCORRERAM EM SALA NO DIA 7 DE MAIO DE 1999.
USAMOS O MÉTODO DE GAUSS

$H_n = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (2n-2) + (2n-1)$
$(2n-2) + (2n-3) + (2n-4) + \cdots + n$
$(3n-2) + (3n-2) + (3n-2) + \cdots + (3n-2)$

DEMONSTRAÇÃO
$H_4 =$



EXPLICAÇÃO:
USAMOS O VALOR DE CADA INCÓGNITA SOMANDO-A, DEIXANDO DE FORA APENAS A FILEIRA DO MEIO (2n-1) POIS DEPOIS, NA LEI-GERAL A ACRESCENTAMOS NO FINAL.
12

A LEI DA JADE FICOU ASSIM:
$H_n = (3n-2) \cdot (n-1) + (2n-1)$
SOMA A FILEIRA DO MEIO

A PARTE SUBLINHADA É O RESULTADO DO MÉTODO DE GAUSS, O NÚMERO DEVE SER MULTIPLICADO POR N MENOS UM, QUE SIGNIFICA A FILEIRA DO MEIO.

EM CLASSE FIZEMOS UMA LEI GERAL QUE ERA A SEGUINTE:

$H_n = \underbrace{[(2n-2) + n]}_{(3n-2)} \cdot (n-1) + (2n-1)$

ESTA LEI É MUITO PARECIDA, É EQUIVALENTE, A LEI-GERAL DA JADE EMBORA AQUELA LEI SEJA MAIS RESUMIDA.

VERIFICANDO A LEI:
$H_n = (3n-2) \cdot (n-1) + (2n-1)$
$H_4 = (12-2) \cdot (4-1) + (8-1)$
$H_4 = 10 \cdot 3 + 7$
$H_4 = 37$

CAP. II

O H4 (SERVINDO DE EXEMPLO POIS NA VERDADE É O Hn) É DIVIDIDO DESTA MANEIRA: 3 QUADRILÁTEROS DIFERENTES PARA CALCULARMOS A ÁREA E DEPOIS SOMAR.

PARTINDO DA FIGURA VOCÊ PODE CRIAR A LEI-GERAL, PARA ISSO ACONTECER NESTE CASO, A FIGURA FOI DIVIDIDA:
ÁREA 1: $n^2 - n$
ÁREA 2: $(n-1)^2$
ÁREA 3: n^2

ENTÃO A LEI-GERAL FICOU ASSIM:

1: $H_n = n^2 + (n-1)^2 + (n^2 - n)$
2: $H_n = n^2 + (n-1)^2 + n \cdot (n-1)$
Ex:
$H_4 = 4^2 + (4-1)^2 + (4^2 - 4)$
$H_4 = 16 + 9 + 12 = 37$ [illegible]

PARA ESTA FIGURA SURGIRAM DOIS PENSAMENTOS DIFERENTES, MAS COM O RESULTADO EQUIVALENTE: NO 1º A ÁREA 3 FOI MULTIPLICADA DUAS VEZES DEPOIS FOI DESCONTADA A QUANTIDADE A MAIS QUE NÃO HAVIA NA ÁREA (ISTO É N).

A 2ª IDÉIA CALCULAMOS O VALOR DE CADA ÁREA E DEPOIS SOMAMOS.

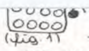
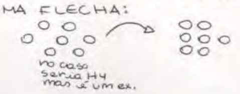

(fig 1)

FIGURA (O HEXÁGONO), FICOU ENTÃO O FORMATO DE UMA FLECHA:

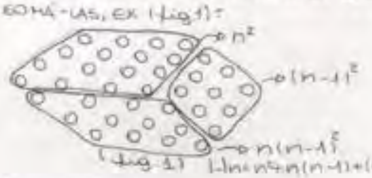


DEPOIS, NÓS "ENCAIXAMOS" 3 PONTOS (NO CASO ESTÁVAMOS FORMULANDO A LEI GERAL COM O H4 SERVINDO DE "MODELO") NA PARTE SUPERIOR DO TRIÂNGULO DA FLECHA ex. fig 1
TÍNHAMOS ENTÃO 2 FIGURAS, NOVAMENTE DOIS QUADRILÁTEROS UM RETÂNGULO (NO CASO DO H4) 4x7 E UM QUADRADO 3x3. SENDO Hn, H4 (QUE É UM NÚMERO PEQUENO) PODEMOS CALCULAR A ÁREA DOS QUADRILÁTEROS FACILMENTE,
18

TENTATIVAS

FORAM FEITAS VÁRIAS TENTATIVAS QUE NÃO DERAM CERTO, POIS O TEMPO FOI CURTO E NÃO PUDEMOS DESENVOLVÊ-LAS MELHOR.

PARA FORMULARMOS AS LEIS, DE MANEIRA EQUIVALENTE E DIFERENTE, PENSAMOS EM DIVIDIR O HEXÁGONO EM ÁREAS, "MEDÍ-LAS" E SOMÁ-LAS, EX (fig 1):



(fig 1) $H_n = n^2 + n(n-1) + (n-1)^2$

ASSIM FACILITANDO O RACIOCÍNIO PARA UM RESULTADO PRÁTICO, E RÁPIDO DE ENTENDER.

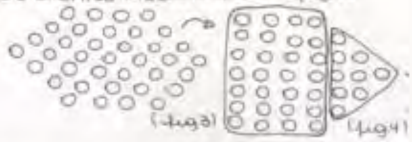
NESTE CASO MOSTRADO NO EXEMPLO, O H4 FOI DIVIDIDO EM 3 QUADRILÁTEROS O QUE NO CASO FOI FÁCIL FORMULAR A LEI GERAL. QUANDO TENTAMOS FAZER A LEI GERAL COM ESTA FORMA (fig 2) FOI DIFÍCIL

21

H4 =

(fig 2)

PELO FATO DE SEREM PENTÁGONOS, MAS PODEMOS MUDAR A FORMA DA FIGURA COMO POR EXEMPLO FIZEMOS AQUI: (fig 3)



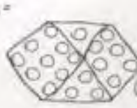
(fig 3) (fig 4)

SE PENSARMOS EM EMPURRAR A FIGURA CONTRA UMA PAREDE ELA VAI SE ENDIREITAR (fig 4)

TEMOS UM RETÂNGULO E UM TRIÂNGULO, AGORA SE RISCARMOS OS TRÊS PONTOS EM BAIXO NO TRIÂNGULO E PASSARMOS ELES PARA CIMA, O TRIÂNGULO IRÁ FICAR UM QUADRADO (fig 5)

UMA DAS OUTRAS TENTATIVAS FOI FAZER UMA LEI GERAL PARA ESSA DIVISÃO (fig 6)

H3 =



(fig 6)

TENTATIVAS

TENTATIVA 6

H4 =

$n^2 + (n^2 - n) + (2(n-1) + n - 1$

(NÃO DEU CERTO ESTA TENTATIVA PARA UMA LEI GERAL, PORÉM SERVE PARA O H4)

23

TENTATIVA 7

TENTATIVA 8

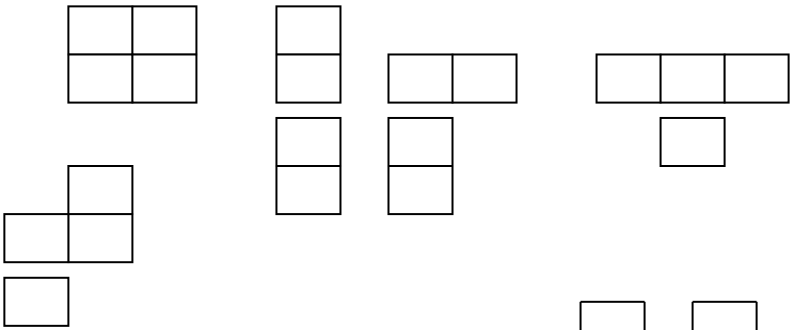
TENTAMOS FAZER OUTRA LEI GERAL PARA ESSA MESMA FIGURA MAS CHEGAMOS NO MESMO RESULTADO OBTIDO NA DISCUSSÃO EM CLASSE

ANEXO 5

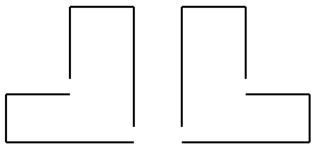
TEXTO 1 DE GABRIELA SOBRE PENTOMINOS

São Paulo, 20 de abril de 1993 Gabriela R.A.nº 9 "RedaçãoAvaliação SOBRE PENTOMINOS "

Aprendi muitas coisas durante todas essas aulas. Falamos muito sobre tetraminós, mas falamos mais ainda sobre os pentaminós (penta = cinco 5 / minó = quadrado □), fizemos muitos desenhos, tiramos umas fotos da lousa várias vezes para nos lembrar o que fizemos na aula. Aprendemos todos os tetraminós, veja:

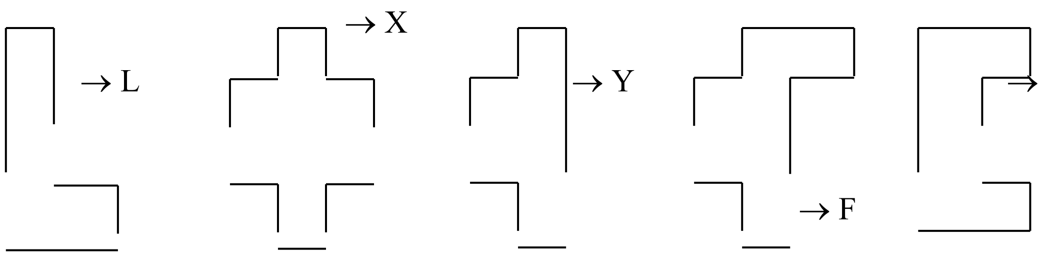


completar interior desenhos

Vimos também simetria com  espelhação. Até que chegamos nos pentaminós que são $\boxed{12}$. Demos nomes de letras para as formas.

Ex.:

C



Fizemos vários exercícios sobre os pentaminós como formar um retângulo de 5x3 usando apenas 3 pentaminós. Depois fazer um retângulo 5x4, havia uma técnica: era só acressentar a pessa I. Depois disso nós fizemos um exercício com pentaminós para cercar um buraco com a maior área de quadradinhos, eu fiz 144 de área. O máximo que a minha classe conceguiu foi 124, mas o máximo que já consegiram com área 128.

Depois do buraco, nós começamos a trabalhar com as sombras formadas por pentaminós. Veja:

Fizemos vários exercícios sobre a sombra. Depois com a sombra trabalhamos com rotação, translação e reflexão.

Eu gosto dos títulos que as aulas recebem, gostei de fazer os retângulos com 3 pentaminós. Mas achei que aprender pentaminós é muito cansativo e até um pouco chato.

Gostaria de saber quanto tempo uma pessoa demora para fazer um buraco de pentaminó com área 120? Também gostaria de saber como se meche com um transferidor.

Gostei de mecher com o buraco de pentaminó e também de fazer retângulos com 3 pentaminós, não gostei muito de fazer espelhação.

PROBLEMAS

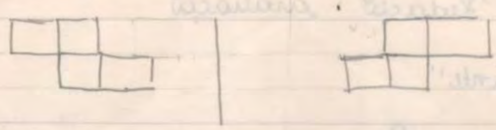
1- Quantas sombras podem ser feitas com apenas 1 forma?

2- Usando somente 6 dos 12 pentaminós, qual o maior buraco que pode ser feito?

ANEXO 6

TEXTO 1 DE JOANA SOBRE POLIMINOS

Desenhamos peças e as refletimos no espelho. Ex.:



melhor momento:
Espelhar o pentaminó, pois foi legal refletir uma peça e reparar a sua reflexão; a mudança de posição. Na lição de casa tivemos de desenhar pentáminós.
Apareceram 12 pentaminós. (I, X, C, W, T, Z, F, L, V, P, S e Y)
Fizemos uma "pista de corrida" dentro de cada peça, para saber qual era o perímetro.
Depois, vimos que para a peça rodar e chegar na mesma posição, (nome adotado: ROTAÇÃO), a maioria precisava de 1 volta, com exceção do C. Na lição de casa, tivemos de formar retângulos usando 3 pentaminós com repetição e sem repetição. (+ - 10)
Melhor momento: a corrida dentro da peça) Apareceram alguns desafios como: cobrir um tabuleiro de xadrez usando pentaminós e apenas 1 tetraminó (pois a área do tabuleiro é 64). O outro desafio era de cobrir um buraco usando pentaminós com a maior área do buraco.
Melhor momento: fazer o buraco, pois era um DESAFIO!

Aprendemos a mudar a posição do pentaminó, mas sempre com a mesma figura formada.
A REFLEXÃO = espelho = reflete a peça
A TRANSLAÇÃO = move a peça
A ROTAÇÃO = gira, "vira" a peça para chegar na mesma posição (1 · 1/2 volta)

Aprendemos a "sombra do pentaminó", que era desenhar duas figuras e encontrar outra peça dentro delas

DIFICULDADES: pentaminós exige muita calma e paciência. tive dificuldade em entender (ainda ñ entendi completamente) a translação. Isso foi o que mais ficou na minha cabeça.

APRENDIZADO:
"Pentaminó é uma atividade" educativa muito engraçada. Ela exige a rapidez a técnica em desenhar a figura e exige calculos matematicos.
Eu desenvolvi muito a habilidade em resolver problemas com pentaminós e é um jogo muito divertido, que já está ficando um pouco chato

– PROBLEMAS –

1- Seria possivel construir a famosa casinha que aparece nas lições usando pentaminós e com a maior area possível dentro da casinha?

2- seria possivel, com pentaminós desenhar a casinha que aparece nas lições de geometria com a menor area dentro da casinha?

ANEXO 7

TEXTO 2 GABRIELA SOBRE TANGRAM

21.09.1993 Gabriela Redação Avaliação Avaliação Redação SOBRE TANGRAM

O tangram é um jogo chinês que tem 7 peças. Foram inventados outros tangrans diferentes: redondos, oval e até com forma de coração.

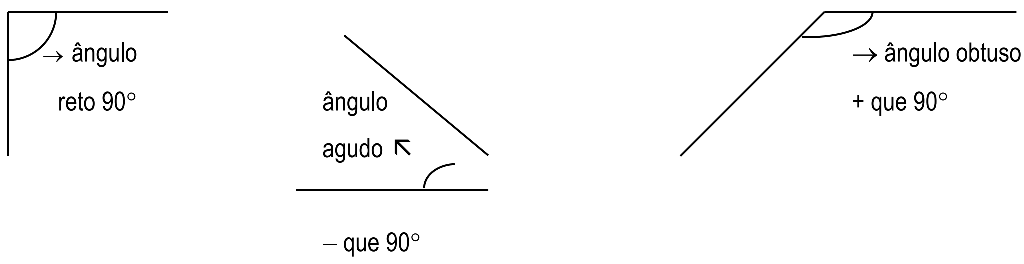
As peças do tangram que nós estamos trabalhando são: 2 ▲, 1 ▲, 2 ▲, 1 ■ e 1 [desenho]. Com essas peças é possível ser feito 13 figuras convexas, ou seja, figuras que têm todos os vértices para o lado de fora → [desenho].

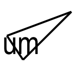
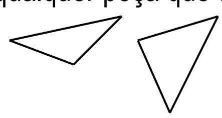
As figuras não convexas que podem ser feitas com o tangram são milhares. As figuras não convexas têm pelo menos 1 vértice para o lado de dentro. Veja → [desenho].

Todas as peças do tangram são cimétricas, ou seja, se dividíssemos alguma pessa ao meio, as duas metades ficam iguais → △ → [desenho], △ → [desenho], △ → [desenho],

□ → [desenho] ou [desenho] e [desenho] → [desenho] ou [desenho] → essa peça, chamada de paralelogramo por ter todos os lados paralelos, é cimétrica por rotação: veja → [desenho] se nós giracemos a peça a partir do ponto do meio, chegaria uma hora em que ela se encaixa. Isso também pode acontecer com os triângulos e com o quadrado.

Durante o trabalho com o tangram, também discutimos os ângulos: o ângulo reto que tem 90°, o ângulo agudo que é menor do que 90°, e o ângulo obtuso que maior do que 90°.



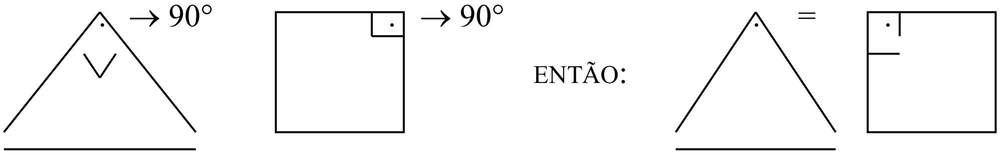
Descobri em casa que: qualquer peça que tem três ângulos de qualquer tamanho é um  → TRIÂNGULO  (NÃO SEI SE É CERTO ISSO)

completar desenhos

Descobrimos que: dependendo de quantos lados tem a peça, a soma dos ângulos internos são determinadas: Um quadrilátero (4 lados), a soma de seus ângulos internos é 360°. A soma dos ângulos de um pentágono é 540°, de um hexágono é 720°. Se você percebeu, toda vez que aumenta um lado, aumenta 180°.

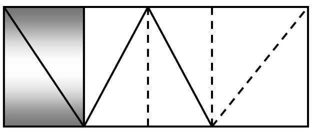
Além de vermos ângulos, vimos também área. Para saber a área das peças do tangram, a melhor unidade de medida é o triângulo pequeno, pois todas as peças são formadas por ele.

Vimos também de lados que se coencidem, ou seja, ângulos iguais entre as peças do tangram. Por exemplo:



O quadrado tem 4 ângulos de 90°, o retângulo também tem 4 ângulos de 90°, então o quadrado é o retângulo.

Durante esse trabalho com o tangram trabalhamos bastante com frações. Era preciso ser bem inteligente para saber quanto valia a fração dada. Eram frações complicadas como essa:

 → $\frac{2}{8}$

Para saber quanto é esta fração, é preciso fazer uma subdivisão.

Uma ficha com $\boxed{16}$ exercícios para serem feitos, alguns exercícios eram bem fáceis, outros eram difícil de se entender.

Você sabe o que é um polígono?

Um polígono é uma forma que tem todos os lados fechados sem nenhuma abertura → ASSIM 

[desenho] → isso não é um polígono pois tem uma abertura.

ANEXO 8

TEXTO de JOANA SOBRE TANGRAM

T A N G R A M

Eu tinha (ainda tenho) uma grande curiosidade sobre "tangram". Quando começamos a estudar, eu me interessei muito. Nós tivemos de montar o tangram, a partir da receita, uma "linguagem código" muito legal. Era gostoso montar coisas apartir da receita, pois parecia uma espécie de "batalha tangranal" (batalha naval). Havia uma receita e apartir dela, tinhamos de montar algo. Aprendemos com isso, o ponto médio.

Exercício:

Esboce "a casa"

ABCD é um quadrado

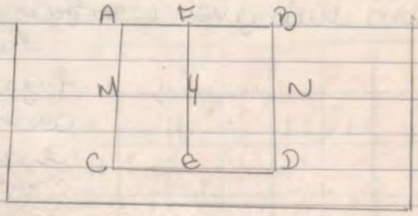
O $\overline{E}$ é o ponto médio (divisão da linha por igual) de $\overline{C}$ e $\overline{D}$

O $\overline{F}$ é ponto médio de $\overline{A}$ e $\overline{B}$

O $\overline{Y}$ é ponto médio de $\overline{F}$ e $\overline{E}$

O ponto médio de $\overline{A}$ e $\overline{C}$ é $\overline{M}$

O ponto médio de $\overline{B}$ e $\overline{D}$ é $\overline{N}$

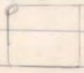


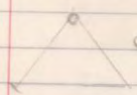
Com uma outra receita, montamos as peças do tangram e começamos a estudá-las.

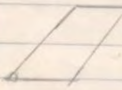
As peças do tangram são:
2 triângulos pequenos, 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 1 quadrado e um parale

nas aulas da semana passada, eu faltei, mas, uma amiga me falou um algo...

vocês trabalharam com Tangram,

 o ângulo reto tem 90°

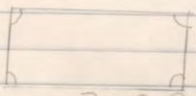
 o ângulo agudo tem 45°

 o ângulo obtuso tem 135°

a soma interna de um triângulo é 180°

Quantos graus tem um retângulo?

Retângulo

 somando tudo esse retângulo tem 360°

Quanto tem cada ângulo?

Resp.:

$360 \div 4 = 90°$

Eu gostei muito de aprender a mexer com tangram, só quero uma ajuda para recuperar o que eu perdi ...

ANEXO 9

TEXTO 3 GABRIELA SOBRE ECUACIONES

São Paulo, 16 de novembro de 1995

Gabriela R.A. nº 9 7ª B

Redação Avaliação

Dia 14 de novembro, adiantando o assunto da 8ª série, tivemos nossa 1ª aula sobre Equação de 2º Grau.

A primeira coisa que o professor fez foi mostrar algumas equações que a gente já sabia resolver, como por exemplo:

$x + y = 14$ ou $x^2 = 9$ ou $x^2 = 0$ ou

$xy = 12$

$x^2 = -1$ etc.

Já sabíamos resolver 4 casos de equação. A do tipo $x^2 = n$, $x^2 + n = 0$, $(x + n)^2 = m$ e um do tipo quadrado perfeito $\rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$.

Daí o professor passou um exercício e surgem 2 métodos para resolvê-lo.

1º MÉTODO

$$\begin{aligned} &\phantom{x^2 + 6x + {}} {+1} \quad {+1} \\ &x^2 + 6x + 8 = -1 \quad \text{(método da Balança)} \\ &x^2 + 6x + 9 + 0 \rightarrow \text{(quadrado perfeito)} \\ &(x + 3)^2 = 0 \\ &x + 3 = 0 \\ &x = -3 \end{aligned}$$

2º MÉTODO

$x^2 + 6x + 8 = -1$

$(x+ 4)\,(x + 2) = -1$

Quem descobriu esse método, lembrou das aulas sobre soma e produto e resolveu.

HIPÓTESES:

1. $-1 = -1$ ou

2

Se $x + 4 = -1 \rightarrow x = -5$ e

se $x + 2 = 1 \rightarrow x = -1$

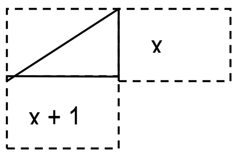
$-1 \cdot 1 = -1$

Se $x + 4 = -1 \rightarrow x = -3$ e se

$x + 2 = -1 \rightarrow x = -3$

HISTÓRIA – A equação de 2º Grau, já era conhecida pelas civilizações antigas. Eles a usavam para estudar figuras geométricas.

EX.: TRIÂNGULO RETÂNGULO



$(x + 1)^2 + x^2 = (x + 2)^2$

$\cancel{x^2} + 2x + 1 + x^2 = \cancel{x^2} + 4x + 4$ desenvolveu

$0 = 3 - 2x + x^2 \leftarrow$ simplificou

$x^2 - 2x + 3 = 0 \leftarrow$ troca a ordem

completar desenho

$x^2 - 2x - 2 = 1 \leftarrow + 1$

$x^2 - 2x - 1 = 2 \leftarrow + 1$

$x^2 - 2x = 3 \leftarrow + 1$

QUADRADO PERFEITO $\rightarrow$ $x^2 - 2x + 1 = 4 \leftarrow + 1$

$(x - 1)^2 = 4$

$x - 1 = 2$

$x = 3$ ou se

$$\begin{cases} x - 1 = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

Quem estudava isso nas civilizações antigas, não aceitavam um número negativo. Eles não aceitavam algo que eles não pudessem representar com desenhos.

Na aula seguinte, já tínhamos dominado o método da “balança quadrado perfeito” e só resolvemos exercícios. Dominamos também o método cascata, que já tínhamos visto na 1ª aula.

EXPLICAÇÃO DO MÉTODO CASCATA:

$$\begin{array}{l} \quad +7 \;\; +7 \\ x^2 + 6x + 2 = 0 \end{array} \qquad +7$$

A mudança

$$x^2 + 6x + 9 = 7$$

Equivale a

do 1º para o 2º degrau se dá

$$(x + 3)^2 = 7$$

degrau se dá para transformar o trinômio em

$$x^2 = 7$$

um trinômio quadrado perfeito. Isso ajuda na hora de simplificar.

O 1º método explicado na 1ª folha, é o mesmo do método cascata, só que quando a pessoa o explicou, ela não sabia que o método era o cascata.

Muita gente não entendeu a passagem.

EXPLICAÇÃO:

$$\begin{array}{l} \quad\quad + 7 \quad + 7 \\ x^2 + 6x + 2 = \;\; 0 \end{array}$$

Se você soma 7 de um lado, para equilibrar, você tem que somar 7 do outro lado também.
Do lado $x^2 + 6x + 2$, soma e fica $x^2 + 6x + 2 + 7$, só que $2 + 7 = 9$, então fica $x^2 + 6x + 9$, do outro lado, do lado do 0, somando 7, fica 7.

Fazer o desenho

a) $4x^2 - 4x - 48 = 0$

$4x^2 - 4x + 1 = 49$

$(2x - 1)^2 = 49$

$2x - 1 = 7$

$2x = 8$

$x = 4$

b) $x^2 - 2x + 69 = 0$

$x^2 - 2x + 169 = 100$

$(x - 13)^2 = 100$

$x - 13 = 10$

$x = 23$

VERIFICAÇÃO:

$$\underbrace{4.4^2}\, - \underbrace{4.4} - 48 = 0$$

$$\underbrace{4.16 - 16} - 48 = 0$$

$$\underbrace{64 - 16} - 48 = 0$$

$$48 - 48 = 0$$

VERIFICAÇÃO:

$$23^2 - 26.23 + 69 = 0$$

$$\underbrace{529 - 598} + 69 = 0$$

$$-69 + 69 = 0$$

Se $\rightarrow$ $2x - 1 = -7$

$2x = -6$

$x = -3$

Se $\rightarrow$ $x - 13 = -10$

$x = 3$

VERIFICAÇÃO:

$4\,(-3)^2 - 4(-3) - 48 = 0$

$4.9 - (-12) - 48 = 0$

$36 + 12 - 48 = 0$

$3^2 - 26.3 + 69 = 0$

$9 - 78 + 69 = 0$

$-69 + 69 = 0$

CONTINUAÇÃO DA REDAÇÃO:

Na hora de resolver equações, lembre-se que: Se você quer saber um número que ao quadrado resulta 49, o resultado pode ser 7 ou –7.

Mas se você tem que resolver algo do tipo $\sqrt{49}$, o resultado é sempre 7.

$\rightarrow \sqrt{49} = 7$

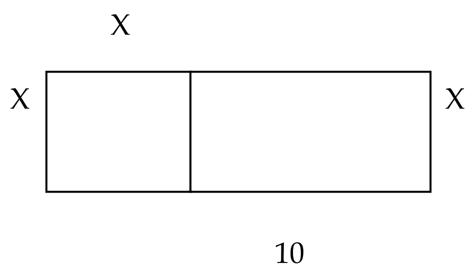
$\rightarrow$ um número que ao quadrado resulta 49 = ± 7.

ANEXO 10.

TEXTO 3 DE JOANA SOBRE ECUACIONES

Joana nº 12 7ª B Matemática Redação Avaliação SOBRE EQUAÇÕES

Que diabo é isso? Foi a 1ª coisa que pensei. Algo novo? Não, minha cara. Problemas que envolviam equações de 2º grau foram encontrados em papiros (papel feito com a planta "Papirus") no antigo Egito. Nossa, mas que antigo! Na verdade, também encontraram problemas em placas da antiga Babilônia. Egito, Babilônia... não importa. Isso só indica uma coisa: desde os mais antigos tempos, quase todos os problemas caíam em soluções equacionadas, elevadas ao quadrado que resultavam em zero. Em todos os documentos, problemas das vidas das pessoas eram escritos e resolvidos, sempre estudados em casos particulares, não tinham um método geral que pudesse solucionar aqueles problemas. E então se iniciou a "CAÇA AO MÉTODO GERAL". Dois sábios matemáticos estudaram problemas cotidianos que tinham soluções particulares. Era natural que sábios tivessem contato com equações. E foi com muita pesquisa que no século IX, ALKMOWARIZMI chegou a um método mais geral, que ainda precisava de ajustes. No século XII, BASKHARA também chegou a um método curioso e interessante, que envolvia figuras geométricas, mais especificamente o retângulo.



$x^2 + 10x = 39$

Bom... grande coisa! Há infinitos retângulos com área 39. E foi assim. Pesquisando, criando, investigando e perguntando, ele foi caindo em muitas outras equações, ali chegamos na de 2º grau.

EQUAÇÃO: Qualquer igualdade que só é satisfeita para alguns valores dos seus domínios. Mas porque a equação é de 2º grau? Simplesmente porque um incógnita é elevado ao quadrado. Outro detalhe: todas resultam em 0. Ah! Então não tem sentido. Claro que tem. O grande desafio das equações desse tipo é descubrir o valor de uma incógnita, de modo que ele satisfaça certas condições e que numa certa conta, resulte em zero. Não entendeu? Veja como é isso visualmente:

$2x^2 - 3x = 0$ $4x^2 - 3x + 2 = 5$

$3x^2 + 7 = 0$ $4x^2 - 3x - 2 = 0$

$-x^2 + 2x = 0$

$ax + bx + c = 0$

resulta

OBS.: NEM SEMPRE TERMINA EM 0. EXEMPLOS:

$x^2 = 9$ Qual é a pergunta indireta nessa equação? Simples.

$x = 3$ ou $x = -3$ A pergunta é: qual número que elevado ao quadrado dá 9 e qual a raiz quadrada de 9. Mas atenção: TEORICAMENTE isso acontece mas lembre-se que –3 não é raiz quadrada de 9.

A resposta, não daria certo, pois $(3)^2 + 6.(3) + 9 =$

$9 + 18 + 9 = 36$

"Não é todas as equações que tem duas respostas".

"Essa aqui é mais difícil: $x^2 + 10x + 25 = 49$, essa também é um TQP $= (x + 5)^2 = 49$

$x + 5 = 7$ se $x + 5 = 7$ qual o valor de x? 2.

Mas se $x + 5 = -7$ então $x = -12$".

"Agora que se fazerem esta que é mais difícil ainda: $x^2 + 6x + 8 = 0$"

"Pior eu sei fazer. Primeiro faz $(x + 2)(x + 4) = 0$"

"Umlilm, esse método é muito avançado, então $x + 2$ é 0, assim $\boxed{\text{x é igual a } -2}$ se $x + 4 \neq 0$, então $\boxed{x = -4}$.

"Vamos resolver por esse outro método:

$x^2 + 6x + 8 = 0$ $+1$ Se a gente somar 1 ao 8, vai ficar 9 e o resultado

$x^2 + 6x + 9 = 1$ será 1.

Assim, ficamo com

um T.Q.P. $(x + 3)^2 = 1$

$x + 3 = 1$ então $\boxed{x = -2}$, mas se $x + 3 = -1$, assim $\boxed{x = -4}$

"Como a nossa foi muito produtiva eu tive uma exelente idéia. Marca aí na agenda LPADLDLDLDLDL. Fazer uma redação avaliação da aula de hoje".

Todos da classe ficaram furiosos: “Ah, não, não, é muito”.

“Cala boca, essa lição é para 2ª feira e vai contar 50% da nota”.

Lá fui eu para casa fazer a estúpida redação avaliação sobre a estúpida equação de 2º grau.

Peguei uma folha de monobloco, um lápis e comecei a escrever estava sem a mínima criatividade, sem imaginação, então comecei a escrever.

“Você sabe o que é uma equação de 2º grau?

$-2x^2 + 3x + 7 = 0$ é uma................. Método C

A

S

C

A

T

A

Simplificando, esse método resume em: se você encontrar uma equação muito difícil, basta simplificá-la até chegar em algo mais fácil.

EXEMPLO:

$x^2 + 6x + 2 = 0$

$x^2 + 6x + 9 = 7$

$(x + 3)^2 = 7$

$x^2 = 7$

Meu Deus, como fazer isso?

Simples, minha cara...

FATORAÇÃO

a	a^2	b^2
b	ab	ab

$= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

PRODUTO

Isso determina o TQP.

Aha! Então é isso que fazer uma equação se TQPzar pra facilitar a minha vida. Sendo assim...

inserir desenho

$x^2 - 10x + 16 = 0$

será isso um TQP? Claro que não. Vou te provar.

$(x - 4) =$ no way! Isso não dá $x^2 - 10x + 16 = 0$ nem na China.

Lembra da minha dica? Então lá vai:

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$(x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 9$

Joana, dá onde você tirou o 9?

Simples: 25

$-\underline{16}$

9 → +9. Como a outra conta dava 0, 0 + 9 = 0

Então já utilizei o método cascata:

$x^2 - 10x + 16 = 0$

$x^2 - 10x + 25 = 9 \rightarrow (x - 5)^2 = 9$

$(x - 5) = 3 \rightarrow x = 8$

ou

$(x - 5) = -3 \rightarrow x = -8$

Não se esqueça que para resolver qualquer conta, você tem que tomar certos cuidados matemáticos como:

1. Não se descabele ao ver uma conta, tenha paciência.

2. Procure fazer perguntas para a conta, tirando conclusões e procurando números que satisfaçam e respeitem todas as condições.

3. Veja se tem ou não solução.

4. Verifique!!!

Então, vamos lá.

Resolvendo:

a) $4x^2 - 4x - 48 = 0$ (−1)

b) $x^2 - 26x + 69 = 0 \rightarrow 2.\ \sqrt{1^o}\ .\ 2^o = 1^o$ (incógnitas)

4x

a) $4x^2 - 4x - 48 = 0$

$(2x - 1)(2x - 1) = 4x^2 - \underbrace{2x - 2x}_{4x} + 1$

$(2x - 1)^2 = 49 \qquad 4x^2 - 4x - 48 = 0$

$(2x - 1) = \boxed{7} \qquad 4x^2 - 4x + 1 = 49$

$2x = 8$

$x = 4$ ou $\qquad 2x - 1 = -7$

$2x = -8$

o que $\qquad x = -4$

ao quadrado dá o resultado (no caso 49? R: 7)

Verificaçã

$4x^2 - 4x - 48 = 0$

$\underbrace{4.4^2}\ - \underbrace{4.4} - 48 = 0$ Yes!

$$\underbrace{64 - 16}_{48} - 48 = 0$$

$$48 - 48 = 0$$

b) $x^2 - 26x + 69 = 0$

$$\begin{array}{r|l} 26 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$(x - 13)^2 =$

$$(x - 13)\,(x - 13) = x^2 \overbrace{- 13x - 13x}^{26} + 169 = 100 \quad + 100$$

$$x^2 - 26x + 69 = 0$$

$(x - 13)^2 = 100$

$(x - 13) = 10$

$\boxed{23} - 13 = 10$

$\boxed{x = 23}$

Verificação

$23^2 - 26.23 + 69 = 0$

$\underbrace{529 - 598}_{} + 69 = 0$ Yes!

$-69 + 69 = 0$

ANEXO 11

TEXTO 4 DE GABRIELA SOBRE CONJUNTOS NUMERICOS

Gabriela R.A. nº 9 8ª B Matemática Redação Avaliação

Começamos o ano com o estudo sobre o conjunto ℕ dos números naturais, que abrange os números inteiros positivos:

ℕ = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; ...}

Citamos várias características de ℕ:

- ℕ é infinito.
- Tem zero (Ø) como elemento neutro da adição.
- 1 é elemento neutro da multiplicação.
- ℕ é fechado em relação à adição e à multiplicação – Um conjunto ser fechado em relação a alguma operação significa que: pegando dois ou mais elementos desse conjunto, e operando, o resultado da operação vai estar dentro do conjunto. Então, se eu pegar dois números de ℕ, multiplicarmos ou somarmos, o resultado estará contido em ℕ.
- ℕ é enumerável. A idéia de enumerável, quer dizer se alguém pudesse escrever ou falar eternamente os elementos de um conjunto, seria possível "varrer" todos os números.
- ℕ não é denso – Um conjunto não deve ser denso, significa que entre dois números consecutivos, não há nenhum outro número.

Escrever um usando a chave { }, significa que os elementos do conjunto devem estar na ordem indicada. No caso do uso de parênteses ( ), os elementos não precisam ter uma

Obs.: $\mathbb{N}$ tem mais algumas propriedades.

Antes de estudarmos o próximo conjunto, aprendemos a escrever MATEMATIQUÊS. A escrita matemática se dá por símbolos:

$\in$ – PERTENCE

$\notin$ – NÃO PERTENCE

$\neq$ – DIFERENTE

$\forall$ – QUALQUER

$\exists$ – EXISTE

Como se escreve, por exemplo:

"Todo Natural ($\mathbb{N}$) tem um sucessor".

em MATEMATIQUÊS?

se $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n + 1 \in \mathbb{N}$

Box 2

O conjunto N* é o conjunto dos naturais, excluindo o 0 (zero).

N* = {1, 2, 3, 4, ...}

Alguns matemáticos

Ainda sobre $\mathbb{N}$.

Discutimos em sala de aula, propriedades sobre subconjuntos de $\mathbb{N}$.

O que são subconjuntos de $\mathbb{N}$?

São conjuntos que estão contidos em $\mathbb{N}$.

Ex: PARES = {0; 2; 4; 6; 8; 10; ...}

Todos os elementos de PARES estão presentes em $\mathbb{N}$, mas não são todos os elementos de $\mathbb{N}$ que estão contidos em PARES ($\mathbb{P}$).

Qual conjunto tem mais elementos: $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{N}$?

Nenhum dos dois, pois para cada elemento $\mathbb{P}$ tem um correspondente em $\mathbb{N}$.

Veja:

N		*P*
0	$\rightarrow$	0
1	$\rightarrow$	2
3	$\rightarrow$	4
4	$\rightarrow$	6

Essa propriedade se chama "EQUIPOTÊNCIA".

Os pares e os naturais são equipotentes.

5 → 8

ℤ não é denso.

Qualquer subconjunto de ℕ do tipo M (n), – múltiplo de n – são fechados em relação à adição e à multiplicação.

ℕ é um subconjunto de ℤ. O conjunto ℤ abrange todos os naturais, mais os inteiros negativos.

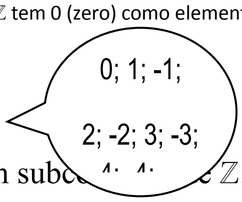
ℤ = {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...}

Em ℤ, todo o número, exceto o 0 (zero), tem seu oposto.

ℤ é enumerável:

Assim como ℕ, ℤ tem 0 (zero) como elemento neutro da adição e 1 como elemento neutro da multiplicação.

desenho



ℤ é fechado em relação à (+; –; x).

ℕ é um subc... ℤ. Os subconjuntos de ℕ são subconjuntos de ℤ.

Como ℕ, ℤ não tem maior elemento. Mas diferentemente de ℕ (que tem o (zero) como menor elemento), ℤ não tem menor elemento.

ℕ e ℤ são subconjuntos de ℚ. Este conjunto mais complexo, abrange todos os números que possam ser representados em forma de fração do tipo $\frac{P}{q}$ ou na forma decimal: 0,5:

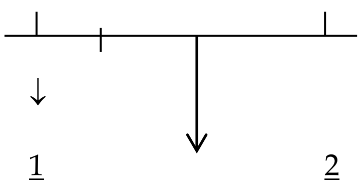
Como ℕ e ℤ, ℚ é fechado em relação à (+; –; x), mas também é fechado em relação à divisão ÷. ℚ não é fechado em relação a $\sqrt{\ }$.

ℚ é denso, pois entre dois números, há infinitos outros números.

$\frac{1}{3} < — < \frac{2}{5}$

$\frac{5}{15} < \frac{—}{15} < \frac{6}{15}$

$\frac{10}{15} < \frac{11}{15} < \frac{12}{15}$



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{5}$

$\underline{11}$

Média aritmética

30 30 30

$\underline{1}$ < — < $\underline{11}$

3 30

$\underline{60}$ < $\underline{63}$ < $\underline{66}$

180 180 180

↓

$\underline{7}$

20

$\underbrace{\hspace{6em}}_{30}$

$\underline{1}$ $\underline{11}$

3 30

$\underline{7}$

20

etc.

Os números que não podem ser representados por fração são: raiz quadrada de nº primos, π...

Dízimas periódicas (números decimais com infinitas casas depois da vírgula) também podem ser racionais, isto é, podem fazer parte do conjunto ℚ.

> **Box 3**
>
> π é o número irracional (que não pode ser representado por fração), mais famoso.

ℚ é enumerável, embora seja difícil de acreditar. Mas veja:

d	1	2	3	4	5	6	7...
					0/5	0/6	0/7
					1/5	1/6	1/7
					2/5	2/6	2/7
					3/5	3/6	3/7
					4/5	4/6	4/7
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	5/7
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	6/7

> **Box 4**
>
> Os pitagóricos (seguidores de Pitágoras) acreditavam que tudo era número.
>
> Mas: Qual é a $\sqrt{2}$?
>
> ELES FORAM ENGANADOS!

Como contar?

desenho

0/1; 0/2;

1/1; 2/1; 1/2;

$\sqrt{2}$ é um número que faz parte do conjunto IR dos irracionais.

IR não é enumerável, não é fechado em relação a:

- **adição:**

$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \varnothing \rightarrow$ (racional)

- **subtração:**

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = \varnothing$

- **multiplicação:**

$\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} = 2 \rightarrow$ racional

- **divisão:**

$\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1 \rightarrow$ racional

Como "construir" um número irracional?

Seria preciso inventar um número que depois da vírgula, teriam infinitos números não periódicos.

Exemplo de uma expansão decimal infinita e não periódica:

0,1001100011100001111000001111100000011111100000000...

Outros irracionais:

$\sqrt{\pi}$

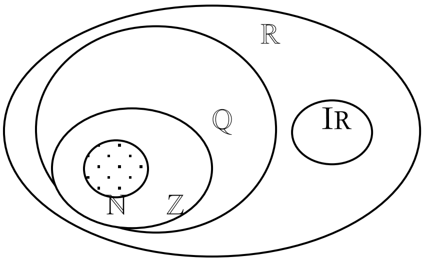
0,200220002220000222200000...

Box 5

Os conjuntos Q e IR não são equipotentes, ou seja, não têm correspondência entre seus elementos.

$\mathbb{Q} \cup$ IR = $\mathbb{R}$, ou seja, a união dos conjuntos $\mathbb{Q}$ (dos racionais) e IR (dos irracionais), resulta no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

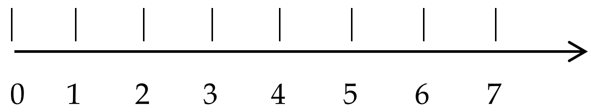
Pode-se ordenar os subconjuntos de $\mathbb{R}$:



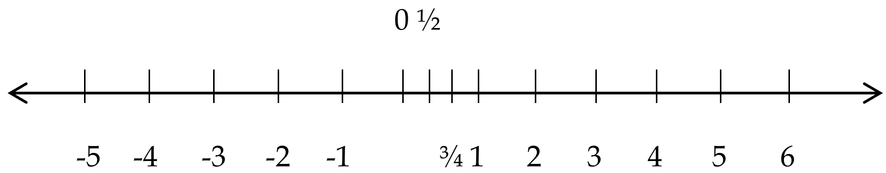
Um número que não é real $\sqrt{-1}$ É um número COMPLEXO.

NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS

O conjunto ℕ é construtível:



ℤ e ℚ também são construtíveis:



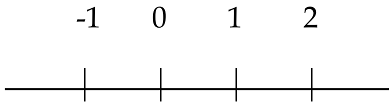
A semireta ℕ tem pequenos furos.

A reta ℤ também tem.

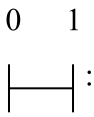
A reta ℚ tem menos furos que ℕ e que ℤ, mas ainda tem pequenos furos.

ℝ não tem quase nenhum furo, o único número que eu conheço que não faz parte de ℝ é $\sqrt{-1}$.

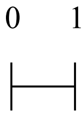
Como se constrói frações nas retas?



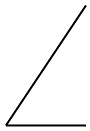
Como encontrar 5/7?

Transfere-se a medida 

:



Traçar outra linha em qualquer direção partindo do 0 (zero):



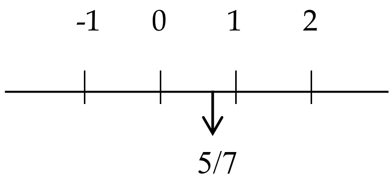
Escolha qualquer abertura (não muito grande) no compasso e marque 7 pontos da última linha traçada.

Do 7º ponto, trace uma reta até o ponto 1 da 1ª reta.

desenho

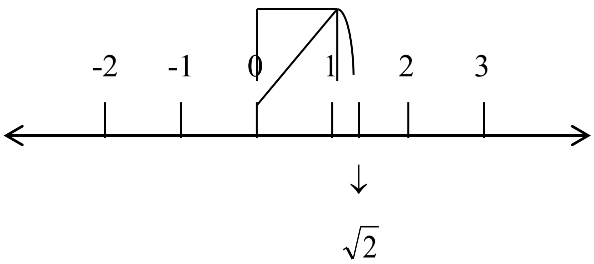
Então, trace linhas paralelas à última reta e partindo dos pontos feitos na 2ª reta.

Daí é só achar 5/7 na semireta 01 e transferir a medida para a 1ª reta de números.



Como encontrar o número $\sqrt{2}$?

O número $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal de um quadrado 1x1. Isto facilita sua localização.



Constrói-se um quadrado sobre a semireta 01 e traça-se sua diagonal. Então, com o compasso, transfere-se a medida da diagonal do quadrado 1x1 para a reta com o compasso.

Daí fica fácil localizar os pontos:

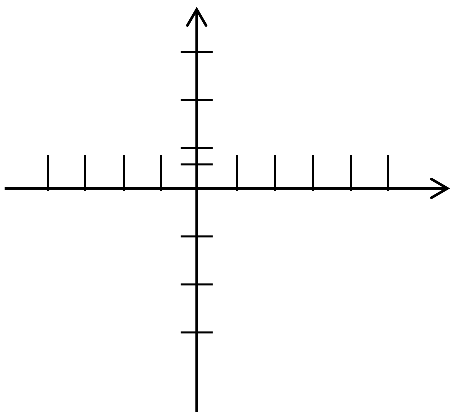
- $2\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$;
- $1 + (-\sqrt{2})$ etc.

Que conjunto numérico contém a reta $\mathbb{R}$?

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, por exemplo.

Sua construção é bem complexa (como já diz o nome).

O conjunto $\mathbb{C}$ é representado pelo plano cartesiano.



Neste plano é possível localizar, por exemplo, $\sqrt{-1}$ e os vários outros pontos localizados no fora das retas.

P.S. da Autora: "Após a correção deste trabalho, descobri infinitos números que não são Reais: $\sqrt{-2}$; $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-4}$ ..."

ANEXO 12

TEXTO 4 JOANA. CONJUNTOS NUMERICOS

19/03

Joana 8ª B

BIGODE: o final da minha avaliação está igualzinho à sua lousa: uma bagunça + organizada. Foi em sua homenagem!!!

Redação Avaliação de Matemática

Tema: Conjuntos

Nesse 1º mês de aula, estudamos vários tipos de conjuntos numéricos e suas diversas propriedades. Alguns desses conjuntos, nós já tínhamos visto e conhecido em outras séries mas agora, na 8ª, estamos olhando para esses conjuntos com outros olhos e fazendo diferente análises. Tudo isso ampliará nosso conhecimento numérico.
É difícil conceituar de forma concreta o que são números. Desde criança sabemos e temos contato com eles e a cada ano aprendemos e crescemos mais no saber de lidar com eles. Tem gente que até criou uma religião baseada em números, onde eles são e explicam tudo – os números têm vários conjuntos e subconjuntos até infinitos, mas se formos mapear o que vimos até agora, teremos:

$\mathbb{N}$ = conjunto dos números naturais e algumas propriedades:

Esse conjunto é formado pelos números inteiros, do "0" até o infinito. Ele é enumerável (dá pra contar), tem uma certa seqüência (0, 1, 2, 3, 4, 5 etc.) é fechado em relação a adição, multiplicação (isso significa que se somarmos ou multiplicarmos qualquer número, o resultado será um nº do conjunto. O "0" é o elemento neutro da adição e o 1 é o elemento neutro da multiplicação (significa que eles não fazem diferença em suas operações, são neutros). Depois de um par, vem sempre um impar e dele podem ser extraídos infinitos subconjuntos como o dos ímpares, pares, múltiplos de 2, de 3 etc. ...

$\mathbb{Z}$ = conjunto dos números positivos e negativos (em outras palavras, é o conj. dos <u>inteiros</u>) Ele é enumerável, infinito a direita e a esquerda, é fechado em relação a adição, multiplicação e subtração, tem seqüência que permite contá-lo sem esquecer de nenhum número (0, 1, –1, 2, –2 etc.) há sempre 1 negativo para 1 positivo. Pode-se dizer que o conj. $\mathbb{N}$ está contido no conj. $\mathbb{Z}$ ou que o conj. $\mathbb{Z}$ está contido em $\mathbb{N}$ não dá porque os naturais ($\mathbb{N}$) não incluem negativos.

$\boxed{\mathbb{I}\mathrm{R} \text{ e } \mathbb{Q} =}$ IR = irracionais (números que não podem ser “expressos” – escritos – por frações) e $\mathbb{Q}$ = números que podem ser “expressos” – escritos por frações, ou seja, é conj. das frações.

$\mathbb{Q}$ é denso? Sabe por que? Entre 2 números quaisquer há infinitos outros entre.

Ex:

$\frac{7}{3}$ e $\frac{10}{4}$ $\frac{28}{12}$ $\frac{30}{12}$ → entre esses 2 há mais frações e entre elas há outras e assim por diante. Será que é enumerável? Bom, acho que não... eu só sei que há um jeito de mapear todos os racionais, passar por todos eles sem esquecer de nenhum. É UMA TABELA mais ou menos assim:

	1	2	3	4	5	6... vai para o infinito
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2		2/2	2/3	2/4	2/5	2/6
3			3/3			
4				4/4		
5						
6						

vai para o infinito

Se eu fizer um zigue-zague passarei por todos os integrantes do

inteiros

IR = sem dúvida nenhuma, o irracional mais famoso é o π!

Ele tem expansão decimal infinita não periódica. Calma, eu to falando português.

DÍZIMA = 10ª Parte

PERIÓDICA = que vareia

Se tenho um número decimal não infinito (depois da vírgula, claro) ele pode ser expresso por fração. Ex: se eu escrever 0,3333... no momento que eu parar de escrever 3, esse número poderá ser expresso por fração.

Ex: $3{,}3333 = \frac{3333}{10000}$ e

assim por diante.

Todos esses conjuntos são englobados por um outro conjuntão: o dos números reais!!! no bom matematiquês, linguagem que estamos aprendendo com o “Ângeloide”, isso significa que:

IR, ℚ, ℤ e ℕ ∈ ℝ – não é a nossa moeda mas é quase, se chama <u>REAL</u>.

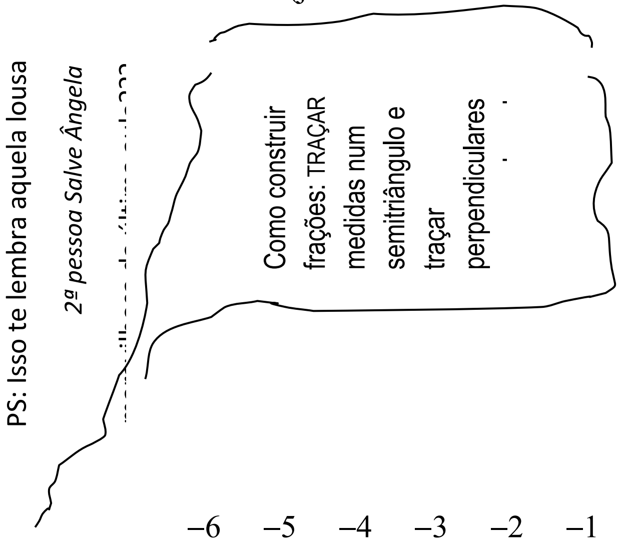
(→ pertence)

Conj. dos números reais – tem propriedades dos outros conjuntos já explicados.

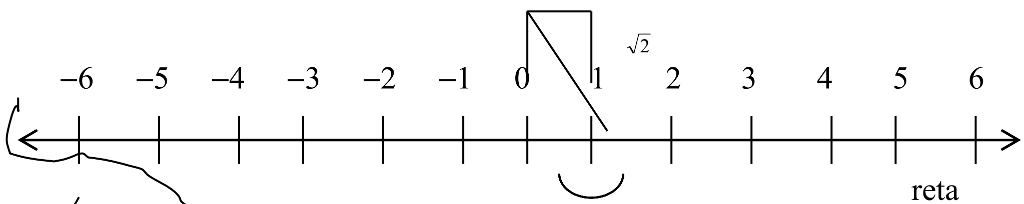
Estávamos pensando que esse era um superconjunto, afinal ele engloba todos os outros, certo? Errado! Há um conjunto chamado ℂ ou $\mathcal{C}$. (tá bom assim moreno?) – complexos – que engloba todos os conjuntos:

ℕ, ℤ, ℚ, IR, ℝ, e raiz quadrada de negativos!

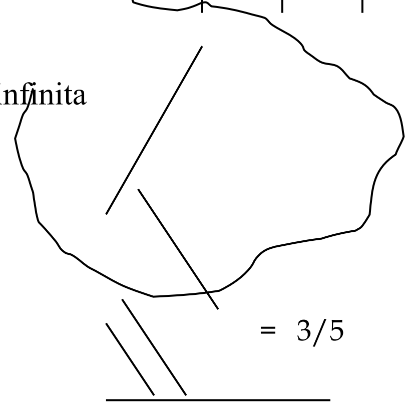
Para ter uma idéia desse conjunto, farei aqui uma demonstração através dos números construtíveis (já viu um número ser construído? Veja agora)



ele também inclui $\sqrt{2}$. Basta traçar diagonal do famoso quadrado 1x1 e transportar essa diagonal que mede para a reta!!!



reta infinita



repete-se a medida várias vezes para frente e para trás.

basta colocar isso na reta e está traçado as frações.

PS: C U R I O S I D A D E

Em relação ao conj. IR.

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \\ \\ \sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1 \end{array}\right\}$$

Isso prova que ele NÃO é fechado em relação a essas operações

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

Nesse 1º mês de aula, vimos que existem vários conjuntos numéricos. Já conhecíamos os elementos desses conjuntos mas agora demos um mergulho mais fundo nas diversas propriedades desses conjuntos. O curioso é que um conjunto é englobado por outro, que é englobado por outro e há um que engloba todos.

Estudamos esses conjuntos para podermos navegar com mais facilidade pela lógica, equações de 2º grau e nºs reais.

Também estamos aprendendo uma nova linguagem com o nosso professor "Ângeloide".

MATEMATIQUÊS: LINGUAGEM DA TEORIA

$\in$	pertence	$\exists$	existe
$\notin$	não pertence	$\nexists$	não existe
$\neq$	diferente	$\exists\vert$	existe um único

CONJUNTO $\mathbb{N}$ – naturais

É um conjunto ordenado (dá pra ver qual é o maior e qual é o menor); é infinito, "0" é elemento neutro da adição e da subtração, além de ser o menor elemento. O conjunto, embora enumerável*, não é limitado à direita, tem regularidades como "depois de um par vem um impar, depois de um impar vem um par e etc. O "1" é elemento neutro da multiplicação.

* dá pra contar

Subconjunto de elementos neutros da multiplicação = conj. pares

" " " " da adição = conj. impares

Conj. pares/impares são subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Todos os elementos têm sucessor (se $N \in \mathbb{N} \Rightarrow N + 1 \in \mathbb{N}$). Todos, exceto o "0" tem antecessor (se $N \in \mathbb{N}$ e $N \neq 0 \Rightarrow N - 1 \in \mathbb{N}$).

Existem infinitos subconjuntos, como o dos múltiplos de 2, 3, 4 etc., ou 5, 6, 7, 8, 9 etc.

Esse conjunto é FECHADO em relação a multiplicação e adição. Isso significa que se somarmos ou multiplicarmos 2 elementos quaisquer desse conjunto, o resultado será um número pertencente ao conjunto dos naturais. Isso não acontece com a subtração e a divisão porque se subtrairmos por exemplo 3 e 5 teremos –2 que pertence a outro conjunto, o conjunto $\mathbb{Z}$.

CONJUNTO $\mathbb{Z}$ – inteiros (negativos e positivos)

Não é limitado à direita nem à esquerda, não tem maior nem menor elemento, é fechado em relação a adição, multiplicação e subtração e contém $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$). "0" é elemento neutro da adição e da multiplicação e o "1" é elemento neutro da multiplicação e da divisão, é um conjunto enumerável, ordenado (sempre há 1 negativo para 1 positivo).

ÊTA!

Um conjunto diz-se enumerável se pode ser colocado em correspondência com $\mathbb{N}$ * (esse asterisco informa que o "0" está fora do

$$x = \frac{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}{2} = \frac{\frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd}}{2} = \frac{\frac{ad + bc}{bd}}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$$

a/b c/d

Sendo que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

É meio difícil falar sobre o conj. $\mathbb{Q}$ sem falar sobre...

DÍZIMAS PERIÓDICAS – a 10ª parte

dízima = forma decimal, 10ª parte.

dízima famosa = $\frac{1}{3}$ = 0,3333 expansão infinita, periódica simples.

(Dízima com parte decimal de se repete)

DÍZIMA PERIÓDICA COMPOSTA → $\left.\begin{array}{l} 2,54444... \\ 2,545454... \end{array}\right\}$ semi-periódica

O PI (π de geometria) tem expansão decimal infinita não periódica (todos os números com expansão decimal infinita não periódica não podem ser expressos por frações). Todos os decimais são infinitos.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ dá pra tornar infinito com o zero 0,2500000 no momento em que eu parar de escrever o zero ela poderá ser expressada por fração, se eu não parar ou colocar o tracinho em cima do zero (isso significa que ele se repete infinitas vezes) esse número não poderá ser expressado por fração.

EXEMPLOS DE FRAÇÕES GERATRIZES DE DÍZIMAS PERIÓDICAS NÃO INFINITAS:

$\overline{0,6} = \frac{6}{9}$ $\quad 0,\overline{5} = \frac{5}{9}$ $\quad 0,\overline{4} = \frac{4}{9}$

$\boxed{0,\overline{1} = \frac{1}{9}}$ $\quad$ Fração geratriz de 0,1 é $\frac{1}{9}$.

Mas e o 0,9? $0{,}9 \rightarrow \frac{9}{9} = 0{,}999... = 1$ ah!

$0{,}13 = \frac{13}{99}$ $\quad 0{,}133 = \frac{113}{999}$

$1{,}2 \rightarrow$ para eliminar a parte decimal basta multiplicar por 10

$a = 1{,}2$ $\quad 10a = 12$

$x = 0{,}232323$ etc.

$10x = 2{,}3232$ etc.

$100x = 23{,}23$ etc.

deu!

$100x - x = 99x = 23$

$x = \frac{23}{99}$ $\quad$ verif.

```
230 | 99
198   0,232
2320
 297
0230 etc.
```

Completar os traços da conta →

OS NÚMEROS QUE NÃO PODEM SER EXPRESSOS COMO RAZÃO DE DOIS NÚMEROS INTEIROS NÃO SÃO RACIONAIS.

▶ IRRACIONAIS:

Ele é o irracional mais famoso! O π tem expansão decimal infinita e não periódica.

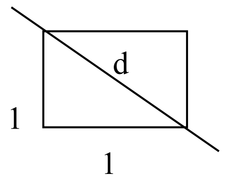
0,348141838198340 Quando eu parar de escrever esse número ele será racional. Se tiver expansão infinita é irracional.

OUTROS IRRACIONAIS = $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ ... $\sqrt{P}$ (primo)

Matemática claro, é cultura!

PERÍODO PRÉ-SOCRÁTICO – depois do filósofo Sócrates

Pitágoras vivia numa ilha da Grécia chamada Samor. Ele era muito rico e fazia parte de uma ceita religiosa onde tudo é número. Mesmo essa religião não conseguiu explicar um número curioso: $\sqrt{2}$. Hoje sabemos que ele é irracional.



$d^2 = 1^2 + 1^2$

$d^2 = 1 = 1$

$d = \sqrt{2}$

O conjunto IR é infinito, não é enumerável, é denso e não é fechado.

PROVAS:

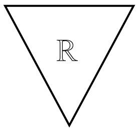
$\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ é racional

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$ “ “

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ “ “

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$ “ ”

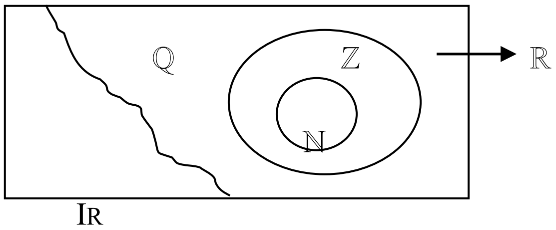
O SUPER CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS



Esse conjunto é:

RACIONAIS + IRRACIONAIS = ℝ

(ℕ, ℤ, ℚ) (IR) ele é tudo isso!



RESUMINDO: É infinito, denso, não é enumerável, é fechado (x, –, x e ÷) não é fechado em relação a $\sqrt{\ }$.

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$$

Suponha que $\sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

$x = \sqrt{-1} \Rightarrow x^2 = -1$

Suponho que $x < 0 \,.\, x^2 > 0$

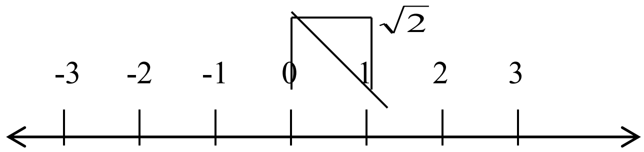
$x = 0 \,.\, x^2 = 0$

$\boxed{x < 0 \text{ é negativo}}$ $x > 0 \,.\, x^2 > 0$

Posso imaginar todos esses conjuntos falados até aqui em uma reta contínua (sem buracos) e infinita. Será que há um conjunto que "tem" a reta? Acho que tem que ser um conjunto que contenha $\mathbb{R}$. Ele existe e se chama...

<u>NÚMEROS CONSTRUTIVOS</u> – podem ser construídos com régua e compasso

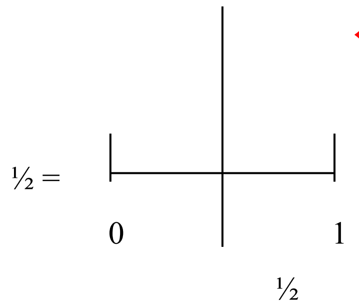
Com régua, eu construo uma reta. Abrindo o compasso em uma certa distância e repetindo essa distância várias vezes, terei minha unidade de medida.



Já construí números positivos e negativos. Desenhei um quadrado 1x1 e tracei a diagonal que é igual a $\sqrt{2}$. Transportei a medida para a reta e obtive $\sqrt{2}$, um irracional. Com isso, podemos marcar múltiplos de $\sqrt{2}$ como: $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$ etc.

Marcando o conj. $\mathbb{Q}$.

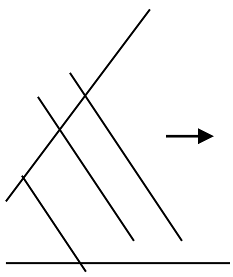
← completar os traços das retas



Fazendo o mesmo com ½ e 1 teremos ¼ e assim por diante.

Para as demais frações...

Abrindo o compasso em uma medida, marcar pontos na reta e traçar paralelamente uma outra reta: PARALELAS DO TRIÂNGULO.

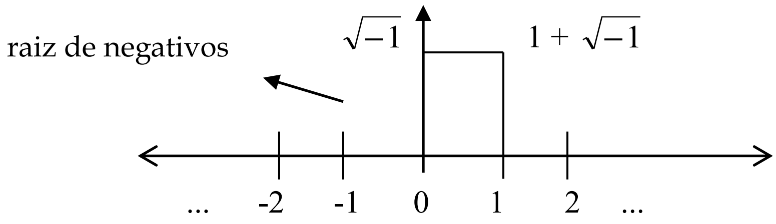


$= \frac{3}{5}$ e assim por diante. Assim, construo qualquer fração e soma de fração.

Temos aqui um novo conjunto que engloba todos os outros (naturais, negativos, irracionais, racionais e raízes de naturais).

PLANO CARTESIANO:

Outro conjunto que contém IR. É uma tabela infinita nos lados, pra cima e pra baixo.



P.S: FIZ ESSA REDAÇÃO SEM O USO DO LIVRO. USEI APENAS MEU CADERNO E MINHA CABEÇA.

ANEXO 13

TEXTO 5 DE GABRIELA SOBRE 4 AÑOS

GABRIELA RIBEIRO ARAKAKI 8ºB Nº09 23 de novembro de 96 ①

REDAÇÃO AVALIAÇÃO

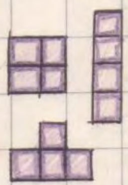
Foram quatro anos de desenvolvimento de um trabalho matemático e geométrico. Todo esse percurso foi marcado por proposições, sacações e evoluções.

5ª SÉRIE

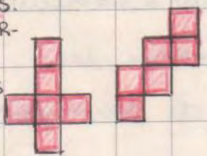
O trabalho da 5ª série foi marcado pelos tetraminós, hexaminós e pentaminós. Com pentaminós e hexaminós foi feito um trabalho mais aprofundado.

Conceitos com simetria e noção de área, foram abordados através do estudo com pentaminós.

TETRAMINÓS:
SÃO APENAS 5;
FORMADOS POR 4 QUADRADOS DE MESMO TAMANHO.



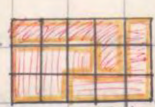
HEXAMINÓS:
SÃO 35, FORMADOS POR 6 QUADRADOS DE MESMO TAMANHO



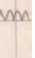
PENTAMINÓS:
FORMADO POR 5 QUADRADOS DE MESMO TAMANHO, CONSTITUEM 12.

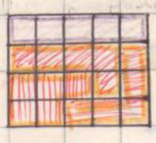
Noção de área: "Usando 3 pentaminós, formar um retângulo" → Este era um dos problemas do estudo.

SÃO 17 SOLUÇÕES.
AQUI VOU APRESENTAR SOMENTE DUAS:


SEM REPETIÇÃO


COM REPETIÇÃO

Todos os retângulos formados eram 3x5. Surge então outro problema: "Formar c/ pentaminós retângulos de dimensões 4x5." E uma proposição p/ solucionar o problema: "Basta acrescentar o pentaminó  num dos lados do retângulo 3x5". Temos então 17 soluções garantidas.



Estudamos mais aprofundadamente os hexaminós porque vários deles eram planificações de cubos ou caixas.

Nesse ano também foi feito um trabalho com o TANGRAN. Com o estudo sobre tangran, entramos em contato com palavras do tipo: congruência de lados e de ângulos.

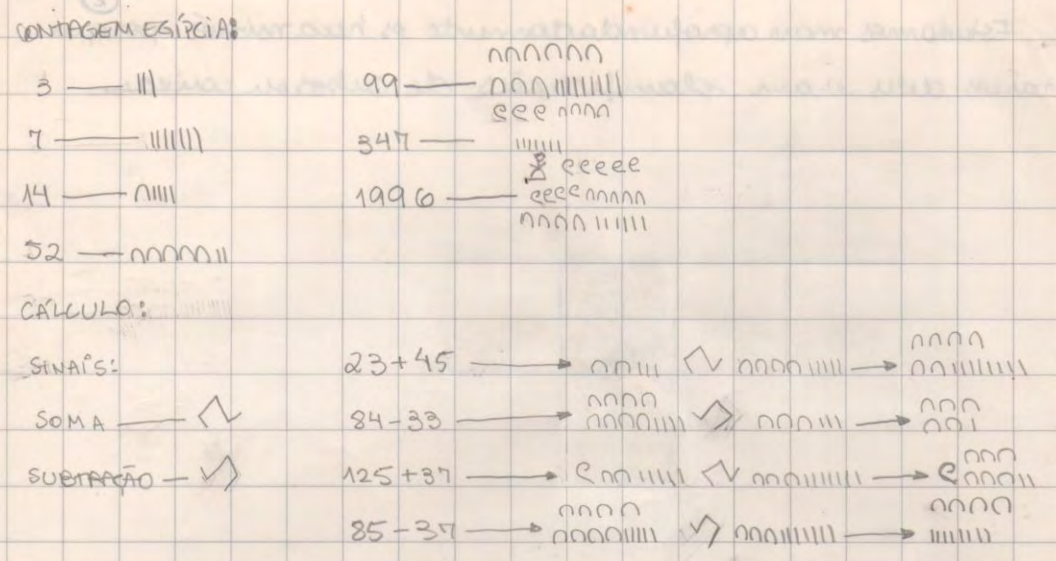
Fizemos também estudos sobre frações, decompondo figuras.

Foi feito um trabalho também sobre padrão de repetição, e para isso, utilizamos a simetria, repetição, rotação, translação, etc.

Em matemática nesse ano, estudamos a história dos números e da contagem e como diferentes povos em diferentes épocas representavam algarismos e números e como faziam contas.

REPRESENTAÇÃO EGÍPCIA

1 —— | (bastão)
10 —— ∩ (calcanhar)
100 —— (corda)
1000 —— (flor de lotus)
10 000 —— (dedo)
100 000 —— (peixe)
1 000 000 —— (pessoas de braços levantados)



Além do egípcio, estudamos também o sistema babilônico, maia, romano, Hindú arábico.

Ainda na 5ª, mechemos com frações, potências, quadrados mágicos, mínimo múltiplo e maximo divisor comum.

O QUESÃO QUADRADOS MÁGICOS? "Distribuir os nºs de 1 a 9 no quadro de modo que a soma de qualquer linha ou coluna seja a mesma."

9	5	1	=15
4	3	8	=15
2	7	6	=15
15	15	15	

6ª Série

③

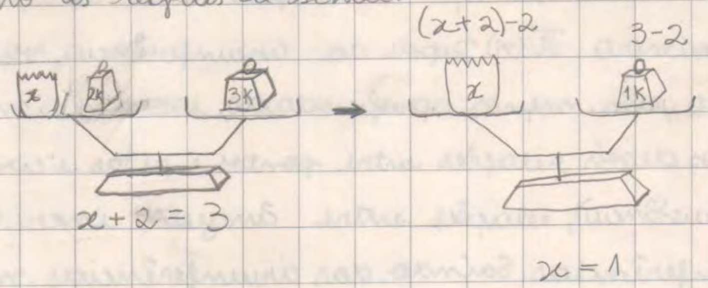
Nesse ano aprendemos a tirar a média aritmética. A regra foi surgindo aos poucos com as proposições que foram se aprimorando e ficando mais gerais.

Aprendemos a calcular a média ponderada.

A partir daí, construímos um gráfico que relacionava as alturas dos alunos, encontramos a média de altura da classe e encontramos a moda.

Trabalhamos com estatística, com razões, com proporção, regra de três, juros e porcentagem, números negativos, um pouco sobre conjuntos numéricos (só o $\mathbb{N}$ e o $\mathbb{Z}$. Aprendemos a usar sinais $>$ maior e $<$ menor, a calcular com números negativos e regra de sinais, a calcular com negativos na calculadora. Tivemos nosso primeiro contato com equações: a balança foi importante para o trabalho posterior com equações assim como as regras de sinal.

BALANÇA:



Fazíamos jogos de adivinha e resolvíamos problemas que iam nos deixando cada vez mais "adestrados" em métodos de cálculos em equações. Vimos expressões equivalentes, multiplicação, divisão e potenciação de frações e vimos um pouco de tabelas, gráficos e pizzas.

O trabalho de geometria desse ano foi muito relacionado a ângulos: tipos de ângulos, como medi-los, suas propriedades, proposições (foi de muita importância o estudo de ângulos para eventuais trabalhos realizados na computação utilizando o LOGOWRITER)

Depois desse estudo, passamos para polígonos, ladrilhos e pavimentos. Por coincidência, nesse mesmo ano (1993), houve no MASP, uma exposição do artista holandês M.C. Escher. (esse assunto volta a ser abordado e com mais profundidade na 7ª série).

Aprendemos propriedades sobre ângulos internos de polígonos regulares.

7ª Série

No início trabalhamos muito com circunferência: como calcular a área, o diâmetro, o raio, o comprimento. Para tanto, tivemos que nos aprofundar no número π (PI). Depois da circunferência, veio outro estudo, bem menos aprofundado, sobre cilindros. Vimos depois relações entre pontos e retas e circunferências (distância), relações entre ângulos inscritos em circunferências. Saindo das circunferências, mas não fugindo do assunto, nosso foco passa para curvas e arcos especiais e/ou maravilhosos (elipse, ying yang, etc...).

Já misturando geometria e matemática, começamos a estudar área de figuras estranhas.

De equações pulamos para probabilidades. (5)

Ex: "Qual a probabilidade de um dado de 6 faces lançado 6 vezes, sempre caia c/a face [·] virada p/ cima?"

Daí fomos tentar perceber relação entre área e perímetro de figuras (polígonos). Depois voltamos às equações, dessa vez procurando soluções do tipo $x =$ ___.

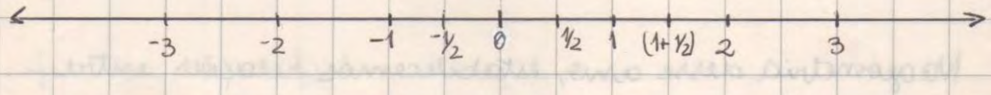
8ª Série

No início deste ano, entramos de cabeça (e quase morremos afogados) no estudo de conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{I}$; $\mathbb{R}$. Analizamos se eram finitos, infinitos, densos ou não, se é enumerável, e vários outros tópicos. No meio do estudo, abrimos uma janela p/ estudar dízimas periódicas: queríamos saber qual a fração que a produzia e aprendemos métodos p/ isso. (Voltando aos conjuntos): estudamos subconjuntos como por exemplo conjunto dos múltiplos de 6 ($M(6)$); ($M(3)$), etc. Junto aos subconjuntos, entendemos os sinais de intersecção ($\cap$) e de união ($\cup$).

como? $M(3) \cap M(6) = M(6)$ $\qquad$ $D(2) \cup D(8) = D(8)$

$M(2) \cap M(3) = M(6)$ $\qquad$ divisores $D(6) \cup D(3) = D(6)$

Aprendemos a extrair $\sqrt{\;}$, $\sqrt[3]{\;}$, $\sqrt[4]{\;}$, etc, de frações. E aprendemos a construir números sobre uma reta.



Retomamos então a equações do 2º grau. E finalmente após sofrer com tabelas, com o método de Al Khowarizmi ao resolver essas equações, chegamos a Bhaskara. Daí em

diante era só resolver equações p/ ficar bem "adestrado" ao novo método. Aprendemos sobre Δ (delta) e vimos pouco de inequações e de equações de grau superior a 2.
Começamos então a construir tabelas e gráficos, não dava mais para fugir, havíamos chegado em FUNÇÕES!
Primeiro vieram as do 1º grau, só achar dois pontos, traçar uma reta; depois veio as do 2º grau, já mais complexas, eram parábolas onde era preciso encontrar todos os pontos possíveis. Mas o pior ainda estava por vir: era descobrir a função que a, b e c exerciam nos gráficos; como localizar a raiz e como encontrar o endereço do ponto do vértice da parábola. No meio de tudo isso, haviam "exercícios adestradores".

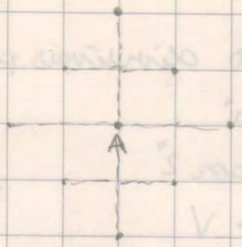
Acabado o conteúdo, foi a vez dos desesperados pedirem ajuda ao professor por causa dos vestibulinhos. Foram várias aulas de esclarecimento.

Depois disso, tivemos o privilégio de sermos os únicos alunos de 8ª série de São Paulo a estudarem Matemática Comercial e Financeira. Aprendemos porcentagem; reajuste; juros simples, compostos; montante; rendimento; Alíquota, capital inicial.

Na geometria desse ano, estabelecemos relações entre diâmetro e perímetro de polígonos regulares. E nos focamos principalmente na circunferência. Desenvolvemos um projeto piscina, que seria construir uma

⑥ Na taxigeometria também é assim, mas isso ocorre de modo diferente.

TAXICIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 2 COM CENTRO EM A:

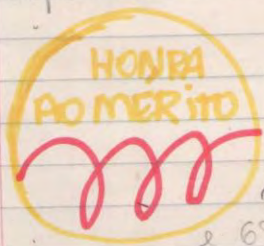


ANEXO 14

TEXTO 5 JOANA SOBRE 4 AÑOS

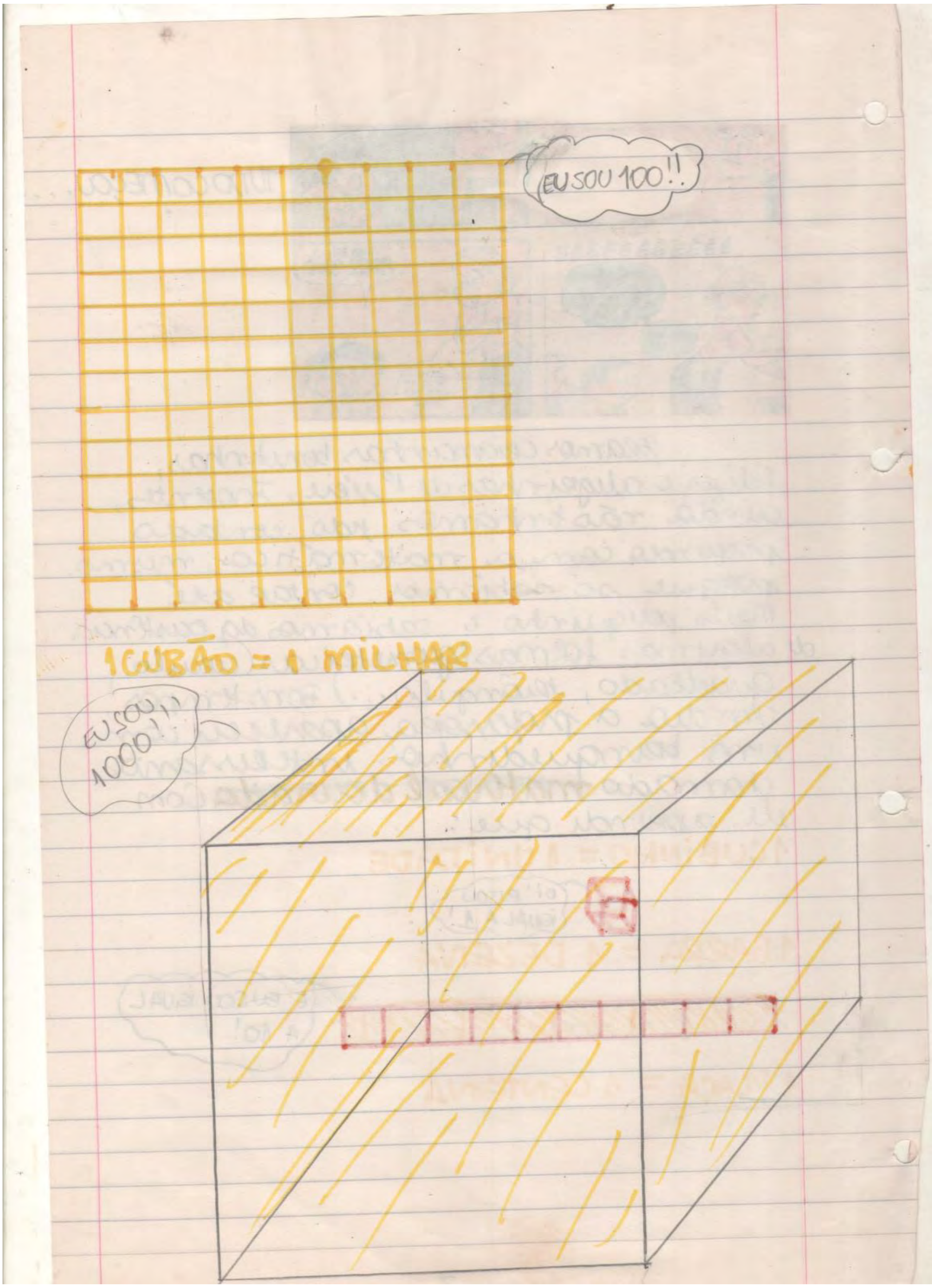
1. Introdução

Tetracampeões me lembra tetraminós que me lembra 5º série, que me lembra 5º operação, que me lembra radiciação e logo lembro da fórmula de Bhaskara e claro, o nosso expertíssimo professor de matemática e geometria desses rápidos (e muito rápidos mesmo!) 4 anos: Bigode! Antes de começar, gostaria de te entregar esta medalha por ter nos aguentado por tanto tempo. Parabéns!

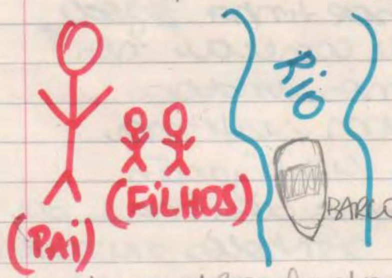


Mas como nem tudo são flores eu também tenho uma denuncia a fazer: você não me entregou cadernos de geometria da 5º e 6º e de matemática da 7º e 5º. Então nem adianta reclamar da minha redação porque eu estou com material escasso. "Peste, cão, cachorro, vagabundo, sem-vergonha"... taí uma frase tua que ficou "eternizada" na minha cabeça.

Convido você que está lendo a fazer uma viagem dentro desses 4 anos, **BACK TO THE PAST**. Relembrarei os melhores momentos da 5º, 6º, 7º e 8º viajando por tantos aspectos interessantes da geometria e matemática que não é nenhum bicho de 7 cabeças. É até bonitinha...


EU SOU 100!!
1 CUBÃO = 1 MILHAR
EU SOU 1000!!

Bom tudo continuava divertido. Os problemas também eram legais. Olha esse:
UM PAI PESAVA 80kg E ELE TINHA 2 FILHOS - CADA UM PESAVA 40kg. TODOS QUERIAM ATRAVESSAR O RIO MAS O BARQUINHO SÓ AGUENTAVA 80kg. E AGORA? Primeiro eu fiquei meio triste porque todo mundo queria atravessar mas não dava pra ir todo mundo junto. A 1ª coisa que eu fiz foi desenhar



1º eu pensei: vou mandar os dois filhos. Aí quem volta? Um apenas p/ pegar o pai que vai. Aí o filho que estava do outro lado volta para pegar o irmão e todos pulam no rio para nadar! (nem precisava do barco, que problema chato!)

Acho que foi nessa época que eu descobri que a matemática está presente em todos os lugares e momentos de nossa vida. Se os meninos e o pai não soubessem a CAPACIDADE do barco e todos fossem juntos no barco, todos seriam morrido afogados e o problema não existiria.

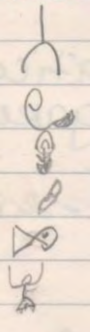
A matemática está presente até no meu rosto! Quem faz aula de desenho aprende que entre um olho e outro, o espaço é do mesmo tamanho de um outro olho! Além disso, o nariz é do tamanho de 2 olhos e assim segue. :)

na 2º, 3º e 4º série aprendemos as quatro operações e as chatas das frações. Chegamos então na:

2. 5º Série

nosso professor tinha bigode e usava rabinho. Ele começou nos ensinando algarismos indo-arábicos que era um sistema de numeração da civilização hindu. Vimos o sistema decimal de novo e aprendemos símbolos numéricos dos egípcios, babilônios, maias e romanos, claro

EGÍPCIOS:



Símbolo	significado	valor
	Bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1.000
	dedo levantado	10.000
	peixe	100.000
	homem ajoelhado	1.000.000

BABILÔNIOS:

𒁹 = 1 𒌋 = 10

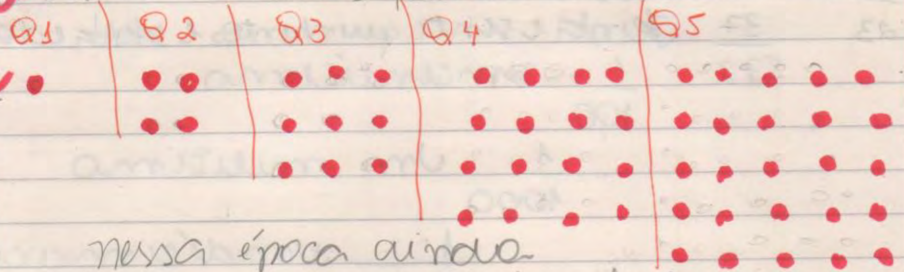
ROMANOS:

1 5 10 50 100 500 1.000

I V X L C D M

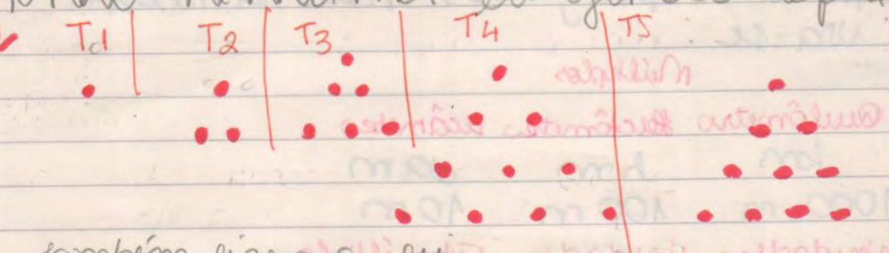
Trabalhamos ainda cálculo mental e vimos forma de número.

NÚMEROS QUADRADOS



nessa época ainda faziamos lei geral da fulano ou do cicrano. Infelizmenti meu professor não me deu meu caderno da 5º série e eu estou escrevendo pelo livro, portanto eu não tenho nenhuma lei geral aqui

NÚMEROS TRIÂNGULARES.



também fizemos leis geral para podermos calcular o enésimo número triângular ou enésimo nº quadrado.

TANGRAM

Um espelho quebrou-se em partes, durante uma viagem, e todos quebraram a cabeça

4

e passamos a planificá-las.

FIGURA CONVEXA

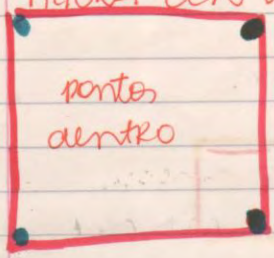
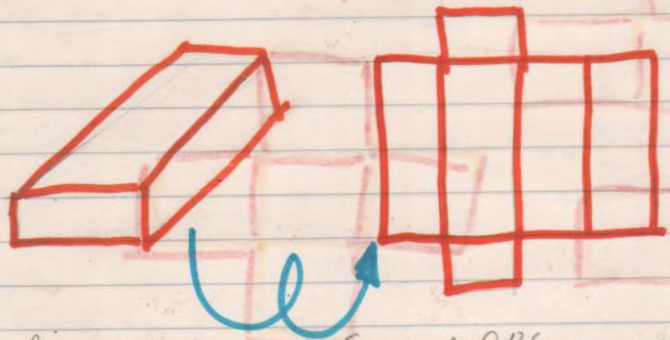


FIGURA NÃO CONVEXA



vimos também polígonos:

POLI + GONOS

muitos ângulos

NUMERO DE LADOS	NOME DO POLÍGONO
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octógono
9	eneágono
10	decágono
12	dodecágono

A 5ª série não seria 5ª série sem os famosos TETRAMINÓS E PENTAMINÓS.

3.6ª Série:

começamos o ano estudando

Média: A minha definição foi:

Média é a quantidade não exata mas a mais próxima

- A média das minhas notas é 8
- A idade média das pessoas da classe é 12

O Diego fez a seguinte proposição:

A média aritmética de 3 números é obtida somando-os e dividindo o resultado por 3.

Propo mais forte Diego:

Dados n números a média aritmética é a soma desses números dividido por n.

Uma propo é mais forte que a outra quando ela é mais igual e engloba a proposição original.

exemplo do Gui:

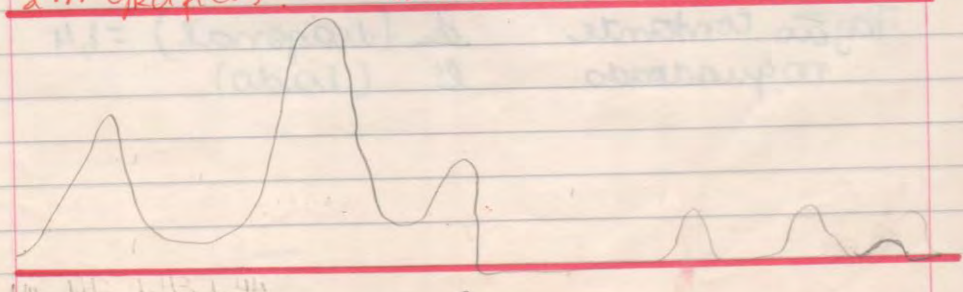
Ma: A B C D E = $\frac{ABCDE}{}$

moda: valor mais frequente.

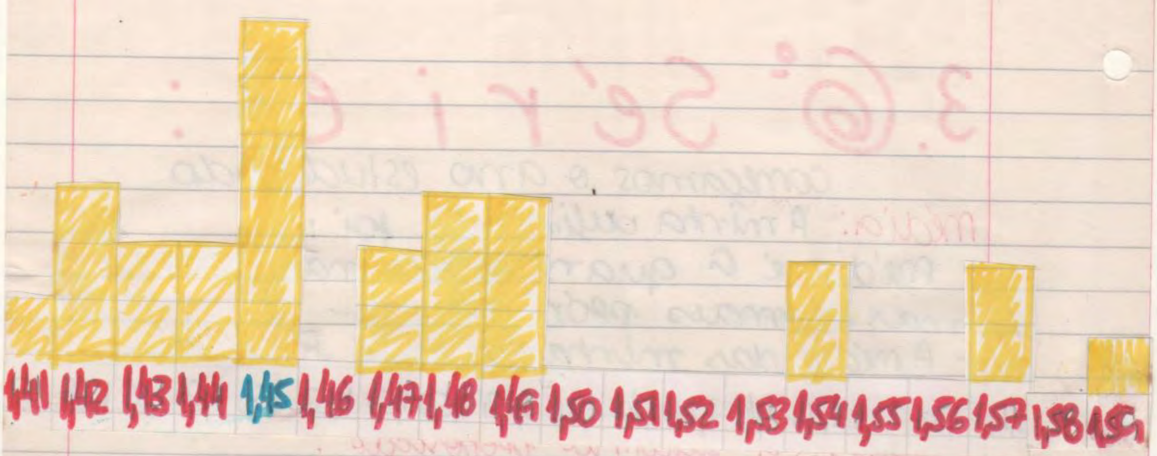
Vimos também Dm (desvio médio) que é o valor de quanto falta para chegar na média

É impossível estudar média sem gráficos

GRÁFICO LINHA - ALTURA DA 6ª B



6.



Nossa, como o pessoal era baixinho!

Interpretação do gráfico: A maior barra (1,45m) é a moda. A soma da área das barras é o tamanho da amostra (28).

Também estudamos razões:

Velocidade: $V = \frac{d}{t}$ $\frac{\text{distância}}{\text{tempo}}$

Densidade demográfica: $d = \frac{n}{a}$ $\frac{\text{(nº de habitantes)}}{\text{(área em km}^2\text{)}}$

Renda percapta: $R = \frac{PNB}{n}$ $\frac{\text{(Produto Nacional Bruto)}}{\text{(nº de habitantes)}}$

Densidade de um corpo: $D = \frac{m}{v}$ $\frac{\text{(massa)}}{\text{(volume)}}$

Escala: $\frac{\text{medida no desenho}}{\text{" " real}}$

Porcentagem: Razão em que denominador é 100.

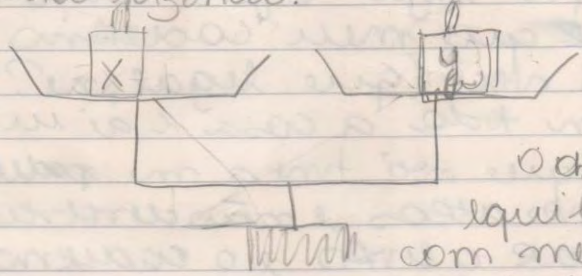
Razão constante no quadrado $\frac{d}{l}$ $\frac{\text{(diagonal)}}{\text{(lado)}} = 1,4$

Também foi nesse ano que vimos os tão comuns números negativos que segundo meu caderno:
Surgem para representar e dar significados para números menores do que zero. Ex:

- saldos bancários
- saldos de gols
- temperaturas
- elevadores
- altitudes e profundidades
- datas.

Esses números foram carinhosamente chamados de "o mal da matemática"

Vimos balanças que me ajudaram muito a não decorar e reproduzir, como um robô, equações que trabalhamos até hoje.
A balança explica tudo! Graças a ela eu não decoro e sei o que eu estou fazendo.



O objetivo é equilibrar coisas com mesmo peso.

começamos então a estudar equação:
$5x+3=8$

$$\boxed{5x+3}\ \boxed{8} = \boxed{5x+3-3}\ \boxed{8-3} =$$

$$\boxed{5x}\ \boxed{5} = \boxed{5x \div 5 = x}\ \boxed{5 \div 5 = 1}$$

logo $x=1$

7.

(Ainda bem que hoje eu faço isso de cabeça! Que trabalho que dava!)

No final do ano ficamos brincando de inventar problemas. Eu inventei esse:

ETAPAS	COMANDOS	REPRESENTAÇÃO ALGÉBRICA
1	Pense um numero	n
2	multiplique por 6	$6n$
3	Divida por 3	$6n/3$
4	Adicione 6	$6n+6/3$
5	Subtraia 3	$6n+6-3/3$
6	Subtraia 3	$6n+6-3-3/3$

segredo: divide por 2

Bom... meu caderno acabou e o outro está com você Bigode. Meu caderno de geometria também. Fazer o que? O jeito é ir para a

4. 7ª Série:

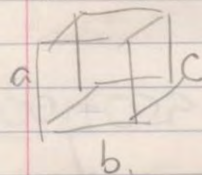
Ai que legal Bigode! Acabei de lembrar que meu caderno está com você (que legal, né?) Procurei em toda a casa e aí eu me lembrei que você tinha me pedido há uns anos atrás e não devolveu!) Bom, vou usar o livro e o caderno de geometria. Lá vai:

Foi na 7ª série que começamos a usar um livro para nos auxiliar a estudar.

Começamos estudando medidas de capacidade e volume.

CAPACIDADE: Espaço que objeto dispõe para armazenar.

VOLUME: Espaço ocupado por qualquer coisa.



$V = a \cdot b \cdot c$

Revimos a idéia de conjuntos numéricos (N, Z, R, Q) e numeração antiga (5ª série). Aprendemos a incorporar letras em contas (m, n, x, a etc.) Ao invés de escrevermos "o sucessor de um número" aprendemos a escrever $x+1$. Fomos mergulhando em equações algébricas e expressões, cada vz mais fundo. Resolvíamos as equações chutando valores para as incógnitas, fazendo tabelas. Algumas, nós resolvíamos de cabeça. O que eu gostei muito na 7ª série foi o método de Gauss. Eu gostei porque eu descobri esse método e depois você me contou que Gauss já havia descoberto este método há muito tempo. Carl Friedrich Gauss (Alemanha 1777-1855) era um aluno muito bagunceiro. Como castigo, seu professor lhe pediu que ele somasse os números de 1 a 100 pois assim o menino estaria ocupado e não mais atrapalharia a aula. Três minutos depois o garoto respondeu: 5050!

$$T_{99} = 1+2+3 + \ldots + 97 + 98 + 99$$

$$T_{99} = 99+98+97 \ldots + 3 + 1 + 2 + 1$$

são 100 mas ele não conta pois está completo

$$100+100+100 \ldots + 100 + 100 + 100 -$$

$$2 \times T_{99} = 99 \times 100$$

$$2 \times T_{99} = 9900$$

$$T_{99} = 9900 \div 2 = 4950 + 100 = 5050$$

diferença constante: 1

Já ainda na 7º que aprofundamos medidas de áreas de figuras começamos a trabalhar com fórmulas

A TRIÂNGULO: $\frac{B.H}{2}$ A TRAPÉZIO: $\frac{B+b \cdot h}{2}$

A RETÂNGULO: L.L etc.

Aprendemos casos de fatoração:

- FATOR COMUM
- AGRUPAMENTO
- TQP
- diferença de quadrados
- soma e produto

Praticamos bastante e é por isso que eu hoje olho para uma expressão e sei fatorá-la. É incrível como isso está incorporado em meu conhecimento matemático.

também demos nome aos bucros:

nº de parcelas:	nome:	exemplo:
1	monômio	$3ab$
2	binômio	$3ax^2+3ba$
3	trinômio	$2by-3ax^2-b$
acima de 4	polinômio	$x^3+ax^3+a^2x+a^3$

PROBABILIDADE: Qualidade ou caráter de provável, motivo ou indício que deixa presumir a verdade ou a possibilidade de um fato.

Figode:

a 8ª série foi o ano em que estávamos mais maduros e olhamos para trás para lembrarmos e aprimorarmos nosso conhecimento. Você melhor que ninguem viu o quanto crescemos e tudo que aprendemos este ano. Deixo portanto apenas lágrimas de despedida e um enorme agradecimento à você que me fez ver que a matemática não é um bicho de 7 cabeças e que o raciocínio matemático é belíssimo e serve para entendermos o mundo onde vivemos. Eu não tenho medo da matemática pois tenho certeza que ganhei as melhores ferramentas para lidar com ela. Criatividade? É algo que renovamos olhando para quadros belíssimos de Escher,

a

eu olhando e lembrando de nossas aulas em livros e cadernos.
Hoje eu misturo meu conhecimento matemático com o filosófico, científico, geográfico, até em português.
Confesso que tinha medo e não gostava da matemática mas agora... bem, não sou LOUCA pela matemática mas com certeza melhorei 200%.

ANEXO 15

ANALISIS DEL TEXTO DE GABRIELA SOBRE PENTOMINOS

Caraterização	Competência sintática	Consciência de rigor	Explicitando formalmente	Definição nominal por decomposição etimológica do termo Definição por extensão (enumeração dos objetos)	**Pentaminós** (penta = cinco 5 / minó = quadrado □) Aprendemos todos os **tetraminós** [exibe todos através de desenhos]
			Explicitando de forma coloquial	Usa o termo retângulo como conceito dominado e representado pelas duas medidas	Formar um **retângulo** 5x3
		Afirmação só para mostrar domínio / saber		Referência sem enumeração completa, exibe 5 casos	Até que chegamos nos pentaminós que são 12
	Competência Metalinguística	Consegue gerir elementos semióticos, ...		Usa desenhos para representar / descrever pentaminós e para indicar atividades sobre sombras e transformações como reflexão , translação e reflexão Usa códigos de letras como nomes das peças, associado ao desenho	--
		Consciência do propósito dos diferentes registros.			--
		Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor			--
Sistema e Relações conceituais	Uso de conexões entre conceitos / procedimentos	Faz elenco de conceitos conexos		Para falar dos movimentos faz referência somente ao vivencial sem indícios de domínio conceitual, sem conexão	**Rotação**, **translação** e **reflexão**
		Explicita relações conceituais			--
		Implícitas sem apropriação			
		Explicita relações procedimentais		Identifica simetria como espelhação	Vimos também **simetria** com [desenhos] espelhação
	Conexão entre contextos y conceitos	Explicita controle e valoração do rigor			--
		Implícitas com indícios de apropriação			
		Em conexão interdisciplinar			
		Cultural, histórico			
		Centrado no raciocínio			
Registros	Situações referenciais	Uso de exemplos		Área por contagem, quadradinhos como unidade Referência a soluções parciais do problema	Vimos também **simetria** com [desenhos] espelhação Cercar um buraco com a maior **área** de **quadradinhos** Depois do buraco, começamos a trabalhar com as **sombras** formadas por pentaminós, veja: [desenhos]
		Valor dos exemplos / contra-exemplos			
		Recontextualiza reinterpretando			
		Tentativa de recontextualização sem sucesso por falta de conexões explícitas entre conteúdos e experiências/referenciais		Evoca um processo iterativo (de forma não explícita) para a resolução de uma classe de problemas	... havia uma técnica, era só acrescentar a peça I
	Contextos	Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios. (marcas relevantes do texto adotadas pelo grupo, do que aconteceu visto pelo aluno)		Descreve ações de aula do ponto de vista genérico Foi usado papel quadriculado, á caneta, para escrever a RAv,	Fizemos vários **exercícios** ... Minha classe conseguiu 124,
		Cultural (relações explícitas com uma comunidade mais ampla)		Refere-se a resultados obtidos em uma mesma classe da mesma escola	mas o máximo que já conseguiram foi com área 128*
		Texto		Marca da RAv como portadora de mensagem para o leitor (professor)	Gostaria de saber como se mexe com **transferidor**
Comentário	Referência a problema explorado (formar retângulos) // Dá pistas à estratégia utilizada // Cercar um buraco // Exercícios sobre sombra // O texto foi escrito diretamente para refletir as ações principais que foram desenvolvidas, sem explicitação clara de relações conceituais				

ANEXO 16

ANALISIS TEXTO DE JOANA SOBRE PENTOMINÓS

Caracterización	Competencia sintática	Consciência de rigor	Explicitando formalmente	Incorpora definição nominal (composição etimológica) pela característica de construção, usando analogia, sem explicitação das condições. Definição por extensão sem uso do "é"	.. desenhar "**tetraminós**" (que foi explicado como **dominó** de 4 peças, pelo nome **TETRA**) apareceram 12 **pentaminós** (I, X, C, W, ... e Y)
			Explicitando de forma coloquial	Organiza una idéia sobre pentaminós sem reconhecer explicitamente que serve para caracterizar algumas peças del conjunto Perímetro como contorn Caracterização das peças por movimentos isométricos (índice de rotação), mediante exemplos sem esgotar os casos.	Desenhamos peças...refletimos (ex..) ...reparar a sua reflexão Fizemos uma pista de corrida, para saber qual era o **perímetro** .. para a peça rodar e chegar na mesma posição ... com exceção do **C**
		Afirmação só para mostrar domínio / saber			
	Competência Metalinguística	Consegue gerir elementos semióticos, ...		Ao usar a frase "deve ser substituída" dá indício de reflexão sobre a necessidade de incorporar vocabulário novo, menos coloquial e mais técnico Usa palavras em maiúsculo aparentemente como símbolo de novidade Ou para realçar elementos distintos do texto	Aprendi a palavra "**ponta**" deve ser substituída por "**vértices**", .. TETRA.....PENTAMINÓS... ROTAÇÃO, TRANSLAÇÃO, REFLEXÃO DESAFIO ... DIFICULDADES APRENDIZADO, PROBLEMAS
		Consciência do propósito dos diferentes registros.		Único desenho utilizado refere-se a exemplificação de espelhamento de uma peça, acompanhando a descrição verbal. Usa códigos de letras para enunciar as peças Usa elementos simbólicos próprios de uma linguagem abreviada atual [??]	Desenhamos peças e as repetimos no espelho ex. : [desenho] Apareceram 12 **pentaminós** (I, X, C, W, ... e Y) ...sem repetição (+ - 10)
		Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor		Reconhece o valor das palavras compostas (composição etimológica do termo), resignificando cada parte do termo.	
Sistema e Relações conceituais	Uso de conexões entre conceitos / procedimentos	Faz elenco de conceitos conexos (01,02,03...)		Aqui relacionado a projeção, vista	Aprendemos a **sombra**
		Explicita relações conceituais (01 - 02)		De forma categórica (classificatória), para representar classes, quando descreve possíveis movimentos del plano Assume implicitamente que as figuras planas tem perímetro e que sabe como calcular o perímetro.	Reflexão...translação...rotação Fizemos, .. para saber qual era o **perímetro**
		Explicita relações procedimentais (01-0P)		Evoca una relação (pentaminó - espelhamento) no contexto do que tem acontecido na aula Relação peças desenho com quantificação das possibilidades Evoca uma relação peças-movimentos Relação peça-invariância/rotação Evoca a área dor contagem e busca de maior área num contexto de problematização Referência com intenção de definir, explicar o que significa	Desenhamos peças e as refletimos no espelho, ex. Tivemos que desenhar pentaminós. Apareceram 12 pentaminós Aprendemos a mudar a posição, mas sempre da mesma figura formada Vimos que para a peça rodar e chegar na mesma posição Cobrir um tabuleiro de xadrez, ... área .. é de 64. Cobrir um buraco com a maior **área**. **Reflexão** = espelho = reflete a peça **Translação** = move a peça **Rotação** = que vira a peça ..

	Conexão entre contextos e conceitos	Explicita controle e valoração do rigor	Apreciação e reconhecimento da complexidade do objeto e dos problemas a ele relacionados	.. exige rapidez e técnica em desenhar a figura e exige cálculos matemáticos .. Eu desenvolvi muito habilidade
		Implícitas com indícios de apropriação	O nome tetra-mino é usado com analogia a do-mino como veículo para indicar que reconhece famílias de objetos com caraterísticas comuns	.. "**tetraminós**" (que foi explicado como **dominó** de 4 peças, pelo nome **TETRA**)
		Implícitas sem apropriação	Indica que paralelogramo e polígonos são entidades diferentes, tenta achar relação entre elas.	Não ficou claro para mim o sentido da palavra **paralelogramo** e **polígonos**
		Em conexão interdisciplinar		
		Cultural, histórico		
		Centrado no raciocínio	Conecta com o valor didático da atividade	**APRENDIZADO** Pentaminós .. exige a rapidez, ... eu desenvolvi a habilidade, ... é um jogo muito divertido, ..
Registros	Situações referenciais	Uso de exemplos que mostram relações, idéias... do que deu sentido ao conceito	Evoca (não explicitamente) o fato de que os pentaminós foram definidos como parte de uma classe de figuras formadas por 5 quadrados Reconhece que uma figura plana tem área e perímetro Evoca uma situações problema da aula, intimamente ligada ao conceito (e valores do grupo), informa ordem de grandeza do número de soluções. Chama alguns de "desafios" Faz referência ao título de uma atividade de aula, cujo enunciado, textualmente incompleto com falta de condições sobre a tarefa envolvida .	Criamos uma família de "**cubos**" (ainda não eram pentaminós..) Desenhamos peças e as refletimos no espelho, ex. [desenho] Fizemos ..... para saber qual era o perímetro ... .. tivemos de formar retângulos usando 3 .. com repetição e sem repetição, ... Cobrir um tabuleiro de xadrez, ... área .. é de 64... Cobrir um buraco com a maior **área** . Aprendemos a "**sombra dos pentaminós**"...
		Valor dos exemplos / contra-exemplos	A rotação de 1 e 1/2 volta para caracterizar as peças ...	.. para a peça rodar e chegar na mesma posição .. com exceção do **C**
		Recontextualiza reinterpretando	Ao usar a frase "deve ser ligada" dá indícios de ampliação da idéia de medida antes associada a linear. Reconhece que os objetos pentominós podem ser medidos com foco na medida de área por contagem	A palavra "**medida**", deve ser ligada a palavra "**área**"
		Tentativa de recontextualização sem sucesso por falta de conexões explícitas entre conteúdos e experiências/referenciais	Enuncia situação e/ou atividade vivenciada com desconexão das condições precisas de construção	A "**sombra dos pentaminós**" ...
	Evidência de Contexto	Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios. (marcas relevantes do texto adotadas pelo grupo, do que aconteceu visto pelo aluno)	Associação metafórica perímetro → "pista de corrida" Fórmula problema fazendo referência a figura familiar usada como ícone nas aulas [metonímia ??] Foi usado papel pautado, á lápis com marcas de uso da borracha, para escrever a RAv,	Fizemos uma "**pista de corrida**" Seria possível construir uma **casinha** ..
		Cultural (relações explícitas com uma comunidade mais ampla)		--
		Texto (traços de informação relevante para o aluno e elementos conectados)		--

ANEXO 17

ANALISIS TEXTO DE GABRIELA SOBRE TANGRAM

	Análisis	Texto y sus bloques			Nombramiento			Atribución	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	Relato	Intercalación	Explicación	Tipos de elementos	Participantes	Papel de los participantes	tipo de atribución..	Acciones
Apertura directa	Introdución del tema			O tangram é um jogo chinês que tem 7 peças.	Objeto	C	C1		Situación cultural
		Foram inventados outros tangrans diferentes:	redondos, oval e até com forma de coração.		Formas	C	C1		Descrición
		As peças do tangram que nós estamos trabalhando		são: 2 ▲, 1 ▲, 2 ▲, 1 ■ e 1 [desenho].	Formas	A→C	A2 C1		Enumeración
Enunciación		Com essas peças é possível ser feito 13 figuras convexas,			Propriedade	C	C2		Situación de propriedade
				ou seja, figuras que têm todos os vértices para o lado de fora→ [desenho].	Definición figura com propriedade	C	C2		Definición
		As figuras não convexas.		que podem ser feitas com o tangram são milhares	Figuras problema	C	C2		Afirmación de facto
				As figuras não convexas têm pelo menos 1 vértice para o lado de dentro. Veja→ [desenho].	Definición figura com propriedade	C	C2		definición
				se dividíssemos alguma peça ao meio, as duas metades ficam iguais		A→L C	A3 C2		Facto acción → resultado
				→ △ → [desenho], △ → [desenho], △ → [desenho], □ → [desenho] ou [desenho] e [desenho] → [desenho] ou [desenho] →		C	C2		Enumeración
				essa peça, chamada de paralelogramo por ter todos os lados paralelos, é simétrica por rotação: veja	Simetria Propriedade	C	C2		Definición Enunciación de propriedade
				→ [desenho] se nós girássemos a peça a partir do ponto do meio, chegaria uma hora em que ela se encaixa.		A→L C	A3 C3		Facto acción → resultado"
				Isso também pode		C	C2		Extensión de

				acontecer com os triângulos e com o quadrado.					propriedade
Nuevo contenido		Durante o trabalho com o tangram, também discutimos os ângulos:				G(A) C	G2 C1		Situación vivencial
				o ângulo reto que tem 90°, o ângulo agudo que é menor do que 90°, e o ângulo obtuso que maior do que 90°.		C	C1		Facto definición
				[desenhos]		C	C1		Representación
		Descobri em casa que: qualquer peça que tem três ângulos de qualquer tamanho é um → triângulo	(não sei se é certo isso)			A→C	A2 C1		Situación de reflexión
Propiedades		Descobrimos que:		dependendo de quantos lados tem a peça, a soma dos ângulos internos são determinadas: Um quadrilátero (4 lados), a soma de seus ângulos internos é 360°. A soma dos ângulos de um pentágono é 540°, de um hexágono é 720°. Se você percebeu, toda vez que aumenta um lado, aumenta 180°.	Propriedade funcional Ejemplo Propiedad	G(A) C A→L	G3 C3		Descubrimiento Relación causa efecto Ejemplificación Busca de interación Generalización
		vimos também área.				G(A)	G2		
				Para saber a área das peças do tangram a melhor unidade de medida é o triângulo pequeno, pois todas as peças são formadas por ele.	Medida Area	C A→L	C2 A2		Conexión explicación
		Vimos também de lados que se coincidem,		ou seja, ângulos iguais entre as peças do tangram. Por exemplo:		C G(A)	C2 G2		Situación vivencial
			[desenhos]	O quadrado tem 4 ângulos de 90°, o retângulo também tem 4 ângulos de 90°, então o quadrado e o retangulo.	Forma Propiedade	C	C2		facto
		Durante esse trabalho com o tangram trabalhamos bastante com frações.				G(A)	G2		Conexión
			Era preciso ser bem inteligente para saber quanto valia a fração dada.	[desenho]		C→A	A2 C2		Evaluación personal de la tarea Identificación de obstáculo
		Eram frações complicadas como esta	2/8	Para saber quanto é esta fração, é preciso fazer uma subdivisão.	Fración	A→C	A2 C2		Explicitación local
	Referencial a lo que ocurre en clase	Uma ficha com 16 exercícios para serem feitos, alguns exercícios eram bem fáceis, outros eram difícil de se entender.				A→C	A2 C2		Situa temporalmente Evaluación personal de la tarea
			Você sabe o que é um polígono?	→ isso não é um polígono pois tem uma abertura.	Objeto propriedade	A→L C	A2 C2		Interación com el lector explicación

Caraterización		Competência sintática	Consciência de rigor	Explicitando formalmente	Definição por enumeração Caracterização por propried Definição nominal (por propriedad Caracterização de quadrado e retângulo por propried Definição própria por exemplificação	As peças de **tangram** que estamos trabalhando sã Todas as peças do tangram são **simétricas**, ou seja, se dividíssemos .. **Ângulo reto** que tem 90º, **Ângulo agudo** que é menor do que 90º, **Ângulo obtuso** que é maior do que 90º O **quadrado** tem, 4 ângulos de 90º, O **retângulo** também tem 4 ângulos de 90º Você sabe o que é um polígono ? Um **polígono** é uma forma que tem todos os lados fechados, sem nenhuma abertura, assim
				Explicitando de forma coloquial		... **figuras convexas**, ou seja, que tem todos as vértices para o lado de fora [desenho] isto não é um polígono pois tem uma abertura
			Afirmação só para mostrar domínio / saber			Com essas peças é possível ser feito **13 figuras convexas**
		Competência Metalinguística	Consegue gerir elementos semióticos,			[desenhos e códigos]
			Consciência do propósito dos diferentes registros.			As peças de tangram que estamos trabalhando são ... [desenhos e códigos] Todas as peças do tangram ... metades ficam iguais [desenhos] Ângulo reto, agudo, obtuso, ... Frações [desenho] 2/8 ...
			Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor			

Sistema e Relações conceituais	Uso de conexões entre conceitos / procedimentos	Elenco de conceitos conexos		Convexidade, não convexidade, simetria, metades Paralelogramo Rotação, Ponto do meio Triângulos, Quadrados, Pentágono Hexágonos Unidade de medida
		Explicita relações conceituais	Lista caso a caso dos quadriláteros ao hexágono argumentação e generalização argumentação associação implícita com a área das peças, com Tp tomado como unidade de medida	A soma dos ângulos do .. é Se você percebeu, toda vez que aumenta um lado, aumenta 180º Para saber a área das peças de tangram O quadrado tem, 4 ângulos de 90º O retângulo também tem 4 ângulos de 90º Durante o trabalho com o tangram trabalhamos bastante com frações
		Explicita relações procedimentais		Todas as peças do tangram são simétricas, ou seja, se dividíssemos .. Vimos também de lados que se coincidem, ou seja, ângulos iguais entre as ..
	Conexão entre contextos e conceitos	Explicita controle e valoração do rigor		
		Implícitas com indícios de apropriação		
		Em conexão interdisciplinar		
		Cultural, histórico		
		Centrado no raciocínio		

Registros	Situações referenciais	Uso de exemplos	Enumeração de todas as peças	As peças do tangram que estamos trabalhando são: [desenhos] Todas as peças do tangram ... metades ficam iguais [desenhos] .. ou seja, ângulos iguais entre as peças do tangram. Por exemplo: [desenhos] Frações complicadas assim [desenho Um polígono é uma forma que tem todos os lados fechados, sem nenhuma abertura, assim
		Valor dos exemplos / contra-exemplos		[desenho] isto não é um polígono pois tem uma abertura
		Recontextualiza reinterpretando		
	Contextos	Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios.		Foram inventados outros tangrans diferentes: ..
		Cultural Texto		O tangram é um jogo chinês

ANEXO 18

ANALISIS TEXTO DE JOANA SOBRE TANGRAM

			(divisão da linha por igual) de C e D		Defin. Simetria implícita	C	C1		Definição
		Como uma outra receita, montamos as peças do tangram e			consigna	G(A) → C	G2		Situa o vivencial construtivo
Caracterización		Começamos a estudá-las.			contrato	G(A) → C	G1 C1	//	Ação mental relacionada ao contrato
				As peças do tangram são: 2 triângulos pequenos, 2 triângulos grandes1 triângulo médio.1 quadrado. e um paralelogramo	figuras	C	C1	Enumeração	Elenca, determinado, os objetos de estudo
	Peso argumentativo			Essas peças variam no tamanho proporcional ao quadrado.	Forma - tamanho	C	C3	Reconhecimento de propriedade	Afirmação de característica do objeto explorado
		Com as peças do tangram, começamos estudar		Congruência de ângulos, ou seja, lados de peças que se encaixam.	Congruência	G(A) → C	G2 C2	//	Referência a exploração e sua conseqüências com a ampliação de vocabulário e fatos geométricos
				A ponta do triângulo pequeno se encaixa na ponta do triângulo grande. A parte de baixo do triângulo pequeno se encaixa na lateral do triângulo médio	Congruência (ângulos)	C	C2	//	Elenca fatos e relações aprendidos e/ou descobertos

[illegible]		Texto y sus bloques			Nombramiento			Atribución	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	Relato	Intercalación	Explicación	Tipos de elementos	Participantes	Papel de los participantes	tipo de atribución..	Acciones
Abertura	Posicionamento em relação ao conteúdo estudado	Eu tinha uma grande curiosidade sobre "tangram".	(ainda tenho)		Pessoal	A C	A1 C1	1ª singular pessoal	
		Quando começamos a estudar,	eu me interessei muito.		relato pessoal	G(A), A	A1 G1	1ª pessoa plural (fazer tarefa) 1ª sing (apreciar)	Situa o vivencial
Início del relato	Valorização o aprendido	Nós tivemos de montar o tangram,	a partir da receita,	uma "linguagem código" muito legal	Construção, objeto	G(A) C	G1 C1	Aceitação de papéis institucionais assimétricos na aula	Situa o vivencial e Explicita uma idéia nova
		Era gostoso de montar coisas a partir da receita,		pois parecia uma espécie de "batalha tangranal" (batalha naval)	Contrato implícito	A C	A1 C1	1ª sing. (aprecia)	Usando analogias com contexto familiar
		Havia uma receita e a partir dela, tínhamos de montar algo.	Aprendemos com isso,	o ponto médio.	Contrato	G(A) C	G2 C2	//	Evocação de elemento da tarefa Identificação conteúdo novo
				Exercício Esboce "a coisa" ABCD é um quadrado O E é o ponto médio O F é o ponto médio de F e E O ponto médio de A e C é M . O ponto médio de B e D é N.	Consigna	C	C1	Negociação com o leitor do significado	Descrição analógica de procedimento com identificação e nomeação de elementos

	com o propósito de convencer		[desenho] =	o ângulo é igual		C	C2		Descrição mediante desenho
		Montamos (com as peças) figuras geométricas,	como um retângulo, um quadrado, um triângulo e outras.		Formas	G(A) → C	G2 C1	//	Ação - resultado
		Também formamos outras figuras	(que não eram conhecidas).			G(A) → C	G2 C2	//	Ação - resultado
		Quando a peça estava formada Contamos quanto por quanto" ele era(linhas)				G(A)→ C	G2 C2		Situação Ação → novo conteúdo (relacionado a medida)
		Nós também inventamos* tangrans:				G(A) → C	G2 C2	1ª pessoa plural descobrir	Reconhecimento Indício de (com valoração) // autonomia e criatividade
				UAU ! São figuras quadriláteras ! (que tem 4 lados).	Formas	A → C	A2 C2		Afirmação de descoberta
		Nas aulas da semana passada, eu faltei,	mas, uma amiga me falou um "algo".			A	A1		Situação vivencial institucional
		Vocês trabalharam com os ângulos,		o ângulo reto tem 90° o ângulo agudo tem 45° o ângulo obtuso tem 135°	Forma - medida	A→ G C	A2 G2 C2		Reconhecimento do institucional. Elenco de fatos estudados

				A soma interna de um triângulo é 180°	Propriedade	C	C2		Fixação de fato descoberta
			Retângulo	Quantos graus tem um retângulo? Somando tudo esse retângulo tem 360°	Problema Propriedade	A→ L C	A2 C2		Pergunta com o propósito de exibir conhecimento
				Quanto tem cada ângulo? Resp.: 360 ÷ 4 = 90°	Estratégia				Explicação verbal Pergunta Resposta sintética simbólica
Desenlace	Tomada de posição em relação a ...	Eu gostei muito de aprender a mexer com tangram,	só quero uma ajuda para recuperar o que eu perdi...			A	A2 C1		Avaliação Pedido No palno do institucional
		PROBLEMA	Qual é a menor caixa que abriga todas as peças do tangram?			A→ P / G	A2 C2		Tarefa
		(desenhe		como o Bigode fez no papel quadriculado		P			Dica / sugestão
		e conte quantos quadrados, ou meio, você utilizou.)		A metade do quadrado, conta como 1 quadrado		A→ L	A2		

Caraterización	Competência sintática	Consciência de rigor	Explicitando formalmente	Definição nominal	**Figuras quadriláteras** ! (que tem 4 lados)
			Explicitando de forma coloquial	Indício de usar definição por construção	**Congruência de ângulos**, ou seja, lados de peças que se encaixam
		Afirmação só para mostrar domínio / saber		???	o ângulo agudo tem 45º o ângulo obtuso tem 135º
	Competência Metalinguística	Consegue gerir elementos semióticos, ...		Indício de criação ou aceitação de notação geométrica para referir-se a segmentos, polígonos e pontos	Exercício, $\overline{ABCD}$, [desenho]

		Consciência do propósito dos diferentes registros.	[uso generalizado de desenhos como apoio a proposições de fatos] uso alternado de linguagem formal e coloquial	Tivemos de montar o "tangram" a partir da **receita**, uma "**linguagem código**", .. a **ponta** do triângulos
		Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor		
Sistema e Relações conceituais	Uso de conexões entre conceitos / procedimentos	Elenco de conceitos conexos	De segmentos Enumeração das peças do tangram Tentativa de explicação do significado, com desenhos e frases Ora como figura base ora como figura meta na RP	**Ponto médio** **Triângulos**, **Quadrado**, **Paralelogramo** começamos a estudar a **congruência de ângulos, ...** "a ponta do triângulo pequeno se encaixa, .. **Retângulo**
		Explicita relações conceituais	Uso Pergunta resposta seguida de explicação	Essas peças variam no tamanho proporcional do quadrado Quando a figura estava formada contamos "quanto por quanto" Soma interna de um triângulo é 180º Retângulo tem 360º
		Explicita relações procedimentais	Referência ao existencial, motivador de entrada na atividade	Havia uma receita e a partir dela ... Montamos figuras geométricas, como um retângulo ..
	Conexão entre contextos e conceitos	Explicita controle e valoração do rigor		
		Implícitas com indícios de apropriação		
		Em conexão interdisciplinar		
		Cultural, histórico		
		Centrado no raciocínio		

Registros	Situações referenciais	Uso de exemplos	Descrição de atividade realizada ou criada com o propósito de exercitar a decodificação de uma "receita" geométrica	Exercício: Esboce " a coisa" ...
		Valor dos exemplos / contra-exemplos		
		Recontextualiza reinterpretando	Associação consciente e explícita ao jogo "batalha naval" em que se deve "achar" algo através de códigos	Parecia uma "batalha tangranal" (batalha naval)
	Contextos	Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios.	Referência a situação vivencial e material didático	Desenhe como o Bigode fez no papel quadriculado ...
		Cultural		
		Texto		
	A parte de baixo do triângulo pequeno ... // A metade do quadrado conta como ...			

ANEXO 19

ANALISIS TEXTO DE GABRIELA SOBRE ECUACIONES

Definição	Afirmação para mostrar domínio / saber /			
	Para dar mais precisão e refinamento do texto			
	Para mediar e manter controle da interpretação do leitor/audiência com sentido de dar coesão ao texto			
Representações [Simbologia, terminologia, notações, esquemas, quadros, gráficos,..]	Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor			Eles a usavam para estudar figuras
	Comunicando saber	Naturalmente		
		Formalmente		
Relações conceituais Propriedades , classificação, generalização ,etc.	Explícitas	Para mostrar domínio para uma audiência		Já sabíamos resolver 4 casos
		Com indícios de controle e valoração do rigor		
	Implícitas com indícios de apropriação			
Sistema (conexões, discriminações)	Uso em conexão de contextos matemáticos	Conceitos conexos		Equações do 2º grau Quadrado perfeito Número negativo Trinômio Quadrado Perfeito Raiz quadrada
		Relações conceituais envolvidas		
		Relações procedimentais envolvidas		
	Uso em conexão interdisciplinar			
	Valor cultural, histórico			
	Centrado no raciocínio / aspecto metacognitivo			
Situações referenciais (exemplos, experiências, recontextualizações ..)	Para comunicar saber			Já sabíamos resolver 4 casos $x^2 = n$, $x^2+n=0$, $(x+n)^2=m$ $x^2+6x+9=0$
	Para explicar			$X^2+6x+8=-1$ $X^2+6x+2=0$
	Para dar mais legibilidade ao texto			$X^2+6x+2=0$
Contextos (LECKIE-TARRY, 1995)	Situação (Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios)			
	Cultural (global, ...)			Relação com civilizações antigas
	Texto (informação e os elementos conectados)			

ANALISIS TEXTUAL DEL PROTOCOLO de GABRIELA SOBRE LA ACTIVIDAD DE ECUACIONES

	Análisis	**Texto y sus bloques**				**Nombramiento**		**Atribución**	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	**Relato**	**Intercalación**	**Explicación Metodológica**	Tipos de elementos	Partici-pantes	Papel de los participantes	tipo de atribución...	Acciones
Presentación	Introducción al tarea basada en dados consultados a sus registros o su agenda	Dia 14 de novembre					INST		Situación temporal
	valoración y orgujo por el adelantado del grupo		adiantando o assunto da 8a série		Contrato implicito	Fenomeno P→G	P1 G1		Apreciación de acuerdo de futuro
	informe con nombramiento del tema	tivemos nossa 1a aula sobre equação de 2º grau			Tema matemático	G(A) C	G1 C1	existencia nombramiento 1a pers.plural	Pasado vivencial
Nudo	informe de acción	A primeira coisa que o professor fez foi nos mostrar			Relato existencial	P→G	P1	beneficio	Evocación ilustrativa de una interacción
	informe del objetcto del estudio	algumas equações			Tipos de ecuación	Objetos	C1		identificación
	comentário evaluativo con reforzo positivo	que a gente já sabia resolver			Fenómeno elíptico = (algunas ecuaciones)	G(A)	G2	nombramiento 1a pers.plural	Autoevaluación con refuerzo positivo, sin crítica Implicación colectiva
	Asume domínio sobre casos particulares, reconocimiento implícito que há			como por exemplo $x+y=14$ ou $x^2 = 9$ ou $x^2 = 0$ ou $xy = 12$ $x^2 = -1$	Ecuación Rel. con ejemplo Variables (no explicito)	Objetos	C1		Ejemplificación Tipificación ("ou") Multiplicidad de casos
	un universo desconocido de			etc . . .					Indicación de no agotamiento de casos
	ecuaciones y sus métodos de resolución	ja sabíamos resolver 4 casos de equação			Fenomeno es sujeto	G(A) C	G2 C1	nombramiento 1a pers.plural	Reconocimiento de domínio sobre conocimientos
	expresión en linguage algebraica de casos generales, hierarquia implícita			A do tipo $x^2 = n$, $x^2+ n = 0$, $(x + n)^2 = m$	Ecuaciones "incompletas"	Objetos	C1		Intento de integración de un proceso de generalización vivido, donde una situación se reduce a la anterior. Tipologia clasificatoria o generalizadora ???? Ejemplificación local mediante formatos
	Identificación de un tipo del os casos especial			e um do tipo quadrado perfeito → $x^2+6x+9 = 0$	Caso especial reducción a ecuación		C2		Nombramiento de una situación

	nombrados e ejemplificado en linguaje aljebraica				de 1º grado mediante trinomio tipo $(x+a)^2$				particular Valorización implícita de propiedad algebraica
	informe de ación, referencia a dinamica	Daí o professor passou um exercicio			Contenido no explícito	P→A	P1	Al. beneficiario elíptico	Evocación de un rol del profesor
	informe de evento, referencia a consecuencia o de los actos del maestro o del proceso natural de la problematización	e surgem 2 métodos para resolve-lo				G Sujeto no definido	C2	Tratamiento de “consecuencia” con “portanto” elíptico	Significación del ejercicio (i)
	Descricón de métodos, ejemplificando y nombrando. Deja inplícita a posibilidade de poder llegar al TQP a partir del “método da balança”			1º método +1 + 1 x^2 + 6x + 8 = -1 (método da Balança) $x^2 + 6x + 9 = 0$ → (quadrado perfeito) $(x + 3)^2 = 0$ $x + 3 = 0$ $x = -3$	Métodos nomeación de método nomeación de caso	Objetos	C3		descrición sujerindo pasaje de una ecuación al otra equivalente
				2º método $x^2+6x+8= -1$ $(x+4)(+2) = -1$					
	problematiza y investiga acerca de las			Hipótese:	investigación		A3		simulación indagación subentendida
	condiciones			1.-1= -1 ou -1.1= -1					verificación
				Se x + 4 = 1. → x = -3 e se x+2= -1 → x= -3	uso de condicionante				indagación
	Referencia à dinamica de la aula relaciuonada a dos momentos temporales distintos		Quem descobriu esse método, lembrou das aulas sobre soma e produto e resolveu		sujeto no definido	G	G3		descobrimiento reconocimiento, interpretación
		HISTÓRIA -			Marcador textual				
	Incorporación de información investigada o recibida desde el aula	A equação de 2º grau, já era conhecida pelas civilizações antigas.			hechos históricos	Objetos	C2		Incorporación de hechos aprendidos
	informa enriquecendo y acentuando	Eles a usavam para estudar figuras geométricas			Marca textual (grifo) afirmativa de función acepta como importante	Fenomeno (?)	C3 (A3)		
	investigación sobre las respuestas obtenidas, agotando los casos			Se x + 4 = -1 → x = -5 e se x + 2 = 1 → x = -1	ecuaciones y procedimientos	Objetos	C3		
	Incorpora vocabulário específico para exibir su domínio conceptual			ABSURDO → O x deve ser	aserción	A (yo considero absurdo qué ..)	A4		posicionamiento, conclusión
				$(x+1)^2+x^2=(x+2)^2$ $x^2+2x+1+x^2=x^2+4x+4$ 0 = -3 -2x + x^2 x^2 - 2x -3 = 0 x^2 -2x -2 = 1 x^2 -2x = 3 x^2 -2x	ecuaciones y procedimientos	Objetos	C3		

				+ 1 = 4 (x - 1) ² = 4 x - 1 = 2 x = 3 ou se $\begin{cases} x-1=-2 \\ x=-1 \end{cases}$					
	Intención didáctica supuesta por la utilización de recursos no verbales figuras, ecuaciones, zetas de ayuda, comments) para garantizar su objetivo de expresión			[7 flechas (↲ → ↓) ligando 1ªlinha com a 2ª, até 7ªcom a 8ª], legendadas com o texto recortado "desenvolveu-simplificou-trocou-ordem;+1;+1;+1+1]	marcas textuales de control de la lectura	Objetos (asociados a pasos, procedimientos)	A4		explicación justificación control orientación intención didáctica reconocimineto de pasos em um procedimiento
	Marco cultural considerado y valorado, Intrepretación o incorporación de hecho	Quem estudava isso nas civilizações antigas, não aceitavam um número negativo.			fenomeno Sujeto no definido, distante temporalmente		A3		Intrepretación do incorporación de hecho aprendido
	aprendido a referencia y percepción del conflito y obstaculos epistemológicos sobre números negativos supuestamiente acepta	Eles não aceitavam algo que eles não pudessem representar com desenhos.							
	reconocimiento de la consecución de los objetivos didácticos (institucinales) por el grupo	Na aula seguinte, já tínhamos dominado o método da "balança quadrado perfeito"			procedimientos	G(A)	G3	nombramiento 1a. pers. plural	domíno de procedimientos seguridad
	informa	e só resolvemos exercícios.				G	G1		información
	complementa	Dominamos também o método da cascata,				G	G3		reconocimiento de domínio de procedimientos
	hace referencia al dinamica	que já tínhamos visto na 1ªaula.				G	G3		
	nombreamiento del método aprendido			Explicacão do método cascata:		A	A4		explicación
	ejercita para expresar, hace uso de esquemas no verbales			[equações]	ecuaciones esquemas	A→L			
	argumenta explicando paso a paso			A mudança do1° p/a o 2 ° degrau se dá para transformar o trinômio em um trinômio quadrado perfeito.					justificativa
	Manifesta os benefícios del método. Persuade realçando			Isso ajuda na hora de simplificar					persuasión
	Conecta hacendo referencia a dinamica de un grupo. Confronta los métodos		o primeiro método explicado na 1ªfolha, é o mesmo do			A→L G			percepción conexión entre momentos distintos

	conocidos hasta entonces, evalua		método cascata, só que quando a pessoa o explicou, ela não sabia que o método era o cascata.						
	Evalua a partir de su autoridade		Muita gente não entendeu a passagem:			G			evaluación desde fuera
			$x^2+6x+2=0 \to x^2+6x+9=7$		ecuaciones transformación		C3		justificación
	acentua			Explicação:	marcador textual				demarcacióm
				[equações, recurso icônico]	ecuaciones marcadores textuales	A→L	C3		
				Se você soma 7 de um lado, para equilibrar, você tem que somar 7 do outro lado também.	propriedade		A4	atribuición	ejemplicicación justificación
	Utiliza recursos de linguaje no verbales y simultâneos de tipo : Verbal, analógico y algebraico para convencer. Hace narrrativa de simulación de procedimiento manipulativa			Do lado $x^2+6x+2=0$, soma e fica $x^2+6x+2+7$ só que $2+7=9$ então fica x^2+6x+9, do outro lado, do lado 0, somando 7, fica 7.	ecuaciones procedimientos consecuencia				
	Incorpora papeles y hábitos del profesor, proponiendo dos casos (resolviendolos) convidando el			Lição	Marcador textual				assignación
				[propostas de equações]	ecuaciones particulares	Objetos	C3		
	lector a poner de manifiesto sus			verific.	procedimiento				
	compreensiones			[verificações]	marco textual				verificación
				CONTINUAÇÃO DA REDAÇÃO:	Marcador textual				
	Ainda en el papel del profesor, encierra dando dicas y reforzando conocimeintos anteriores			Na hora de resolver equações, lembre-se que		A→L	A4	atribuición	Pide atención, inteción didáctica
				Se você quer saber um número que ao quadrado resulta 49, o resultado pode ser 7 ou -7.				atribuición	Orientación
				Mas se você tem que resolver algo do tipo $\sqrt{49}$, o resultado é sempre 7 $\to \sqrt{49} = 7$	Casos especiales			atribuición	
				→um número que ao quadrado resulta 49:				reforzo	

ANEXO 20

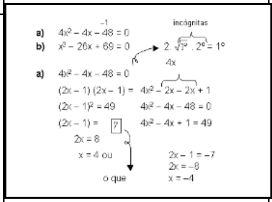
ANALISIS TEXTO JOANA ECUACIONES

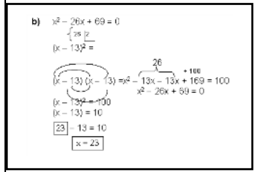
Protocolo del texto de Joana sobre Eq. do 2º Grau

	Análisis	Texto y sus bloques			Nombramiento			Atribución	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	Relato	Intercalación	Explicación	Elementos	Participantes	Papel de los participantes	tipo de atribución ..	Acciones
		Equações de 2º Grau							
			Que diabo é isso?						
		Foi a 1ª coisa que pensei.	Algo novo? Não, minha cara.	Problemas que envolviam equações de 2º grau foram encontrados em papiros (papel feito com a planta “Papirus”) no antigo Egito.	Equações	C A	C2		
			Nossa, mas que antigo!	Na verdade, também encontraram problemas em placas da antiga Babilônia. Egito, Babilônia...	Problemas	C A→	C2		
			não importa. Isso só indica uma coisa: desde os mais antigos tempos,	quase todos os problemas caíam em soluções equacionadas, elevadas ao quadrado que resultavam em zero.	Problemas soluções	C	C2		
				Em todos os documentos, problemas das vidas das pessoas eram escritos e resolvidos, sempre estudados em casos particulares, não tinham um método geral que pudesse solucionar aqueles problemas.	História Métodos	C	C2		

		E então se iniciou a "CAÇA AO MÉTODO GERAL". Dois sábios matemáticos estudaram problemas cotidianos que tinham soluções particulares.	Era natural que sábios tivessem contato com equações.	E foi com muita pesquisa que no século IX, ALKMOWARIZMI chegou a um método mais geral, que ainda precisava de ajustes. No século XII, BASKHARA também chegou a um método curioso e interessante, que envolvia figuras geométricas, mais especificamente o retângulo.	Matemáticos	C	C2		
			[Desenho de retângulo]	$x^2 + 10x = 39$	Equação	C	C2		
			Bom... grande coisa!	Há infinitos retângulos com área 39.	Retângulos área	C	C3		
			E foi assim. Pesquisando, criando, investigando e perguntando,	ele foi caindo em muitas outras equações, ali chegamos na de 2º grau.	Métodos	C	C3		
				EQUAÇÃO: Qualquer igualdade que só é satisfeita para alguns valores dos seus domínios.	Definição	C	C2		
			Mas porque a equação é de 2º grau?	Simplesmente porque uma incógnita é elevado ao quadrado. Outro detalhe: todas resultam em 0.	Forma nomenclatura	C A→ L	C2		
			Ah! Então não tem sentido. Claro que tem.	O grande desafio das equações desse tipo é descobrir o valor de uma incógnita, de modo que ele satisfaça certas condições e que numa certa conta, resulte em zero	Raiz (número) solução	C	C3		
			Não entendeu? Veja como é isso visualmente:	$2x^2 - 3x = 0$ $3x^2 + 7 = 0$ $-x^2 + 2x = 0$ $ax + bx + c = 0$ $4x^2 - 3x + 2 = 5$ $4x^2 - 3x - 2 = 0$	Tipos de Equação	C A → L	C2		

				OBS.: NEM SEMPRE TERMINA (RESULTA) EM 0 .	Forma de equação	C	C2		
			EXEMPLOS:	$x^2 = 9$ $x = 3$ ou $x = -3$ Qual é a pergunta indireta nessa equação?	Exemplos	C A → L	C2		
			Simples.	A pergunta é: qual número que elevado ao quadrado dá 9 e qual a raiz quadrada de 9. Mas atenção: TEORICAMENTE isso acontece mas lembre-se que –3 não é raiz quadrada de 9.	Natureza do problema	C A → L	C3		
			Método CASCATA	Simplificando, esse método resume em:	Novo formato	C	C2		
				se você encontrar uma equação muito difícil, basta simplificá-la até chegar em algo mais fácil.	Método	C A → L	C2		
			EXEMPLO:	$x^2 + 6x + 2 = 0$ $x^2 + 6x + 9 = 7$ $(x + 3)^2 = 7$ $x^2 = 7$	Exemplo algébrico	C	C2		
			Meu Deus, como fazer isso? Simples, minha cara...	[DESENHO DE RETÂNGULOS] FATORAÇÃO PRODUTO $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Representações: geométrica / algébrica / verbal	C A → L	C4	Consciência de valor do processo	Conexão intermatemática Multiplicidade representacional
				Isso determina o TQP	Caso TQP	C	C2		
			Ahá ! Então é isso que vai fazer uma equação se **TQPzar** pra facilitar a minha vida. Sendo assim		Método	C A	C2		
			desenho	$x^2 - 10x + 16 = 0$	Solução	C	C2		
			será isso um TQP? Claro que não. Vou te provar.	$(x - 4)^2 =$ no way! Isso não dá $x^2 - 10x + 16 = 0$ nem na China.	Solução	C A → L	C2		

			Lembra da minha dica? Então lá vai:	$x^2 - 10x + 16 = 0($ $x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25 = 9$	Fatoração	C A → L	C2		
			Joana, dá onde você tirou o 9?	Simples: 25 -16 9 → +9	Verificação	C A	C2		
				Como a outra conta dava 0, 0 + 9 = 0	//	C	C2		
		Então já utilizei o método cascata:		$x^2 - 10x + 16 = 0$ $x^2 - 10x + 25 = 9$ $(x - 5)^2 = 9$ $(x - 5) = 3 \rightarrow x = 8$ ou $(x - 5) = -3 \rightarrow x = -8$	Método cascata	C A	C2		
			Não se esqueça que para resolver qualquer conta, você tem que tomar certos cuidados matemáticos como:	**1.** Não se descabele ao ver uma conta, tenha paciência. **2.** Procure fazer perguntas para a conta, tirando conclusões e procurando números que satisfaçam e respeitem todas as condições. **3.** Veja se tem ou não solução. **4.** Verifique!!!	Controle do uso do método	C A → L	C3		
			Então, vamos lá			C A → L	C2		
			Resolvendo:		Resolução	C	C2		
				ao quadrado dá o resultado (no caso 49? R: 7)	Quadrar um número	C	C2		

				Verificação: $4x^2 - 4x - 48 = 0$ $4.4^2 - 4.4 - 48 = 0$ $64 - 16 - 48 = 0$ Yes! $48 - 48 = 0$	Verificação Valor numérico	C	C2		
						C	C2		
				Verificação: $23^2 - 26.23 + 69 = 0$ $529 - 598 + 69 = 0$ YES $-69 + 69 = 0$	Verificação Valor numérico	C	C2		

ANEXO 21
ANALISIS TEXTO GABRIELA SOBRE CONJUNTOS

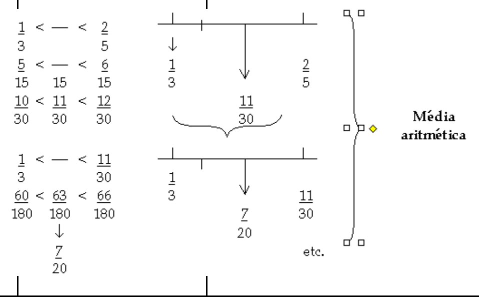
Caraterização	Competência sintática	Consciência de rigor	Explicitando formalmente	Definição nominal e por extensão Definição nominal Caracteriza Z por enumerabilidade Definição nominal com foco em propriedade Ainda não define formalmente com linguagem simbólica, expressa a generalidade do conteúdo (caso da densidade) Definição nominal com foco em propriedade Carateriza subconjuntos p/ pela inclusão	O **conjunto N** abrange **os números inteiros positivos**: N = {0,; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ...} O próximo conjunto a ser estudado foi o conjunto **Z dos números inteiros positivos e negativos** Z = { .... } .. é **enumerável** **Q é denso** A idéia de ser **fechado** é que ... N é **infinito** **Ir é infinito** .. **N e Z $\subset$ Q**
			Explicitando de forma coloquial	Não expressa matematicamente a correspondência N $\leftarrow\rightarrow$ conjunto Definição por propriedade Uso de recurso (analógico, ..) em conexão com representação geométrica	A idéia de um conjunto ser **enumerável** , significa que se alguém ... Ser **denso** significa que entre dois .. **Z** pode **ser representado por uma reta** com furos...
		Afirmação só para mostrar domínio / saber			
	Competência Metalinguística	Consegue gerir elementos semióticos, .	Indícios de compreensão do procedimento de argumentação da enumerabilidade de Q		[tabela da **enumerabilidade** de Q] com balão
		Consciência do propósito dos diferentes registros.	Usa quadros para dar destaque Carateriza subconjuntos p/ pela inclusão Indício de apropriação de notação matemática estipulada em contrato		Cujo símbolo é "**N**" estilizada A utilização da **chave { }** na escrita dos conjuntos ... . Se usássemos **parênteses ( )** ... [box] $\in$ pertence ... $\notin$ .. $\cap$ .. $\cup$ .. $\Rightarrow$ .. $\forall$ qualquer $\subset$ [box] Junto com o conjunto N, .. **símbolos** matemáticos que ajudam .. Ex. ... **a $\times$ b $\in$ N** **N$\subset$Z ,** N é um **subconjunto** de Z ... em relação a **(+, -, $\times$)** [faz uso de **diagrama de Venn-Euler** para mostrar relações de inclusão
		Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor	Carateriza subconjuntos p/ complementaridade e pela inclusão		O conjunto **Ir** dos .. abrange todos os números que **não podem ser representados por** conjunto **Q** é aquele que abrange todos os números que **podem ser representados por frações positivas ou negativas** conj. **R dos reais** abrange todos os números do conjunto **Q e Ir**...

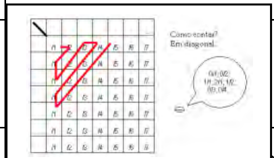
Sistema e Relações ceituais	Uso de conexões entre conceitos / procedimentos	Faz elenco de conceitos conexos (01,02,03...)		
		Explicita relações conceituais (01 - 02)	Proposição universal falsa	Tem **subconjuntos** .. é **fechado** em relação a adição e . N pode ser **representado numa reta**, ... **N⊂Z** • **N é fechado em relação** a (+, -, ×) • **Z é fechado em relação** a (+, -, ×) • **Q é fechado em relação** a (+;-;×;÷) **Todos** os elementos de Q têm **antecessor** e **sucessor**... **conjunto Ir** dos .. abrange todos os números **que não podem ser representados** por ..... conj. **Ir não é fechado em relação** a nenhuma operação... conjunto Q é aquele que abrange todos os números que podem ser representados por frações positivas ou negativas conj. **R dos reais** abrange todos os números do conjunto Q e Ir, ou seja, .. todos os números menos √-1 conjunto dos **números complexos** representados por C ou *C* **C engloba** todos os números Inclusive √-1
		Explicita relações procedimentais (01-0P)	Indícios de compreensão do procedimento de argumentação da enumerabilidade de Q	Para contar o conjunto **Q**, é preciso **contá-lo em diagonal** [box 0/0. 0/1, 0/2, ..]
	Conexão entre contextos e conceitos	Explicita controle e valoração do rigor		
		Implícitas com indícios de apropriação		
		Implícitas sem apropriação		
		Em conexão interdisciplinar		
		Cultural, histórico		
		Centrado no raciocínio		

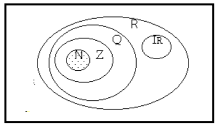
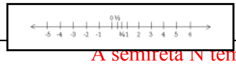
Registros	Situações referenciais	Uso de exemplos que mostram relações, idéias... do que deu sentido ao conceito		Ex. √2, √3,√7, π
		Valor dos exemplos / contra-exemplo	ndício de embaralhamento de conceitos e relações conceituais Desenvolve processo apoiado na determinação de uma média aritmética entre os dois números escolhidos.	**Q não é** fechado em relação a radiciação √ **√-1 não pertence** a Ir Mas **Q não contém** √2, √3, √7, π , raiz quadrada de números primos **Entre 1/2 e 3/4** existe infinitos números .. Ex.:
		Recontextualiza reinterpretando	Associação hiperbólica (??)	A idéia de um conjunto ser **enumerável** , significa que se alguém tivesse a capacidade ...
		Tentativa de recontextualização sem sucesso (falta de conexões explícitas entre conteúdos e experiências/ referenciais		
	Contextos	Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios. (marcas relevantes do texto adotadas pelo grupo, do que aconteceu visto pelo aluno)	Furo como elemento metafórico para apoiar a "visualização" da representação	A reta Q teria menos **furos** porque Q é denso. Z pode ser representado por uma reta com **furos**...
		Cultural (relações explícitas com uma comunidade mais ampla)		
		Texto	Refere-se a falta de tempo de conclusão da tarefa	Falta os **construtíveis**, seu mal.

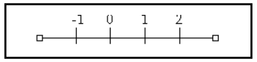
	Análisis	Texto y sus bloques				Nombramiento		Atribución	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	**Relato**	**Intercalación**	**Explicación**	Tipos de elementos	Participantes	Papel de los participantes	tipo de atribución...	Acciones
Presentación	Inicio Elenco de eventos	Começamos o ano	com o estudo sobre o conjunto N	que abrange os números inteiros positivos: N = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; ...}	Tema matemático	G(A)	G		
	Nombramiento de tema	Citamos várias características de N				G(A)		Acción colectiva de enunciación	Aceptación de elementos conceptuales
	Referencial representativo negociado como destaque		BOX Escrever um usando a chave { }, significa que os elementos do conjunto devem estar na ordem indicada. No caso do uso de parênteses ( ), os elementos não precisam ter uma ordem	N é fechado em relação à adição e à multiplicação – Um conjunto ser fechado em relação a alguma operação significa que: pegando dois ou mais elementos desse conjunto, e operando, o resultado da operação vai estar dentro do conjunto. Então, se eu pegar dois números de N, multiplicarmos ou somarmos, o resultado estará contido em N.	Una definición se acompaña de casos ejemplares más simples (en este caso, generales)	Objetos	INST	Reconocimiento de que lo genérico puede ser explicado mediante ejemplo de operación	Relación directa com el objeto matemático Explicación Justificación
			Obs.: N tem mais algumas propriedades		Paréntesis significativo	A→ L	CON	Destaca valor semejantes a notas de pie	
		Antes de estudarmos o próximo conjunto,	aprendemos a escrever MATEMATIQUÊS.	se n $\in$ N $\Rightarrow$ n + 1 $\in$ N	Lenguaje Objeto	G(A) Objetos	REF INT		Incorporación de un lenguaje del grupo
			BOX $\in$ – PERTENCE $\notin$ – NÃO PERTENCE $\neq$ – DIFERENTE $\forall$ – QUALQUER $\exists$ – EXISTE $\ni$ – NÃO EXISTE $\exists|$ – EXISTE UM ÚNICO		Paréntesis representacional	Objetos	INST		

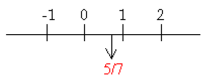
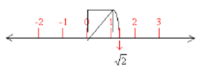
			⇒ – ENTÃO						
		Ainda sobre N Discutimos em sala de aula,				G(A)	G2		Adjunción Evocación de reflexión colectiva
			BOX O conjunto N* é o conjunto dos naturais, excluindo o 0 (zero). N* = {1, 2, 3, 4, ...}	propriedades sobre subconjuntos de N O que são subconjuntos de N? São conjuntos que estão contidos em N. Ex: PARES = {0; 2; 4; 6; 8; 10; ...}	Simbólico	Objetos	INST	Definición Control redundante puntuando el habla	Caracterización por extensión de un conjunto Simula interacción com lector
		BOX Alguns matemáticos usam este conjunto.				A→ RC		Posible referencia al uso o no del 0 en los naturales	Usa un referencial externo cultural profesional
				Todos os elementos de PARES estão presentes em N, mas não são todos os elementos de N que estão contidos em PARES (N).	Nominación propia	Objetos y relaciones	INST	Atribución lógica en dos sentidos de $A \subset B$	Referencia a propiedades inclusivas
				Qual conjunto tem mais elementos: N ou P?		Objetos y relaciones		Problematización	Control mediante autopregunta
				Nenhum dos dois, pois para cada elemento N tem um correspondente em P.				Explica	Respuesta com justificación
		Veja							
			N→ P	Essa propriedade se chama "EQUIPOTÊNCIA".					Referencia a propiedad
				Z não é denso. Qualquer subconjunto de N do tipo M (n), – múltiplo de n – são fechados em relação à adição e à multiplicação.		Objetos y relaciones			Ruptura de discurso Introduce nuevo objeto
				N é um subconjunto de Z. O conjunto Z abrange todos os naturais, mais os inteiros negativos. Z = {-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...} Em Z, todo o número, exceto					

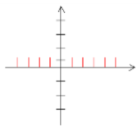
				o 0 (zero), tem seu oposto.						
				Z é enumerável: Assim como N, Z tem 0 (zero) como elemento neutro da adição e 1 como elemento neutro da multiplicação.						
				Z é fechado em relação à (+; –; x).						
		Box: 0; 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; ...								
				N é um subconjunto de Z. Os subconjuntos de N são subconjuntos de Z. Como N, Z não tem maior elemento. Mas diferente mente de N (que tem o (zero) como menor elemento), Z não tem menor elemento.						
				N e Z são subconjuntos de Q. Este conjunto mais complexo, abrange todos os números que possam ser representados em forma de fração do tipo a/b ou na forma decimal: 0,5:						
				Como N e Z, Q é fechado em relação à (+; –; x), mas também é fechado em relação à divisão ÷. Q não é fechado em relação a $\sqrt{\ }$. Q é denso, pois entre dois números, há infinitos outros números.						
										

				Os números que não podem ser representados por fração são: raiz quadrada de nº primos, π...					
			π é o número irracional (que não pode ser representado por fração), mais famoso.	Dízimas periódicas (números decimais com infinitas casas depois da vírgula) também podem ser racionais, isto é, podem fazer parte do conjunto Q.					
				Q é enumerável, embora seja difícil de acreditar.					
				Q é enumerável, embora seja difícil de acreditar.					
		Mas veja:			A → L				
			BOX Os pitagóricos (seguidores de Pitágoras) acreditavam que tudo era número. Mas: Qual é a $\sqrt{2}$? ELES FORAM ENGANADOS! Na época deles, não era possível resolver este problema.	[illegible] arte do conjunto IR dos irracionais. IR não é enumerável, não é fechado em relação a: **adição:** $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = \varnothing \rightarrow$ (racional) **subtração:** $\sqrt{2} - \sqrt{2} = \varnothing$ **multiplicação:** $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} = 2 \rightarrow$ racional **divisão:** $\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1 \rightarrow$ racional					
				Como "construir" um número irracional?					Pergunta
				Seria preciso inventar um número que depois da vírgula, teriam infinitos números não periódicos.					Explica
				Exemplo de uma expansão decimal infinita e não periódica: 0,1001100011100001111000001 1111000000111111000000...					

	—			Outros irracionais: $\sqrt{\pi}$ 0,20022000222000022 2200000... $\mathbb{Q} \cup \mathrm{IR} = \mathbb{R}$, ou seja, a união dos conjuntos $\mathbb{Q}$ (dos racionais) e IR (dos irracionais), resulta no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.					
			BOX Os conjuntos Q e IR não são equipotentes, ou seja, não têm correspondência entre seus elementos.	Pode-se ordenar os subconjuntos de $\mathbb{R}$: 					
			BOX Um número que não é real $\sqrt{-1}$ É um número COMPLEXO.						
				Números Construtíveis O conjunto N é construtível: Z  					
				A semireta N tem pequenos furos. A reta Z também tem.				Metáfora	
				A reta Q tem menos furos que N e que Z, mas ainda tem pequenos furos. R não tem quase nenhum furo, o único número que eu conheço que não faz parte de R é $\sqrt{-1}$.					
				Como se constrói frações nas					Pergunta



				retas?					
				Como encontrar 5/7?					Pergunta
				Transfere-se a medida					Explica procedimento
				Traçar outra linha em qualquer direção partindo do 0 (zero):					
				Escolha qualquer abertura (não muito grande) no compasso e marque 7 pontos da última linha traçada.					
				Do 7º ponto, trace uma reta até o ponto 1 da 1ª reta.					
				Então, trace linhas paralelas à última reta e partindo dos pontos feitos na 2ª reta					
				Daí é só achar 5/7 na semireta 01 e transferir a medida para a 1ª reta de números					
									
				Co $\sqrt{2}$?					Pergunta
				O número $\sqrt{2}$ é a medida da diagonal de um quadrado 1x1. Isto facilita sua localização					Inicia explicação
									
				Cor uadrado sobre a se aça-se sua diagonal. Então, com o compasso, transfere-se a medida da diagonal do quadrado 1x1 para a reta com o compasso					Explica procedimento
				Daí fica fácil localizar os pontos: $2\sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$;					

				$-\sqrt{2}$; 1 + (– $\sqrt{2}$) etc.					
				QUE CONJUNTO NUMÉRICO CONTÉM A RETA R? O conjunto C dos números complexos, por exemplo. Sua construção é bem complexa (como já diz o nome). O conjunto C é representado pelo plano cartesiano.					Pergunta - responde
				Neste plano é possível localizar, por exemplo, $\sqrt{-1}$ e os vários outros pontos localizados no fora das retas r					
				P.S. da Autora: "Após a correção deste trabalho, descobri infinitos números que não são Reais: $\sqrt{-2}$; $\sqrt{-3}$; $\sqrt{-4}$ ..."					Indica que continuou pensando no texto após a tarefa

ANEXO 22

ANALISIS TEXTO JOANA SOBRE CONJUNTOS

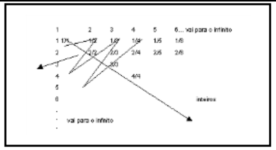
Caraterização	competência sintática	Consciência de rigor dando precisão e refinamento do texto	Explicitando formalmente	Usa frases explicativas que indicam distinção que carateriza elementos no conjunto Aunque no defina formalmente com lenguaje simbólico, expresa la generabilidad del contenido (caso de densidad) Carateriza subconjuntos p/ complementariedade e pela inclusão Irracional como decimal Los naturales se definen por sus propiedades Representa y simboliza relaciones elemento/conjunto por extensión	Significa que eles não fazem diferencia... são neutros Q é denso, sabe por qué? Entre dois números cualesquier tem infinitos outros entre Irracionais, núm que no pueden expresarse como fracción... Formado pelos num enteiros do 0 até infinito N = conj. dos num naturais é algumas propriedades N,Z , { }
			Explicitando com Coloquialidade	No expresa matemáticamente la correspondencia $C \leftarrow\rightarrow N$ para caracterizar numerabilidad Mezcla de lenguajes Infinito representado por etc.	É enumerável (significa que da para contar) Tem uma certa seqüência N= (0,1,2,3, 4,5,etc)
		Afirmação só para mostrar domínio / saber			
	competência metalinguística	Consegue gerir elementos semióticos, ...		Infinito representado por etc. (extensión infinita) y "e assim por diante" (proceso) Usa diagramas de Venn para inclusiones y partición Usa flechas para indicar procedimientos junto a los objetos simbólicos y verbales en el caso de encontrar una fracción intermedia Usa representación gráfica, verbal , paréntesis (box) y simbólica para indicar el proceso de dibujar números constructibles y para \ hablar de la numerabilidad de Q Usa constantemente metáforas (para frente , atrás, zigzag) de movimiento para indicar procedimientos de infinitud, numerabilidad, construcción en recta numérica,, finitud (para de escribir)	Q é denso! Sabe por que? ... $\frac{7}{3}$ e $\frac{10}{4}$
		Consciência do propósito dos diferentes registros.		Expresa, com énfasis, la idea de conjunto cerrado en relación a una operación Conecta la idea de decimal como necesidad explicativa del irracional. Intenta describir (no consiguiendo) el hecho de que en la representación decimal de un irracional si paro de escribir tiene una representación racional.	N é fechado em relação a adição e multiplicação. Isso significa que se somarmos ou ... o resultado será um número do conjunto. Z está fechado em relação a adição, multiplicação e subtração Dizima 10a. parte Periódica - vareia 3,3333 = 33333/10000
		Uso com indício de apropriação e reconhecimento de valor		Valora y explicita los conj numéricos como lugar para indicar proposiciones	????

Sistema Relações conceituais	Uso de conexões entre conceitos/ procedimentos	Elenco de conceitos conexos	Elenco de subconjuntos Sem identificação que é + não é = conj total	Ir, Q , R
		Explicita relações conceituais	Inclusión de conjuntos Identifica subconjuntos en N, Z, Identifica inclusión sin símbolos, y no inclusión a la inversa entre N y Z. Identifica complementariedad Conecta la idea de decimal como necesidad explicativa del irracional. Aceptación de regularidades como propiedades	En N hay infinitos subconjuntos. Formado pelos num inteiros do 0 até infinito Z = positivos y negativos Después de un par viene un impar Pone ejemplo
		Explicita Relações procedimentais	Propiedad de numerabilidad com expresión de algoritmo de construcción Densidad como propiedad importante de los conjuntos numéricos. Construcción aritmética Exhibe proceso de construcciión geométrica de raices como números constructibles y fracciones	Z enumerável.. sem esqueçer nenhúm número...sempre um negativo para um positivo Denso ←→ entre dos números cualesquiera hay infinitos raiz de 2 fracciones
	Conexão entre contextos e conceitos	Explicita controle e valoração do rigor	La numerabilidad es reconocida y dominada (usa palabras diferentes en momentos diferentes) como una propiedad estructural que se repite, indicando que "mapea" el conjunto y es coherente com la idea de conteo. describiendo un algoritmo de pasar por todos. Para ello usa metáforas (zigzag) flechas y multiples representaciones. Asume un proceso de reconceptualización Conj. Numéricos com una "visión diferente"	Para N (da para contar) Para Z (SIN QUE FALTA NINGÚNO) Para Q , será que é numeravel ? ...Eu sei ... Es dificil conceptuar ... tenemos contacto com ellos Estamos olhando para esse conjuntos com otros olhos fazendo difrentes analises
		Implícitas com indícios de apropriação	Valoriza la simetría de Z en el momento de la numerabilidad. Conecta la idea de decimal como necesidad explicativa del irracional.	el conteo de Z por simétricos 1,-1,2...
		em conexão interdisciplinar		
		cultural, histórico		
		Centrado no raciocínio	Preeámbulo reflexivo sobre el valor y novedad del estudio de los conjuntos numéricos a partir de reconocer (no explicitamente) elementos y estructuras en lenguaje conjuntista	Desde criança sabemos e temos contato com eles.Com eles a cada ano ...Os números tem conjuntos e subconjuntos.
Registros	**Situações referenciais** (	Uso de ejemplos	Usa π para indicar la definición de irracional Exhibe proceso de construcciión geométrica de raiz de 2 y fracciones como "modelo de situación general"	Π ...ele tem expansão decimal infinita não periódica
		Valor dos exemplos/ contraexemplos	Contrasta usualmente propiedades Valor de certos elementos em um conjunto Reconocimiento de propiedades que se dan en un conjunto y no en outro Identifica Cerrado en Z en contraposición a N Exhibe caso crucial de Ir respecto la propiedad de conjunto cerrado respecto una operación Reflexiona sobre hechos como pruebas y refutaciones Alude a que $\sqrt{-1}$ no está en R. Parece reconocer que las verdades matemáticas no son capturadas sólo por la percepción.,	..O 0 é o elemento neutro da.... Z é fechado em relação a ... Z Infinito a direita e a izquerda Z não está contenido em N Irracionais ...que não podem... $\sqrt{2}$ é construtível $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$, ...isso prova que ele não é fechado em relação a essas operações Achasbamos que... Numerabilidad de Q
		Recontextualiza reinterpretando	Habla de números constructibles y de los complejos como englobando los reales, aunque genera confusión entre los tres conjuntos. Proceso en outro proceso.	Números constructibles.
	Contextos (LECKIE-TARRY, 1995)	Local, o concreto o físico o social e os intercâmbios.	Referencial de formas de representación difrentes nombró C de forma diferente Referencial de un código utilizado en el aula de portugués	Moreno escribió C itálico en lugar de "C" "Matematiques "! Estabamos pensando..."superconjunto"

		Cultural (global, ...)	Incorpora una idea cultural de que números y nomerologia Referencia a terminología polisémica Constructibilidad no sólo ligada a medida, sino a número , explicitando la linea numérica positiva Y NEGATIVA. Interpretación de un contrato implicito de que un dibujo junto una explicación pueden ser suficientes para mostrar un proceso (	"algunos até crean hasta una religión"... real não é a nossa moeda... reta --------------------------- Tales)
		Texto (informação e os elementos conectados)	Los naturales sirven para contar Reconoce una idea ordinal (secuencia) Incorpora el algoritmo de común mult. den sólo mostrando el primer paso. Caracteriza R como el "conjuntazo" que engloba todos. C engloba todos así como raiz de negativos Habla de numeros constructibles para hablar de raiz negativa	Situa el problema del 0 y 1 en N como especiales., para hablar de elemento neutro Habla de π como famoso que queda caracterizado por tener una expansión decimal infinita.

	Análisis		Texto y sus bloques			Nombra-miento		Atribución	
Contexto supuesto	Subjetivo del protagonista	Relato	Intercalación	Explicación	Tipos de elementos	Participantes	Papel de los participantes	tipo de atribución...	Acciones
	Situa temporalmente Exibe e se posiciona	Nesse 1º mês de aula, estudamos vários tipos de conjuntos numéricos e suas diversas propriedades.	Alguns desses conjuntos, nós já tínhamos visto e conhecido em outras séries mas agora, na 8ª, estamos olhando para esses conjuntos com outros olhos e fazendo diferente análises. Tudo isso ampliará nosso conhecimento numérico.	É difícil conceituar de forma concreta o que são números	Situación temporal	C G(A)			
			Desde criança sabemos e temos contato com eles e a cada ano aprendemos e crescemos mais no saber de lidar com eles. Tem gente que até criou uma religião baseada em números, onde eles são e explicam tudo	. – os números têm vários conjuntos e subconjuntos até infinitos, mas se formos mapear o que vimos até agora, teremos:		G(A) C			
				N = conjunto dos números naturais e algumas propriedades: Esse conjunto é formado pelos números inteiros, do “0” até o infinito. Ele é enumerável (dá pra contar), tem uma certa seqüência (0,	N e propriedades	C			

				1, 2, 3, 4, 5 etc.) é fechado em relação a adição, multiplicação (isso significa que se somarmos ou multiplicarmos qualquer número, o resultado será um nº do conjunto. O “0” é o elemento neutro da adição e o 1 é o elemento neutro da multiplicação (significa que eles não fazem diferença em suas operações, são neutros). Depois de um par, vem sempre um impar e dele podem ser extraídos infinitos subconjuntos como o dos ímpares, pares, múltiplos de 2, de 3 etc. ...					
				Z = conjunto dos números positivos e negativos (em outras palavras, é o conj. dos inteiros) Ele é enumerável, infinito a direita e a esquerda, é fechado em relação a adição, multiplicação e subtração, tem seqüência que permite contá-lo sem esquecer de nenhum número (0, 1, –1, 2, –2 etc.) há sempre 1 negativo para 1 positivo. Pode-se dizer que o conj. N está contido no conj. Z ou que o conj. Z está contido em N não dá porque os naturais (ℕ) não incluem negativos.	Z e propriedades	C			Faz afirmação e justifica em seguida coloca hipóteses na boca do leitor e refuta
				IR e R = IR = irracionais (números que não podem ser “expressos” – escritos – por frações) e R = números que podem ser “expressos” – escritos por frações, ou seja, é conj. das frações.	R, Ir e propriedades	C			
				Q é denso? Sabe por que? Entre 2 números quaisquer há infinitos outros entre.	Q	A→L			Interação com leitor

				Ex: **Explicação simbólica** **7/3 e 10/4 → 28/12, 30/12**		C			
				Entre esses 2 há mais frações e entre elas há outras e assim por diante.					
				Será que é enumerável? Bom, acho que não... eu só sei que há um jeito de mapear todos os racionais, passar por todos eles sem esquecer de nenhum. É UMA TABELA mais ou menos assim:		C A→L			Simula problematização própria de aula Toma partido reconhecendo falta de elementos
						C			
				Se eu fizer um zigue-zague passarei por todos os integrantes do conjunto.		A→L C			Imagem metafórica
				IR = sem dúvida nenhuma, o irracional mais famoso é o π! Ele tem expansão decimal infinita não periódica.		C			
			Calma, eu to falando português DÍZIMA=10ª Parte PERIÓDICA = que vareia.	Se tenho um número decimal não infinito (depois da vírgula, claro) ele pode ser expresso por fração. Ex: se eu escrever 0,3333... no momento que eu parar de escrever 3, esse número poderá ser expresso por fração. Ex: 3,3333 = assim por diante. $\frac{3333}{10000}$ e Todos esses conjuntos são englobados por um outro conjuntão: o dos números reais!!! no bom matematiquês, linguagem que estamos aprendendo		C			Proposição universal Marca de cultura da classe

				com o “Ângeloide,					
				isso significa que: IR, Q, q e C ∈ R –		C			
			(→ pertence) não é a nossa moeda mas é quase, se chama REAL.	Conj. dos números reais – tem propriedades dos outros conjuntos já explicados.		C			Conexão bem humorada associada a cultura do país
		Estávamos pensando que esse era um superconjunto, afinal ele engloba todos os outros, certo?				G(A) C			Simulaçao de interação com colocação de problema
				Errado! Há um conjunto chamado C ou *C*.		A→L			
			(tá bom assim moreno?) –	complexos – que engloba todos os conjuntos: N, Z, Q, IR, R, e raiz quadrada de negativos!		A-→ G C			COMETE ERRO
			Para ter uma idéia desse conjunto, farei aqui uma demonstração através dos números construtíveis (já viu um número ser construído? Veja agora)	ele também inclui $\sqrt{2}$. Basta traçar diagonal do famoso quadrado 1x1 e transportar essa diagonal que mede para a reta!!!		A →L C			
				reta infinita repete-se a medida várias vezes para frente e para trás		C			
				está traçado as frações basta colocar isso na reta e está traçado as frações		C			
				Isso prova que ele NÃO é fechado em relação a essas operações		C			
				Como construir frações: TRAÇAR medidas num		A→ L C			

				semitriângulo e traçar perpendiculares como no desenho					
				PS: CURIOSIDADE Em relação ao conj. IR.					
				PS: Isso te lembra aquela lousa *2ª pessoa Salve Ângela* Maravilhosa da última aula??? VINGANÇA1		A → P			Anotação lateral na pg. 4
				√2 - √2 = 0 √2 ÷ √2 = 1 √2 + √2 = 2 √2 √2 + (-√2) = 0 √2 × √2 = 2		C			