ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ISOCLINAS.

Consideramos la E.D.O. de primer orden:

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

donde

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

f continua sobre un abierto D de $\mathbb{R}^2$. La continuidad de f nos dice que la E.D.O. tiene solución (Teorema de Existencia). Algo menos elaborado es que la función f, su signo esencialmente, nos da un **campo de direcciones**. El campo de las direcciones de la rectas tangentes a las soluciones de la E.D.O.

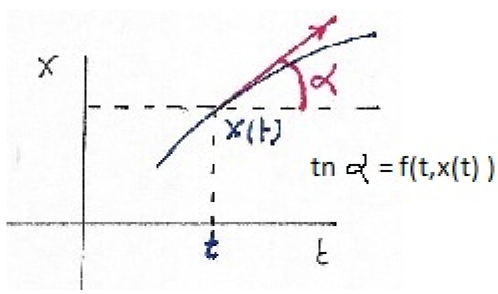

FIGURA 1. Pendiente de una recta tangente.

Definición 1. *Se llama* ***Isoclina*** *de una E.D.O.*

$$x'(t) = f(t, x(t)),$$

a cada una de las curva de nivel de la función f, es decir a las curvas planas dadas por las ecuaciónes implícitas:

$$f(t, x) = K, \qquad \textit{para todo} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Observemos que en todos los punto (t, x) de una isoclina $f(t, x) = K$, las curvas soluciones de la E.D.O. que pasan por estos puntos tienen rectan **tangentes paralelas**. Todas de pendiente igual a K.

Observación 1. *Las Isoclinas $f(t, x) = K$ nos dan información sobre el crecimiento de las soluciones de la E.D.O.*

- *si $K > 0$, las soluciones, que pasan por los puntos $f(t,x) = K$, son crecientes en esos puntos;*
- *si $K < 0$, las soluciones, que pasan por los puntos $f(t,x) = K$, son decrecientes en esos puntos;*
- *si $K = 0$, las soluciones, que pasan por los puntos $f(t,x) = 0$, tienen en ellos* ***puntos críticos****. Candidatos a máximos o mínimos locales.*

Ejemplo 1. *Tenemos que representar las gráficas de las soluciones de la E.D.O.*

$$y' = 2x - y$$

utilizando la información que nos dan las isoclinas (es decir el signo de la función $f(x,y) = 2x - y$).

Observemos que las isoclinas vienen dadas por las curvas en implícitas

$$2x - y = K.$$

En este caso, es muy sencillo hacer su representación (se puede despejar la $''y''$ respecto de la $''x''$ o viceversa). Es más sencillo aún, es una familia de rectas paralelas:

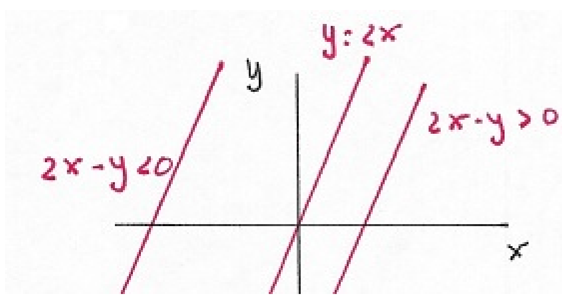

Figura 2. Isoclinas.

La isoclina $y = 2x$ determina los puntos críticos de las soluciones. A su izquierda las soluciones decrecen y crecen a su derecha. Por tanto tendremos una soluciones de la E.D.O. del tipo:

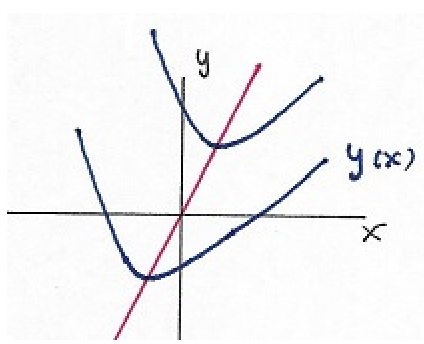

Figura 3. Soluciones.

La ecuación $y' = 2x - y$ es lineal no homogénea. Resuélvela y compara con los gráficos anteriores.

Observación 2. *En el caso de tener un sistema 2×2 autónomo (no dependiente de la variable indepediente)*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & f(x,y) \\ y' & = & g(x,y) \end{array} \right. ,$$

entonces las curvas de nivel de la f nos dan las zonas de crecimiento de la "x", la primera componente de las trayectorias solución. Las curvas de nivel de la g nos dan las zonas de crecimiento de la "y", la segunda componente de las trayectorias solución. La anterior observación la emplearemos y se entenderá mejor cuando dibujemos trayectorias de sistemas planos lineales.

FAMILIA DE CURVAS ORTOGONALES.

Dada una E.D.O. de primer orden $x'(t) = f(\,t, x(t)\,)$, hemos indicado que sus soluciones son una familia de curvas planas. Podemos hacernos la siguiente pregunta: dada una familia de curvas planas

$$f(x,y,c) = 0 \qquad \text{para} \qquad c \in \mathbb{R},$$

¿existe una E.D.O. de primer orden cuyas soluciones sean precisamente la familia de curvas dadas? Veamos. Si derivamos

$$0 = \frac{df(x,y,c)}{dx} = \frac{df(x,y,c)}{dx_1} + \frac{df(x,y,c)}{dx_2} y' = G(x,y,y',c)$$

y si podemos despejar c de esta última ecuación, sustituyendo en la primera ($f(x,y,c) = 0$) por este valor de c, llegamos a una E.D.O. de primer orden.

Ejemplo 2. *Sea*

$$\frac{x^2}{a^2+r} + \frac{y^2}{b^2+r} = 1$$

*para $r \in \mathbb{R}$. Para $r \leq \min\{-a^2, -b^2\}$ o $r = -a^2$ o $-b^2$ no hay curva. En otro caso, estamos ante **elipses** o **hipérbolas**.*

Si derivamos con respecto a x

$$\frac{2x}{a^2+r} + \frac{2yy'}{a^2+r} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{a^2+r} = -\frac{yy'}{a^2+r} \qquad \Leftrightarrow$$

$$b^2x + xr = -yy'(a^2+r) = -yy'a^2 - yy'r \qquad \Leftrightarrow$$

$$(x+yy')r = -yy'a^2 - b^2x$$

y así

$$r = \frac{-yy'a^2 - b^2x}{x + yy'}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2 - (\frac{yy'a^2+b^2x}{x+yy'})} + \frac{y^2}{b^2 - (\frac{yy'a^2+b^2x}{x+yy'})} = 1.$$

Simplificando

$$1 = \frac{x^2 + yy'x}{a^2 - b^2} - \frac{xy + y^2y'}{(a^2 - b^2)y'}$$

y así

$$a^2 - b^2 = (x - \frac{y}{y'})(x + yy') =$$

$$x^2 - y^2 + xyy' - \frac{yx}{y'},$$

E.D.O. de primer orden **no** resuelta respecto de la derivada □

Vamos a definir ahora el concepto de **familia ortogonal** a otra dada.

Definición 2. *Sean dos familias de curvas $f(x, y, c) = 0$ y $g(x, y, d) = 0$. Se dicen **ortogonales**, si cada curva $f(x, y, c_0) = 0$ de la primera familia es **ortogonal** a cada curva $g(x, y, d) = 0$ para todo $d \in \mathbb{R}$. (Entendemos por curvas ortogonales aquellas que al cortarse, sus respectivas rectas tangentes, por el punto de corte, son ortogonales.*

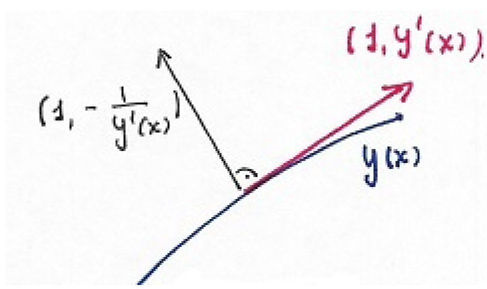

FIGURA 4. Vector normal a una tangente.

Dada una familia de curvas a través de una E.D.O. de primer orden:

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

la función

$$g(x, y) = -\frac{1}{f(x, y)}$$

da un campo de direcciones ortogonal al que define la función f (ver la figura anterior). Así la E.D.O.

$$y'(x) = g(x, y(x)) = -\frac{1}{f(x, y)}$$

nos da la familia ortogonal a la primera.

Observemos que el Teorema de la Función Inversa nos dice que $\dfrac{1}{f(x,y)}$ es la derivada de la función inversa de y, es decir las siguientes E.D.O. son equivalentes:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x) = -\frac{1}{f(x, y(x))}$$

y

$$-\frac{dx(y)}{dy} = f(x(y), y).$$

Ejemplo 3. *La familia del ejemplo anterior:*

$$\frac{x^2}{a^2+r} + \frac{y^2}{b^2+r} = 1,$$

viene dada por la E.D.O.

$$a^2 - b^2 = (x - \frac{y}{y'})(x + yy').$$

Teniendo en cuenta que $\frac{dx}{dy} = 1/y'$ y que $\frac{dy}{dx} = 1/x'$, sustituyendo $-1/y'$ por $-x'$ en la E.D.O. anterior, tenemos la familia ortogonal

$$a^2 - b^2 = (x + yx')(x - \frac{y}{x'}) =$$
$$x^2 - y^2 + yxx' - \frac{yx}{x'}.$$

¡ Qué es la misma E.D.O. que teniamos ! Nos sale una familia de curvas ortogonal a si misma.

Observación 3. *Este resultado es conocido en la Geometría Analítica. El haz de cónicas homofocales (elipses e hipérbolas)*

$$\frac{x^2}{a^2+r} + \frac{y^2}{b^2+r} = 1$$

tiene la propiedad de que cada elipse ($\frac{a^2+r}{b^2+r} > 0$) es perpendicular a cada hipérbola ($\frac{a^2+r}{b^2+r} < 0$) y viceversa.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`