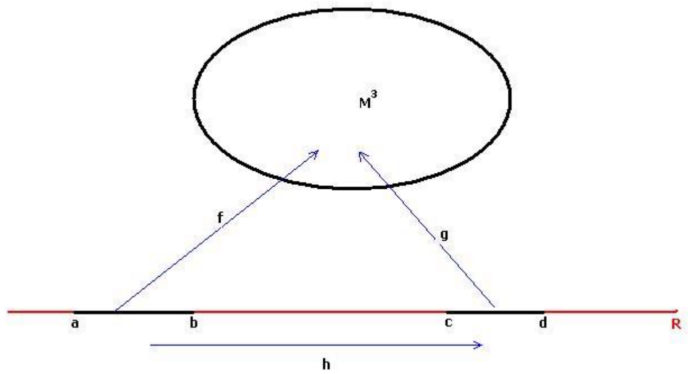
CURVAS ALABEADAS REGULARES. FÓRMULAS DE FRENET-SERRET

1. Las curvas alabeadas:

Definición 1: Consideremos el conjunto de pares $\Gamma = ([a,b], f(\varphi))$, donde $[a,b]$ es un intervalo cerrado de números reales y $f(\varphi)$ es una función vectorial continua $f:[a,b] \to M^3$ siendo M^3 el espacio métrico tridimensional asociado al espacio vectorial euclídeo tridimensional sobre R.

Diremos que dos de estos pares, $([a,b], f(\varphi)), ([c,d], g(\varphi))$, son equivalentes propiamente (respectivamente impropiamente) si existe una función continua *h* tal que es $h:[a,b] \to [c,d]$ estrictamente creciente (respectivamente decreciente) tal que *h(a)=c, h(b)=d* (respectivamente *h(a)=d, h(b)=c*) tal que $g(h(\varphi) = f(\varphi)),\ a \le \varphi \le b$.



Obviamente, tal relación en el conjunto Γ es de equivalencia, puesto que es reflexiva, simétrica y transitiva. Las clases de equivalencia son los subconjunto de Γ formados por todos los pares equivalentes entre sí.

Cada una de estas clases de equivalencia se denomina *arco de curva alabeada*, y cada uno de los representantes de la clase de equivalencia, esto es, cada par $([a,b], f(\varphi))$, se denomina *representación paramétrica de la curva alabeada.*

- **Arco de curva alabeada:**

$$\Omega = \{([a_1,b_1], f_1(\varphi)), ([a_2,b_2], f_2(\varphi)), \ldots, ([a_k,b_k], f_k(\varphi)), \ldots\}$$

- **Representaciones paramétricas de un arco de curva alabeada:**

$$([a_i,b_i], f_i(\varphi)),\ i = 1,2,\ldots,k,\ldots$$

2. Curvas alabeadas regulares:

Definición 2: Una representación paramétrica $([a,b], f(\varphi))$ de un arco de curva alabeada Ω se dice que es *regular* si f es de clase C^1 en [a,b] y de derivada no nula en [a,b]:

$$([a,b], f(\varphi))\ rep.\ par.\ regular \Leftrightarrow f \in C^1, \forall \varphi \in [a,b] \wedge f'(\varphi) \neq 0, \forall \varphi \in [a,b]$$

Teorema 1: Si es $([a,b], f(\varphi))$ una representación paramétrica regular del arco de curva alabeada Ω, entonces, para todo punto del intervalo *[a,b]* existe un entorno donde la función *f* es uno a uno:

$$([a,b], f(\varphi))\ repr.par.reg \Rightarrow \forall \varphi_o \in [a,b], \exists E(\varphi_o) / f\ uno\ a\ uno$$

Demostración:

$\forall \varphi_o \in [a,b],\ f'(\varphi_o) \neq 0 \wedge f'(\varphi_o) = (x_1'(\varphi_o), x_2'(\varphi_o), x_3'(\varphi_o)) \neq (0,0,0) \Rightarrow x_1'(\varphi_o) \neq 0$, y por la continuidad de la derivada: $\exists E(\varphi_o) / \forall \varphi \in E(\varphi_o),\ x_1'(\varphi) \neq 0$

Por lo tanto, si existieran $\varphi_1, \varphi_2 \in E(\varphi_o) / f(\varphi_1) = f(\varphi_2) \Rightarrow x_1(\varphi_1) = x_1(\varphi_2)$, y en este caso, al tratarse de una función continua y derivable, podría aplicársele el teorema de Rolle: $\exists \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2) / x_1'(\varphi) = 0$, lo cual sería obviamente contradictorio.

Luego, *f* ha de ser inyectiva, uno a uno.

Definición 3: Una aplicación sobreyectiva $h : [a,b] \to [c,d]$ se dice que es un *cambio de parámetro admisible* si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) $h(\varphi)$ es de clase C^1 en [a,b].

b) $\dfrac{dh(\varphi)}{d\varphi} \neq 0, \forall \varphi \in [a,b]$

Teorema 2: Si $h:[a,b] \to [c,d]$ es un cambio de parámetro admisible se verifica que:

a) *h(φ)* es uno a uno.
b) La función inversa $h^{-1}:[c,d] \to [a,b]$ es también un cambio de parámetro admisible.

Demostración:

a) Puesto que h'(φ) es continua y h'(φ) es no nula, será h'(φ)>0 o bien h'(φ)<0, por lo que la función h(φ) es creciente o decreciente, es decir, monótona estrictamente, lo que indica que es uno a uno.
b) La derivada de la función inversa de h(φ) es $\dfrac{d\varphi}{dh} = 1 \big/ \tfrac{dh}{d\varphi}$ y siendo $\dfrac{dh}{d\varphi} \neq 0$ será $\varphi(h) \in C^1$, y $\dfrac{d\varphi}{dh} \neq 0$

Definición 4: En el conjunto de todas las representaciones paramétricas regulares podemos definir una relación de equivalencia por la condición de que para dos pares $([a,b], f(\varphi))$, $([c,d], g(\varphi))$, exista un cambio de parámetro admisible *h* que cumpla:

$$h:[a,b] \to [c,d] \text{ y } g(h(\varphi)) = f(\varphi), \ \ a \leq \varphi \leq b$$

Las clases de equivalencia, formada por los pares de representaciones paramétricas regulares relacionados de esta forma, es decir, relacionados mediante un cambio de parámetro admisible, se denominan *arcos de curva regular.*

- **Arco de curva alabeada regular:**

$$\Omega = \{([a_1,b_1], f_1(\varphi)), ([a_2,b_2], f_2(\varphi)), ..., ([a_k,b_k], f_k(\varphi)), ...\}$$

siendo $f_i \in C^1, \forall \varphi \in [a_i,b_i] \wedge f_i'(\varphi) \neq 0, \forall \varphi \in [a_i,b_i]$

existiendo un cambio de parámetro h_s :

$$h_s:[a_i,b_i] \to [a_s,a_s], i=1,...k,..., \forall s \text{ y } f_s(h_s(\varphi)) = f_i(\varphi), \ \ a_i \leq \varphi \leq b_i$$

cumpliendo las condiciones de admisibilidad: $h_s \in C^1 \wedge h_s'(\varphi) \neq 0,$

- **Representaciones paramétricas de un arco de curva alabeada regular:**

$$([a_i,b_i], f_i(\varphi)), i=1,2,...,k,..., \ \ f_i \in C^1, \forall \varphi \in [a_i,b_i] \wedge f_i'(\varphi) \neq 0, \forall \varphi \in [a_i,b_i]$$

Dos representaciones regulares, $([a,b], f(\varphi))$ y $([c,d], g(h))$, se dice que tienen *la misma orientación* si el cambio de parámetro $h:[a,b]\rightarrow[c,d]$ es una función estrictamente creciente, y se dice que tienen *distinta orientación* si es función estrictamente decreciente.

3. El parámetro longitud de arco:

Una curva paramétrica $([a,b], f(\varphi))$ se dice que es rectificable si para cada partición del intervalo $P=\{a=\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_n=b\}$ existe un número real positivo M tal que la longitud de la poligonal sobre el intervalo definida por la partición P es menor que M:

$$L(P)=\sum_{k=1}^{n}\left|f(\varphi_k)-f(\varphi_{k-1})\right|<M$$

En una curva rectificable, se denomina *longitud del arco sobre [a,b]* al supremo del conjunto infinito de las poligonales sobre [a,b] para cualesquiera particiones:

$$l_f(a,b)=\sup\{L(P)/P\in \mathrm{P}[a,b]\}$$

en los arcos de curvas regulares es inmediato probar que son rectificables y que la longitud del arco viene dada por la integral

$$l_f(a,b)=\int_a^b\left|\frac{df}{dx}\right|.dx$$

Teorema 3: Si es $([a,b], f(\varphi))$ una representación paramétrica de un arco de curva regular y es $\varphi_0\in[a,b]$, entonces la función $\alpha(\varphi)=\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left|\frac{df}{d\varphi}\right|.d\varphi$ verifica que:

a) $\alpha(\varphi)=\begin{cases} l_f(\varphi_0,\varphi),\ si\ \varphi\geq\varphi_0 \\ -l_f(\varphi_0,\varphi),\ si\ \varphi<\varphi_0\end{cases}$

b) $l_f(a,b)=\alpha(b)-\alpha(a)$

c) La aplicación $\alpha:[a,b]\rightarrow[\alpha(a),\alpha(b)]$ es un cambio de parámetro admisible.

Demostración:

a) y b) resultan inmediatamente de las propiedades de la integral Riemann. En cuanto a c) se deduce en particular que es α sobreyectiva y que siendo $\left|{df}/{d\varphi}\right|$ continua, será:

$$d\alpha = \left|\frac{df}{d\varphi}\right|.d\varphi \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\varphi} = \left|\frac{df}{d\varphi}\right| \neq 0$$

luego, es un cambio de parámetro admisible.

Teorema 4: La representación paramétrica regular $([\alpha(a),\alpha(b)], g(\alpha))$ no es única.

En efecto:

1) El punto φ_0 utilizado en la definición de α puede ser un punto cualquiera del intervalo $[a,b]$.
2) El arco de curva regular admite, obviamente otras representaciones distintas de $([a,b], f(\varphi))$.

Definición 5: Si consideramos la representación paramétrica regular $([a,b], f(\varphi))$ de un arco de curva regular, Γ, y el cambio de parámetro admisible definido por la longitud de arco, α, se tiene:

$$\alpha : [a,b] \to [\alpha(a),\alpha(b)]$$

la representación $([\alpha(a),\alpha(b)], w(\alpha))$ donde $w(\alpha) = f(\varphi), \alpha = \alpha(\varphi)$, se llama *representación natural del arco de curva regular Γ.*

Teorema 5: Si es $([\alpha(a),\alpha(b)], w(\alpha))$ una representación paramétrica natural de un arco de curva regular Ω, se cumple:

1º) $\left|\frac{dw}{d\alpha}\right| = 1$

2º) $|\alpha_2 - \alpha_1| = l_w(\alpha_1,\alpha_2)$

3º) Si $([\beta(a),\beta(b)], u(\beta))$ es otra representación natural del arco de curva regular Ω, entonces se tiene la relación $\alpha = \pm\beta + k$, siendo k una constante.

4º) Si m(φ) una representación regular cualquiera de Ω, de la misma orientación que $w(\alpha)$, entonces se verifica que $\frac{d\alpha}{d\varphi} = \left|\frac{dm}{d\varphi}\right|$. Si fuera de contraria orientación se tendría que $\frac{d\alpha}{d\varphi} = -\left|\frac{dm}{d\varphi}\right|$.

Demostración:

1º) Se tiene que es $\alpha(\varphi)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left|\frac{dw}{d\varphi}\right|.d\varphi \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\varphi}=\left|\frac{dw}{d\varphi}\right|$, por lo cual es:

$$\left|\frac{dw}{d\alpha}\right|=\left|\frac{dw}{d\varphi}\right|.\left|\frac{d\varphi}{d\alpha}\right|=\cfrac{\cancel{\left|\frac{dw}{d\varphi}\right|}}{\cancel{\left|\frac{d\alpha}{d\varphi}\right|}}=1$$

2º) De la expresión de la longitud del arco:

$$l_w(\alpha_1,\alpha_2)=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left|\frac{dw}{d\alpha}\right|.d\alpha=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}1.d\alpha=\alpha_2-\alpha_1$$

$$si\ \alpha_2\geq\alpha_1 \Rightarrow l_w(\alpha_1,\alpha_2)=|\alpha_2-\alpha_1|$$
$$si\ \alpha_2<\alpha_1 \Rightarrow l_w(\alpha_1,\alpha_2)=|\alpha_2-\alpha_1|$$

3º) Se tiene, del apartado 1º) anterior:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\alpha}{d\varphi}=\pm\left|\frac{dw}{d\varphi}\right|\\ \frac{d\beta}{d\varphi}=\pm\left|\frac{dw}{d\varphi}\right|\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{d\alpha}{d\varphi}=\pm\frac{d\beta}{d\varphi}\Rightarrow\alpha=\pm\beta+k$$

4º) Si m(φ) tiene la misma orientación que w(α) existe un $h:[a,b]\to[c,d]/h\in C^{-1}$ y además con h'>0 en [a,b]. Es decir, f es creciente en [a,b]$\Rightarrow\frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{dh}{d\varphi}>0$

$$\left|\frac{dm}{d\varphi}\right|=\left|\frac{dm}{d\alpha}\right|.\left|\frac{d\alpha}{d\varphi}\right|=1.\left|\frac{d\alpha}{d\varphi}\right|>0\Rightarrow\frac{d\alpha}{d\varphi}=\left|\frac{dm}{d\varphi}\right|$$

caso de tener distinta orientación será $\frac{d\alpha}{d\varphi}=\frac{dh}{d\varphi}<0$, por lo cual $\frac{d\alpha}{d\varphi}=-\left|\frac{dm}{d\varphi}\right|$

4. Vector tangente:

Del teorema anterior podemos deducir las consecuencias inmediatas siguientes:

a) El vector derivada de f(α) con respecto a α, donde es α el parámetro longitud de arco, es unitario:

$$|t|=\left|\frac{df(\alpha)}{d\alpha}\right|=1$$

El vector unitario $t=\frac{df(\alpha)}{d\alpha}$ se denomina *vector tangente a la curva.*

b) Para otra representación paramétrica natural del mismo arco de curva dada por $([c,d], f(\beta))$ se tiene que

$$t_\beta = \frac{df}{d\beta} = \frac{df}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{d\beta} = t.(\pm 1) = \pm t$$

c) Si es $([c,d], f(\varphi))$ una representación paramétrica regular cualquiera del mismo arco de curva, se tiene:

$$\frac{df}{d\varphi} = \frac{df}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{d\varphi} \Rightarrow t = \frac{df}{d\alpha} = \frac{df}{d\varphi}\Big/\frac{d\alpha}{d\varphi}$$

d) La recta tangente a la curva *m(φ)* en el punto φ_0 será:

$$m(\varphi) = m(\varphi_0) + \lambda.t$$

e) El plano normal a la curva *m(φ)* en el punto φ_0 es:

$$(m(\varphi) - m(\varphi_0)).t = 0$$

5. Vector normal. Curvatura. Plano osculador:

Definición 6: Se define el vector curvatura de un arco de curva en un punto como la segunda derivada con respecto al parámetro longitud de arco. Esto es:

Dada una representación paramétrica $([a,b], f(\varphi))$ del arco de curva regular Ω, se tiene que si es $\alpha(\varphi)$ el parámetro longitud de arco, y es f suficientemente derivable con continuidad, se tiene:

Vector tangente: $t = f' = \dfrac{df}{d\alpha} = \dfrac{df}{d\varphi}\dfrac{d\varphi}{d\alpha} = \dot{f}.\varphi'$

Vector curvatura: $k = f'' = \dfrac{d^2 f}{d\alpha^2} = \dfrac{d}{d\alpha}\left(\dfrac{df}{d\alpha}\right) = \dfrac{dt}{d\alpha} = t'$

Teorema 6: El vector curvatura, k, de un arco de curva regular Ω cualquiera, es independiente de la representación paramétrica natural elegida. Además, k es paralelo al plano normal a la curva en cada punto de la misma.

Demostración:

Sean dos representaciones paramétricas naturales del mismo arco de curva y consideremos el correspondiente vector tangente y de curvatura:

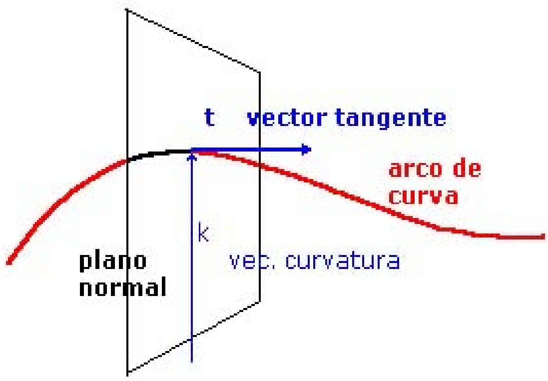
$$\left([a_1,b_1], f_1(\alpha)\right),\ t_1 = \frac{df_1}{d\alpha},\ k_1 = \frac{d^2 f_1}{d\alpha^2}$$
$$\left([a_2,b_2], f_2(\beta)\right),\ t_2 = \frac{df_2}{d\beta},\ k_2 = \frac{d^2 f_2}{d\beta^2}$$

siendo $t_2 = \frac{df}{d\beta} = \frac{df}{d\alpha}.\frac{d\alpha}{d\beta} = t_1.(\pm 1) = \pm t_1$, o, si llamamos $\psi = \frac{d\alpha}{d\beta}$ escribimos:

$$k_1 = \frac{d^2 f_1}{d\alpha^2} = \frac{dt_1}{d\alpha} = \psi\frac{dt_2}{d\alpha} = \psi\frac{dt_2}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = \psi.k_2.\psi = \psi^2.k_2 = k_2$$

Veamos ahora la dirección del vector de curvatura, llamando t al vector tangente y k al vector de curvatura, tendremos:

$$t.t = 1 \Rightarrow \frac{d(t.t)}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2.t.\frac{dt}{d\alpha} = 0 \Rightarrow 2.t.k = 0 \Rightarrow t.k = 0 \Rightarrow t \perp k(perpend.)$$



Definición 7: Se llama curvatura del arco de curva Ω en el punto $f(\alpha_0)$ al módulo del vector de curvatura en dicho punto. El inverso de la curvatura se llama radio de curvatura del arco de curva en dicho punto:

Curvatura: $k_0 = |k(\alpha_0)|$, Radio de curvatura. $R_0 = \frac{1}{k_0}$

Se llama punto de inflexión del arco de curva a cualquier punto en el que la curvatura sea nula (esto puede ocurrir pues la derivada segunda del vector f(α) podría ser nula, aunque nunca la primera derivada, por el carácter regular del arco de curva). En un punto de inflexión, por tanto, el radio de curvatura es infinito.

Se llama vector normal al arco de curva a un vector unitario *n* tal que verifique:

$$k(\alpha) = k_0.n(\alpha)$$

O sea:

$$\frac{dt(\alpha)}{dt} = k_0.n(\alpha) \qquad [5\_1]$$

Teorema 7: Si es $([\alpha(a),\alpha(b)], f(\alpha))$ una representación paramétrica de un arco de curva regular Ω, se verifica:

1) $k = \lim\limits_{\Delta\alpha \to 0} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right| = \left|\frac{d\theta}{d\alpha}\right|$, siendo $\Delta\theta = angulo(t(\alpha), t(\alpha+\Delta\alpha))$

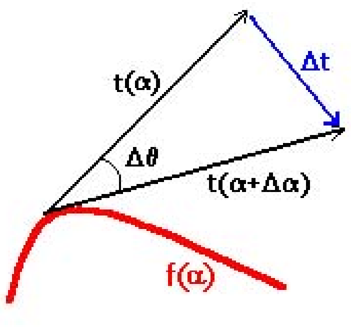
2) $k^2 = f''.f''$ ($f'' = \frac{d^2 f}{d\alpha^2}$, α: parámetro longitud de arco)

3) $k^2 = \frac{(\dot f \wedge \ddot f)^2}{(\dot f.\dot f)^3}$ ($\ddot f = \frac{d^2 f}{d\varphi^2}$, φ: otro parámetro)

Demostración:

1) De ser $|\Delta t| = |t(\alpha+\Delta\alpha) - t(\alpha)| = 2.sen\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \Delta\theta + \phi(\Delta\theta)$

$$(\phi(\Delta\theta) : \inf initesimo\ de\ \Delta\theta)$$



Se tiene:

$$k = \left|\frac{dt}{d\alpha}\right| = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \left|\frac{\Delta t}{\Delta\alpha}\right| = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \left|\frac{\Delta\theta + \phi(\Delta\theta)}{\Delta\alpha}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right| = \left|\frac{d\theta}{d\alpha}\right|$$

2) $k^2 = |k(\alpha)|^2 = k(\alpha).k(\alpha) = f''.f''$

3) Si llamamos $f'=\frac{df}{d\alpha}$, $\dot{f}=\frac{df}{d\varphi}$, $\varphi'=\frac{d\varphi}{d\alpha}$, se tiene que $f'=\dot{f}.\varphi'$, y, por el teorema 5_4º) es $|\dot{f}|=\frac{d\alpha}{d\varphi}\rightarrow\varphi'=\frac{1}{|\dot{f}|}\rightarrow f'=\frac{\dot{f}}{|\dot{f}|}$. Veamos las derivadas:

$$\varphi'=\frac{1}{|\dot{f}|},\qquad \varphi''=(\varphi')'=\left(|\dot{f}|^{-1}\right)=\left[\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'=-\frac{\dot{f}.\ddot{f}}{|\dot{f}|^{4}},\qquad \left(\dot{f}\right)'=\frac{d\dot{f}}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{d\alpha}=\ddot{f}.\varphi'$$

$$f''=\left(f'\right)'=\left(\dot{f}.\varphi'\right)'=\left(\dot{f}\right)'.\varphi'+\dot{f}.\varphi''=\frac{\ddot{f}}{|\dot{f}|^{2}}-\frac{\dot{f}(\dot{f}.\ddot{f})}{|\dot{f}|^{4}}=\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^{-2}\left[\ddot{f}.(\dot{f}.\dot{f})-\dot{f}.(\dot{f}.\ddot{f})\right]=$$

$$=\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^{-2}.\left[\dot{f}\wedge\left(\ddot{f}\wedge\dot{f}\right)\right]$$

por tanto:
$$k^{2}=f''.f''=\left[\frac{\dot{f}\wedge\left(\dot{f}\wedge\ddot{f}\right)}{\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^{2}}\right]^{2}=\frac{\left(\dot{f}.\dot{f}\right)\left(\ddot{f}\wedge\dot{f}\right)^{2}}{\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^{4}}=\frac{\left(\ddot{f}\wedge\dot{f}\right)^{2}}{\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^{3}}\qquad [5\_1]$$

y, por consiguiente $k=\frac{|\ddot{f}\wedge\dot{f}|}{|\dot{f}|^{3}}$

Definición 7: Dados tres puntos de un arco de curva alabeada regular, A, B y C, se llama plano osculador al arco de curva en el punto A al plano que definen los tres puntos cuando B y C se aproximan infinitamente al punto A, esto es, el limite del plano que pasa por los tres puntos cuando B, C → A.

Definición 8: Dados tres puntos de un arco de curva alabeada regular, A, B y C, se llama círculo osculador al arco de curva en el punto A al círculo que definen los tres puntos cuando B y C se aproximan infinitamente al punto A, esto es, el limite del círculo que define la circunferencia que pasa por los tres puntos cuando B, C → A.

Teorema 8: El plano osculador queda definido por los vectores tangente y de curvatura, no estando determinado en aquellos puntos de curvatura nula.

Demostración:

Sea w un vector perpendicular al plano osculador y P un punto fijo de dicho plano con vector de posición g. Se verifica, entonces, para el plano osculador en el punto A de vector de posición $f(\alpha_0)$:

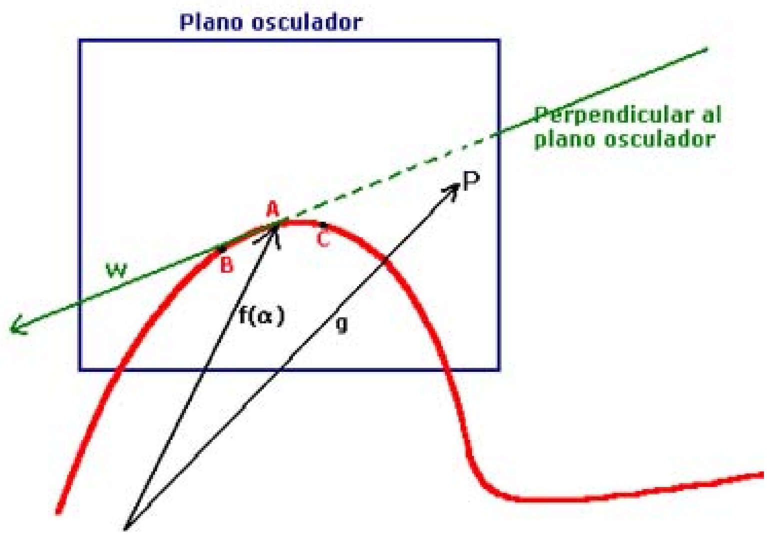
$$(f(\alpha_0)-g).w=0$$

o bien, podemos escribir

$$f(\alpha_0).w=g.w=r$$

si consideramos la función $v(x) = f(\alpha_0).w - r$, verifica obviamente que para todo punto M del plano osculador es $v(M) = f(\alpha_0).w - r = 0$, por lo cual, si consideramos los puntos A, B y C de la curva (de valores respectivos del parámetro longitud de arco α_0, α_1 y α_2) se tendrá:

$$\begin{aligned} A:\ v(\alpha_0) &= f(\alpha_0).w - p = 0 \\ B:\ v(\alpha_1) &= f(\alpha_1).w - p = 0 \\ C:\ v(\alpha_2) &= f(\alpha_2).w - p = 0 \end{aligned}$$



Aplicando el Teorema de Rolle a las igualdades anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \exists x_1 \in R / \quad & \alpha_0 < x_1 < \alpha_1 \wedge v'(x_1) = 0 \\ \exists x_2 \in R / \quad & \alpha_1 < x_1 < \alpha_2 \wedge v'(x_2) = 0 \\ \exists x_3 \in R / \quad & x_1 < x_3 < x_2 \wedge v''(x_3) = 0 \end{aligned}$$

como, por definición de plano osculador, B,C→A, también $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow \alpha_0$ y, asimismo también h_1, h_2, $h_3 \rightarrow \alpha_0$. Es decir, en el límite se tiene que

$$\begin{aligned} v'(\alpha_0) &= f'(\alpha_0).w = 0 \\ v''(\alpha_0) &= f''(\alpha_0).w = 0 \end{aligned}$$

de lo cual se deduce que el vector w es perpendicular tanto al vector $f'(\alpha_0)$ como al vector $f''(\alpha_0)$, es decir es perpendicular en el punto $A(\alpha_0)$ a los vectores tangente t y de curvatura k. En definitiva, pues, la ecuación vectorial del plano osculador es de la forma:

$$f = f_0 + \lambda_1.t(\alpha_0) + \lambda_2 k(\alpha_0)$$

Teorema 9: El círculo osculador en un punto f(α_0) está contenido en el plano osculador y su radio es el radio de curvatura del arco de curva en dicho punto.

Demostración:

Si es *g* el vector de posición del centro del círculo osculador, la ecuación de la circunferencia se puede escribir $(f(\alpha)-g).(f(\alpha)-g)=r^2$ en el punto *f(α).*

Si consideramos la función

$$v(\alpha)=\left(f(\alpha)-g\right)\!.\!\left(f(\alpha)-g\right)-r^2$$

Esta función se anula obviamente en los puntos *A, B, C* de valores respectivos α_0, α_1 y α_2 para el parámetro longitud de arco.

$$\begin{gathered} v(\alpha_0)=\left(f(\alpha_0)-g\right)\!.\!\left(f(\alpha_0)-g\right)-r^2=0 \\ v(\alpha_1)=\left(f(\alpha_1)-g\right)\!.\!\left(f(\alpha_1)-g\right)-r^2=0 \\ v(\alpha_2)=\left(f(\alpha_2)-g\right)\!.\!\left(f(\alpha_2)-g\right)-r^2=0 \end{gathered}$$

Aplicando el Teorema de Rolle:

$$\begin{aligned} &\exists x_1\in R/\alpha_0<x_1<\alpha_1 \wedge v'(x_1)=0 \Rightarrow \left(f(x_1)-g\right)\!.f'(x_1)=0 \\ &\exists x_2\in R/\alpha_1<x_2<\alpha_2 \wedge v'(x_2)=0 \Rightarrow \left(f(x_2)-g\right)\!.f'(x_2)=0 \\ &\exists x_3\in R/x_1<x_3<x_2 \wedge v''(x_3)=0 \Rightarrow \left(f(x_3)-g\right)\!.f''(x_3)+f'(x_3).f'(x_3)=0 \end{aligned}$$

Puesto que B,C→A, también α_1, α_2 --> α_0, y asimismo x_1, x_2, x_3→α_0. En el limite, por tanto es:

$$\begin{aligned} &\left(f(\alpha_0)-g\right)\!.f'(\alpha_0)=0 \\ &\left(f(\alpha_0)-g\right)\!.f''(\alpha_0)+f'(\alpha_0).f'(x_3)=0 \end{aligned} \qquad [5\_3]$$

Como todo los puntos del círculo osculador están en el plano osculador también lo estará el centro de dicho círculo, luego es:

$$f(\alpha_0)-g=\lambda_1.t+\lambda_2.k \qquad [5\_4]$$

o bien

$$f(\alpha_0)-g=\lambda_1.f'(\alpha_0)+\lambda_2.f''(\alpha_0)$$

y de las ecuaciones [5_3]:

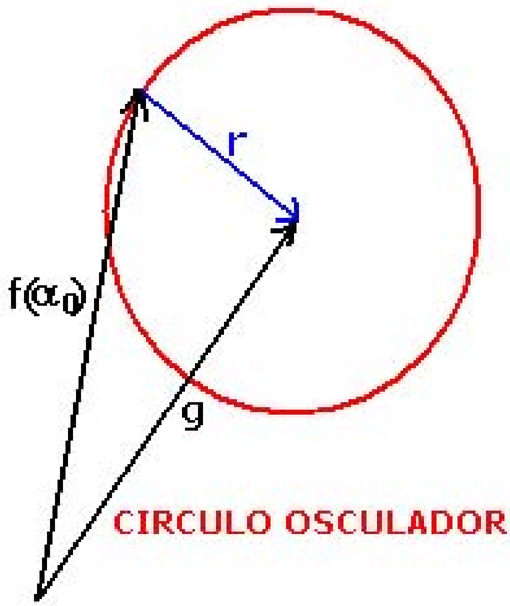
$$(f-g).f'=\lambda_1.f'.f'+\lambda_2.f'.f''=0\Rightarrow\lambda_1=0$$

$$(f-g).f''=\lambda_1.f'.f''+\lambda_2.f''.f''=-f'.f'\Rightarrow\lambda_2=-\frac{f'.f'}{f''.f''}=-\frac{1}{k^2}$$

por tanto, de la ecuación [5_4]:

$$g = f(\alpha_0) - \lambda_2 .k = f(\alpha_0) + \frac{1}{k^2}.|k|.n = f(\alpha_0) + \frac{1}{|k|}.n$$

El radio de círculo osculador es por tanto: $r = \frac{1}{|k|} = R_0$ (radio de curvatura del arco de curva en el punto).



6. Vector binormal. Torsión. Plano rectificante:

Definición 9: Se define el vector binormal en un punto φ_0 de un arco de curva regular como el producto vectorial de los vectores tangente y normal al arco de curva en dicho punto:

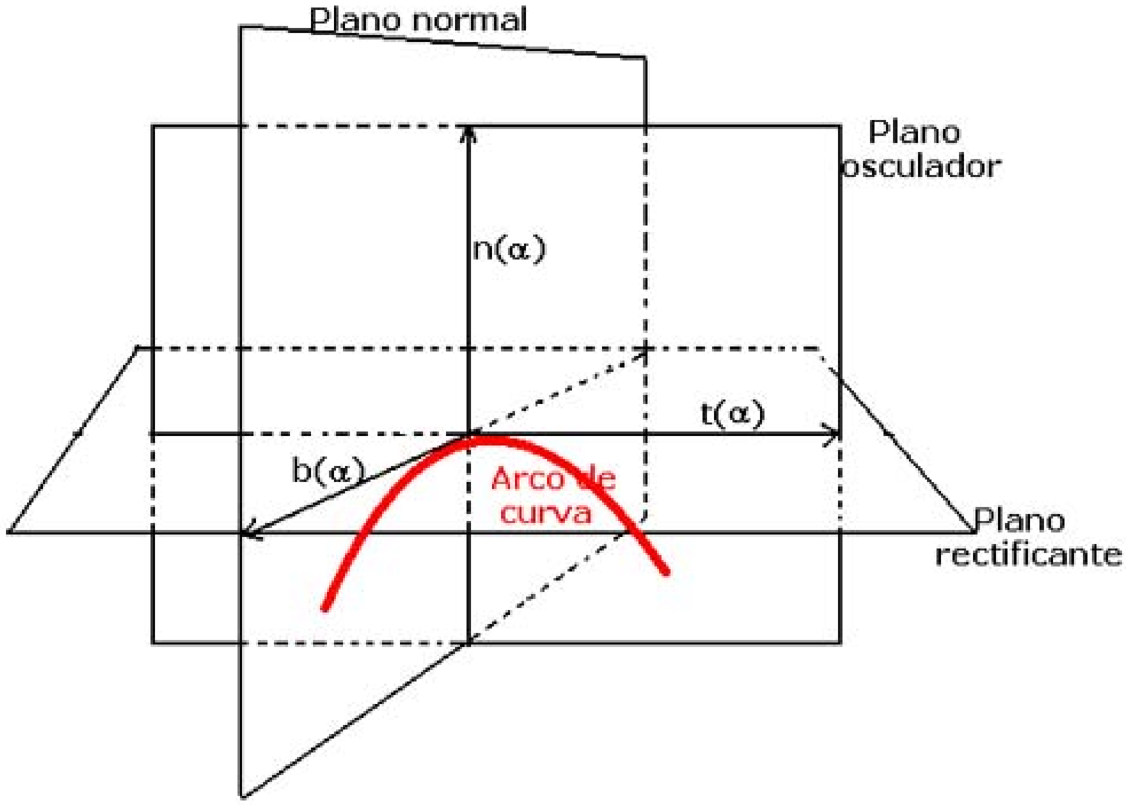
$$b(\varphi_0) = t(\varphi_0) \wedge n(\varphi_0)$$

Estos tres vectores constituyen un triedro formado por vectores unitarios perpendiculares que es variable en cada punto, esto es, es un triedro móvil o intrínseco, definiendo cada dos de ellos un plano:

Plano normal: $m(\varphi) = m(\varphi_0) + \lambda.n(\varphi_0) + \mu.b(\varphi_0)$

Plano osculador: $m(\varphi) = m(\varphi_0) + \lambda.t(\varphi_0) + \mu.n(\varphi_0)$

Plano rectificante: $m(\varphi) = m(\varphi_0) + \lambda.t(\varphi_0) + \mu.b(\varphi_0)$



Teorema 10:

Se verifican las siguientes situaciones:

1) $\dfrac{db}{d\alpha} = -T(\alpha).n$ [6_1]

2) $|T(\alpha)| = \lim\limits_{\Delta\alpha \to 0} \left|\dfrac{\Delta\phi}{\Delta\alpha}\right| = \left|\dfrac{d\phi}{d\alpha}\right|$ donde es $\Delta\phi = angulo\big(b(\alpha), b(\alpha+\Delta\alpha)\big)$

3) $T = \dfrac{\left(f'.(f''\wedge f''')\right)}{f''.f''} = \dfrac{[f', f'', f''']}{|f''|^2}$ (parámetro longitud de arco α)

4) $T = \dfrac{\left(\dot f.(\ddot f \wedge \dddot f)\right)}{(\dot f \wedge \ddot f)^2} = \dfrac{[\dot f, \ddot f, \dddot f]}{|\dot f \wedge \ddot f|^2}$ (parámetro cualquiera φ)

Demostración:

1) Veamos que el vector *b'* es perpendicular tanto a *b* como a *t*, por lo que ha de tener la dirección del vector *n*, perpendicular a ambos.

$$b = t \wedge n \Rightarrow \begin{cases} b.t = 0 \\ b.n = 0 \end{cases} \Rightarrow (b.t)' = 0 \Rightarrow b'.t + b.t' = 0 \Rightarrow b'.t + b.k = 0 \wedge b.k = 0 \Rightarrow b'.t = 0$$

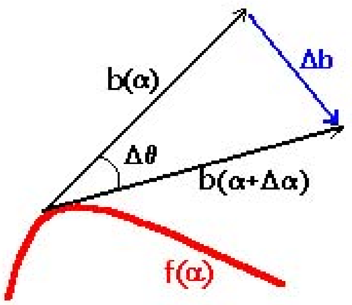
$$b.b = 1 \Rightarrow (b.b)' = 0 \Rightarrow 2.b.b' = 0 \Rightarrow b.b' = 0$$

Por tanto, *b'* es perpendicular tanto a *t* como a *b*, luego tiene la dirección perpendicular es decir la dirección de n. Existirá un factor de proporcionalidad, pues, entre b' y *n*. Si llamamos –*T* a ese factor, podemos escribir

$$\frac{db}{d\alpha} = -T(\alpha).n$$

2) De ser $\quad |\Delta b| = |b(\alpha + \Delta\alpha) - b(\alpha)| = 2.sen\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) = \Delta\theta + \phi(\Delta\theta)$

$$(\phi(\Delta\theta) : \inf initesimo\ de\ \Delta\theta)$$



Se tiene:

$$\left|\frac{db(\alpha)}{d\alpha}\right| = |T(\alpha)|.|n(\alpha)|$$

$$|T| = \left|\frac{db}{d\alpha}\right| = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \left|\frac{\Delta b}{\Delta\alpha}\right| = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \left|\frac{\Delta\theta + \phi(\Delta\theta)}{\Delta\alpha}\right| =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha} \left|\frac{\Delta\theta}{\Delta\alpha}\right| = \left|\frac{d\theta}{d\alpha}\right|$$

3) Se tiene:

$$b = t \wedge n \Rightarrow b' = -T.n = (t \wedge n)' \Rightarrow n.b' = -T.n^2 = -T = n.(t \wedge n)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = n.(n \wedge t)' = n.(n' \wedge t + n \wedge t') = \frac{f''}{|k|}\left(\frac{f'''}{|k|} \wedge f' + \frac{f''}{|k|} \wedge f''\right) = \frac{f''}{|k|^2}(f''' \wedge f')$$

por tanto:

$$T = \frac{f''.(f''' \wedge f')}{(f''.f'')^2} = \frac{[f', f'', f''']}{|f''|^2}$$

3) Se tiene, para las primeras derivadas de la función *f* con respecto al parámetro longitud de arco las expresiones siguientes en función de las derivadas con respecto a otro parámetro φ:

$$f' = \dot{f}.\varphi', \qquad f'' = \ddot{f}.\varphi'^2 + \dot{f}.\varphi'', \qquad f''' = \dddot{f}.\varphi'^3 + 3.\ddot{f}.\varphi'.\varphi'' + \dot{f}.\varphi'''$$

efectuando operaciones, y teniendo en cuenta que :

$$f'.(f'' \wedge f''') = \dot{f}.\phi'.\left[\left(\ddot{f}.\varphi'^2 + \dot{f}.\varphi''\right) \wedge \left(\dddot{f}.\varphi'^3 + 3.\ddot{f}.\varphi'.\varphi'' + \dot{f}.\varphi'''\right)\right] = \frac{\dot{f}.\left(\ddot{f} \wedge \dddot{f}\right)}{\left(\dot{f}.\dot{f}\right)^3}$$

y que es, por [5_2]: $f''.f'' = \dfrac{(\dot{f} \wedge \ddot{f})^2}{(\dot{f}.\dot{f})^3}$

se tiene, finalmente:

$$T = \frac{f'.(f'' \wedge f''')}{f''.f''} = \frac{\dfrac{\dot{f}.(\ddot{f} \wedge \dddot{f})}{(\dot{f}.\dot{f})^3}}{\dfrac{(\dot{f} \wedge \ddot{f})^2}{(\dot{f}.\dot{f})^3}} = \frac{\dot{f}.(\ddot{f} \wedge \dddot{f})}{(\dot{f} \wedge \ddot{f})^2}$$

Definición 10: Se llama torsión de una curva alabeada en un punto a la magnitud $T(\alpha)$ tal que

$$\frac{db}{d\alpha} = -T(\alpha).n$$

7. Las fórmulas de Frenet-Serret:

Teorema 11:

Dada una curva alabeada regular definida por la función $f(\alpha)$ se verifican en cada punto las las relaciones siguientes, llamando k_0 a la curvatura y T a la torsión:

1) $\dfrac{dt}{d\alpha} = k_0.n$

2) $\dfrac{dn}{d\alpha} = -k_0.t + T.b$

3) $\dfrac{db}{d\alpha} = -T.n$

Demostración:

1) Es la expresión [5_1] de definición de la curvatura.

2) De ser $n.n = 1 \Rightarrow n.n' = 0 \Rightarrow n \perp n' \Rightarrow$ n' está contenido en el plano rectificante, por lo cual puede expresarse en función de los vectores directores de dicho plano:

$$n' = \lambda_1.t + \lambda_2.b \qquad [7\_1]$$

esto quiere decir que, multiplicando por t: $n'.t = \lambda_1.t.t + \lambda_2.b.t = \lambda_1$; análogamente, si multiplicamos por b: $n'.b = \lambda_1 t.b + \lambda_2.b.b = \lambda_2$.

$$n.t = 0 \Rightarrow n'.t + n.t' = 0 \Rightarrow n'.t = -n.t' = -n.k_0.n = -k_0 \Rightarrow \lambda_1 = -k_0$$
$$n.b = 0 \Rightarrow n'.b + n.b' = 0 \Rightarrow n'.b = -n.b' = -n.(-T.n) = T \Rightarrow \lambda_2 = T$$

sustituyendo en [7_1]: $n' = \lambda_1.t + \lambda_2.b = -k_0.t + T.b$, por tanto:

$$\frac{dn}{d\alpha} = -k_0.t + T.b$$

3) Es la expresión [6_1] para la torsión.

FÓRMULAS DE FRENET-SERRET

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\alpha} &= \quad k_0.t \\ \frac{dn}{d\alpha} &= -k_0.t \quad + T.b \\ \frac{db}{d\alpha} &= \quad -T.n \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \frac{dt}{d\alpha} \\ \frac{dn}{d\alpha} \\ \frac{db}{d\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_0 & 0 \\ -k_0 & 0 & T \\ 0 & -T & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} t \\ n \\ b \end{pmatrix}$$

Curvatura: $k_0 = |f''|$ $\qquad k_0 = \dfrac{|\dot{f} \wedge \ddot{f}|}{|\dot{f}|^3}$

Torsión: $T = \dfrac{[f', f'', f''']}{f''.f''}$ $\qquad T = \dfrac{[\dot{f}, \ddot{f}, \dddot{f}]}{(\dot{f} \wedge \ddot{f})^2}$

8. Bibliografía:

CARMO, M.P. DO: Geometría diferencial de curvas y superficies. Alianza Universidad Textos 135. Alianza, 1990

FRENET, F.: "Sur les courbes à double courbure." Thèse. Toulouse, 1847. Abstract in *J. de Math.* **17**, 1852.

GRAY, A.: Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press, p. 186, 1997.

HICKS, N.J.: Notas sobre Geometría Diferencial. Ed. Hispano Europea, 1974

HSIUNG, C.C.: A first course in differential geometry. John Wiley. 1981

KLINGENBERG, W.: Curso de geometría diferencial. Ed. Alhambra, 1973

KREYSZIG, E.: "Formulae of Frenet." §15 in *Differential Geometry.* New York: Dover, pp. 40-43, 1991.

LIPSCHUTZ, L.M.: Theory and problems of differential geometry. McGraw-Hill, 1969

LOPEZ DE LA RICA, A; DE LA VILLA, AGUSTIN; "Geometría Diferencial". Edisofer 1997.

MILLMAN, R.S.; PAKER, G.D.: Elements of differential geometry. Prentice Hall, 1977

MONTESDEOCA, A.: Apuntes de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. Col. Textos Universitarios, 1996

O'NEILL, B.: Elementos de Geometría Diferencial. Limusa-Wiley, 1972

SERRET, J. A.: "Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure." *J. de Math.* **16**, 1851.